www.elsolucionario.net

mecánica de fluidos

www.elsolucionario.net

FRANK M. WHITE

quinta edición

Mc Graw Hill

Find your solutions manual here!

El Solucionario
www.elsolucionario.net

Subscribe RSS | Find on Facebook | Follow my Tweets

Encuentra en nuestra página los Textos Universitarios que necesitas!

Libros y Solucionarios en formato digital
El complemento ideal para estar preparados para los exámenes!

Los Solucionarios contienen TODOS los problemas del libro resueltos y explicados paso a paso de forma clara..

Visitanos para descargarlos GRATIS!
Descargas directas mucho más fáciles...

WWW.ELSOLUCIONARIO.NET

Biology
Investigación Operativa
Computer Science
Matemáticas Avanzadas
Physics
Estadística
Chemistry
Geometría
Math
Termodinámica
Cálculo
Electrónica
Circuitos
Business
Mechanical Engineering
Civil Engineering
Economía
Análisis Numérico
Ecuaciones Diferenciales
Electrical Engineering
Álgebra
Electromagnetismo

Find your solutions manual here!

www.elsolucionario.net

Mecánica de Fluidos

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Mecánica de Fluidos

Quinta edición

Frank M. White
University of Rhode Island

Equipo de Traducción:

Marcos Vera Coello
Miguel Hermanns Navarro
Rafael Gómez Blanco
Óscar Flores Arias

www.elsolucionario.net

Revisor Técnico:

Amable Liñán Martínez

Dept. de Motopropulsión y Termofluidodinámica
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos
Universidad Politécnica de Madrid

MADRID • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MÉXICO
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

MECÁNICA DE FLUIDOS. Quinta edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

DERECHOS RESERVADOS © 2004, respecto a la quinta edición en español, por McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S. A. U.
Edificio Valrealty, 1.ª planta
Basauri, 17
28023 Aravaca (Madrid)

Traducido de la quinta edición en inglés de
FLUID MECHANICS
Copyright © 2003, por McGraw-Hill, Inc.
ISBN: 0-07-240217-2

ISBN: 84-481-4076-1
Depósito legal: M.

Editora de la edición en español: Silvia Figueras
Asistente editorial: Amelia Nieva
Diseño de cubierta: CD-FORM
Compuesto en: Fernández Ciudad, S.L.
Impreso en:

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

www.elsolucionario.net

El autor

Frank M. White es Profesor Emérito de Ingeniería Mecánica y Oceánica en la Universidad de Rhode Island. Estudió en el Instituto Tecnológico de Georgia (*Georgia Tech*) y en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (*M.I.T.*). En 1966 colaboró en la creación del departamento de ingeniería oceánica de la Universidad de Rhode Island, el primero de este tipo en EE.UU. Conocido principalmente como profesor y escritor, ha recibido ocho premios de docencia y ha escrito cuatro libros de texto sobre mecánica de fluidos y transferencia de calor.

Desde 1979 hasta 1990 fue editor jefe de la revista *ASME Journal of Fluids Engineering* y después, entre 1991 y 1997, fue director del Consejo de Editores y del Comité de Publicaciones de la ASME (*American Society of Mechanical Engineers*). Es miembro de la ASME y en 1991 recibió el premio ASME de Ingeniería de Fluidos. Vive con su mujer, Jeanne, en Narragansett, Rhode Island.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

A Jeanne

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Contenido

Prólogo xi

Prólogo a la edición española xiv

CAPÍTULO 1
Introducción 3

1.1. Notas preliminares 3
1.2. Concepto de fluido 4
1.3. El fluido como medio continuo 5
1.4. Dimensiones y unidades 6
1.5. Propiedades del campo de velocidades 13
1.6. Propiedades termodinámicas de un fluido 15
1.7. Viscosidad y otras propiedades secundarias 22
1.8. Técnicas básicas de análisis de los flujos 36
1.9. Descripción del flujo: líneas de corriente, sendas y líneas de traza 37
1.10. El resolvedor de ecuaciones de ingeniería 42
1.11. Incertidumbre de los datos experimentales 43
1.12. El examen de fundamentos de ingeniería (FE) 44
1.13. Técnicas de resolución de problemas 45
1.14. Historia y perspectiva de la mecánica de fluidos 45
Problemas 46
Problemas del examen de fundamentos de ingeniería 54
Problemas extensos 54
Referencias 57

CAPÍTULO 2
Distribución de presiones de un fluido 59

2.1. Presión y gradiente de presión 59
2.2. Equilibrio de una partícula fluida 61
2.3. Distribución de presiones en hidrostática 63
2.4. Aplicación a la medida de presiones 69
2.5. Fuerzas hidrostáticas sobre superficies planas 73
2.6. Fuerzas hidrostáticas sobre superficies curvas 79
2.7. Fuerzas hidrostáticas en fluidos estratificados 82
2.8. Flotación y estabilidad 84
2.9. Distribución de presiones en movimiento como sólido rígido 90
2.10. Medida de la presión 98
Resumen 102
Problemas 102
Problemas conceptuales 123
Problemas del examen de fundamentos de ingeniería 124
Problemas extensos 124
Proyectos de diseño 126
Referencias 127

CAPÍTULO 3
Relaciones integrales para un volumen de control 129

3.1. Leyes básicas de la mecánica de fluidos 129
3.2. Teorema del transporte de Reynolds 133
3.3. Conservación de la masa 141
3.4. Conservación de la cantidad de movimiento 148
3.5. Teorema del momento cinético 161
3.6. Ecuación de la energía 166
3.7. Flujo sin fricción: la ecuación de Bernoulli 177
Resumen 185
Problemas 186
Problemas conceptuales 213
Problemas del examen de fundamentos de ingeniería 213
Problemas extensos 214
Problemas de diseño 215
Referencias 216

CAPÍTULO 4
Relaciones diferenciales para una partícula fluida 219

4.1. El campo de aceleraciones de un fluido 219
4.2. La ecuación diferencial de conservación de la masa 221
4.3. La ecuación de la cantidad de movimiento en forma diferencial 227
4.4. La ecuación diferencial del momento cinético 234
4.5. La ecuación diferencial de la energía 235
4.6. Condiciones de contorno para las ecuaciones básicas 238
4.7. La función de corriente 243
4.8. Vorticidad e irrotacionalidad 251
4.9. Flujos irrotacionales no viscosos 253
4.10. Algunos flujos potenciales planos ilustrativos 258
4.11. Algunos flujos viscosos incompresibles ilustrativos 263
Resumen 272
Problemas 272
Problemas conceptuales 282

www.elsolucionario.net

Problemas del examen de fundamentos de ingeniería 282
Problemas extensos 283
Referencias 284

CAPÍTULO 5
Análisis dimensional y semejanza 287

5.1. Introducción 287
5.2. El principio de homogeneidad dimensional 290
5.3. El teorema Pi 295
5.4. Adimensionalización de las ecuaciones básicas 301
5.5. La modelización y sus dificultades 310
Resumen 320
Problemas 320
Problemas conceptuales 328
Problemas del examen de fundamentos de ingeniería 329
Problemas extensos 329
Proyectos de diseño 330
Referencias 331

CAPÍTULO 6
Flujo viscoso en conductos 335

6.1. Regímenes en función del número de Reynolds 335
6.2. Flujos internos y flujos externos 340
6.3. Pérdida de carga; el coeficiente de fricción 342
6.4. Flujo laminar completamente desarrollado en conductos circulares 344
6.5. Modelización de la turbulencia 347
6.6. Flujo turbulento en conductos circulares 353
6.7. Tres tipos de problemas sobre flujo en tubos 360
6.8. Flujo en conductos no circulares 366
6.9. Pérdidas localizadas en sistemas de tuberías 376
6.10. Sistemas de tuberías 384
6.11 Experimentación de flujos en conductos: actuaciones de un difusor 390
6.12. Medidores en fluidos 395
Resumen 414
Problemas 414
Problemas conceptuales 431
Problemas del examen de fundamentos de ingeniería 431
Problemas extensos 432
Proyectos de diseño 434
Referencias 434

CAPÍTULO 7
Flujo alrededor de cuerpos 437

7.1. Efectos geométricos y del número de Reynolds 437
7.2. Métodos integrales en la teoría de la capa límite 440
7.3. Las ecuaciones de capa límite 444
7.4. Capa límite sobre una placa plana 446
7.5. Capa límite con gradiente de presión 455
7.6. Experimentación en flujos externos 461
Resumen 487
Problemas 487
Problemas conceptuales 500
Problemas del examen de fundamentos de ingeniería 500
Problemas extensos 501
Proyectos de diseño 502
Referencias 502

CAPÍTULO 8
Flujo potencial y mecánica de fluidos computacional 505

8.1. Introducción y repaso 505
8.2. Soluciones elementales en flujos planos 508
8.3. Superposición de soluciones de flujos planos 510
8.4. Flujos planos alrededor de cuerpos cerrados 516
8.5. Otros flujos potenciales planos 525
8.6. Imágenes 530
8.7. Teoría de perfiles 532
8.8. Flujo potencial axilsimétrico 543
8.9. Análisis numérico 549
Resumen 563
Problemas 563
Problemas conceptuales 574
Problemas extensos 574
Proyectos de diseño 576
Referencias 576

CAPÍTULO 9
Flujo compresible 579

9.1. Introducción 579
9.2. La velocidad del sonido 583
9.3. Flujo estacionario adiabático e isentrópico 586
9.4. Flujo isentrópico con cambios de área 591
9.5. La onda de choque normal 599
9.6. Operación de toberas convergentes y divergentes 606
9.7. Flujo compresible en conductos con fricción 611
9.8. Flujo en conductos sin fricción y con adición de calor 623
9.9. Flujo supersónico bidimensional 627
9.10. Ondas de expansión de Prandtl-Meyer 637
Resumen 650
Problemas 650
Problemas conceptuales 663
Problemas del examen de fundamentos de ingeniería 663
Problemas extensos 664
Proyectos de diseño 665
Referencias 666

CAPÍTULO 10
Flujo en canales abiertos 669

10.1. Introducción 669
10.2. Movimiento uniforme: la fórmula de Chézy 674
10.3. Canales eficientes para movimiento uniforme 680

www.elsolucionario.net

10.4. Energía específica; calado crítico 682
10.5. El resalto hidráulico 689
10.6. Movimiento gradualmente variado 694
10.7. Control y medida de caudales mediante vertederos 701
Resumen 708
Problemas 709
Problemas conceptuales 720
Problemas del examen de fundamentos de ingeniería 720
Problemas extensos 720
Proyectos de diseño 721
Referencias 722

CAPÍTULO 11
Turbomáquinas 725

11.1. Introducción y clasificación 725
11.2. La bomba centrífuga 728
11.3. Curvas características de bombas y reglas de semejanza 734
11.4. Bombas helicocentrífugas y axiales: la velocidad específica 743
11.5. Acoplamiento de bombas a una red 751
11.6. Turbinas 756
Resumen 769
Problemas 769
Problemas conceptuales 780
Problemas extensos 780
Proyecto de diseño 782
Referencias 782

Apéndice A **Propiedades físicas de los fluidos** 785

Apéndice B **Tablas para flujos compresibles** 791

Apéndice C **Factores de conversión** 807

Apéndice D **Ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas** 811

Solución de problemas seleccionados 813

Índice 821

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Prólogo

ENFOQUE GENERAL

En la quinta edición del libro *Mecánica de Fluidos* se ha añadido y suprimido material con respecto a ediciones anteriores, aunque la filosofía del libro se mantiene intacta. La estructura básica, compuesta por once capítulos y apéndices, sigue igual. Se siguen discutiendo los tres métodos: integral, diferencial y experimental. Se han añadido nuevos problemas, y se han modificado muchos de los problemas y ejemplos de trabajo. Se ha mantenido el estilo informal, orientado a los estudiantes, y se han añadido bastantes fotografías y figuras nuevas.

HERRAMIENTAS DE APRENDIZAJE

El número de problemas continúa aumentando: de los 1089 de la primera edición se ha pasado a 1169 en la segunda, 1392 en la tercera, 1500 en la cuarta y 1650 en esta quinta edición. La mayor parte de ellos son los problemas estándar de final de capítulo, clasificados por temas. También hay problemas conceptuales, problemas tipo test del Examen de Fundamentos de Ingeniería, problemas extensos y proyectos de diseño. En el apéndice se recogen las respuestas a los problemas seleccionados (los de numeración par).

Los problemas de ejemplo del texto principal han sido reestructurados de nuevo, siguiendo la secuencia de pasos indicada en la Sección 1.13, con el objetivo de proporcionar una estrategia uniforme de resolución de problemas a los estudiantes.

CAMBIOS DE CONTENIDO

Hay varias modificaciones en cada capítulo. El Capítulo 1 se ha reducido considerablemente, trasladando los temas más avanzados a capítulos posteriores. Por su gran importancia, se han añadido nuevas discusiones y nuevas figuras relativas a la visualización de flujos.

El Capítulo 2 contiene material nuevo sobre transductores de presión.

El Capítulo 3 introduce una lista de sugerencias específicas para tratar las dificultades de la ecuación de cantidad de movimiento. La ecuación de Bernoulli sigue incluyéndose al final en lugar de tratarse en un nuevo capítulo. Se hace énfasis en las numerosas restricciones a las que está sometida la ecuación de Bernoulli, que con frecuencia utilizan de forma incorrecta tanto los estudiantes como los ingenieros graduados.

El Capítulo 4 incluye ahora el análisis del flujo laminar de Poiseuille en conductos, como un ejemplo de solución exacta de las ecuaciones de Navier-Stokes. Este tema se vuelve a tratar brevemente en el Capítulo 6. Si no está de acuerdo con este orden, se pueden omitir las Secciones 4.10 y 4.11 y tratarlas entonces.

El Capítulo 5 contiene ahora una sección completa donde se discute cómo elegir las variables dimensionalmente independientes adecuadas para el análisis dimensional. Decidiendo en primer lugar cómo se escalan y cómo se presentan los datos, la ambigüedad desaparece o al menos se reduce.

En el Capítulo 6 se ha añadido una nueva sección sobre las pérdidas de carga y el coeficiente de fricción. El flujo laminar y turbulento en tuberías se estudia de forma separada para aumentar la claridad. Los modelos de turbulencia se incluyen ahora en una nueva sección. Se han añadido nuevos datos sobre pérdidas localizadass, y se discuten nuevos medidores de caudal. Los medidores de orificio y tobera incluyen ahora un factor de corrección por compresibilidad.

www.elsolucionario.net

El Capítulo 7 contiene nuevas discusiones sobre Mecánica de Fluidos Computacional (CFD, *Computational Fluid Mechanics*) y más detalles sobre la aproximación de capa límite. Se ha añadido una nueva sección sobre movimientos lentos.

El Capítulo 8, salvo por la adición de nuevos problemas y referencias, queda prácticamente igual. Creo que se trata del tratamiento más extenso del flujo potencial en un libro para estudiantes no graduados.

En el Capítulo 9 se discuten con mayor detalle los flujos de Fanno y Rayleigh y se presentan algunas de las nuevas tendencias en aeronáutica, tanto subsónicas como supersónicas.

El Capítulo 10 contiene más discusiones sobre el número de Froude y ha mejorado el tratamiento de las soluciones compuestas de movimientos gradualmente variados gracias al Profesor Bruce E. LaRock, de la Universidad de California, Davis. Se ha añadido un esquema sencillo de diferencias finitas para movimientos variados que resulta útil cuando las mediciones del campo fluido son escasas. También se ha introducido el concepto de vertedero compuesto.

El Capítulo 11 está prácticamente inalterado, excepto por las mejoras y las correcciones introducidas por el Profesor Gordon Holloway, de la Universidad de New Brunswick.

MATERIAL SUPLEMENTARIO

La página web en inglés del libro, http://www.mhhe.com/white5, contiene una Guía de Estudio para el Estudiante (*Student Study Guide*), preparada por el Profesor Jerry Dunn, de la Universidad Tecnológica de Texas, que proporciona una revisión concisa de los principales temas tratados en un primer curso; versiones interactivas de los problemas del Examen de Fundamentos de Ingeniería (FE, *Fundamentals of Engineering*) incluidos en el texto, preparados por el Profesor Edward Anderson, de la Universidad Tecnológica de Texas, que pueden servir para preparar el examen o como autoevaluación; un enlace a la página web de EES; y versiones PowerPoint de todas las figuras del texto.

AGRADECIMIENTOS

www.elsolucionario.net

Como de costumbre, hay tanta gente que ha colaborado en la elaboración de este libro que me es imposible recordarlos y enumerarlos a todos. Agradezco las numerosas sugerencias y mejoras realizadas durante la escritura del libro por Gordon Holloway, de la Universidad de New Brunswick. Todas las revisiones, junto con el material adicional, incluyendo el Manual de Soluciones, fueron revisados y corregidos por mi colega Elizabeth J. Kenyon. Muchos otros colaboradores realizaron numerosas sugerencias y correcciones, proporcionaron material para el libro y me dieron ánimos para seguir adelante: Alex Smits, Universidad de Princeton; Ray Taghavi, Universidad de Kansas; Ganesh Raman, Instituto Tecnológico de Illinois; Phil Combs, B. D. Fuller y Wayne Stroupe, *U.S. Army Waterways Experiment Station*; John Cimbala, Universidad del Estado de Pennsylvania; Sheldon Green, Universidad de la Columbia Británica; Nikos J. Mourtos, Universidad del Estado de San José; Jacques Lewalle, Universidad de Syracuse; Richard McCuen, Universidad de Maryland; Andris Skattebo, *Scandpower A/S*; Bruce E. Larock, Universidad de California, Davis; Sandra Barrette y Joan Zimmer, *Badger Meter, Inc.*; Dean Mohan, *PCB Piezotronics*; Andrei Smirnov e Ismail Celik, Universidad de West Virginia; Fernando Tavares de Pinho, *CEFT-Transport Phenomena Research Centre*, Portugal; S. Y. Son, Ken Kihm y J. C. Han, Universidad de Texas A&M; Ethan Lipman, Universidad de California, Davis; Deborah Pence, Universidad del Estado de Oregon; Debendra K. Das, Universidad de Alaska, Fairbanks; John Gay y Nick Galante, *U.S. Navy*; Dimitre Karamanev, Universidad de Western Ontario; Jay M. Khodadadi, Universidad de Auburn; John Foss, Universidad del Estado de Michigan; William Palm y Raymond Wright, Universidad de Rhode Island; Haecheon Choi, Universidad Nacional de Seoul, Korea; Lee Jay Fingersh, *National Renewable Energy Laboratory*; John Sheridan, Universidad de Monash; Jason Reese, Universidad de Londres; Samuel S. Sih, *Walla Walla College*; Chihyung Wen, Universidad de Da-Yeh, Taiwan; Tim Gourlay, *Australian Maritime College*; Azer Yalin, Universidad del Estado de Colorado; Donald E. Richards, Instituto Rose-Hulman; Bob Oakberg, Universidad del Estado de Montana; Brian James Savilonis, Instituto Politécnico de Worcester; Ryoichi S. Amano, Ph.D., Universidad de Wisconsin-Milwaukee; James D. McBrayer, P.E., D.Sc., Universidad de Florida Central; Don L. Boyer, Universidad del Estado de Arizona; Savas Yavuzkurt, Universidad del Estado de Pennsylvania; Abdul I. Barakat, Universidad de California, Davis; James A. Liburdy, Universidad del Estado de Oregon; Clement Kleinstreuer, Universidad del Estado de Carolina del Norte, Raleigh; Robert G. Oakberg, Uni-

www.elsolucionario.net

versidad del Estado de Montana. También han colaborado en la revisión: Dr. John W. Nicklow, P.E., P.H., Universidad del Sur de Illinois, Carbondale; Gary Tatterson, Universidad del Estado de North Carolina A&T; Anthony J. McHugh, Universidad de Illinois; Soyoung Cha, Universidad de Illinois-Chicago; Donald Carlucci, Instituto de Tecnología Stevens; Darrell W. Pepper, Ph.D., Universidad de Nevada, Las Vegas; y Farhan H. Chowdhury, Universidad de Ingeniería y Tecnología de Bangladesh.

Como viene siendo habitual, la colaboración del personal de McGraw-Hill fue de enorme ayuda. Quiero dar las gracias a Jonathan Plant, Amy Hill, Regina Brooks, Rory Stein, Jill Peter, Brenda Ernzen, Rick Noel, Beverly Steuer, Meg McDonald, David Tietz, Denise Keller, Lauren Timmer y Stephanie Lange. Finalmente, quiero agradecer, como siempre, el apoyo y los ánimos constantes de mi mujer y mi familia.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Prólogo a la edición española

Me complace prologar esta traducción española del libro de Frank M. White, *Fluid Mechanics*, que a mi juicio representa una introducción excelente a la Mecánica de Fluidos.Cubre muy eficazmente y con el rigor suficiente una gran variedad de temas de interés práctico, sin requerir por parte del alumno un gran nivel de conocimientos matemáticos o físicos de partida.

Quisiera resaltar el papel que los numerosos ejercicios de este libro juegan para complementar la exposición de la Mecánica de Fluidos dada en el texto principal. El autor ha conseguido, mediante una cuidadosa selección de los ejercicios, ofrecer al alumno la posibilidad de aprovechar el trabajo que la realización de los ejercicios representa, no sólo para mejorar su comprensión de los temas desarrollados en el texto, sino también para ampliar sus conocimientos y su sentido físico del movimiento de los fluidos y de las aplicaciones prácticas de estos conocimientos. Tanto instructores como alumnos deben ser conscientes de la magnífica oportunidad que este texto les ofrece de hacer más eficaz su labor.

Dado que no existe uniformidad en la nomenclatura en español para los distintos conceptos de Mecánica de Fluidos, los traductorres, cuyo profundo conocimiento de la Mecánica de Fluidos me consta, se han visto frecuentemente obligados a hacer una elección entre las varias posibilidades, a sabiendas de que el resultado no puede satisfacer a todos. (Quizá sea especialmente llamativa la elección de tensor de esfuerzos en lugar de la alternativa de tensor de tensiones.) En todo caso los traductores han tratado de hacer aparecer en el texto o en el índice la nomenclatura alternativa.

Teniendo en cuenta que en su actividad profesional los futuros ingenieros tendrán, casi inevitablemente, necesidad de utilizar unidades inglesas, se ha mantenido sensiblemente la proporción en que las unidades inglesas y las métricas aparecían en los ejemplos y ejercicios del texto original.

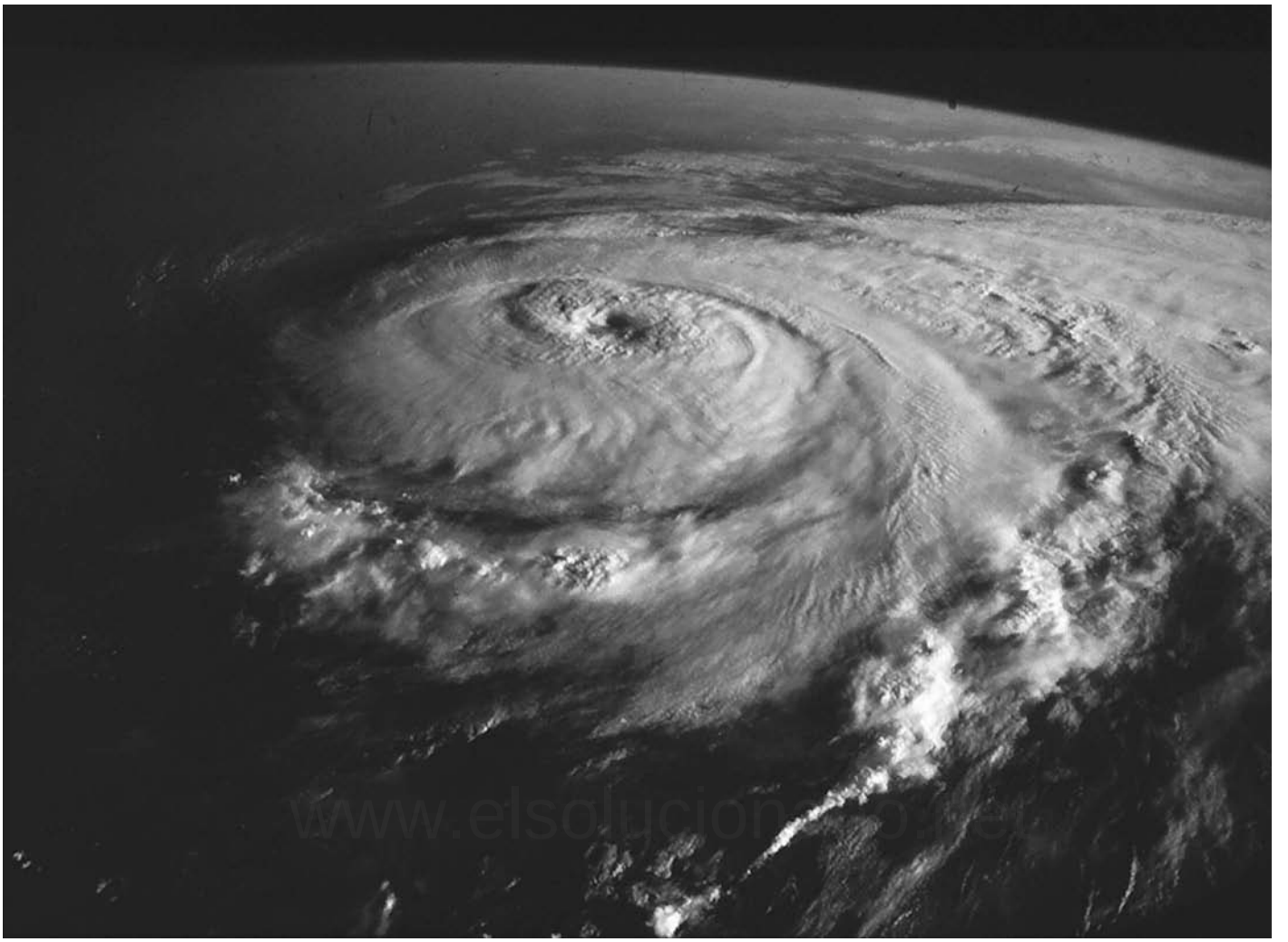
Amable Liñán

www.elsolucionario.net

Mecánica de fluidos

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Huracán Elena en el Golfo de México. A diferencia de la mayor parte de las aplicaciones ingenieriles de la Mecánica de Fluidos a pequeña escala, la dinámica de los huracanes está dominada por la aceleración de Coriolis debida a la rotación de la tierra, que los hace girar en sentido contrario a las agujas del reloj en el hemisferio norte. En el presente capítulo se discuten las propiedades físicas y las condiciones de contorno que gobiernan los flujos como estos. (*Por cortesía de NASA/Color-Pic Inc-E.R. Degginger/Color-Pic Inc.*)

www.elsolucionario.net

Capítulo 1
Introducción

1.1. NOTAS PRELIMINARES

La Mecánica de Fluidos se ocupa del estudio de los fluidos en movimiento (*fluidodinámica*) o en reposo (*fluidoestática*). Tanto los líquidos como los gases son considerados fluidos, y el número de aplicaciones de la Mecánica de Fluidos es enorme: respiración, flujo sanguíneo, natación, ventiladores, turbinas, aviones, barcos, ríos, molinos de viento, tuberías, misiles, icebergs, motores, filtros, chorros y aspersores, por mencionar algunas. Bien pensado, casi todas las cosas que existen en este planeta o son un fluido o se mueven inmersas o cerca de un fluido.

Como ciencia, está basada en un compromiso adecuado entre teoría y experimentación. Por ser la Mecánica de Fluidos una rama de la mecánica, dispone de un conjunto de leyes de conservación bien documentadas y es posible, por tanto, un tratamiento teórico riguroso. Sin embargo, la teoría es a veces frustrante, porque se refiere principalmente a ciertas situaciones idealizadas que pueden no ser válidas en los casos prácticos. Los dos obstáculos mayores para el tratamiento teórico son la geometría y la viscosidad. La teoría general del movimiento de los fluidos (Capítulo 4) es demasiado difícil para permitir abordar configuraciones geométricas arbitrarias, de modo que la mayor parte de los libros de texto se concentran en placas planas, conductos circulares y otras geometrías sencillas. También es posible aplicar métodos numéricos a geometrías arbitrarias, y actualmente existen libros especializados que explican las aproximaciones y los métodos de la *Mecánica de Fluidos Computacional* (CFD, *Computational Fluid Dynamics*) [1, 2, 29].[1] Este libro presentará muchos resultados teóricos, teniendo siempre presente sus limitaciones.

El segundo obstáculo para la teoría es la acción de la viscosidad, que puede ser despreciada solamente en algunos flujos idealizados (Capítulo 8). En primer lugar, la viscosidad aumenta la dificultad de las ecuaciones básicas, aunque la aproximación de capa límite, hallada por Ludwig Prandtl en 1904 (Capítulo 7), ha simplificado enormemente el análisis de los flujos viscosos. En segundo lugar, la viscosidad afecta a la estabilidad de todos los flujos, lo que salvo a velocidades muy pequeñas da lugar a un fenómeno desordenado y aleatorio llamado *turbulencia*. La teoría de los flujos turbulentos es rudimentaria y descansa principalmente sobre la experimentación (Capítulo 6), aunque es muy útil para estimaciones ingenieriles. Los libros de texto suelen presentar algoritmos digitales para analizar los flujos turbulentos [32], pero estos métodos no son exactos, sino simples modelos basados en suposiciones empíricas sobre la media temporal del campo de esfuerzos turbulentos.

Así pues, existe una teoría para estudiar el flujo de los fluidos, pero en todos los casos debe tener soporte experimental. A menudo, los datos experimentales son la fuente principal de información sobre determinados flujos, como es el caso de la resistencia y la sustentación de cuerpos (Capítulo 7). Afortunadamente, la Mecánica de Fluidos es visualizable, existe buena instrumentación [4, 5, 35] y el uso del análisis dimensional y modelos a escala (Capítulo 5) está muy extendido. De este modo, la experimentación proporciona un complemento natural y sencillo a la teoría. Se debe tener en cuenta que teoría y experimentación van de la mano en todos los estudios de Mecánica de Fluidos.

[1] Las referencias numeradas aparecen al final de cada capítulo.

www.elsolucionario.net

1.2. CONCEPTO DE FLUIDO

Desde el punto de vista de la Mecánica de Fluidos, la materia sólo puede presentarse en dos estados: sólido y fluido. La diferencia entre ambos es perfectamente obvia para el lego y es un ejercicio interesante preguntar a alguien que explique esta diferencia en palabras. La distinción técnica radica en la reacción de ambos a un esfuerzo tangencial o cortante. *Un sólido puede resistir un esfuerzo cortante con una deformación estática; un fluido, no*. Cualquier esfuerzo cortante aplicado a un fluido, no importa cuán pequeño sea, provocará el movimiento del fluido. Éste se mueve y se deforma continuamente mientras se siga aplicando el esfuerzo cortante. Como corolario, podemos decir que un fluido en reposo debe estar en un estado de esfuerzo cortante nulo; estado que se denomina a menudo condición hidrostática de esfuerzos en análisis estructural. En esta condición, el círculo de Mohr se reduce a un punto y no hay esfuerzo cortante en ningún plano que corte al elemento en cuestión.

Dada la definición de fluido, cualquier lego sabe que existen dos clases de fluidos, *líquidos* y *gases*. De nuevo, la distinción es técnica y concierne al efecto de las fuerzas cohesivas. Un líquido, al estar compuesto por agrupaciones de moléculas muy cercanas con enormes fuerzas cohesivas, tiende a conservar su volumen y formará una superficie libre en un campo gravitatorio si no está limitado por arriba. Los flujos con superficie libre están dominados por efectos gravitatorios y se estudian en los Capítulos 5 y 10. Como las moléculas de gas están muy separadas entre sí, con fuerzas cohesivas despreciables, un gas es libre de expansionarse hasta que encuentre paredes que lo confinan. Un gas no tiene volumen definido y por sí mismo, sin confinamiento, forma una atmósfera que es esencialmente hidrostática. El comportamiento hidrostático de líquidos y gases se muestra en el Capítulo 2. Los gases no forman superficies libres y en los flujos gaseosos raramente influyen otros efectos gravitatorios distintos de los de flotabilidad.

La Figura 1.1 muestra un bloque sólido apoyado sobre un plano rígido y deformado por su propio peso. El sólido adquiere una deflexión estática, marcada exageradamente con una línea a trazos, resistiendo esfuerzos cortantes[2] sin fluir. El diagrama de equilibrio del elemento *A* del lateral del bloque muestra un esfuerzo cortante a lo largo del plano cortado a un ángulo θ. Como las paredes del bloque no están sometidas a esfuerzos, el elemento *A* tiene esfuerzo nulo a la derecha y a la izquierda y esfuerzo de compresión $\sigma = -p$ arriba y abajo. El círculo de Mohr no se reduce a un punto y no hay esfuerzo cortante nulo en el bloque.

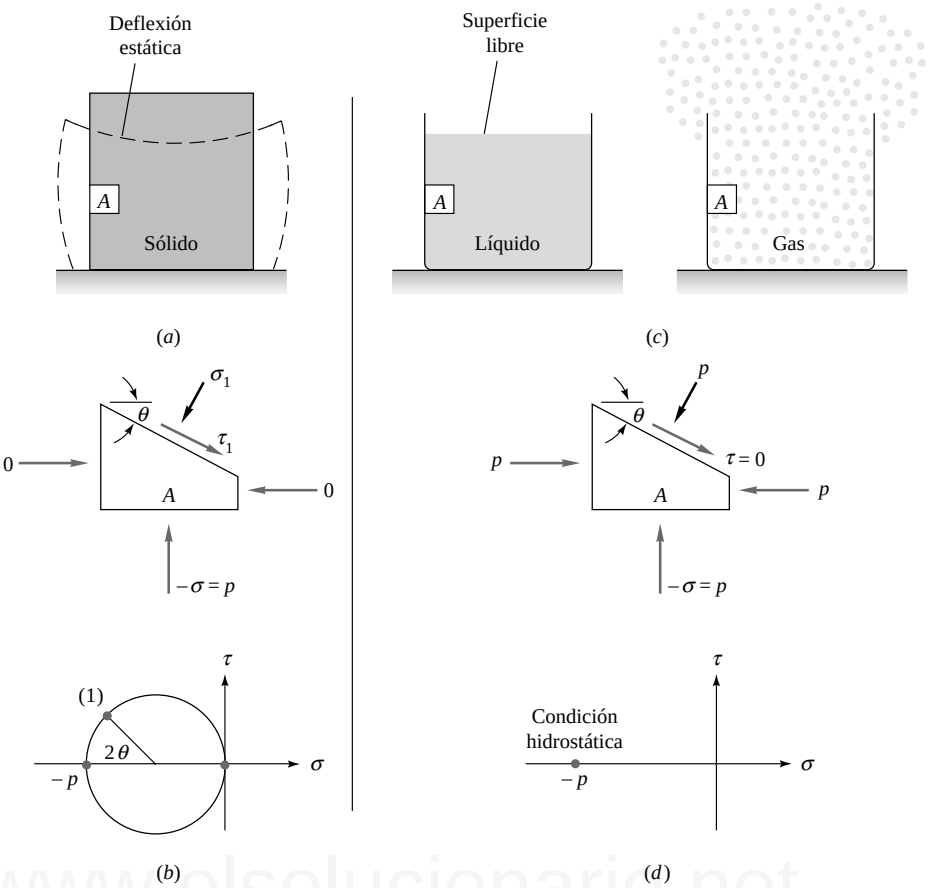
Contrariamente, el líquido y el gas en reposo de la Figura 1.1 necesitan paredes para eliminar el esfuerzo cortante. Las paredes ejercen una compresión $-p$ y el círculo de Mohr se reduce a un punto con esfuerzo cortante nulo en todas partes, o sea, está en la condición hidrostática. El líquido mantiene su volumen y forma una superficie libre sin llenar completamente el recipiente. Si se quitan las paredes, se crea esfuerzo cortante y el líquido se derrama. Si el recipiente se inclina, también aparece esfuerzo cortante, se forman ondas y la superficie adopta una posición horizontal, desbordándose llegado el caso. Mientras tanto, el gas se expande fuera del recipiente, llenando todo el espacio disponible. El elemento *A*, en el gas, también está en la condición hidrostática y ejerce una compresión $-p$ sobre la pared.

En la discusión anterior se puede distinguir claramente entre sólidos, líquidos y gases. La mayor parte de los problemas ingenieriles de la Mecánica de Fluidos se refieren a estos casos claros, por ejemplo, los líquidos comunes como agua, aceite, mercurio, gasolina y alcohol y a los gases comunes como aire, helio, hidrógeno y vapor de agua en el rango de temperaturas y presiones normales. Sin embargo, existen muchos casos límites sobre los que se debe advertir. Algunas sustancias, aparentemente «sólidas» como asfalto y grafito, resisten esfuerzos cortantes durante breves periodos, pero realmente se deforman y presentan comportamiento de fluido en periodos de tiempo largos. Otras sustancias, particularmente coloides y mezclas espesas, resisten pequeñas cortaduras, pero «se rompen» a elevados esfuerzos cortantes y fluyen como fluidos. Hay libros de texto especializados dedicados al estudio general de la deformación y el flujo, campo denominado *reología* [6]. Por otra parte, los líquidos y gases pueden coexistir en mezclas bifásicas, tales como vapor-agua o agua con burbujas de aire. Algunos libros de texto presentan el análisis de estos *flujos bifásicos* [7]. Finalmente, hay situaciones en que la diferencia entre líquido y gas se difumina. Esto ocurre a temperaturas y presiones por encima del llamado *punto crítico* de la sustancia, donde sólo existe una fase semejante al gas. A medida que la presión aumenta muy por encima del punto crítico, la sustancia gaseosa se hace tan densa que parece líquido y las aproximaciones termodinámicas usuales, como la ley de los gases perfectos, dejan de ser fiables. La temperatura y presión críticas del agua son $T_c = 647$ K y $p_c = 219$ atm[3], de manera que los problemas típicos con agua o vapor están por debajo de dicho punto. El aire, por ser una mezcla de gases, no tiene punto crítico propio, pero su principal componente, el nitrógeno, tiene $T_c = 126$ K y $p_c = 34$ atm. Por ello, en los pro-

[2] Utilizamos el término esfuerzo análogo al de tensión, es decir, con significado de fuerza por unidad de superficie (*N. del T.*).

[3] Una atmósfera equivale a 101.300 Pa = 2116 lbf/ft^2.

www.elsolucionario.net



www.elsolucionario.net

Figura 1.1. Un sólido en equilibrio puede soportar esfuerzo cortante. (*a*) Deflexión estática del sólido; (*b*) equilibrio y círculo de Mohr del elemento *A* del sólido. Un fluido no puede. (*c*) Se necesitan paredes de contención; (*d*) equilibrio y círculo de Mohr para el elemento *A* del fluido.

blemas típicos, con altas temperaturas y bajas presiones comparadas con su punto crítico, el aire se comporta claramente como un gas. Este libro tratará solamente sobre líquidos y gases identificables como tales, y los casos límites citados anteriormente quedan fuera de nuestro objetivo.

1.3. EL FLUIDO COMO MEDIO CONTINUO

Hemos utilizado ya términos técnicos tales como *presión* y *densidad del fluido* sin una discusión rigurosa de su definición. Sabemos que los fluidos son agregaciones de moléculas, muy separadas en los gases y próximas en los líquidos. La distancia entre las moléculas es mucho mayor que el diámetro molecular. Las moléculas no están fijas en una red, sino que se mueven libremente. Por ello, la densidad, o masa por unidad de volumen, no tiene un significado preciso, pues el número de moléculas en el interior de un volumen cualquiera cambia continuamente. Este efecto pierde importancia si la unidad de volumen es mucho mayor que el cubo del espaciado molecular, ya que el número de moléculas contenidas permanecerá prácticamente constante a pesar del considerable intercambio a través de su contorno. Si la unidad de volumen escogida es demasiado grande, puede haber una variación notable en la distribución global de partículas. Esta situación está ilustrada en la Figura 1.2, donde la «densidad» calculada a partir de la masa molecular δm de un volumen dado $\delta \mathcal{V}$, aparece en función del volumen escogido. Hay un volumen límite $\delta \mathcal{V}^*$ por debajo del cual las variaciones moleculares pueden ser importantes y por encima del cual las variaciones macroscópicas también lo pueden ser. La densidad ρ de un fluido se define de modo óptimo como

$$\rho \Leftarrow \lim_{\delta \mathcal{V} \gamma \delta \mathcal{V}^*} \frac{\delta m}{\delta \mathcal{V}} \tag{1.1}$$

www.elsolucionario.net

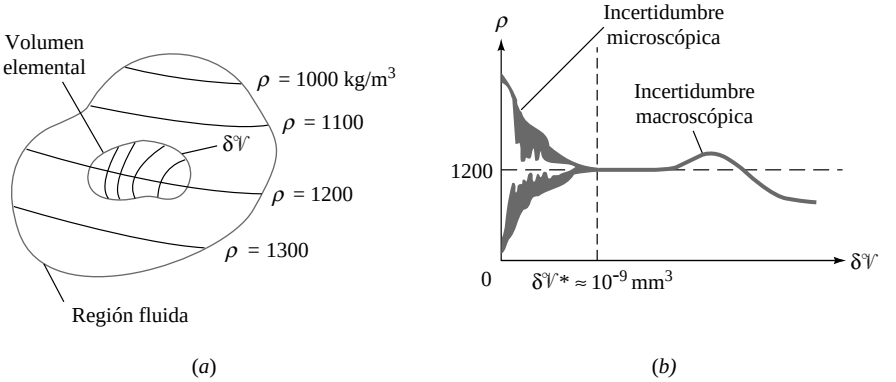


Figura 1.2. Definición de la densidad del fluido como medio continuo: (*a*) volumen elemental en una región fluida de densidad variable; (*b*) densidad calculada en función del tamaño del volumen elemental.

El volumen límite $\delta\mathcal{V}^*$ es alrededor de 10^{-9} mm^3 para todos los líquidos y gases a presión atmosférica. Por ejemplo, 10^{-9} mm^3 de aire en condiciones normales contienen aproximadamente 3×10^7 moléculas, lo cual es suficiente para definir una densidad prácticamente constante de acuerdo con la Ecuación (1.1). La mayor parte de los problemas ingenieriles están relacionados con dimensiones físicas mucho mayores que este volumen límite, de modo que la densidad es esencialmente una función puntual y las propiedades del fluido pueden considerarse como variables continuas en el espacio, como se esquematiza en la Figura 1.2*a*. Un fluido de este tipo se denomina *medio continuo*, lo cual significa que la variación de sus propiedades es tan suave que se puede utilizar el cálculo diferencial para analizarlo. En todos los estudios incluidos en este libro consideraremos válida esta premisa. También en este sentido hay casos límite para gases a tan bajas presiones que su espaciado molecular y su camino libre medio[4] son comparables, o mayores, que el tamaño del sistema. Esto obliga a abandonar la aproximación de medio continuo en favor de la teoría molecular del flujo de gases enrarecidos [8]. En principio, todos los problemas de Mecánica de Fluidos pueden ser abordados desde el punto de vista molecular, pero no lo haremos aquí. Se debe resaltar que el uso del cálculo diferencial no prejuzga la posibilidad de saltos discontinuos en las propiedades fluidas a través de superficies libres o de ondas de choque en fluidos compresibles (Capítulo 9). Nuestros cálculos deben ser suficientemente flexibles para poder trabajar con condiciones de contorno discontinuas.

1.4. DIMENSIONES Y UNIDADES

Dimensión es la medida por la cual una variable física se expresa cuantitativamente. *Unidad* es una forma particular de asignar un número a la dimensión cuantitativa. Así, la longitud es una dimensión asociada a variables como distancia, desplazamiento, anchura, deflexión y altura, mientras que centímetros y pulgadas son unidades numéricas para expresar la longitud. La dimensión es un concepto muy poderoso sobre el que se ha desarrollado la espléndida herramienta físico-matemática del *análisis dimensional* (Capítulo 5), mientras que las unidades son los números que se buscan como respuesta final.

Los sistemas de unidades han variado siempre de país a país, incluso después de adoptarse acuerdos internacionales. Los ingenieros necesitan números y, por tanto, sistemas de unidades, y esos números deben ser fiables porque la seguridad pública está en juego. No se puede diseñar y construir un sistema de tuberías cuyo diámetro es D y cuya longitud es L. Los ingenieros norteamericanos persisten en utilizar el sistema británico de unidades. Hay mucha posibilidad de error en este sistema y muchos estudiantes han fallado un problema por olvidar un factor de conversión de 12 o 144 o 32,2 o 60 o 1,8. Los ingenieros, en la práctica, pueden cometer los mismos errores. El autor tiene la experiencia personal de un grave error en el diseño preliminar de un avión debido al olvido de un factor de 32,2 para convertir libras-masa en «slugs».[5]

[4] Distancia media entre colisiones moleculares.
[5] Unidad de masa en el sistema británico (*N. del T.*).

www.elsolucionario.net

En una reunión internacional celebrada en Francia en 1872 se propuso la Convención Métrica, un tratado que fue firmado en 1875 por 17 países, incluidos los Estados Unidos de América. Constituía una apreciable mejora sobre el sistema británico, pues su base es el número 10, que es la base del sistema numérico aprendido desde la infancia en todas partes. Aún quedaban problemas porque incluso los países con sistema métrico utilizaban a veces los kilopondios en lugar de dinas o newtones, kilogramos en lugar de gramos, o calorías en lugar de julios. Para uniformizar el sistema métrico, una Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada en 1960, con asistencia de 40 países, propuso el *Sistema Internacional de Unidades* (SI). Actualmente pasamos un arduo periodo de transición hacia el SI, que probablemente durará aún muchos años. Las asociaciones profesionales dirigen el cambio. Desde el 1 de julio de 1974 se obliga a utilizar el SI en todos los trabajos publicados por la Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos (ASME, *American Society of Mechanical Engineers*), que preparó un folleto explicativo al respecto [9]. El presente libro utilizará simultáneamente el SI y el sistema británico.

Dimensiones primarias

En Mecánica de Fluidos sólo hay cuatro *dimensiones primarias*, de las cuales derivan las demás. Son masa, longitud, tiempo y temperatura.[6] Estas dimensiones y sus unidades en ambos sistemas aparecen en la Tabla 1.1. Nótese que la unidad Kelvin no utiliza el símbolo de grado. Las llaves que engloban un símbolo como $\{M\}$ significan «dimensiones de» masa. Todas las demás variables en Mecánica de Fluidos pueden expresarse en función de $\{M\}$, $\{L\}$, $\{T\}$ y $\{\Theta\}$. Por ejemplo, la aceleración tiene dimensiones de $\{LT^{-2}\}$. La más importante de estas dimensiones secundarias es la fuerza, directamente relacionada con masa, longitud y tiempo a través de la segunda ley de Newton. La fuerza es igual a la variación temporal de la cantidad de movimiento o, si la masa es constante,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1.2}$$

De aquí podemos ver que, dimensionalmente, $\{F\} = \{MLT^{-2}\}$. La constante de proporcionalidad se elimina definiendo la unidad de fuerza exactamente en función de las unidades primarias. Así definimos el newton y la libra-fuerza

$$\begin{aligned} 1 \text{ newton fuerza} &= 1 \text{ N} \equiv 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2 \\ 1 \text{ libra fuerza} &= 1 \text{ lbf} \equiv 1 \text{ slug} \cdot 1 \text{ ft/s}^2 = 4{,}4482 \text{ N} \end{aligned} \tag{l.3}$$

En este libro se usará la abreviatura *lbf* para la libra-fuerza y *lb* para la libra-masa. Si se adopta otra unidad de fuerza como la dina o el kilopondio, o se toma otra unidad de masa como el gramo o la libra-masa, se debe incluir en la Ecuación (l.2) una constante de proporcionalidad g_c. En este libro no se utilizarán este tipo de constantes, ya que se emplearán los sistemas internacional y británico, donde no son necesarias.

En la Tabla 1.2 se enumeran algunas de las variables secundarias más importantes en Mecánica de Fluidos, expresando sus dimensiones en función de las cuatro primarias. Una lista más completa de factores de conversión puede encontrarse en el Apéndice C.

Tabla 1.1. Dimensiones primarias en los sistemas SI y británico.

Dimensión primaria	Unidad SI	Unidad británica	Factor de conversión
Masa $\{M\}$	Kilogramo (kg)	Slug	1 slug = 14,5939 kg
Longitud $\{L\}$	Metro (m)	Pie (ft)	1 ft = 0,3048 m
Tiempo $\{T\}$	Segundo (s)	Segundo (s)	1 s = 1 s
Temperatura $\{\Theta\}$	Kelvin (K)	Rankine (°R)	1 K = 1,8 °R

[6] Si los efectos electromagnéticos son importantes, se debe incluir una quinta, la corriente eléctrica {I}, cuya unidad en el SI es el amperio (A).

www.elsolucionario.net

Tabla 1.2. Dimensiones secundarias en Mecánica de Fluidos.

Dimensión secundaria	Unidad SI	Unidad británica	Factor de conversión
Área $\{L^2\}$	m^2	ft^2	$1\ m^2 = 10{,}764\ ft^2$
Volumen $\{L^3\}$	m^3	ft^3	$1\ m^3 = 35{,}315\ ft^3$
Velocidad $\{LT^{-1}\}$	m/s	ft/s	1 ft/s = 0,3048 m/s
Aceleración $\{LT^{-2}\}$	m/s^2	ft/s^2	$1\ ft/s^2 = 0{,}3048\ m/s^2$
Presión o esfuerzo $\{ML^{-1}T^{-2}\}$	$Pa = N/m^2$	lbf/ft^2	$1\ lbf/ft^2 = 47{,}88\ Pa$
Velocidad angular $\{T^{-1}\}$	s^{-1}	s^{-1}	$1\ s^{-1} = 1\ s^{-1}$
Energía, calor, trabajo $\{ML^2T^{-2}\}$	$J = N \cdot m$	$lf \cdot lbf$	$1\ ft \cdot lbf = 1{,}3558\ J$
Potencia $\{ML^2T^{-3}\}$	$W = J/s$	$ft \cdot lbf/s$	$1\ ft \cdot lbf/s = 1{,}3558\ W$
Densidad $\{ML^{-3}\}$	kg/m^3	$slugs/ft^3$	$1\ slug/ft^3 = 515{,}4\ kg/m^3$
Viscosidad $\{ML^{-1}T^{-1}\}$	$kg/(m \cdot s)$	$slugs/(ft \cdot s)$	$1\ slug/(ft \cdot s) = 47{,}88\ kg/(m \cdot s)$
Calor Específico $\{L^2T^{-2}\Theta^{-1}\}$	$m^2/(s^2 \cdot K)$	$ft^2/(s \cdot °R)$	$1\ m^2/(s^2 \cdot K) = 5{,}980\ ft^2/(s \cdot °R)$

EJEMPLO 1.1

Un cuerpo pesa 1000 lbf en el campo gravitatorio terrestre con $g = 32{,}174\ ft/s^2 \cdot (a)$ ¿Cuál es su masa en kilogramos? (*b*) ¿Cuál será su peso en newtones en el campo gravitatorio lunar con $g_{luna} = 1{,}62\ ft/s^2$? (*c*) ¿Cuál será su aceleración si se le aplica una fuerza de 400 lbf en la luna y en la tierra?

Solución

Apartado (*a*)

La Ecuación (1.2) dice que F = peso si $a = g_{tierra}$:

$$F = W = mg = 1000\ lbf = (m)\ (32{,}174\ ft/s^2)$$

o
$$m = \frac{1000\ lbf}{32{,}174\ ft/s^2} = (31{,}08\ slugs)(14{,}5939\ kg/slug) = 453{,}6\ kg \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Comentario. El cambio de 31,08 slugs a 453,6 kg muestra la utilidad del factor de conversión 14,5939 kg/slug.

Apartado (*b*)

La masa del cuerpo sigue siendo la misma en la luna. La Ecuación (1.2) nos permite calcular el peso correspondiente

$$F = W_{luna} = mg_{luna} = (453{,}6\ kg)(1{,}62\ m/s^2) = 735\ N \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

Apartado (*c*)

Este apartado no está relacionado con el peso, sino con la aplicación directa de la segunda ley de Newton

$$F = 400\ lbf = ma = (31{,}08\ slugs)(a)$$

o
$$a = \frac{400\ lbf}{31{,}08\ slugs} = 12{,}87\ ft/s^2 = 3{,}92\ m/s^2 \qquad \textit{Resp.}\ (c)$$

Comentario. La aceleración obtenida sería la misma en la luna, en la tierra o en cualquier otra parte.

Muchos datos en artículos y trabajos aparecen con unidades arcaicas o inconvenientes, útiles sólo para alguna industria, especialidad o país. El ingeniero debe convertir estos datos al SI o al sistema británico antes de usarlos. Esto requiere la aplicación sistemática de factores de conversión, como en el ejemplo siguiente.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 1.2

La industria relacionada con la medida de la viscosidad [27, 36] continúa usando el sistema de unidades cgs, porque los valores de la viscosidad expresados en centímetros y gramos resultan más manejables para muchos fluidos. La unidad de viscosidad absoluta (μ) en el sistema cgs es el *poise*, 1 poise = 1 g/(cm · s), nombre tomado de J. L. M. Poiseuille, médico francés que llevó a cabo experimentos pioneros en 1840 sobre flujo de agua en conductos. La unidad de la viscosidad cinemática (ν) es el *stokes*, nombre tomado de G. G. Stokes, un físico inglés que en 1845 colaboró en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales básicas que gobiernan la cantidad de movimiento de los fluidos; 1 stokes = 1 cm²/s. La viscosidad del agua a 20 °C es alrededor de $\mu \Xi 0{,}01$ poises y también $\nu \Xi 0{,}01$ stokes. Exprese estos valores en (*a*) el SI y (*b*) el sistema británico.

Solución

Apartado (*a*)

- *Procedimiento*. Cambiamos de forma sistemática gramos a kg o slugs y centímetros a metros o pies.
- *Valores de las propiedades*. Dados $\mu = 0{,}01$ g/(cm · s) y $\nu = 0{,}01$ cm²/s.

- *Solución del apartado* (*a*). Para convertir a unidades SI,

$$\mu = 0{,}01\frac{\text{g}}{\text{cm}\,\Delta\text{s}} = 0{,}01\frac{\text{g}(1\text{ kg}/1000\text{ g})}{\text{cm}(0{,}01\text{ m/cm})\text{s}} = 0{,}001\frac{\text{kg}}{\text{m}\,\Delta\text{s}}$$

$$\downarrow = 0{,}01\frac{\text{cm}^2}{\text{s}} = 0{,}01\frac{\text{cm}^2(0{,}01\text{ m/cm})^2}{\text{s}} = 0{,}00001\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Apartado (*b*)

- Para convertir al sistema británico,

$$\mu = 0{,}01\frac{\text{g}}{\text{cm}\,\Delta\text{s}} = 0{,}01\frac{\text{g}(1\text{ kg}/1000\text{ g})(1\text{ slug}/14{,}5939\text{ kg})}{(0{,}01\text{ m/cm})(1\text{ ft}/0{,}3048\text{ m})\text{s}} = 0{,}0000209\frac{\text{slug}}{\text{ft}\,\Delta\text{s}}$$

$$\downarrow = 0{,}01\frac{\text{cm}^2}{\text{s}} = 0{,}01\frac{\text{cm}^2(0{,}01\text{ m/cm})^2(1\text{ ft}/0{,}3048\text{ m})^2}{\text{s}} = 0{,}0000108\frac{\text{ft}^2}{\text{s}} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

- *Comentario*. El resultado (*b*) se podría haber obtenido directamente del (*a*) dividiendo éste por el factor de conversión 47,88 dado en la Tabla 1.2. En el Apéndice C se dan más factores de conversión entre unidades SI y del sistema británico.

Insistimos en el consejo: si aparecen datos con unidades no usuales se deben convertir al SI o al sistema británico, porque (1) es más profesional y (2) las ecuaciones teóricas de la Mecánica de Fluidos son *dimensionalmente consistentes* y no requieren factores de conversión cuando se usan los sistemas citados, como muestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1.3

Una de las ecuaciones teóricas más útiles es la que relaciona la presión, la velocidad y la altura en el flujo estacionario de un fluido incompresible no viscoso con transferencia de calor despreciable,[7] llamada *ecuación de Bernoulli*, por Daniel Bernoulli, que publicó un libro de hidrodinámica en 1738:

$$p_0 = p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 + \rho g Z \qquad (1)$$

donde p_0 = presión de remanso
p = presión en el fluido
V = velocidad

[7] Este conjunto de hipótesis se estudiará con detalle en el Capítulo 3.

www.elsolucionario.net

ρ = densidad
Z = altura
g = aceleración de la gravedad

(*a*) Demuestre que la Ecuación (1) satisface el principio de homogeneidad dimensional, que establece que todos los términos aditivos en una ecuación física deben tener las mismas dimensiones. (*b*) Demuestre que en el SI las unidades son consistentes sin necesidad de factores de conversión. (*c*) Repita el apartado (*b*) para el sistema británico.

Solución

Apartado (*a*)

Podemos expresar la Ecuación (1) dimensionalmente, usando llaves para representar las dimensiones de cada término:

$$\{ML^{-1}T^{-2}\} = \{ML^{-1}T^{-2}\} + \{ML^{-3}\}\{L^2T^{-2}\} + \{ML^{-3}\}\{LT^{-2}\}\{L\} = \{ML^{-1}T^{-2}\} \text{ para todos los términos} \quad \textit{Resp.}\ (a)$$

Apartado (*b*)

Poniendo las unidades del SI para cada cantidad, tomadas de la Tabla 1.2:

$$\{N/m^2\} = \{N/m^2\} + \{kg/m^3\}\{m^2/s^2\} + \{kg/m^3\}\{m/s^2\}\{m\} = \{N/m^2\} + \{kg/(m \cdot s^2)\}$$

El segundo miembro parece complicado, pero no lo es si se recuerda, por medio de la Ecuación (1.3), que 1 kg = 1 $(N \cdot s^2)/m$.

$$\{kg/(m\,\Delta s^2)\} = \frac{\{N\,\Delta s^2/m\}}{\{m\,\Delta s^2\}} = \{N/m^2\} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

De esta forma todos los términos de la ecuación de Bernoulli tienen unidades de pascales, o newtones por metro cuadrado, al utilizar el SI. No se necesitan factores de conversión, lo cual es cierto para todas las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos.

Apartado (*c*)

Introduciendo las unidades del sistema británico, tenemos

$$\{lbf/ft^2\} = \{lbf/ft^2\} + \{slugs/ft^3\}\{ft^2/s^2\} + \{slugs/ft^3\}\{ft/s^2\}\{ft\} = \{lbf/ft^2\} + \{slugs/(ft \cdot s^2)\}$$

Pero, por medio de la Ecuación (1.3), 1 slug = 1 $lbf \cdot s^2/ft$, de modo que

$$\{slugs/(ft\,\Delta s^2)\} = \frac{\{lbf\,\Delta s^2/ft\}}{\{ft\,\Delta s^2\}} = \{lbf/ft^2\} \qquad \textit{Resp.}\ (c)$$

Todos los términos tienen unidades de libra-fuerza por pie cuadrado. Tampoco en el sistema británico se necesitan factores de conversión.

Aún persiste en los países anglosajones la tendencia a usar libras-fuerza por pulgada cuadrada como unidad de presión, porque los números son más manejables. Por ejemplo, la presión atmosférica estándar es 101.300 Pa = 14,7 lbf/in^2 = 2116 lbf/ft^2. El pascal es una unidad muy pequeña, pues un newton es menos de $\frac{1}{4}$ de lbf y un metro cuadrado un área muy grande. A pesar de lo cual el pascal va ganando aceptación; por ejemplo, los manuales de reparación de los automóviles americanos especifican ya las medidas de presión es pascales.

Unidades consistentes

Las ecuaciones de la mecánica (de fluidos) no sólo deben ser dimensionalmente homogéneas, sino que además se deben usar *unidades consistentes*; esto es, todos los términos aditivos en una ecuación física deben

www.elsolucionario.net

tener las mismas unidades. Esto no supone ningún problema si se usa el SI o el sistema británico, como en el Ejemplo 1.3, pero puede resultar fatal para quienes traten de mezclar unidades inglesas coloquiales. Por ejemplo, en el Capítulo 9 usaremos a menudo la hipótesis de flujo gaseoso compresible, adiabático y estacionario:

$$h + \tfrac{1}{2}V^2 = \text{constante}$$

donde h es la entalpía del fluido y $V^2/2$ es su energía cinética por unidad de masa. Las tablas termodinámicas coloquiales podrían expresar h en unidades térmicas inglesas por unidad de masa (Btu/lb), mientras que V suele expresarse en ft/s. Es totalmente erróneo sumar Btu/lb y ft^2/s^2. En este caso, la unidad adecuada para la entalpía es ft · lbf/slug, que es idéntica a ft^2/s^2. El factor de conversión es 1 Btu/lb Ξ 25.040 ft^2/s^2 = 25.040 ft · lbf/slug.

Ecuaciones homogéneas frente a ecuaciones dimensionalmente inconsistentes

Todas las ecuaciones teóricas de la mecánica (y de otras ramas de la física) son *dimensionalmente homogéneas*; esto es, todos los términos aditivos de la ecuación tienen las mismas dimensiones. Por ejemplo, la ecuación de Bernoulli (1) del Ejemplo 1.3 es dimensionalmente homogénea: todos los términos tienen dimensiones de presión o esfuerzo $\{F/L^2\}$. Otro ejemplo es la ecuación de la física para un cuerpo en caída libre cuando se desprecia la resistencia aerodinámica:

$$S = S_0 + V_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2$$

donde S_0 es la posición inicial, V_0 es la velocidad inicial y g es la aceleración de la gravedad. Cada término en esta ecuación tiene dimensiones de longitud $\{L\}$. El factor $\frac{1}{2}$, que proviene de la integración, es simplemente un número (adimensional), $\{1\}$. El exponente 2 también es adimensional.

Sin embargo, se debe advertir al lector que muchas fórmulas empíricas usadas en ingeniería, principalmente las obtenidas de correlaciones de datos, no son dimensionalmente consistentes. Sus unidades no pueden reconciliarse de forma sencilla, y algunos términos pueden contener variables ocultas. Un ejemplo es la fórmula que utilizan los fabricantes de válvulas de tuberías para calcular el caudal Q (m^3/s) a través de una válvula parcialmente abierta:

$$Q = C_V \left(\frac{\Delta p}{S} \right)^{1/2}$$

donde Δp es la caída de presiones a través de la válvula y S es la densidad relativa del líquido (el cociente entre su densidad y la del agua). La cantidad C_V es el *coeficiente de flujo de la válvula*, que los fabricantes tabulan en sus folletos. Dado que S es adimensional $\{1\}$, la fórmula resulta totalmente inconsistente, pues un lado tiene dimensiones de caudal $\{L^3/T\}$ y el otro de raíz cuadrada de salto de presiones $\{M^{1/2}/L^{1/2}T\}$. De aquí se deduce que C_V debe tener dimensiones, de hecho bastante raras: $\{L^{7/2}/M^{1/2}\}$. La resolución de esta discrepancia no está clara, aunque en la literatura se observa que los valores de C_V aumentan aproximadamente como el cuadrado del tamaño de la válvula. La presentación de datos experimentales en forma homogénea es el objetivo del *análisis dimensional* (Capítulo 5). En dicho capítulo aprenderemos que una forma homogénea de la relación para el caudal de la válvula es

$$Q = C_d A_{\text{apertura}} \left(\frac{\Delta p}{\rho} \right)^{1/2}$$

donde ρ es la densidad del líquido y A el área de apertura de la válvula. El *coeficiente de descarga* C_d es adimensional y cambia muy poco con el tamaño de la válvula. De momento el lector debe creerse —hasta la discusión del Capítulo 5— que la última expresión constituye una forma *mucho* mejor de presentar los datos.

www.elsolucionario.net

Mientras tanto, debemos concluir que las ecuaciones dimensionalmente inconsistentes, a pesar de su abundancia en la ingeniería, pueden conducir a error y son imprecisas y hasta peligrosas, pues con frecuencia son usadas incorrectamente fuera de su rango de aplicabilidad.

Prefijos apropiados para potencias de 10

En ingeniería, los resultados suelen ser demasiado pequeños o demasiado grandes para las unidades habituales, con muchos ceros por un lado o el otro. Por ejemplo, escribir $p = 114.000.000$ Pa es largo y tedioso. Usando el prefijo «M» para decir 10^6, convertimos esto en un conciso $p = 114$ MPa (megapascales). Del mismo modo, $t = 0{,}000000003$ s es mucho más difícil de corregir que su equivalente $t = 3$ ns (nanosegundos). Tales prefijos son comunes y convenientes, tanto en el SI como en el sistema británico. En la Tabla 1.3 se da la lista completa.

Tabla 1.3. Prefijos apropiados para unidades en ingeniería.

Factor multiplicativo	Prefijo	Símbolo
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 1.4

En 1890, Robert Manning, un ingeniero irlandés, propuso la siguiente fórmula empírica para la velocidad media V en el movimiento uniforme en canales abiertos (en el sistema británico de unidades):

$$V = \frac{1{,}49}{n} R^{2/3} S^{1/2} \tag{1}$$

donde R = radio hidráulico del canal (Capítulos 6 y 10)
S = pendiente del canal (tangente del ángulo de la base respecto a la horizontal)
n = factor de rugosidad de Manning (Capítulo 10)

y n es constante para cada condición de acabado superficial de las paredes y el fondo del canal. (*a*) ¿Es dimensionalmente consistente la fórmula de Manning? (*b*) La Ecuación (1) se considera válida en unidades del sistema británico tomando n como adimensional. Reescriba la ecuación en el SI.

Solución

- *Consideraciones*. La pendiente, por ser la tangente de un ángulo, es adimensional y aparece como {1} —es decir, no contiene M, L o T.
- *Apartado* (*a*). Escribimos las dimensiones de cada término de la fórmula de Manning usando paréntesis {}:

$$\{V\} = \left\{\frac{1{,}49}{n}\right\}\{R^{2/3}\}\{S^{1/2}\} \quad \text{o} \quad \left\{\frac{L}{T}\right\} = \left\{\frac{1{,}49}{n}\right\}\{L^{2/3}\}\{1\}$$

www.elsolucionario.net

Esta fórmula no puede ser consistente a menos que $\{1{,}49/n\} = \{L^{1/3}/T\}$. Si n es adimensional (como aparece siempre en los libros), el valor numérico 1,49 debe tener unidades de $\{L^{1/3}/T\}$. *Resp.* (*a*)

- *Comentario* (*a*). Esto puede ser trágico para un ingeniero que trabaje en un sistema de unidades diferente a menos que se dé cuenta de la discrepancia. De hecho, la fórmula de Manning, aunque es muy conocida, es inconsistente tanto dimensional como físicamente, no tiene en cuenta de modo correcto los efectos de la rugosidad del canal salvo para un rango muy estrecho de rugosidades y sólo es válida para el agua. Los efectos de la viscosidad y la densidad del agua están ocultos en el valor numérico 1,49.
- *Apartado* (*b*). Del apartado anterior sabemos que el número 1,49 debe tener dimensiones, y por eso en el sistema británico debe ser 1,49 $\text{ft}^{1/3}/\text{s}$. Utilizando el factor de conversión al SI para la longitud, tenemos

$$(1{,}49\ \text{ft}^{1/3}/\text{s})(0{,}3048\ \text{m/ft})^{1/3} = 1{,}00\ \text{m}^{1/3}/\text{s}$$

Por tanto, la fórmula de Manning en el SI es:

$$\text{Unidades SI}: \quad V = \frac{1{,}0}{n} R^{2/3} S^{1/2} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

con R en metros y V en metros por segundo.

- *Comentario* (*b*). Realmente, estamos despistando al lector: Manning, usuario del sistema métrico, propuso la fórmula de esta manera; posteriormente fue pasada al sistema británico. Estas fórmulas dimensionalmente inconsistentes son peligrosas y deberían ser reanalizadas o aplicadas sólo en casos muy concretos.

1.5. PROPIEDADES DEL CAMPO DE VELOCIDADES

En un flujo dado, la determinación experimental o teórica de las propiedades del fluido en función de la posición y del tiempo se considera la *solución* del problema. En casi todos los casos, el énfasis se hace sobre la distribución espacio-temporal de las propiedades fluidas. Raramente se siguen las trayectorias de partículas fluidas concretas.[8] Este tratamiento de las propiedades como funciones continuas distingue la Mecánica de Fluidos de la de Sólidos, donde habitualmente el interés se centra más en las trayectorias de sistemas o partículas individuales.

Descripciones euleriana y lagrangiana

Hay dos puntos de vista posibles para analizar los problemas de la mecánica. El primero, apropiado para la Mecánica de Fluidos, trata del campo de flujo y se denomina método descriptivo *euleriano*. En el método euleriano calculamos el campo de presiones $p(x, y, z, t)$ del flujo, y no los cambios de presión $p(t)$ que experimenta una partícula al moverse.

El segundo método, que sigue a las partículas en su movimiento, se denomina descripción *lagrangiana*. Este método, muy apropiado en Mecánica de Sólidos, no será considerado en este libro. Sin embargo, los análisis numéricos de algunos flujos con límites muy marcados, como el movimiento de gotitas aisladas, se llevan a cabo mejor en coordenadas lagrangianas [1].

Las mediciones en Mecánica de Fluidos también están bien adaptadas al sistema euleriano. Por ejemplo, cuando se introduce una sonda de presión en un flujo experimental, la medición se produce en un punto fijo (x, y, z). Las medidas contribuyen por tanto a describir el campo de presiones euleriano $p(x, y, z, t)$. Para simular una medida lagrangiana la sonda debería moverse aguas abajo con la velocidad del fluido; este tipo de mediciones se practican a veces en oceanografía, dejando a la deriva los aparatos de medición que son arrastrados por las corrientes dominantes.

Un ejemplo ilustrativo de ambas descripciones puede ser el análisis del tráfico en una autopista. Seleccionemos un cierto tramo para estudio y determinación del tráfico. Obviamente, con el transcurso del

[8] Un caso en que las trayectorias son importantes es el análisis de calidad del agua en lo que respecta a las partículas contaminantes.

www.elsolucionario.net

tiempo varios coches entrarán y saldrán del tramo, y la identidad de los mismos estará cambiando continuamente. El ingeniero de tráfico ignora la identidad de los coches y se concentra en su velocidad media, medida como función de la posición dentro del tramo y del tiempo, y también estudia el flujo o número de coches por hora que pasan por una cierta sección de la autovía. Este ingeniero realiza una descripción euleriana del tráfico. Otros investigadores, como la policía o los sociólogos, pueden estar interesados en la velocidad y trayectoria de determinados coches. Siguiendo a éstos realizan una descripción lagrangiana del tráfico.

El campo de velocidades

La más importante de todas las propiedades del flujo es el campo de velocidades $\mathbf{V}(x, y, z, t)$. De hecho, determinar la velocidad es a menudo equivalente a resolver el problema, ya que otras propiedades se obtienen directamente de aquélla. El Capítulo 2 está dedicado al cálculo de la presión una vez conocido el campo de velocidades. Los libros que tratan sobre transferencia de calor (por ejemplo, Referencia 10) están especialmente dedicados a encontrar el campo de temperaturas a partir del de velocidades.

En general, la velocidad es un vector, función de la posición y del tiempo, que tiene tres componentes escalares u, v y w:

$$V(x, y, z, t) = \mathbf{i}u(x, y, z, t) + \mathbf{j}v(x, y, z, t) + \mathbf{k}w(x, y, z, t) \tag{1.4}$$

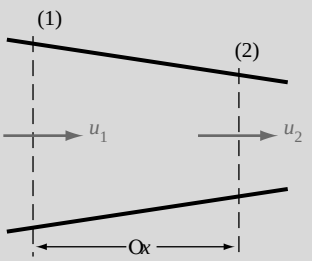
El uso de u, v y w en lugar de V_x, V_y y V_z, más lógicas, se debe a una duradera tradición fluidodinámica.

Como muestra el siguiente ejemplo, el vector aceleración también es importante en Mecánica de Fluidos.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 1.5

Un fluido fluye a través de una sección convergente de un conducto, como muestra la Figura E1.5. Una sonda de velocidad inmersa en la sección (1) mide un valor estacionario $u_1 = 1$ m/s, mientras que una sonda similar en la sección (2) detecta un valor estacionario $u_2 = 3$ m/s. Estime la aceleración del fluido, si existiera, si $\Delta x = 10$ cm.



E1.5

Solución

El flujo es estacionario (no varía con el tiempo), pero claramente la velocidad de las partículas fluidas aumenta al pasar de (1) a (2). Éste es el concepto de *aceleración convectiva* (Sección 4.1). Podemos estimar la aceleración como el incremento de velocidad dividido por el incremento de tiempo $\Delta t = \Delta x / u_{med}$:

$$a_x \approx \frac{\text{incremento de velocidad}}{\text{incremento de tiempo}} \approx \frac{u_2 - u_1}{\Delta x / \left[\frac{1}{2}(u_1 + u_2)\right]} = \frac{(3{,}0 \text{ m/s} - 1{,}0 \text{ m/s})}{(0{,}1 \text{ m})/\left[\frac{1}{2}(1{,}0 \text{ m/s} + 3{,}0 \text{ m/s})\right]} \approx 40 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

www.elsolucionario.net

Una simple estimación indica por tanto que este flujo, aparentemente inocuo, sufre una aceleración de cuatro veces la aceleración de la gravedad. En el límite en que Δx y Δt se hacen muy pequeños, nuestra estimación se reduce a una derivada parcial que representa la aceleración convectiva en la dirección x:

$$a_{x,\,\text{convectiva}} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = u \frac{\partial u}{\partial x}$$

En un flujo tridimensional (Sección 4.1) existen nueve términos convectivos de este tipo.

1.6. PROPIEDADES TERMODINÁMICAS DE UN FLUIDO

Aunque el campo de velocidades **V** es la propiedad más importante del flujo, éste interactúa con las propiedades termodinámicas del fluido. A lo largo de la discusión precedente hemos introducido las tres más importantes:

1. Presión p
2. Densidad ρ
3. Temperatura T

Son los compañeros permanentes de la velocidad en el análisis de los flujos. Al entrar en juego el trabajo, el calor y el equilibrio energético aparecen otras cuatro propiedades termodinámicas (Capítulos 3 y 4):

4. Energía interna $\hat{u}$
5. Entalpía $h = \hat{u} + p/\rho$
6. Entropía s
7. Calores específicos c_p y c_v

www.elsolucionario.net

Por otro lado, los efectos de fricción y conducción de calor están gobernados por los denominados *coeficientes de transporte*:

8. Coeficiente de viscosidad μ
9. Conductividad térmica k

Estas nueve magnitudes son auténticas propiedades termodinámicas, que se determinan por la condición termodinámica o *estado* del fluido. Por ejemplo, en una sustancia con una sola fase como oxígeno o agua, es suficiente conocer dos de las propiedades básicas independientes[9], como presión y temperatura, para determinar las demás:

$$\rho = \rho(p, T) \quad h = h(p, T) \quad \mu = \mu(p, T) \tag{1.5}$$

y así para todas las magnitudes de la lista. Nótese que el volumen específico, tan importante en termodinámica, es omitido aquí en favor de su inverso, la densidad ρ.

Recuérdese que las propiedades termodinámicas describen el estado del *sistema*, esto es, una porción de materia de identidad conocida que interactúa con su entorno. En la mayor parte de los casos este sistema será una partícula fluida y todas las propiedades serán funciones continuas en el campo fluido: $\rho = \rho(x, y, z, t)$, etc.

Recuérdese también que la termodinámica estudia normalmente sistemas *estáticos*, mientras que los fluidos se encuentran habitualmente en movimiento cambiando todas las propiedades constantemente. Las propiedades termodinámicas estáticas, ¿conservan su significado en un flujo que está técnicamente fuera del equilibrio? La respuesta es sí, desde un punto de vista estadístico. En gases a las presiones normales (y más aún en líquidos) tiene lugar un número enorme de colisiones o interacciones moleculares en dis-

[9] La definición de propiedad básica independiente puede encontrarse en cualquier libro avanzado de termodinámica (*N. del T.*).

www.elsolucionario.net

tancias tan pequeñas como 1 μm, de modo que un fluido sujeto a cambios repentinos se ajusta casi inmediatamente al nuevo equilibrio. Suponemos, por tanto, que todas las propiedades termodinámicas indicadas anteriormente existen como funciones del punto en un flujo y siguen las leyes y relaciones de estado ordinarias del equilibrio termodinámico. Hay, por supuesto, efectos importantes de no equilibrio en reacciones químicas y nucleares en fluidos, pero no serán estudiados en este libro.

Presión

La presión es el esfuerzo (de compresión) en un punto en un fluido en reposo (Figura 1.1). Después de la velocidad, la presión p es la variable más significativa en la dinámica de un fluido. Las diferencias o *gradientes* de presión son generalmente las responsables del flujo, especialmente cuando es en conductos. En flujos a baja velocidad, la magnitud real de la presión suele no ser importante, a menos que baje tanto como para provocar la formación de burbujas de vapor en los líquidos. Por conveniencia, a este tipo de problemas se le suele asignar un nivel de presión de 1 atm = 2116 lbf/ft^2 = 101.300 Pa. Por el contrario, los flujos (compresibles) de gases a alta velocidad (Capítulo 9) sí que dependen del valor absoluto de la presión.

Temperatura

La temperatura T está relacionada con el nivel de energía interna del fluido. Puede variar considerablemente durante el flujo compresible de un gas (Capítulo 9). A pesar del extenso uso que hacen los ingenieros de las escalas Celsius y Fahrenheit, muchas de las aplicaciones de este libro requieren la utilización de temperaturas *absolutas* (Kelvin o Rankine):

$$°R = °F + 459{,}69$$
$$K = °C + 273{,}16$$

www.elsolucionario.net

Si las diferencias de temperatura son fuertes, la *transferencia de calor* puede ser importante [10], si bien aquí nuestro interés se centra en la dinámica.

Densidad

La densidad de un fluido, denominada ρ (rho griega minúscula), es su masa por unidad de volumen. La densidad varía mucho en los gases, aumentando casi de forma proporcional a la presión. La densidad de los líquidos en casi constante; la densidad del agua (alrededor de 1000 kg/m^3) tan sólo se incrementa en un 1 por 100 cuando la presión se multiplica por un factor de 220. Por lo tanto, la mayoría de los líquidos se pueden considerar casi «incompresibles».

En general, los líquidos son tres órdenes de magnitud más densos que los gases a presión atmosférica. El líquido más pesado es el mercurio, y el gas más ligero, el hidrógeno. Compare sus densidades a 20 °C y 1 atm:

$$\text{Mercurio: } \rho = 13.580 \text{ kg/m}^3 \qquad \text{Hidrógeno: } \rho = 0{,}0838 \text{ kg/m}^3$$

¡Ambas difieren en un factor de 162.000! Así pues, los parámetros físicos pueden variar considerablemente entre los distintos líquidos y gases. Estas diferencias suelen resolverse mediante el uso del *análisis dimensional* (Capítulo 5). En las Tablas A.3 y A.4 (del Apéndice A) se dan las densidades de otros fluidos.

Peso específico

El *peso específico* de un fluido es su peso por unidad de volumen. Al igual que una masa m tiene un peso $W = mg$, la densidad y el peso específico están relacionados por la gravedad:

$$\text{Peso específico} \equiv \rho g \tag{1.6}$$

www.elsolucionario.net

Las unidades del peso específico son peso por unidad de volumen, en lbf/ft^3 o N/m^3. El valor estándar de la aceleración de la gravedad terrestre es g = 32,174 ft/s^2 = 9,807 m/s^2. Así, por ejemplo, el peso específico del aire y el agua a 20 °C y 1 atm son aproximadamente

$$\rho_{aire} g = (1{,}205 \text{ kg/m}^3)(9{,}807 \text{ m/s}^2) = 11{,}8 \text{ N/m}^3 = 0{,}0752 \text{ lbf/ft}^3$$
$$\rho_{agua} g = (998 \text{ kg/m}^3)(9{,}807 \text{ m/s}^2) = 9790 \text{ N/m}^3 = 62{,}4 \text{ lbf/ft}^3$$

El peso específico es muy útil en las aplicaciones de la presión hidrostática, que veremos en el Capítulo 2. En las Tablas A.3 y A.4 se dan los pesos específicos de otros fluidos.[10]

Densidad relativa

La densidad relativa, denominada S, es la relación entre la densidad del fluido y la de un fluido estándar de referencia, típicamente el agua a 4 °C (para los líquidos) y el aire (para los gases):

$$S_{gas} = \frac{\overleftarrow{\text{gas}}}{\overleftarrow{\text{aire}}} = \frac{\overleftarrow{\text{gas}}}{1205 \text{ kg/m}^3} \tag{1.7}$$
$$S_{líquido} = \frac{\overleftarrow{\text{líquido}}}{\overleftarrow{\text{agua}}} = \frac{\overleftarrow{\text{líquido}}}{1000 \text{ kg/m}^3}$$

Por ejemplo, la densidad relativa del mercurio (Hg) es S_{Hg} = 13.580/1000 Ξ 13,6. Para los ingenieros resulta más sencillo recordar estos valores que los valores numéricos exactos de la densidad de los distintos fluidos.

Energías potencial y cinética

www.elsolucionario.net

En termostática, la única energía asociada a una sustancia es la almacenada en el sistema por la actividad molecular y las fuerzas asociadas a los enlaces químicos. A ésta se le denomina *energía interna* $\hat{u}$. En los flujos, a esta energía se le deben añadir dos términos más, procedentes de la mecánica newtoniana: la energía potencial y la energía cinética.

La energía potencial es el trabajo necesario para mover al sistema de masa m desde el origen hasta una posición $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ venciendo al campo gravitatorio $\mathbf{g}$. Su valor es $-m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$, o $-\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$ por unidad de masa. La energía cinética es el trabajo que se requiere para cambiar la velocidad desde cero hasta V. Su valor es $\frac{1}{2}mV^2$ o $\frac{1}{2}V^2$ por unidad de masa. Por todo ello, la energía interna por unidad de masa e se escribe convencionalmente en Mecánica de Fluidos como suma de tres términos:

$$e = \hat{u} + \tfrac{1}{2}V^2 + (-\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) \tag{1.8}$$

En este libro definiremos siempre z positiva hacia arriba; de modo que $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ y $\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} = -gz$. Entonces la Ecuación (1.8) se escribe

$$e = \hat{u} + \tfrac{1}{2}V^2 + gz \tag{1.9}$$

La energía interna molecular $\hat{u}$ es función de T y de p para una sustancia pura con una sola fase, mientras que las energías potencial y cinética son propiedades cinemáticas.

Ecuaciones de estado para gases

Las propiedades termodinámicas se pueden relacionar entre sí, tanto teórica como experimentalmente, por medio de relaciones o ecuaciones de estado que varían de una sustancia a otra. Como se mencionó ante-

[10] En la literatura anglosajona el peso específico suele denotarse con la letra γ (gamma griega minúscula) y la relación de calores específicos con la letra k. Sin embargo, siguiendo una tradición muy extendida en Mecánica de Fluidos, utilizaremos aquí el símbolo γ para la relación de calores específicos y el producto ρg para denotar el peso específico (*N. del T.*).

www.elsolucionario.net

riormente, nos referiremos en este libro sólo a sustancias puras con una fase, por ejemplo, agua en su fase líquida. El segundo fluido más común, el aire, es una mezcla de gases, pero como las proporciones de la mezcla permanecen casi constantes entre los 160 y 2200 K, en este rango se puede considerar como una sustancia pura.

Todos los gases a altas temperaturas y bajas presiones (relativas a su punto crítico) siguen muy bien la *ley de los gases perfectos*

$$\boxed{p = \rho RT \qquad R = c_p - c_v = \text{constante del gas}} \tag{1.10}$$

donde los calores específicos c_p y c_v se definen en las Ecuaciones (1.14) y (1.15).

Como la Ecuación (1.10) es dimensionalmente consistente, R tiene las mismas dimensiones que un calor específico, $\{L^2T^{-2}\Theta^{-1}\}$, o velocidad al cuadrado dividida por grado (Kelvin o Rankine). Cada gas tiene su propia constante R, igual a una constante universal Λ dividida por el peso molecular

$$R_{\text{gas}} = \frac{\upsilon}{M_{\text{gas}}} \tag{1.11}$$

donde $\Lambda = 49.700$ ft · lbf/(slugmol · °R) = 8314 kJ/(kmol · K). La mayoría de las aplicaciones de este libro son para aire, $M = 28{,}97$/mol:

$$R_{\text{aire}} = \frac{49.700 \text{ ft} \cdot \text{lbf}/(\text{slugmol} \cdot ^\circ\text{R})}{28{,}97/\text{mol}} = 1716 \frac{\text{ft} \cdot \text{lbf}}{\text{slug} \cdot ^\circ\text{R}} = 1716 \frac{\text{ft}^2}{\text{s}^2 \cdot ^\circ\text{R}} = 287 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{K}} \tag{1.12}$$

La presión atmosférica estándar es 2116 lbf/ft^2 = 2116 slug/(ft · s^2) y la temperatura estándar es 288 K = 60 °F = 520 °R. Por tanto, la densidad estándar del aire es

$$\rho_{\text{aire}} = \frac{2116 \text{ slug}/(\text{ft} \cdot \text{s}^2)}{[1716 \text{ ft}^2/(\text{s}^2 \cdot ^\circ\text{R})](520^\circ\text{R})} = 0{,}00237 \text{ slug/ft}^3 = 1{,}22 \text{ kg/m}^3 \tag{1.13}$$

www.elsolucionario.net

Este valor es el adecuado para los problemas. Para otros gases consúltese la Tabla A.4.

En termodinámica se demuestra que la Ecuación (1.10) requiere que la energía interna molecular $\hat{u}$ de un gas perfecto varíe sólo con la temperatura: $\hat{u} = \hat{u}(T)$. Por tanto, el calor específico c_v también variará sólo con la temperatura:

$$c_v = \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial T}\right)_{\rho} = \frac{d\hat{u}}{dT} = c_v(T)$$

o

$$d\hat{u} = c_v(T)dT \tag{1.14}$$

Del mismo modo la entalpía h y el calor específico c_p de un gas perfecto también dependen exclusivamente de la temperatura:

$$h = \hat{u} + \frac{p}{\rho} = \hat{u} + RT = h(T)$$

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_{p} = \frac{dh}{dT} = c_p(T) \tag{1.15}$$

$$dh = c_p(T)dT$$

www.elsolucionario.net

La relación de calores específicos de un gas perfecto es un parámetro adimensional muy importante en el análisis de los flujos compresibles (Capítulo 9):

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \gamma(T) \text{ B1} \tag{1.16}$$

Como primera aproximación, para los flujos de aire se considera normalmente que c_p, c_v y γ son constantes:

$$\gamma_{\text{aire}} \approx 1,4$$
$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \approx 4293 \text{ ft}^2/(\text{s}^2 \cdot ^\circ\text{R}) = 718 \text{ m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K}) \tag{1.17}$$
$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \approx 6010 \text{ ft}^2/(\text{s}^2 \cdot ^\circ\text{R}) = 1005 \text{ m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})$$

En realidad, c_p y c_v aumentan gradualmente con la temperatura en todos los gases, y γ decrece gradualmente. En la Figura 1.3 se muestran los valores experimentales de la relación de calores específicos de ocho gases típicos.

En muchos de los problemas ingenieriles interviene el vapor de agua; pero sus condiciones de trabajo suelen estar cerca del punto crítico y la aproximación de gas perfecto no es fiable. Al no existir fórmulas simples suficientemente precisas, las propiedades del vapor de agua se pueden encontrar tanto tabuladas

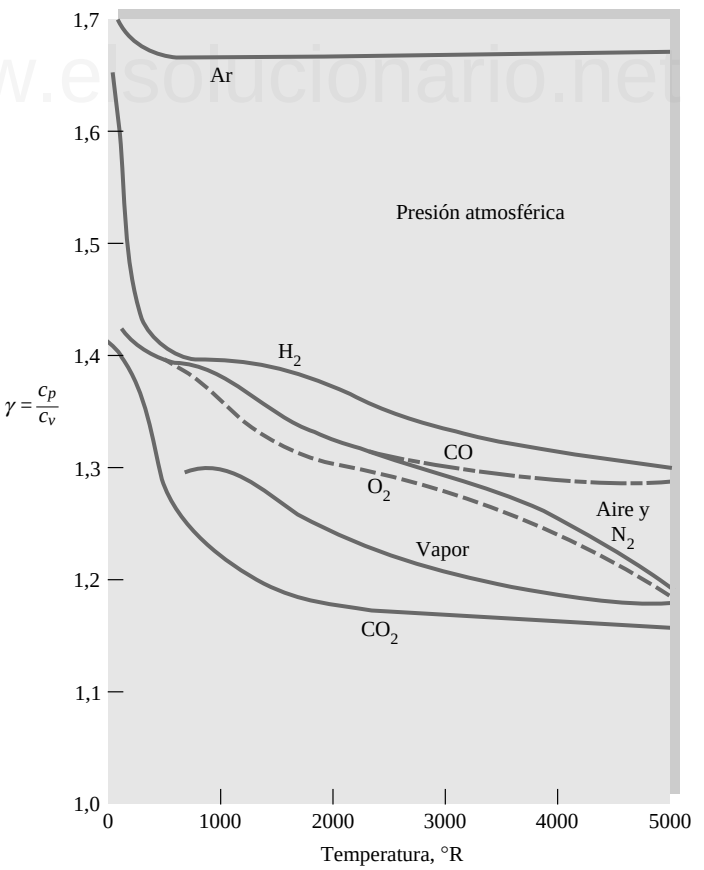


Figura 1.3. Relación de calores específicos de ocho gases comunes en función de la temperatura. (*Los datos proceden de la Referencia 12.*)

www.elsolucionario.net

como en CD-ROM [13], e incluso en Internet como un pequeño programa de MathPad Corp. [39]. A menudo, el error cometido al usar la ley de los gases perfectos no es demasiado importante, como muestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1.6

Estime ρ y c_p del vapor de agua a 100 lbf/in^2 y 400 °F, en unidades inglesas, (*a*) mediante la aproximación de gas perfecto y (*b*) usando las tablas ASME [13] o el programa EES.

Solución

- *Procedimiento* (*a*), *ley de los gases perfectos*. Aunque el vapor de agua no es un gas ideal, podemos estimar estas propiedades con cierta exactitud usando las Ecuaciones (1.10) y (1.17). En primer lugar convertimos la presión de 100 lbf/in^2 a 14.400 lbf/ft^2, y usamos temperaturas absolutas, (400 °F + 460) = 860 °R. A continuación necesitamos la constante del vapor, en unidades inglesas. De la Tabla A.4, el peso molecular del H_2O es 18,02, de donde

$$R_{\text{vapor}} = \frac{\upsilon_{\text{inglesas}}}{M_{H_2O}} = \frac{49.700\ \text{ft·lbf/(slugmol °R)}}{18,02/\text{mol}} = 2758\frac{\text{ft·lbf}}{\text{slug °R}}$$

El valor de la densidad se puede estimar entonces de la ley de los gases perfectos, Ecuación (1.10):

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{14.400\ \text{lbf/ft}^2}{[2758\ \text{ft·lbf/(slug·°R)}](860°\text{R})} = 0,00607\frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

A 860 °R, de la Figura 1.3, $\gamma_{\text{vapor}} = c_p/c_v = 1,30$. Por tanto, de la Ecuación (1.17),

$$c_p = \frac{\Re}{\mathcal{M}\Phi 1} = \frac{(1,3)(2758\ \text{ft·lbf/(slug °R)})}{(1,3)} = 12.000\frac{\text{ft·lbf}}{\text{slug °R}} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

www.elsolucionario.net

- *Procedimiento* (*b*), *tablas o software*. Se pueden consultar las tablas de vapor o programar unas líneas en EES. En cualquier caso, no conviene aplicar las unidades inglesas (psi, Btu, lbm) a las fórmulas de la Mecánica de Fluidos. Aún así, cuando use EES asegúrese de que el menú «*Variable Info*» especifica unidades inglesas[11]: psia y °F. Los comandos EES para evaluar la densidad y el calor específico del vapor son, para estas condiciones,

```
Rho = DENSITY(steam, P = 100,T = 400)
Cp = SPECHEAT(steam, P = 100,T = 400)
```

Nótese que el software está configurado para usar psia y °F, sin conversión. EES devuelve los siguientes valores, obtenidos del ajuste de las curvas experimentales,

```
Rho = 0,2027 lbm/ft^3 ; Cp = 0,5289 Btu/(lbm-F)
```

Como se ha comentado, las unidades Btu y lbm son muy engorrosas cuando se aplican a problemas fluidodinámicos. Por lo tanto, conviene convertir a ft · lbf y slugs, para lo que se puede usar, por ejemplo, la función «*Convert*» de EES, especificando como argumentos las unidades viejas y nuevas entre comillas simples:

```
Rho2 = Rho*CONVERT('lbm/ft^3','slug/ft^3')
Cp2 = Cp*CONVERT('Btu/lbm-F','ft^2/s^2-R')
```

Nótese que (1) los antiguos valores de Rho y Cp se multiplican por la función CONVERT y (2) se supone que las unidades a la derecha del signo de división «/» en el argumento de CONVERT están en el denominador. EES proporciona estos resultados:

```
Rho2 = 0,00630 slug/ft^3 Cp2 = 13.200 ft^2/(s^2-R)
```

Resp. (*b*)

[11] En el sistema de unidades británico la unidad de presión es la libra por pie cuadrado (psi, *pounds per square inch*), pero existen dos variantes de uso común: la presión absoluta en libras por pie cuadrado (psia, *pounds per square inch absolute*) y la presión manométrica en libras por pie cuadrado (psig, *pounds per square inch gauge*) (*N. del T.*).

www.elsolucionario.net

- *Comentarios.* Las tablas de vapor proporcionan valores muy parecidos a éstos. La estimación de gas perfecto para ρ se queda corta en un 4 por 100 y en un 9 por 100 para c_p. La razón principal de estas discrepancias es que las condiciones dadas están muy cerca del punto crítico y de la línea de saturación del vapor. A temperaturas mayores y presiones menores, por ejemplo, 800 °F y 50 lbf/in^2, la ley de gases perfectos da ρ y c_p con un error menor del 1 por 100.

  Una vez más, debemos advertir que el uso de las unidades inglesas (psia, lbm, Btu) es incómodo, pues requiere continuamente factores de conversión en la mayoría de las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos. El programa EES maneja las unidades SI de forma eficiente, sin necesidad de factores de conversión.

Ecuaciones de estado para líquidos

El autor no conoce una «ley de líquidos perfectos» comparable a la de los gases. Los líquidos son casi incompresibles y tienen un único calor específico prácticamente constante. Por ello, la ecuación de estado idealizada para un líquido es

$$\rho \Xi \text{cte} \qquad c_p \Xi c_v \Xi \text{cte} \qquad dh \Xi c_p\, dT \tag{1.18}$$

La mayor parte de los problemas de este libro pueden ser abordados con estas simples relaciones. Para el agua se toma normalmente una densidad de 1000 kg/m^3 = 1,94 slugs/ft^3 y un calor específico c_p = 4210 m^2/(s^2 · K) = 25.200 ft^2/(s^2 · °R). Si se precisa mayor exactitud se pueden usar tablas como en el ejemplo anterior.

La densidad de un líquido decrece ligeramente con la temperatura y aumenta moderadamente con la presión. Despreciando el efecto de la temperatura, una relación presión-densidad empírica para líquidos es

$$\frac{p}{p_a} \Xi (B+1)\left(\frac{\rho}{\rho_a}\right)^n \Phi B \tag{1.19}$$

www.elsolucionario.net

donde B y n son parámetros adimensionales que varían ligeramente con la temperatura y p_a y ρ_a son los valores atmosféricos estándar. En el caso del agua, $B \Xi 3000$ y $n \Xi 7$.

El agua de mar es una mezcla variable de agua y sal y requiere por ello tres propiedades termodinámicas para definir su estado. Normalmente se toma la presión, la temperatura y la *salinidad* $\hat{S}$, definida como relación entre el peso de la sal disuelta y el peso total de la mezcla. La salinidad media del agua de mar es de 0,035, escrita usualmente como 35 partes por 1000, o 35 $^0/_{00}$. La densidad media del agua de mar es de 1030 kg/m^3. Estrictamente hablando, el agua de mar tiene tres calores específicos, todos ellos aproximadamente iguales y con el mismo valor del agua pura, 4210 m^2/(s^2 · K) = 25.200 ft^2/(s^2 · °R).

EJEMPLO 1.7

La presión en la parte más profunda del océano es de 1100 atm. Calcule la densidad del agua de mar a dicha presión.

Solución

La Ecuación (1.19) es válida también para agua de mar. Si la relación de presiones es p/p_a = 1100, tendremos

$$1100 \Xi (3001)\left(\frac{\rho}{\rho_a}\right)^7 \Phi 3000$$

o

$$\frac{\rho}{\rho_a} = \left(\frac{4100}{3001}\right)^{1/7} = 1{,}046$$

www.elsolucionario.net

Suponiendo una densidad en la superficie ρ_a = 2,00 slugs/ft^3, tenemos

$$\rho \,\Xi\, 1{,}046(2{,}00) = 2{,}09 \text{ slugs/ft}^3 \qquad \textit{Resp.}$$

Incluso a estas inmensas presiones, la densidad aumenta menos del 5 por 100, lo cual justifica que consideremos al agua incompresible.

1.7. VISCOSIDAD Y OTRAS PROPIEDADES SECUNDARIAS

Las magnitudes tales como presión, temperatura y densidad estudiadas en la sección anterior son variables termodinámicas *primarias* características de todo sistema. Existen además otras magnitudes secundarias que caracterizan el comportamiento específico de los fluidos. La más importante de éstas es la viscosidad, que relaciona el esfuerzo o tensión local en un fluido en movimiento con la velocidad de deformación de las partículas fluidas.

Viscosidad

La viscosidad es una medida cuantitativa de la resistencia de un fluido a fluir. Más concretamente, la viscosidad determina la velocidad de deformación del fluido cuando se le aplica un esfuerzo cortante dado. Podemos movernos fácilmente a través del aire, que tiene una viscosidad muy baja. El movimiento es más difícil en el agua, con una viscosidad 50 veces mayor; pero aún es más difícil en aceite SAE 30, que es 300 veces más viscoso que el agua. Trate de deslizar su mano por glicerina, cinco veces más viscosa que el aceite SAE 30, o por melaza, aún cinco veces más viscosa que la glicerina. Como puede verse, los fluidos pueden tener un amplio rango de viscosidades.

Consideremos una partícula fluida sometida a un esfuerzo cortante de valor τ en un plano, como indica la Figura 1.4*a*. El ángulo $\delta\theta$ de la deformación aumentará continuamente con el tiempo mientras siga actuando el esfuerzo τ, moviéndose la superficie superior con una velocidad δu mayor que la de la inferior. Los fluidos comunes como el agua, el aceite y el aire presentan una relación lineal entre el esfuerzo aplicado y la velocidad de deformación resultante

$$\Downarrow - \frac{\delta \mathcal{N}}{\delta \mathcal{D}} \tag{1.20}$$

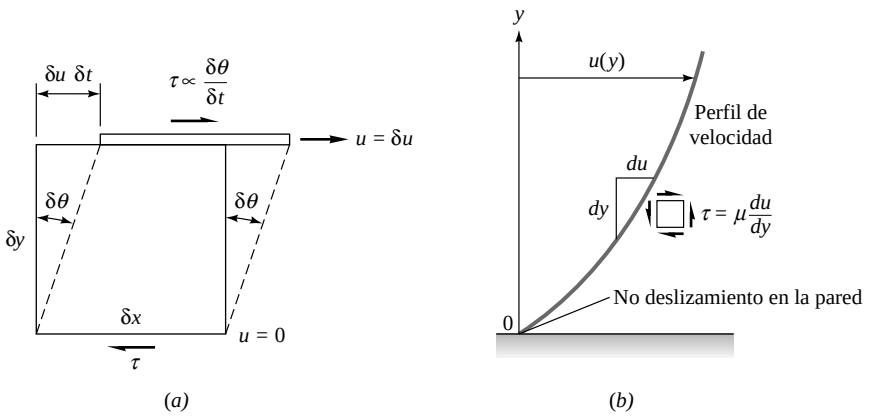


Figura 1.4. El esfuerzo cortante produce una deformación continua en el fluido: (*a*) elemento deformándose a una velocidad $\delta\theta/\delta t$; (*b*) esfuerzo cortante en un fluido newtoniano en la zona cercana a la pared.

www.elsolucionario.net

De la geometría de la Figura 1.4*a* vemos que

$$\text{tg } \delta\alpha = \frac{\delta a\, \delta b}{\delta b} \tag{1.21}$$

En el caso límite de variaciones infinitesimales, queda una relación entre la velocidad de deformación y el gradiente de la velocidad:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{du}{dy} \tag{1.22}$$

La Ecuación (1.20) indica que el esfuerzo aplicado es también proporcional al gradiente de la velocidad para los fluidos comunes. La constante de proporcionalidad es el coeficiente de viscosidad μ:

$$\tau = \mu \frac{d\alpha}{dt} = \mu \frac{du}{dy} \tag{1.23}$$

La Ecuación (1.23) es dimensionalmente consistente; por tanto, μ tiene dimensiones de esfuerzo-tiempo: $\{FT/L^2\}$ o $\{M/(LT)\}$. La unidad en el sistema británico es slug por pie y segundo, y en el SI es kilogramos por metro y segundo. Los fluidos que obedecen a la Ecuación (1.23) se denominan *fluidos newtonianos*, por Sir Isaac Newton, que propuso por primera vez esta ley en 1687.

En Mecánica de Fluidos no estudiamos la evolución de $\theta(t)$, sino que concentramos la atención en la distribución de velocidad $u(y)$, como se indica en la Figura 1.4*b*. Utilizaremos la Ecuación (1.23), en el Capítulo 4, para obtener una ecuación diferencial que nos permita hallar la distribución de velocidad $u(y)$ —y, más generalmente, $\mathbf{V}(x, y, z, t)$— en un fluido viscoso. La Figura 1.4*b* ilustra una capa de cortadura, denominada *capa límite*, cerca de una pared. El esfuerzo cortante es proporcional a la pendiente de la velocidad y es máximo en la pared. Además, en la pared, la velocidad u es cero con respecto a la pared: este hecho recibe el nombre de *condición de no deslizamiento* y es una característica de todos los fluidos viscosos.

La viscosidad de un fluido newtoniano es una auténtica propiedad termodinámica y varía con la temperatura y la presión. En un estado dado (p, T) hay un amplio rango de valores para los distintos fluidos más comunes. La Tabla 1.4 presenta una lista de la viscosidad de ocho fluidos a presión y temperatura estándar. Hay una variación de seis órdenes de magnitud del hidrógeno a la glicerina. Por ello habrá grandes diferencias en el comportamiento de fluidos sometidos a los mismos esfuerzos.

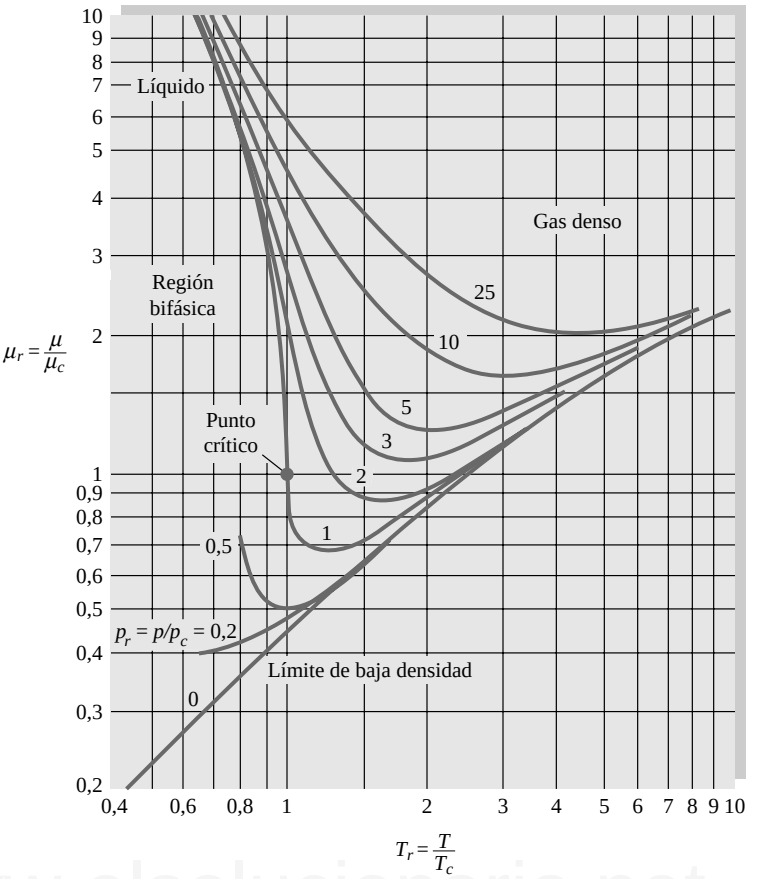
En general, la viscosidad de un fluido aumenta sólo débilmente con la presión. Por ejemplo, si la presión p aumenta de 1 a 50 atm, la viscosidad μ del aire sólo aumenta en un 10 por 100. Sin embargo, la temperatura tiene un efecto mucho más fuerte. Además, la viscosidad μ de los gases aumenta con la temperatura T, mientras que la de los líquidos disminuye. La Figura A.1 (en el Apéndice A) muestra la variación de la

Tabla 1.4. Viscosidad y viscosidad cinemática de ocho fluidos a 1 atm y 20 °C.

Fluido	μ, kg/(m · s)†	Relación $\mu/\mu(H_2)$	ρ, kg/m³	ν m²/s†	Relación ν/ν(Hg)
Hidrógeno	$8{,}8 \times 10^{-6}$	1,0	0,084	$1{,}05 \times 10^{-4}$	920
Aire	$1{,}8 \times 10^{-5}$	2,1	1,20	$1{,}51 \times 10^{-5}$	130
Gasolina	$2{,}9 \times 10^{-4}$	33	680	$4{,}22 \times 10^{-7}$	3,7
Agua	$1{,}0 \times 10^{-3}$	114	998	$1{,}01 \times 10^{-6}$	8,7
Alcohol etílico	$1{,}2 \times 10^{-3}$	135	789	$1{,}52 \times 10^{-6}$	13
Mercurio	$1{,}5 \times 10^{-3}$	170	13.580	$1{,}16 \times 10^{-7}$	1,0
Aceite SAE 30	0,29	33.000	891	$3{,}25 \times 10^{-4}$	2.850
Glicerina	1,5	170.000	1.264	$1{,}18 \times 10^{-3}$	10.300

† 1 kg/(m · s) = 0,0209 slug/(ft · s); 1 m²/s = 10,76 ft²/s.

www.elsolucionario.net



www.elsolucionario.net

Figura 1.5. Viscosidad del fluido adimensionalizada con su valor en el punto crítico. Este diagrama generalizado es característico de todos los fluidos, aunque su precisión es sólo de un ±20 por 100. (*Los datos proceden de la Referencia 14.*)

viscosidad con la temperatura para varios fluidos comunes. En la mayoría de las aplicaciones se desprecia la dependencia de la viscosidad con la presión.

En la Figura 1.5, tomada de la Referencia 14, se ha representado la dependencia $\mu(p, T)$ para un fluido típico, normalizando los datos con sus *valores en el punto crítico* (μ_c, p_c, T_c). Este comportamiento universal, llamado el *principio de los estados correspondientes*, es característico de todos los fluidos, si bien los valores numéricos reales presentan una incertidumbre del ±20 por 100 para cualquier fluido. Por ejemplo, los valores de $\mu(T)$ para el aire a 1 atm, tomados de la Tabla A.2, son alrededor de un 8 por 100 más pequeños que los que proporciona el «límite de baja densidad» de la Figura 1.5.

En la Figura 1.5 se observa que cerca del punto crítico se producen cambios muy fuertes con la temperatura. En general, las medidas en el punto crítico son extremadamente difíciles e imprecisas.

El número de Reynolds

El parámetro primario que determina el comportamiento de los fluidos newtonianos es el *número adimensional de Reynolds*:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{VL}{\nu} \tag{1.24}$$

www.elsolucionario.net

donde V y L representan la velocidad y longitud características del flujo. Como μ y ρ entran como cociente en este parámetro, dicho cociente tiene significado propio y se denomina *viscosidad cinemática*:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{1.25}$$

Las unidades de masa se cancelan, y así ν tiene dimensiones de $\{L^2/T\}$, de donde le viene el nombre de viscosidad cinemática.

En general, lo primero que se debe hacer al estudiar un flujo es estimar el valor del número de Reynolds. Valores muy pequeños de Re indican movimiento *lento* y viscoso, donde los efectos de la inercia son despreciables. Valores moderados de Re corresponden al flujo *laminar*, caracterizado por variaciones suaves. Valores altos de Re suelen estar asociados al flujo *turbulento*, caracterizado por fuertes fluctuaciones aleatorias de alta frecuencia superpuestas a un flujo medio que también experimenta variaciones suaves con el tiempo. Los valores numéricos del número de Reynolds correspondientes a cada caso dependen de la geometría del flujo y se discutirán en los Capítulos 5 a 7.

La Tabla 1.4 también da los valores de ν para los mismos ocho fluidos. Los órdenes de magnitud varían considerablemente y el mercurio, el más pesado, tiene la menor viscosidad cinemática. Todos los gases tienen una ν elevada en comparación con líquidos tales como la gasolina, el agua y el alcohol. Los aceites y la glicerina siguen teniendo los mayores valores de ν, pero el rango total de variación es menor. Para valores dados de V y L en un flujo, los diversos fluidos presentan una variación de cuatro órdenes de magnitud en el número de Reynolds.

Flujo entre placas paralelas

Un problema clásico es el flujo inducido entre una placa fija inferior y otra superior que se mueve con velocidad **V**, como se muestra en la Figura 1.6. La holgura entre las placas es h y el fluido es newtoniano y cumple la condición de no deslizamiento en ambas placas. Si las placas son largas, este flujo de cortadura estacionario conduce a un perfil de velocidades $u(y)$, como se indica, con $v = w = 0$. La aceleración del fluido es cero en todas partes.

Como la aceleración es nula, suponiendo que la presión no varía en la dirección del flujo, se puede demostrar que el equilibrio de fuerzas de un pequeño elemento fluido conduce al resultado de que el esfuerzo cortante es constante en todo el fluido. Entonces la Ecuación (1.23) se reduce a

$$\frac{du}{dy} = \frac{\tau}{\mu} = \text{cte}$$

que se puede integrar para dar

$$u = a + by$$

La distribución de velocidades es lineal, como muestra la Figura 1.6, y las constantes a y b se calculan con la condición de no deslizamiento en las paredes superior e inferior:

$$u = \begin{cases} 0 = a + b(0) & \text{en } y = 0 \\ V = a + b(h) & \text{en } y = h \end{cases}$$

Por ello $a = 0$ y $b = V/h$. El perfil de velocidad entre las placas es entonces

$$u = V\frac{y}{h} \tag{1.26}$$

como se indica en la Figura 1.6. El flujo turbulento (Capítulo 6) tiene un perfil distinto.

www.elsolucionario.net

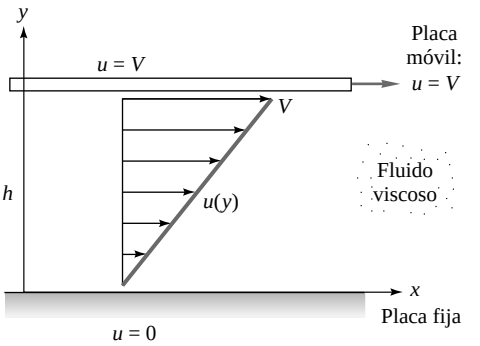


Figura 1.6. Flujo viscoso inducido por el movimiento relativo de dos placas paralelas.

Aunque la viscosidad tiene un efecto determinante en el flujo, la magnitud de los esfuerzos viscosos es muy pequeña incluso en los aceites, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.8

Supongamos que el fluido sometido a cortadura en la Figura 1.6 es aceite SAE 30 a 20 °C. Calcule el esfuerzo de cortadura en el aceite si $V = 3$ m/s y $h = 2$ cm.

Solución

- *Diagrama del sistema*. Véase la Figura 1.6.
- *Consideraciones*. Perfil de velocidades lineal, fluido newtoniano en régimen laminar, condición de no deslizamiento en ambas placas.
- *Procedimiento*. El análisis de la Figura 1.6 conduce a la Ecuación (1.26) si el flujo es laminar.
- *Valores de las propiedades*. De la Tabla 1.4, la viscosidad del aceite SAE 30 es $\mu = 0{,}29$ kg/(m · s).
- *Resolución*. En la Ecuación (1.26), la única incógnita es el esfuerzo de cortadura del fluido:

$$\tau = \mu \frac{V}{h} = 0{,}29 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \left| \frac{(3 \text{ m/s}^2)}{(0{,}02 \text{ m})} \right. = 43{,}5 \frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{\text{m}^2} = 43{,}5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 44 \text{ Pa} \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios*. Observe las relaciones entre unidades, 1 kg · m/s² ≡ 1 N y 1 N/m² ≡ 1 Pa. A pesar de que el aceite es muy viscoso, este esfuerzo cortante es modesto, alrededor de 2400 veces más pequeño que la presión atmosférica. Los esfuerzos viscosos en los gases y en los líquidos como el agua son aún más pequeños.

Variación de la viscosidad con la temperatura

La temperatura tiene un efecto considerable sobre la viscosidad, pero la presión influye mucho menos. La viscosidad de los gases y de algunos líquidos aumenta lentamente con la presión. El agua presenta un comportamiento anómalo, pues muestra una ligera disminución por debajo de los 30 °C. Como las variaciones de viscosidad representan una mínima fracción hasta 100 atm, despreciaremos el efecto de la presión en este libro.

Según hemos indicado, la viscosidad de los gases aumenta con la temperatura. Hay dos aproximaciones conocidas para describir esta variación, la ley potencial y la ley de Sutherland:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \begin{cases} \left(\dfrac{T}{T_0} \right)^n & \text{Ley potencial} \\ \dfrac{(T/T_0)^{3/2}(T_0 + S)}{T + S} & \text{Ley de Sutherland} \end{cases} \tag{1.27}$$

www.elsolucionario.net

donde μ_0 es la viscosidad conocida a una temperatura absoluta de referencia T_0 (habitualmente 273 K). Las constantes n y S se ajustan a los datos, y ambas fórmulas son adecuadas en un amplio margen de temperaturas. Para el aire, $n \Xi 0{,}7$ y $S \Xi 110$ K = 199 °R. Otros valores pueden encontrarse en la Referencia 3.

La viscosidad de los líquidos decrece con la temperatura de forma casi exponencial, $\mu \Xi ae^{-bT}$; pero se obtiene una expresión más aproximada escribiendo ln μ como función cuadrática de $1/T$, donde T es la temperatura absoluta:

$$\ln \frac{\mu}{\mu_0} \Xi a + b \left| \frac{T_0}{T} - 1 \right| + c \left| \frac{T_0}{T} - 1 \right|^2 \tag{1.28}$$

Para el agua, con T_0 = 273,16 K, μ_0 = 0,001792 kg/(m · s), los valores adecuados son a = –1,94, b = –4,80 y c = 6,74, con una fiabilidad del ±1 por 100. La viscosidad del agua aparece tabulada en la Tabla A.1. Yaws et al. [34] proporcionan fórmulas para la viscosidad de 355 líquidos orgánicos obtenidas del ajuste de datos experimentales. En las Referencias 28 y 36 se pueden encontrar datos adicionales.

Conductividad térmica

De la misma forma que la viscosidad relaciona el esfuerzo cortante con la velocidad de deformación, hay una propiedad denominada *conductividad térmica* k que relaciona el vector flujo de calor por unidad de área $\mathbf{q}$ con el vector gradiente de temperatura ∇T. Esta proporcionalidad, observada experimentalmente para fluidos y sólidos, es conocida como *ley de Fourier de la conducción del calor*:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \tag{1.29a}$$

que también puede escribirse escalarmente como:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \tag{1.29b}$$

El signo menos satisface la convención usual de considerar positivo el flujo en el sentido de las temperaturas decrecientes. La ley de Fourier es dimensionalmente consistente, y k tiene unidades SI de julios por segundo, metro y Kelvin. La conductividad térmica k es una propiedad termodinámica y varía con la temperatura y la presión en forma análoga a la viscosidad. El cociente k/k_0 puede expresarse en función de T/T_0 en forma parecida a las Ecuaciones (1.27) y (1.28) para gases y líquidos, respectivamente.

En la Referencia 11 pueden encontrarse datos adicionales sobre la viscosidad y la conductividad térmica.

Fluidos no newtonianos

Los fluidos que no siguen la ley lineal de la Ecuación (1.23) se denominan *no newtonianos* y se estudian en los libros de reología [6]. La Figura 1.7*a* compara cuatro ejemplos de fluidos con uno newtoniano. Un fluido *dilatante* es aquel en que la resistencia a la deformación aumenta al aumentar el esfuerzo cortante. Por el contrario, un fluido *pseudoplástico* es el que disminuye su resistencia al aumentar el esfuerzo. Si este efecto es muy importante, como en el caso marcado en la figura con línea discontinua, el fluido se denomina *plástico*. El caso límite de sustancia plástica es aquel que requiere un esfuerzo finito (límite de fluencia) antes de que fluya. La idealización del fluido *plástico de Bingham* se muestra en la figura; pero el comportamiento en la fluencia puede ser también no lineal. Un ejemplo de fluido plástico es la pasta de dientes, que no fluye al exterior hasta que por apretar el tubo se sobrepasa un cierto esfuerzo.

Una complicación adicional al comportamiento no newtoniano es el efecto transitorio que se muestra en la Figura 1.7*b*. Algunos fluidos precisan un aumento gradual en el esfuerzo cortante para mantener constante la velocidad de deformación; a éstos se les denomina *reopécticos*. El caso opuesto es el de un fluido que requiere esfuerzos decrecientes; es el denominado *tixotrópico*. En este libro no se considerarán los efectos no newtonianos; para profundizar sobre éstos, véase la Referencia 6.

www.elsolucionario.net

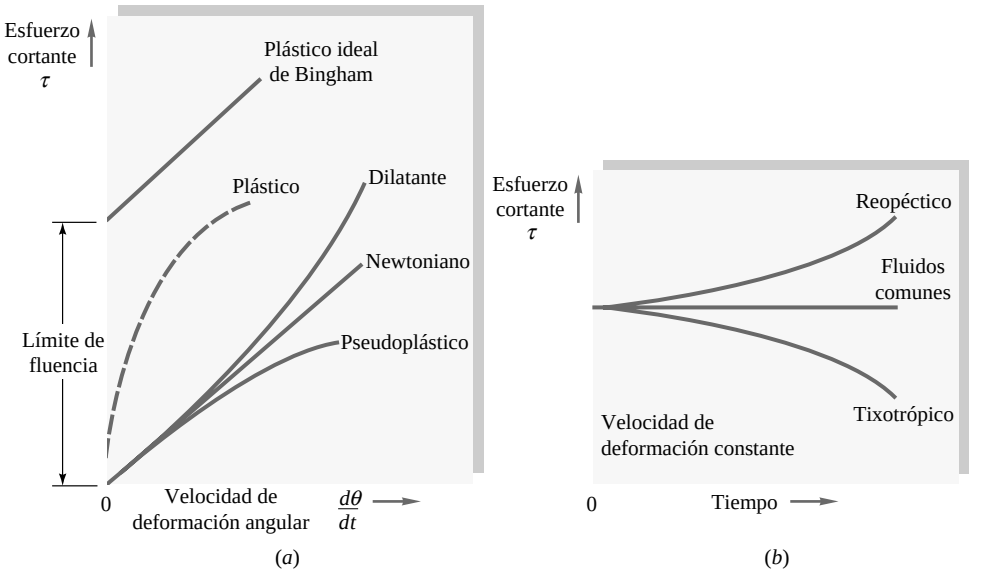


Figura 1.7. Comportamiento reológico de diversos materiales: (*a*) esfuerzo en función de la velocidad de deformación; (*b*) efecto del tiempo sobre los esfuerzos aplicados.

Tensión superficial

Un líquido, al no ser capaz de expansionarse libremente, formará una *entrefase* con un segundo líquido o un gas. La físico-química de estas superficies interfaciales es muy compleja, y existen libros enteros dedicados a esta especialidad [15]. Las moléculas inmersas en la masa líquida se repelen mutuamente debido a su proximidad, pero las moléculas de la superficie libre están menos apretadas y se atraen unas a otras. Al faltarles la mitad de sus vecinas, estas moléculas están en desequilibrio, y por ello la superficie está sometida a tensión. Estos efectos superficiales son los que englobamos en Mecánica de Fluidos dentro del concepto de tensión superficial.

Si en una entrefase se hace un corte de longitud dL, aparecen fuerzas iguales y opuestas en ambos lados del corte, de valor $\Upsilon\, dL$, perpendiculares al corte y coplanarias con la entrefase; a la magnitud Υ se la denomina *coeficiente de tensión superficial*. Las dimensiones de Υ son $\{F/L\}$, con unidades de newtones por metro en el SI y libras-fuerza por pie en el sistema británico. Un concepto alternativo procede de que para abrir el corte hasta un área dA se necesita un trabajo $\Upsilon\, dA$. Por ello, el coeficiente Υ puede ser considerado también como una energía por unidad de área de la entrefase, con las unidades ya citadas de $N \cdot m/m^2$ o $ft \cdot lbf/ft^2$.

Las dos entrefases más comunes son agua-aire y mercurio-aire. Para una superficie limpia a 20 °C = 68 °F, las tensiones superficiales son

$$\Upsilon = \begin{cases} 0{,}0050 \text{ lbf/ft} = 0{,}073 \text{ N/m} & \text{aire - agua} \\ 0{,}033 \text{ lbf/ft} = 0{,}48 \text{ N/m} & \text{aire - mercurio} \end{cases} \tag{1.30}$$

Estos valores pueden cambiar considerablemente si la superficie está contaminada. Generalmente, Υ decrece con la temperatura y es cero en el punto crítico. Los valores de Υ para el agua se dan en la Figura 1.8 y en la Tabla A.5.

Si la entrefase es una superficie curva, el equilibrio mecánico muestra que debe haber una diferencia de presiones entre ambos lados, estando la presión alta en el lado cóncavo. La Figura 1.9 ilustra este aspecto. En la Figura 1.9*a* se observa que el aumento de presión en el interior de un cilindro está equilibrado con las fuerzas en las dos generatrices:

$$2RL\,\Delta p = 2\Upsilon L$$

o

o

$$\Delta p = \frac{\Upsilon}{R} \tag{1.31}$$

www.elsolucionario.net

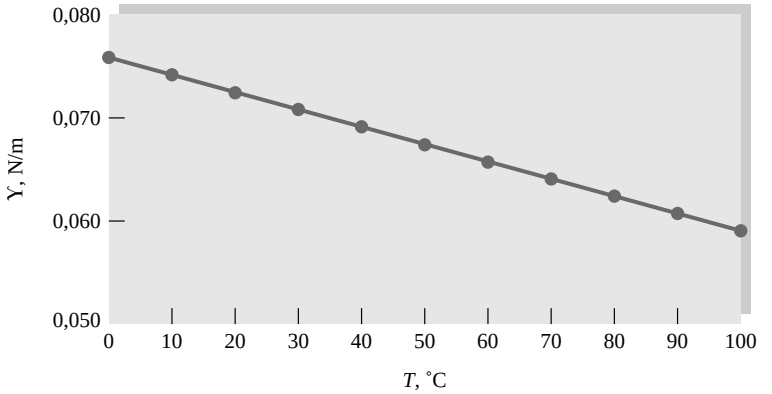


Figura 1.8. Tensión superficial de una entrefase limpia aire-agua. Datos tomados de la Tabla A.5.

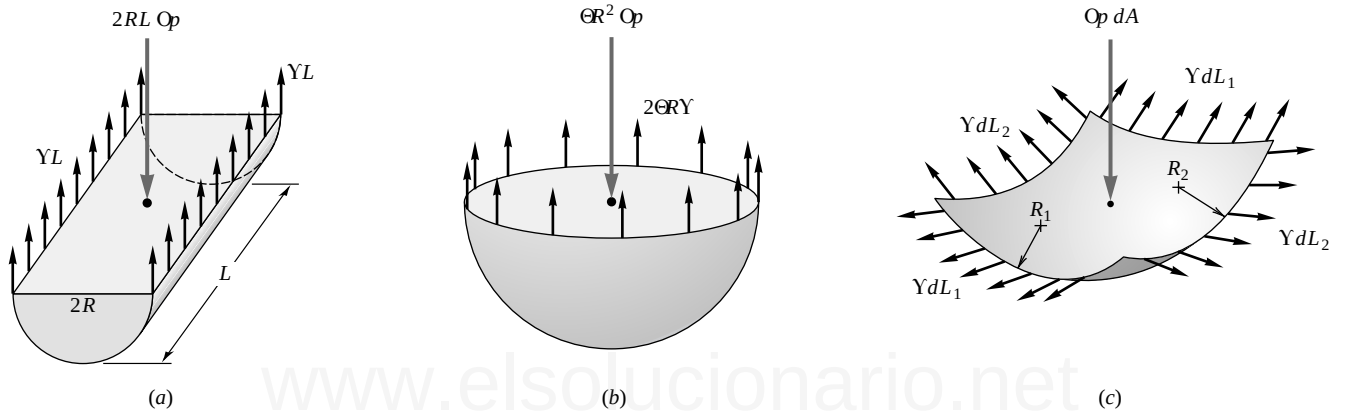


Figura 1.9. Aumento de presión a través de una entrefase curvada por efecto de la tensión superficial: (*a*) en el interior de un cilindro líquido; (*b*) en el interior de una gota esférica; (*c*) en una entrefase de curvatura arbitraria.

No estamos teniendo en cuenta el peso del líquido en estos cálculos. En la Figura 1.9*b* se puede ver que el aumento de presión en el interior de una gota esférica equilibra una fuerza distribuida anularmente, debida la tensión superficial, de magnitud

$$\Theta R^2\, \Omega p = 2\Theta R \text{L}$$

o

$$\Omega p = \frac{2\text{L}}{R} \tag{1.32}$$

Podemos usar este resultado para predecir el aumento de presión existente en el interior de una pompa de jabón, que tiene dos entrefases con el aire, una interior y otra exterior, prácticamente con el mismo radio R:

$$\Omega p_{\text{burbuja}} \,\Xi\, 2\,\Omega p_{\text{gota}} = \frac{4\text{L}}{R} \tag{1.33}$$

La Figura 1.9*c* muestra el caso general de una entrefase de forma arbitraria, cuyos radios principales de curvatura son R_1 y R_2. El equilibrio de fuerzas en la dirección normal a la superficie indica que el aumento de presión en el lado cóncavo es

$$\Omega p = \text{L}\,(R_1^{\Phi 1} + R_2^{\Phi 1}) \tag{1.34}$$

www.elsolucionario.net

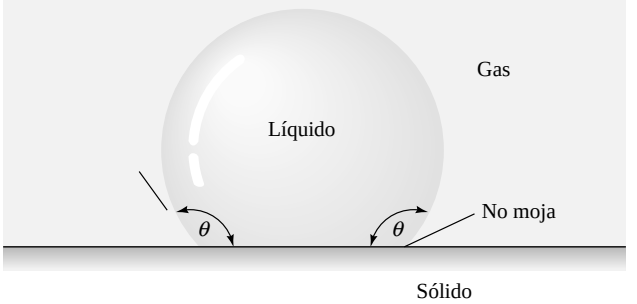


Figura 1.10. Efecto del ángulo de contacto en una entrefase líquido-gas-sólido. Cuando $\theta < 90°$, el líquido «moja» al sólido; cuando $\theta > 90°$, el líquido «no moja».

Las Ecuaciones (1.31) a (1.33) se pueden obtener de esta relación general; por ejemplo, la Ecuación (1.31) haciendo $R_1 = R$ y $R_2 = \infty$.

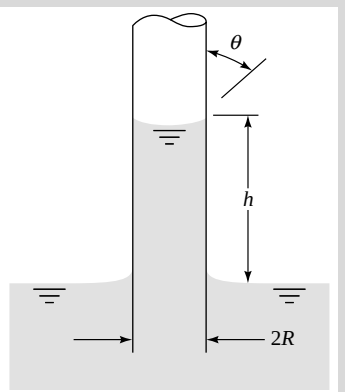
Un segundo efecto importante es el *ángulo de contacto* θ, que aparece cuando la entrefase llega hasta una pared sólida, como en la Figura 1.10. En el equilibrio de fuerzas contarán tanto σ como θ. Si el ángulo de contacto es menor de 90°, se dice que el líquido *moja* al sólido; si es mayor de 90°, que *no moja*. Por ejemplo, el agua moja al jabón, pero no moja la cera. El agua moja muy bien el vidrio limpio, con $\theta \approx 0°$. Al igual que σ, el ángulo de contacto θ es muy sensible a las condiciones físico-químicas de la superficie. En una entrefase mercurio-aire-vidrio, $\theta = 130°$.

El Ejemplo 1.9 ilustra cómo la tensión superficial da lugar al ascenso capilar en un tubo.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 1.9

Halle una expresión para el ascenso capilar h en un tubo circular, de un líquido con tensión superficial σ y ángulo de contacto θ, como muestra la Figura E1.9.



E1.9

Solución

La componente vertical de la fuerza de tensión superficial en las paredes del tubo debe equilibrar al peso de la columna de agua de altura h:

$$2\pi R\sigma \cos\theta = \rho g \pi R^2 h$$

www.elsolucionario.net

Despejando h obtenemos el resultado deseado:

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g R} \qquad \textit{Resp.}$$

Vemos que el ascenso capilar es inversamente proporcional al radio del tubo R y es positivo si $\theta < 90°$ (moja) y negativo (depresión capilar) si $\theta > 90°$.

Supongamos que $R = 1$ mm. El ascenso capilar para una entrefase agua-aire-vidrio, $\theta \approx 0°$, $\sigma = 0{,}073$ N/m y $\rho = 1000$ kg/m^3 es

$$h = \frac{2(0{,}073 \text{ N/m})(\cos 0°)}{(1000 \text{ kg/m}^3)(9{,}81 \text{ m/s}^2)(0{,}001 \text{ m})} = 0{,}015 \text{ (N s}^2\text{)/kg} = 0{,}015 \text{ m} = 1{,}5 \text{ cm}$$

Para una entrefase mercurio-aire-vidrio, con $\theta = 130°$, $\sigma = 0{,}48$ N/m y $\rho = 13.600$ kg/m^3, será

$$h = \frac{2(0{,}48)(\cos 130°)}{13.600(9{,}81)(0{,}001)} = -0{,}0046 \text{ m} = -0{,}46 \text{ cm}$$

Cuando se usa un tubo de pequeño diámetro para medir presiones (Capítulo 2), se deben tener en cuenta estos efectos capilares.

Presión de vapor

www.elsolucionario.net

La presión de vapor es la presión a la que un líquido hierve y está en equilibrio con su propio vapor. Por ejemplo, la presión de vapor del agua a 20 °C es 2337 Pa, mientras que la del mercurio es 0,168 Pa. Si la presión del líquido es mayor que la presión de vapor, el único intercambio entre líquido y vapor es la evaporación en la entrefase. Si la presión del líquido se acerca a la presión de vapor, comenzarán a aparecer burbujas de vapor en el líquido. Cuando el agua se calienta hasta 100 °C, su presión de vapor sube hasta 101.300 Pa y por eso a la presión atmosférica normal hervirá. Cuando la presión del líquido cae por debajo de la presión de vapor debido al flujo, aparece la *cavitación*. Si aceleramos al agua desde el reposo hasta unos 15 m/s, la presión desciende alrededor de 1 atm, o sea, 15 lbf/in^2. Esto puede producir cavitación.

El parámetro adimensional que describe este fenómeno es el *número de cavitación*

$$\text{Ca} = \frac{p_a - p_v}{\frac{1}{2}\rho V^2} \tag{1.35}$$

donde p_a = presión ambiente
p_v = presión de vapor
V = velocidad característica

Dependiendo de la geometría, un flujo dado tiene un valor crítico de Ca por debajo del cual comenzará la cavitación. Los valores de la tensión superficial y de la presión de vapor del agua se muestran en la Tabla A.5. La presión de vapor del agua se representa en la Figura 1.11.

La Figura 1.12*a* muestra las burbujas de cavitación que aparecen en la región de bajas presiones asociada a los torbellinos de punta de pala en una hélice de barco. Cuando estas burbujas penetran en regiones de presiones más altas, colapsan de forma implosiva. El colapso de las burbujas de cavitación puede dañar o erosionar las superficies metálicas hasta llegar a destruirlas, como se observa en la Figura 1.12*b*.

www.elsolucionario.net

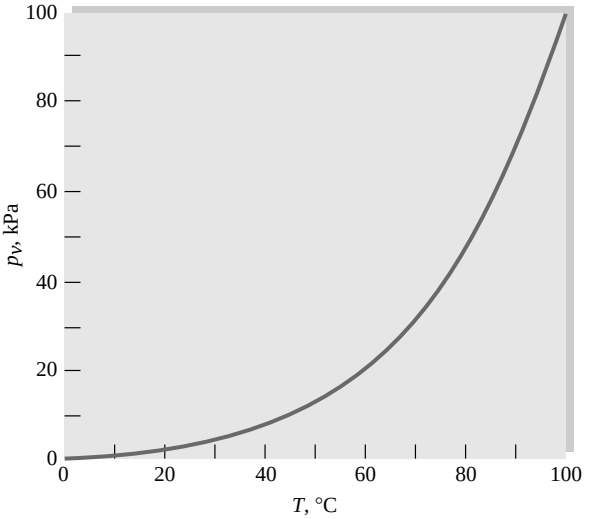


Figura 1.11. Presión de vapor del agua. Datos de la Tabla A.5.

EJEMPLO 1.10

Un torpedo, que se mueve en agua dulce a 10 °C, tiene un punto de presión mínima dado por la fórmula

$$p_{mín} = p_0 - 0{,}35\,\rho V^2 \tag{1}$$

www.elsolucionario.net

donde p_0 = 115 kPa, ρ es la densidad del agua y V es la velocidad del torpedo. Estime la velocidad para la que se formarán burbujas de cavitación en el torpedo. La constante 0,35 es adimensional.

Solución

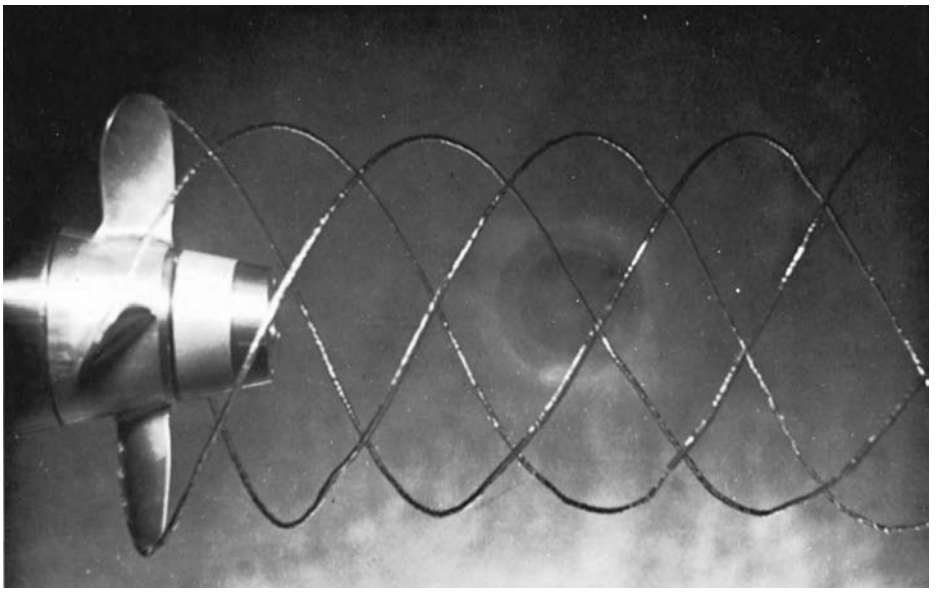
- *Consideraciones*. Las burbujas de cavitación se forman cuando la presión mínima es igual a la presión de vapor p_v.
- *Procedimiento*. Resuelva la Ecuación (1), relacionada con la ecuación de Bernoulli del Ejemplo 1.3, para obtener la velocidad cuando $p_{mín} = p_v$. Utilice unidades SI (m, N, kg, s).
- *Valores de las propiedades*. A 10 °C, de la Tabla A.1 se obtiene ρ = 1000 kg/m^3 y de la Tabla A.5 p_v = 1,227 kPa.
- *Resolución*. Introduzca los datos conocidos en la Ecuación (1) para despejar la velocidad, usando unidades SI:

$$p_{mín} = p_v = 1227 \text{ Pa} = 115.000 \text{ Pa} - 0{,}35\left(1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) V^2, \text{ con } V \text{ en m/s}$$

$$\text{Despejando } V^2 = \frac{(115.000 - 1227)}{0{,}35(1000)} = 325 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \text{ o } V = \sqrt{325} = 18{,}0 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios*. El uso de unidades SI evita los factores de conversión, como se discutió en el Ejemplo 1.3*b*. La presión debe expresarse en pascales, no en kilopascales.

www.elsolucionario.net



(*a*)

(*b*)

Figura 1.12. Dos aspectos de la formación de burbujas por cavitación en flujos líquidos: (*a*) espirales de burbujas asociadas a los torbellinos de punta de pala de una hélice de barco (*por cortesía del Garfield Thomas Water Tunnel, Pennsylvania State University.*); (*b*) al colapsar las burbujas erosionan la superficie de la hélice (*por cortesía de Thomas T. Huang, David Taylor Research Center*).

Condiciones de no deslizamiento y continuidad de temperaturas

Cuando un fluido está limitado por una superficie sólida, las interacciones moleculares en la zona de contacto hacen que la superficie esté en equilibrio energético y mecánico con ella. Todos los líquidos están esencialmente en equilibrio con las superficies que los limitan. Los gases también, excepto bajo condiciones de extrema rarefacción [8]. Excluyendo estos últimos casos, todo fluido en contacto con una superficie sólida obedecerá a las condiciones

$$V_{\text{fluido}} \equiv V_{\text{pared}} \qquad T_{\text{fluido}} \equiv T_{\text{pared}} \tag{1.36}$$

www.elsolucionario.net

Estas condiciones se denominan de *no deslizamiento* y *continuidad de temperaturas*, respectivamente; son condiciones de contorno en el análisis de los flujos limitados por superficies sólidas (Capítulo 6). La Figura 1.13 es un ejemplo clásico de la condición de no deslizamiento en el flujo alrededor de una placa plana. El flujo en la parte superior es desordenado, turbulento, mientras que el flujo en la parte inferior es suave, laminar.[12] En ambos casos queda claro el no deslizamiento en la placa; el fluido toma la velocidad de ésta, nula en este caso por ser una placa fija. El perfil de velocidad se visualiza por medio de una línea de burbujas de hidrógeno producidas en un alambre perpendicular al flujo y a la placa.

En el análisis de los flujos no viscosos (Capítulo 8), la condición de no deslizamiento puede suprimirse parcialmente para disminuir las dificultades matemáticas del problema. En estos casos, el flujo puede «deslizar» sobre la superficie sólida, aunque no puede penetrar en ella si es impermeable

$$V_{\text{normal}}(\text{fluido}) \equiv V_{\text{normal}}(\text{sólido}) \tag{1.37}$$

mientras que la velocidad tangencial V_t puede ser cualquiera. El análisis es mucho más sencillo, pero los flujos obtenidos pueden no ser reales.

En el análisis de los fluidos newtonianos de alta viscosidad, la condición de no deslizamiento junto con la hipótesis de perfil lineal de velocidades proporciona resultados aproximados para flujos bidimensionales y tridimensionales viscosos de interés práctico, como ilustra el siguiente ejemplo, en el que se analiza un viscosímetro de disco giratorio.

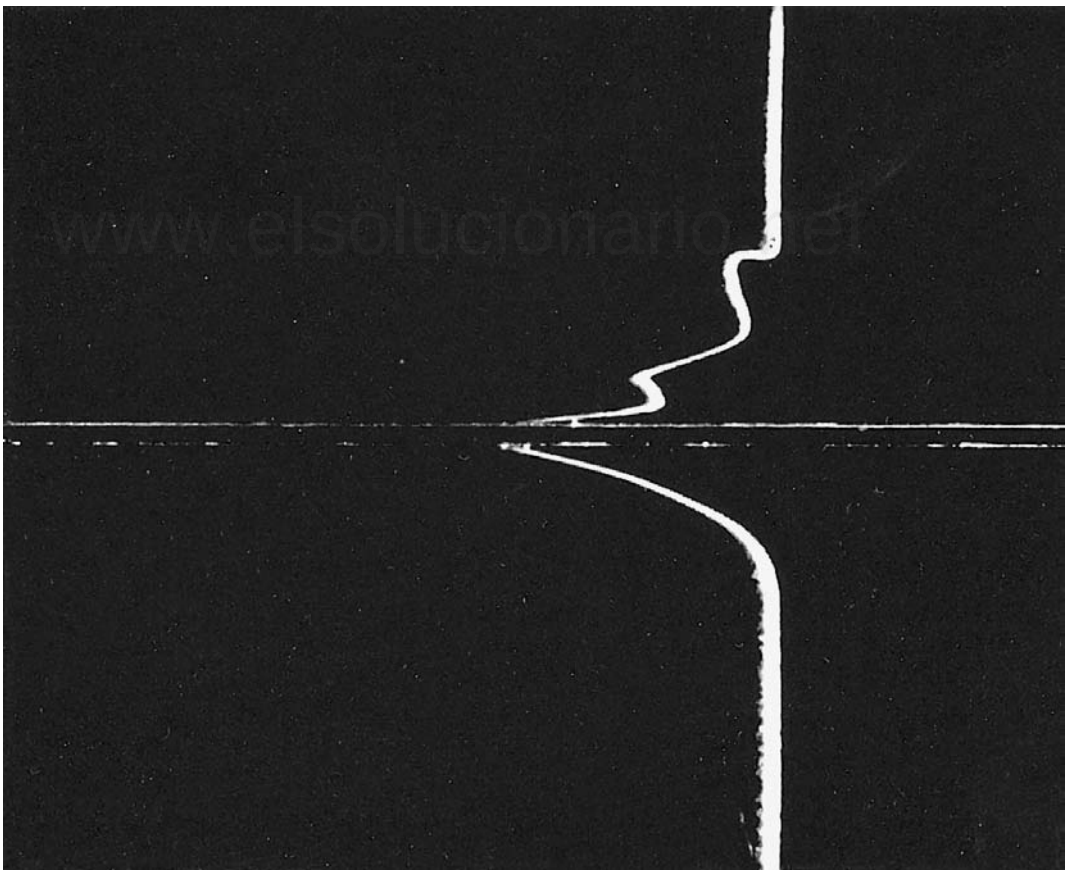


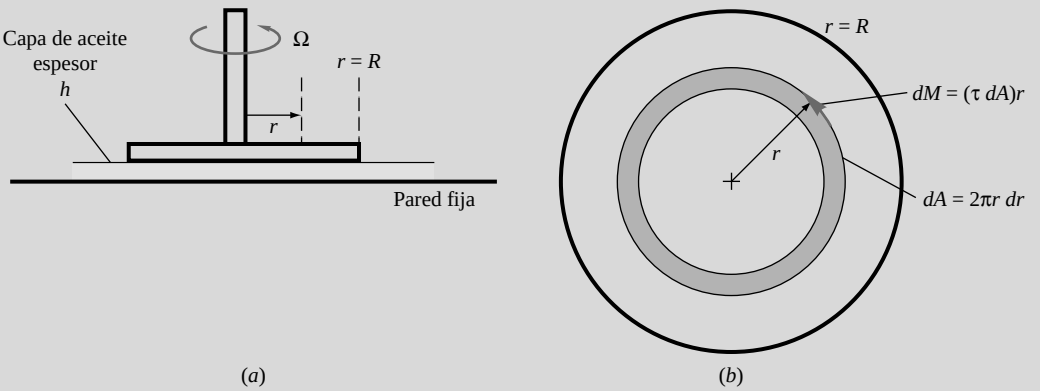
Figura 1.13. Condición de no deslizamiento en el flujo de agua alrededor de una placa plana. El flujo superior es turbulento y el inferior laminar. El perfil de velocidad se visualiza por medio de una línea de burbujas de hidrógeno producidas por un alambre perpendicular al flujo. (*National Committee for Fluid Mechanics Films, Education Development Center, Inc, © 1972.*)

[12] Los flujos laminares y turbulentos se estudiarán en los Capítulos 6 y 7.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 1.11

Una película de aceite de viscosidad μ y espesor $h \ll R$ se encuentra confinada entre una pared sólida y un disco circular, como muestra la Figura E1.11. El disco gira de forma estacionaria con velocidad angular Ω. Teniendo en cuenta que tanto la velocidad como el esfuerzo cortante varían con el radio r, obtenga una fórmula para el par M requerido para hacer girar el disco. Desprecie la resistencia del aire.



E1.11

Solución

- *Diagrama del sistema*. La Figura E1.11 muestra una vista lateral (*a*) y en planta (*b*) del sistema.
- *Consideraciones*. Perfil de velocidad lineal, flujo laminar, no deslizamiento, esfuerzo de cortadura local dado por la Ecuación (1.23).
- *Procedimiento*. Estimamos el esfuerzo cortante en una franja circular de espesor dr y área $dA = 2\pi r\, dr$ como la mostrada en la Figura E1.11*b*. A continuación calculamos el momento dM respecto del origen debido a este esfuerzo cortante e integramos sobre todo el disco para encontrar el momento total M.
- *Valores de las propiedades*. Viscosidad del aceite μ constante. En este flujo estacionario, la densidad del aceite no es relevante.
- *Resolución*. A una distancia r del eje, la velocidad en el aceite es tangencial, pasando de cero en la pared fija (no deslizamiento) a $u = \Omega r$ en la superficie del disco (de nuevo, no deslizamiento). El esfuerzo de cortadura en este punto es por tanto

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \approx \mu \frac{\Omega r}{h}$$

Este esfuerzo es en todas partes perpendicular al radio desde el origen (véase Figura E1.11*b*). De este modo puede obtenerse, e integrarse, el momento total alrededor del origen que actúa sobre esta franja circular:

$$dM = (\tau)(dA)r = \left[\frac{\mu \Omega r}{h}\right](2\pi r\, dr)r, \quad M = \int dM = \frac{2\pi\mu\Omega}{h}\int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\mu\Omega R^4}{2h} \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios*. Éste es un análisis ingenieril simplificado, en el que se desprecian los posibles efectos de borde, la resistencia del aire sobre la parte superior del disco y la turbulencia que podría originarse si el disco rotase muy rápido.

Velocidad del sonido

En el flujo de gases, uno debe estar prevenido sobre los efectos de la *compresibilidad* (cambios significativos de la densidad producidos por el flujo). Veremos en la Sección 4.2 y en el Capítulo 9 que la compre-

www.elsolucionario.net

sibilidad se hace importante cuando la velocidad alcanza una fracción significativa de la velocidad del sonido del fluido. La *velocidad del sonido a* de un fluido es la velocidad de propagación de las perturbaciones de presión («ondas sonoras») a través del mismo. En el Capítulo 9 mostraremos, usando argumentos mecánicos y termodinámicos, que la velocidad del sonido se define como

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \mathcal{J}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \qquad \mathcal{J} = \frac{c_p}{c_v} \tag{1.38}$$

Aunque esto es cierto tanto para líquidos como para gases, el problema de la compresibilidad sólo afecta a los *gases*. Para un gas ideal, Ecuación (1.10), se obtiene el siguiente resultado:

$$a_{\text{gas ideal}} = (kRT)^{1/2} \tag{1.39}$$

donde R es la constante del gas, Ecuación (1.11), y T la temperatura absoluta. Por ejemplo, en aire a 20 °C, $a = \{(1{,}40)[287\ \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})](293\ \text{K})\}^{1/2} \approx 343$ m/s (1126 ft/s = 768 mi/h). Si, en este caso, la velocidad del aire alcanza una fracción significativa de a, por ejemplo, 100 m/s, se deben tener en cuenta los efectos de la compresibilidad (Capítulo 9). Dicho de otra modo, se debe tener en cuenta la compresibilidad cuando el *número de Mach* Ma = V/a del flujo alcanza valores del orden de 0,3.

La velocidad del sonido del agua se ha tabulado en la Tabla A.5. La velocidad del sonido del aire (o de cualquier otro gas aproximadamente perfecto) se puede calcular sin más que aplicar la Ecuación (1.39).

EJEMPLO 1.12

Una aeronave comercial vuela a 540 mi/h a una altura estándar de 30.000 ft. ¿Cuál es el número de Mach?

Solución

www.elsolucionario.net

- *Procedimiento*. Calculamos la velocidad del sonido «estándar» y dividimos la velocidad por ella, usando unidades apropiadas.
- *Valores de las propiedades*. De la Tabla A.6, a 30.000 ft (9144 m), a ≈ 303 m/s. Comprobemos el resultado usando la temperatura estándar, que según la tabla es igual a 229 K. De la Ecuación (1.39) para el aire,

$$a = [\gamma R_{\text{aire}} T]^{1/2} = [1{,}4(287)(229)]^{1/2} \approx 303 \text{ m/s, de acuerdo.}$$

- *Resolución*. Convertimos la velocidad de la aeronave a m/s:

$$V = (540 \text{ mi/h})[0{,}44704 \text{ m/s/(mi/h)}] \approx 241 \text{ m/s.}$$

Entonces el número de Mach está dado por

$$\text{Ma} = V/a = (241 \text{ m/s})/(303 \text{ m/s}) = 0{,}80 \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios*. Este valor, Ma = 0,80, es típico de los aviones comerciales modernos. La compañía Boeing tiene en proyecto un nuevo «crucero sónico» que volaría alrededor de Ma $\approx$ 0,95, es decir, un 20 por 100 más rápido. Para ello será necesario un diseño con una resistencia aerodinámica muy baja. Véase <www.boeing.com/news/feature/concept/>.

1.8. TÉCNICAS BÁSICAS DE ANÁLISIS DE LOS FLUJOS

Hay tres vías posibles para abordar un problema fluidodinámico. Las tres son igual de importantes, y este libro trata de cubrirlas adecuadamente:

1. Volumen de control, o análisis *integral* (Capítulo 3).
2. Partícula fluida, o análisis *diferencial* (Capítulo 4).
3. Estudio experimental, o análisis *dimensional* (Capítulo 5).

www.elsolucionario.net

Figura 1.14. ¿Dispuesto para el análisis de los flujos? Escoja entonces una hipótesis de cada casilla.

En todos los casos, el flujo debe satisfacer las tres leyes de conservación de la mecánica[13] más una relación de estado (termodinámica) y las condiciones iniciales y de contorno apropiadas:

1. Conservación de la masa (continuidad).
2. Conservación de la cantidad de movimiento (segunda ley de Newton).
3. Conservación de la energía (primer principio de la termodinámica).
4. Una relación de estado como $\rho = \rho(p, T)$.
5. Condiciones de contorno sobre superficies sólidas, entrefases, entradas y salidas.

En los análisis integral y diferencial, estas cinco leyes están expresadas en términos matemáticos y han de ser resueltas usando métodos numéricos. En un estudio experimental se supone que el fluido cumple estas relaciones de por sí. En otras palabras, se supone que ningún fluido es capaz de violar estas leyes por tratarse de leyes fundamentales de la física.

Es posible realizar una clasificación de los tipos de flujos, aunque no hay acuerdo general en este punto. La mayor parte de las clasificaciones se refieren a las hipótesis ya mencionadas anteriormente. Vienen por parejas, de modo que un cierto flujo puede ser

Estacionario	o	no estacionario	(1.40*a*)
No viscoso	o	viscoso	(1.40*b*)
Incompresible	o	compresible	(1.40*c*)
Gas	o	líquido	(1.40*d*)

www.elsolucionario.net

Como indica la Figura 1.14, podemos escoger una hipótesis de cada pareja. Podemos tener un flujo estacionario, viscoso, compresible de gas o un flujo no estacionario, no viscoso ($\mu = 0$) e incompresible de líquido. Aunque no existe ningún fluido verdaderamente no viscoso, la hipótesis $\mu = 0$ es adecuada en muchos casos (Capítulo 8). A menudo las hipótesis se solapan: un flujo puede ser viscoso en la capa límite inmediatamente próxima a una superficie sólida (Figura 1.10) y prácticamente no viscoso lejos de ésta. La región viscosa del flujo puede ser laminar, turbulenta, o estar en transición, o con diversas zonas de los tres tipos. En un flujo pueden intervenir simultáneamente un gas, un líquido y la superficie libre o entrefase existente entre ambos (Capítulo 10). Un flujo puede ser compresible en una región y tener densidad casi constante en otra. A pesar de ello, las Ecuaciones (1.40) y la Figura 1.14 suministran las combinaciones básicas para analizar los flujos, y así, en los Capítulos 6 a 10, intentaremos separarlas aislando las características propias de cada una de ellas.

1.9. DESCRIPCIÓN DEL FLUJO: LÍNEAS DE CORRIENTE, SENDAS Y LÍNEAS DE TRAZA

Los problemas fluidomecánicos se pueden visualizar. El flujo puede visualizarse de muchas maneras distintas, y observando las fotografías o las diversas representaciones gráficas posibles se pueden conocer cualitativa y cuantitativamente aspectos del mismo.

Hay cuatro formas básicas de describir un flujo:

1. Una *línea de corriente* es aquella línea que en un instante dado es tangente al vector velocidad en todo punto.

[13] En fluidos que sean mezclas, como el agua de mar, se necesita una cuarta, la ley de *conservación de las especies*. Como ejemplo véanse las Referencias 16 o 37.

www.elsolucionario.net

2. Una *senda* es el camino seguido realmente por una partícula fluida.
3. Una *línea de traza* es el lugar geométrico de las partículas que en instantes sucesivos pasaron por un punto dado.
4. Una *línea fluida* es un conjunto de partículas fluidas que en un instante dado forman una línea.

La línea de corriente tiene un profundo sustrato matemático, mientras que las otras tres son más fáciles de generar experimentalmente. Nótese que la línea de corriente y la línea fluida están definidas para un instante dado, mientras que la senda y la línea de traza son atemporales, esto es, se forman con el transcurso del tiempo. El perfil de velocidades de la Figura 1.13 es realmente una línea fluida generada por una descarga previa de burbujas por un alambre. Una senda se describe con las posiciones ocupadas en instantes sucesivos por una partícula marcada. Es difícil producir experimentalmente líneas de corriente en un flujo no estacionario, a menos que se marquen muchas partículas y se pueda conocer la dirección de la velocidad comparando las fotografías tomadas en instantes inmediatos [17, pág. 35]. Cuando el flujo es estacionario, la situación se simplifica notablemente:

En un flujo estacionario, las líneas de corriente, sendas y líneas de traza son idénticas.

Desde un punto de vista matemático, el resultado más útil para la visualización en Mecánica de Fluidos es la línea de corriente. La Figura 1.15*a* muestra un conjunto típico de líneas de corriente y la Figura 1.15*b* muestra una superficie denominada *tubo de corriente*. Por definición, el fluido contenido en el interior del tubo de corriente está confinado, ya que no puede atravesar las líneas de corriente; las paredes del tubo de corriente pueden ser, pues, tanto superficies sólidas como fluidas.

La Figura 1.16 muestra un campo de velocidades arbitrario. Dado que la velocidad **V** debe ser localmente tangente al elemento de línea *dr*, sus componentes respectivas deben guardar la proporción:

Línea de corriente:
$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{dr}{V} \tag{1.41}$$

www.elsolucionario.net

Si las componentes *u*, *v* y *w* son funciones conocidas de la posición y del tiempo, las Ecuaciones (1.41) pueden ser integradas, obteniéndose así la línea de corriente que en un cierto instante t_0 pasa por el punto (x_0, y_0, z_0). El método es muy sencillo para flujos estacionarios (Ejemplo 1.13) pero puede ser laborioso para flujos no estacionarios.

La senda, o desplazamiento de la partícula, se define mediante integración respecto al tiempo de la velocidad, como se mencionó en la Sección 1.5:

Senda:
$$x = \int u\,dt \quad y = \int v\,dt \quad z = \int w\,dt \tag{1.42}$$

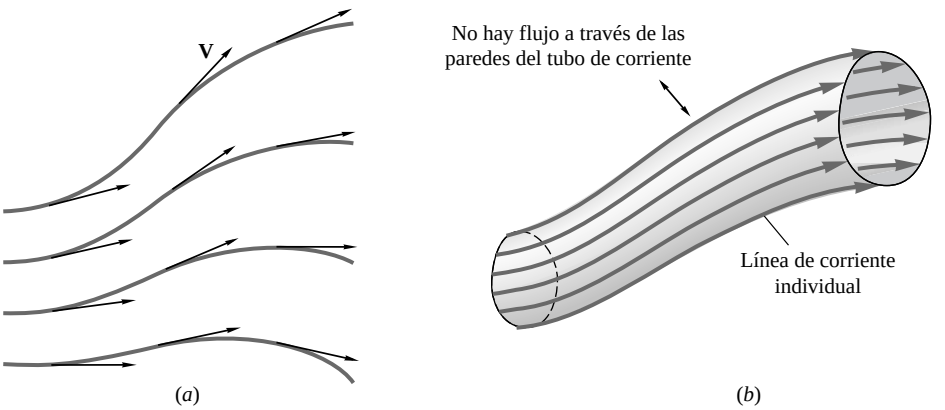


Figura 1.15. El método más habitual de representar un flujo: (*a*) las líneas de corriente son tangentes en todos los puntos al vector velocidad local; (*b*) un tubo de corriente está formado por un conjunto cerrado de líneas de corriente.

www.elsolucionario.net

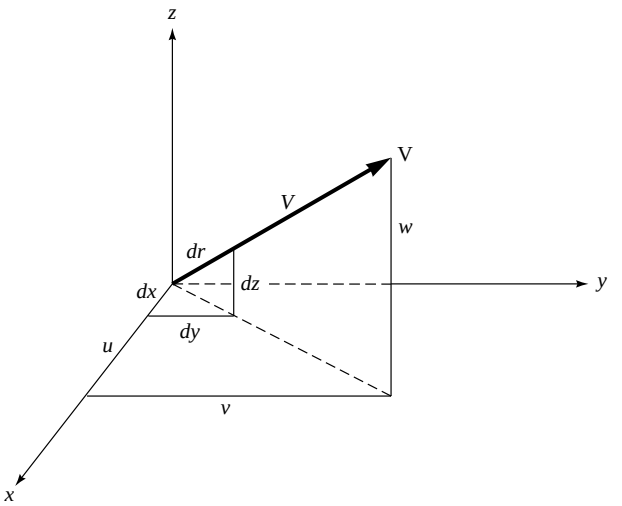


Figura 1.16. Relaciones geométricas para la definición de una línea de corriente.

Dadas (u, v, w) como funciones conocidas de la posición y del tiempo, se comienza la integración temporal con la condición inicial (x_0, y_0, z_0, t_0). De nuevo, la integración puede ser laboriosa.

Una línea de traza, fácil de generar experimentalmente usando humo, tinta o pequeñas burbujas, suele resultar muy complicada de obtener analíticamente. Los detalles matemáticos se dan en la Referencia 18.

EJEMPLO 1.13

Dada la distribución de velocidades bidimensional y estacionaria

$$u = Kx \qquad v = -Ky \qquad w = 0 \tag{1}$$

donde K es una constante positiva, obtenga y dibuje las líneas de corriente, incluyendo la dirección del flujo, e interprete el resultado.

Solución

Como el tiempo no aparece explícitamente en la Ecuación (1), el movimiento es estacionario, de modo que las líneas de corriente, las sendas y las líneas de traza coinciden. Como $w = 0$ en todas partes, el movimiento es bidimensional, confinado en el plano xy. Las líneas de corriente se pueden obtener sustituyendo las expresiones para u y v en la Ecuación (1.41):

$$\frac{dx}{Kx} = \Phi\frac{dy}{Ky}$$

o

$$\mathrm{I}\frac{dx}{x} = \Phi\mathrm{I}\frac{dy}{y}$$

Integrando, se obtiene $\ln x = -\ln y + \ln C$, o

$$xy = C \qquad \textit{Resp.} \tag{2}$$

Ésta es la expresión general para las líneas de corriente, que son hipérbolas. El diagrama completo se ha representado en la Figura E1.13 asignando distintos valores a la constante C. La dirección de las flechas sólo puede obtenerse volviendo a la Ecuación (1) para determinar la dirección de las componentes del vector velocidad, suponiendo que K es positivo. Por ejemplo, en el primer cuadrante ($x > 0$, $y > 0$), u es positivo y v es negativo; luego el flujo se mueve hacia abajo y hacia la derecha, y las flechas tienen la dirección que se indica en la figura.

www.elsolucionario.net

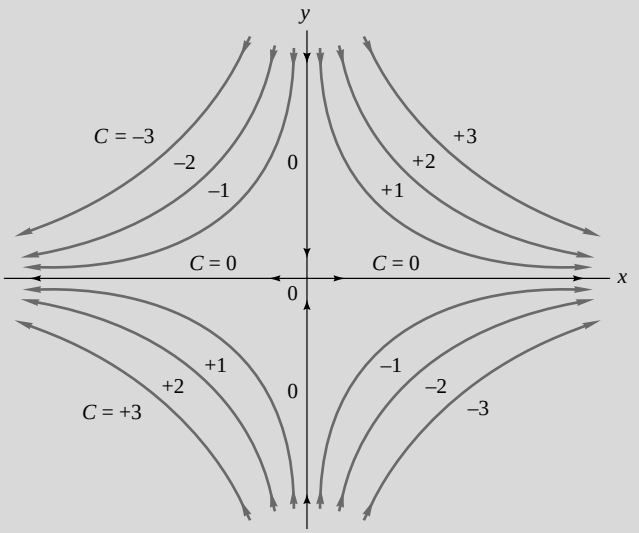


Figura E1.13. Líneas de corriente del campo de velocidades dado por la Ecuación (1), para $K > 0$.

Nótese que la estructura de las líneas de corriente es completamente independiente de la constante K. Podría representar el flujo entre dos corrientes opuestas, o la mitad superior podría representar el flujo de una corriente descendente contra una pared plana. De forma aislada, el cuadrante superior derecho representa el flujo en una esquina de 90°. Este flujo, de gran utilidad en aplicaciones realistas, será tratado con más profundidad en el Capítulo 8.

Para terminar, nótese la peculiaridad de que las dos líneas de corriente ($C = 0$) tienen direcciones opuestas y se cruzan. Esto sólo es posible en los puntos donde $u = v = w = 0$, como ocurre en el origen en este caso. Un punto de velocidad nula como éste se llama *punto de remanso*.

www.elsolucionario.net

Visualización del flujo

La realización de experimentos ingeniosos puede proporcionar imágenes reveladoras de la estructura de un flujo, como se mostró más arriba en las Figuras 1.12*a* y 1.13. Por ejemplo, las líneas de traza se generan experimentalmente por medio de la inyección continua de partículas marcadas (tinta, humo o burbujas) desde un punto fijo. Si el flujo es estacionario las líneas de traza serán idénticas a las líneas de corriente y a las sendas del flujo.

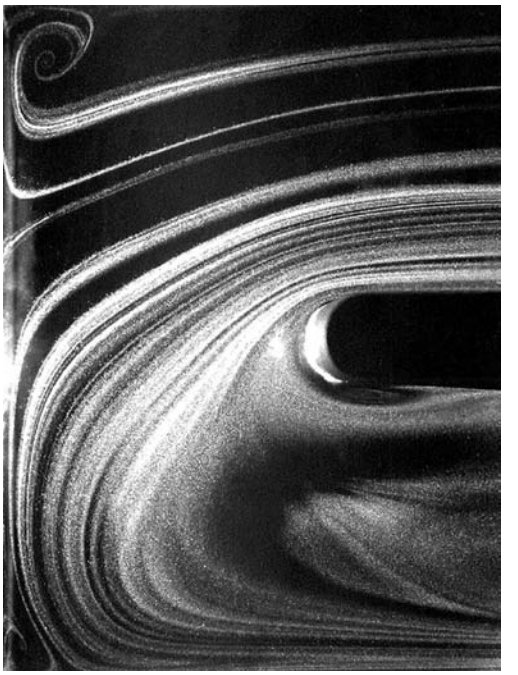
Entre los métodos de visualización podemos citar los siguientes [21, 22]:

1. Inyección de humo, tinta o burbujas.
2. Viruta o polvo sobre la superficie libre.
3. Partículas trazadoras con flotabilidad neutra.
4. Técnicas ópticas que detectan cambios en la densidad del fluido: método de las sombras, «Schlieren» e interferometría.
5. Hilos o lanas sujetos a las superficies que limitan el flujo.
6. Sustancias que se evaporan sobre las superficies sólidas.
7. Sustancias luminiscentes, aditivos o bioluminiscencia.
8. Velocimetría de imágenes de partículas (PIV, *Particle Image Velocimetry*)

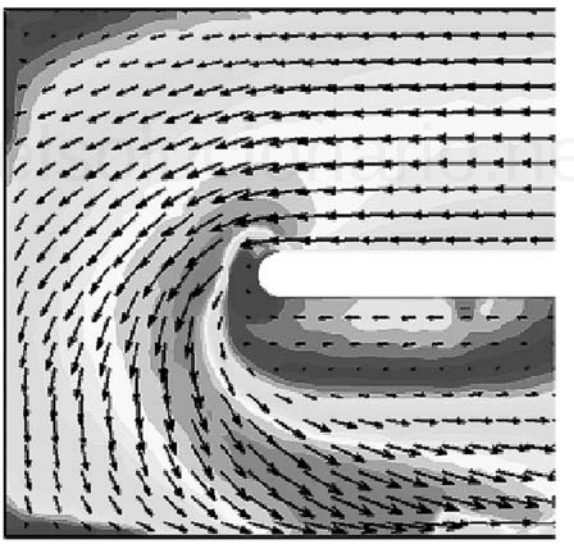
Las Figuras 1.12*a* y 1.13 se generaron ambas mediante inyección de burbujas. Otro ejemplo es el uso de partículas en la Figura 1.17 para visualizar el flujo alrededor de un giro de 180° en un canal en serpentina [42].

La Figura 1.17*a* corresponde a un flujo laminar con número de Reynolds 1000. El flujo es estacionario, y la forma de las líneas de traza muestra que el flujo es incapaz de realizar un giro tan pronunciado sin desprenderse de la pared inferior.

www.elsolucionario.net



(*a*)



(*b*)

Figura 1.17. Dos visualizaciones del flujo alrededor de un giro de 180° en un canal en serpentina: (*a*) líneas de traza de las partículas a número de Reynolds 1000; (*b*) campo fluido promediado obtenido mediante velocimetría de imágenes de partículas (PIV) a un número de Reynolds turbulento de 30.000. (*De la Referencia 42, con permiso de la American Society of Mechanical Engineers.*)

La Figura 1.17*b* corresponde a un flujo turbulento con número de Reynolds 30.000. El flujo es no estacionario, y las líneas de traza, caóticas y difusas, no permiten la visualización. La imagen se ha generado por tanto usando la nueva técnica de velocimetría de imágenes de partículas [38]. En PIV, cientos de partículas son marcadas y fotografiadas en dos instantes de tiempo muy próximos. Los movimientos de las partículas representan así los vectores velocidad local. Los cientos de vectores así obtenidos se suavizan repitiendo la medida numerosas veces hasta que se obtiene la estructura del flujo medio de la Figura 1.17*b*. Las modernas técnicas experimentales y computacionales utilizan los ordenadores de forma extensiva para generar visualizaciones de flujos, como se describe en el libro de Yang [41].

www.elsolucionario.net

Los detalles matemáticos del análisis de las líneas de corriente, sendas y líneas de traza se dan en la Referencia 18. Las Referencias 19 y 20 constituyen bonitos álbumes fotográficos de una gran variedad de flujos. Las Referencias 21 y 22 son monografías sobre técnicas de visualización de flujos.

La Mecánica de Fluidos es un campo muy propicio para la visualización, no sólo de flujos estacionarios, sino también de flujos en movimiento (no estacionarios). Carr y Young [43] proporcionan una excelente lista de películas y vídeos sobre Mecánica de Fluidos.

1.10. EL RESOLVEDOR DE ECUACIONES DE INGENIERÍA

La mayor parte de los ejemplos y ejercicios de este libro se pueden resolver directamente, sin necesidad de recurrir a conjeturas ni de realizar iteraciones o cálculos repetitivos. Hasta hace poco, estos problemas, ya fueran de sustituir datos en ecuaciones o algo más complicados, eran los únicos adecuados para los cursos de ingeniería para estudiantes no graduados. Sin embargo, la reciente aparición de programas de ordenador que resuelven todo tipo de ecuaciones hace viable el análisis y la resolución de casi cualquier conjunto de ecuaciones algebraicas.

Cualquier programa de resolución de ecuaciones debería ser capaz de manejar un conjunto de relaciones puramente matemáticas como el propuesto en la Referencia 33: $X \ln(X) = Y^3$, $X^{1/2} = 1/Y$. De hecho, cualquier programa comercial daría sin problemas la solución: $X = 1{,}467$, $Y = 0{,}826$. Sin embargo, para los ingenieros, en opinión del autor, EES es superior a la mayoría de los programas comerciales existentes porque (1) las ecuaciones pueden introducirse en cualquier orden; (2) incluye un gran número de formulas matemáticas, como las funciones de Bessel; y (3) incluye también las propiedades termofísicas de numerosos fluidos, como las tablas de vapor [13]. Además, admite tanto unidades SI como unidades inglesas. No hace falta escribir las ecuaciones como se hace en BASIC o FORTRAN. Por ejemplo, se puede escribir $X - Y + 1 = 0$ sin ningún problema; no hace falta reescribirlo en la forma $X = Y - 1$.

Consideremos de nuevo el Ejemplo 1.7 para ejercitarnos en el uso de EES. Uno introduciría en primer lugar las propiedades de referencia p_0 y ρ_0 junto a las constantes de ajuste de la curva B y n:

www.elsolucionario.net

```
Pz = 1,0
Rhoz = 2,0
B = 3000
n = 7
```

Se especificarían entonces la relación de presiones y la forma de la curva, Ecuación (1.19), que representa la ecuación de estado del agua:

```
P = 1100*Pz [-> fuente EES]
P/Pz = (B + 1)*(Rho/Rhoz)^n - B [-> fuente EES]
```

Si se solicita un análisis previo en el menú CHECK/FORMAT, EES responde que hay seis ecuaciones para seis incógnitas y que no hay dificultades aparentes. Cuando se solicita que se resuelva el sistema, mediante el comando SOLVE del menú, EES proporciona rápidamente `Rho = 2,091`, que es la respuesta correcta como ya vimos en el Ejemplo 1.7. También proporciona los valores de las otras cinco variables. En ocasiones EES responde que la solución no converge y detalla cuál es el problema (división por cero, raíz cuadrada de un número negativo, etc.). Sólo hace falta mejorar las estimaciones iniciales y el rango de valores de las incógnitas en el menú «Variable Info» para ayudar a EES a encontrar la solución.

En los siguientes capítulos ilustraremos el uso de EES resolviendo algunos ejemplos implícitos (iterativos) e incluiremos en los problemas algunos ejercicios avanzados para cuya resolución resulta idóneo el uso de EES. En esta era del ordenador personal, se recomienda a todos los ingenieros el uso de programas de resolución de ecuaciones de ingeniería, especialmente de EES.

www.elsolucionario.net

1.11. INCERTIDUMBRE DE LOS DATOS EXPERIMENTALES

En este capítulo nos hemos referido a la *incertidumbre* del principio de los estados correspondientes al discutir la Figura 1.5. La incertidumbre es un elemento clave de la vida y de la ingeniería. En raras ocasiones conoce el ingeniero una propiedad o variable con un grado de precisión extremo. Por este motivo, es necesario conocer la *incertidumbre U* de nuestros datos, definida normalmente como el intervalo de valores dentro del cual podemos esperar que se encuentre el valor real con un 95 por 100 de confianza (Referencias 30, 31). En la Figura 1.5 se nos dijo que la incertidumbre de μ/μ_c es $U \Xi \pm 20$ por 100.

La Mecánica de Fluidos depende en gran medida de la experimentación, por lo que es necesario conocer la incertidumbre de los datos antes de poder usarlos como herramientas de predicción o diseño. En ocasiones la incertidumbre puede llegar a cambiar completamente nuestro punto de vista. Como ejemplo ilustrativo, supongamos que los astrónomos hubieran calculado la duración del año terrestre en 365,25 días «dos meses arriba o abajo». En primer lugar, sería ridículo dar el resultado con cinco cifras significativas, siendo más correcto expresar la duración del año como $Y \Xi 365 \pm 60$ días. En segundo lugar, no podríamos hacer planes fiables o confeccionar calendarios precisos. Organizar las vacaciones de Navidad sería muy arriesgado.

Cuando intervienen diversas variables, las estimaciones de la incertidumbre se acumulan. Supongamos que un cierto resultado P depende de N variables, $P = P(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)$, cada una con su propia incertidumbre; por ejemplo, x_1 tiene una incertidumbre δx_1. En ese caso, de común acuerdo entre los experimentalistas, la incertidumbre total P se calcula como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de todas las incertidumbres:

$$\delta P = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} \delta x_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial x_2} \delta x_2 \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial P}{\partial x_N} \delta x_N \right)^2 \right]^{1/2} \tag{1.43}$$

Desde un punto de vista estadístico esta estimación del error es mucho más probable que la que se obtiene al sumar linealmente las distintas incertidumbres δx_i, que equivale a hacer la hipótesis improbable de que todas las variables alcancen simultáneamente el error máximo. En cualquier caso, es responsabilidad del experimentalista establecer y realizar estimaciones precisas de todas las incertidumbres relevantes δx_i.

Si la cantidad P se puede expresar como un producto de potencias del resto de las variables, por ejemplo, $P = \text{cte } x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \ldots$, entonces cada una de las derivadas que aparecen en la Ecuación (1.43) es proporcional a P y al exponente correspondiente y es inversamente proporcional a la variable en cuestión.

Si $P = \text{cte } x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \ldots$, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{n_1 P}{x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{n_2 P}{x_2}, \frac{\partial P}{\partial x_3} = \frac{n_3 P}{x_3}, \ldots$$

Así, de la Ecuación (1.43),

$$\frac{\delta P}{P} = \left[\left(n_1 \frac{\delta x_1}{x_1} \right)^2 + \left(n_2 \frac{\delta x_2}{x_2} \right)^2 + \left(n_3 \frac{\delta x_3}{x_3} \right)^2 + \cdots \right]^{1/2} \tag{1.44}$$

La evaluación de δP resulta así un proceso sencillo, como ocurre en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.14

El llamado factor (adimensional) de fricción de Moody f, representado en la Figura 6.13, se obtiene experimentalmente usando la siguiente fórmula en función del diámetro D del conducto, la caída de presión Δp, la densidad ρ, el caudal Q y la longitud L del conducto:

$$f = \frac{\pi^2}{8} \frac{D^5 \Delta p}{\rho Q^2 L}$$

www.elsolucionario.net

Las incertidumbres experimentales en un cierto experimento son las siguientes: $D = 0{,}5$ por 100, $\Delta p = 2{,}0$ por 100, $\rho = 1{,}0$ por 100, $Q = 3{,}5$ por 100 y $L = 0{,}4$ por 100. Estime la incertidumbre total del factor de fricción.

Solución

El coeficiente $\pi^2/8$ es un número puro, luego no tiene ninguna incertidumbre. El efecto de la incertidumbre de las demás variables puede deducirse usando las Ecuaciones (1.43) y (1.44):

$$U = \frac{\delta f}{f} = \left[\left(5\frac{\delta D}{D} \right)^2 + \left(1\frac{\delta \Delta p}{\Delta p} \right)^2 + \left(1\frac{\delta \rho}{\rho} \right)^2 + \left(2\frac{\delta Q}{Q} \right)^2 + \left(1\frac{\delta L}{L} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$= [\{5(0{,}5\%)\}^2 + (2{,}0\%)^2 + (1{,}0\%)^2 + \{2(3{,}5\%)\}^2 + (0{,}4\%)^2]^{1/2} = 7{,}8\% \qquad \textit{Resp.}$$

Claramente, el efecto dominante en este cálculo particular es el error del 3,5 por 100 en Q, que se amplifica al doble debido a la potencia de 2 que afecta al caudal. La incertidumbre en el diámetro, que se multiplica por cinco, hubiera tenido un peso mayor aún de haber sido δD superior al 0,5 por 100.

1.12. EL EXAMEN DE FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA (FE)

En Estados Unidos, el camino que conduce a la licencia de ingeniero profesional tiene una primera parada, el Examen de Fundamentos de Ingeniería (FE, *Fundamentals of Engineering*), conocido en el pasado como el Examen de Ingeniero en Prácticas (E-I-T, *Engineer-in-Training*). En un futuro próximo este examen nacional, de ocho horas de duración, será probablemente un requisito que deban pasar todos los estudiantes graduados en ingeniería, no sólo para obtener la licencia, sino como una herramienta para evaluar a los propios estudiantes. La sesión matinal, que consta de 120 problemas, cubre numerosas disciplinas de carácter general:

Química	Informática	Dinámica
Circuitos Eléctricos	Economía de la Ingeniería	Mecánica de Fluidos
Ciencia de Materiales	Matemáticas	Resistencia de Materiales
Estática	Termodinámica	Ética

En la sesión de la tarde se puede elegir entre ingeniería química, civil, eléctrica, industrial o mecánica, o bien elegir otro bloque de problemas de carácter general en otras disciplinas. Como puede verse, la *Mecánica de Fluidos* constituye una de las disciplinas centrales del examen FE. Por este motivo, en este libro se han incluido un cierto número de problemas FE en aquellos capítulos donde resultan más apropiados.

Las preguntas del examen FE son de tipo test, normalmente con cinco opciones, elegidas cuidadosamente para tentar a aquellos que hayan usado unidades incorrectas, olvidado multiplicar o dividir por dos en algún sitio, olvidado un factor de π, o cosas así. En algunos casos, la ambigüedad de las opciones no es intencionada, como ocurre en el siguiente ejemplo tomado de un examen real:

La transición de flujo laminar a turbulento ocurre a un número de Reynolds de
(*a*) 900 (*b*) 1200 (*c*) 1500 (*d*) 2100 (*e*) 3000

La respuesta «correcta» era la (*d*), Re = 2100. En este caso el examinador estaba pensando, pero olvidó especificar, en el valor del Reynolds crítico Re_d para el *flujo en un conducto circular de paredes lisas*, pues (véase Capítulos 6 y 7) la transición es muy dependiente de la geometría, la rugosidad superficial y la longitud característica usada en la definición de Re. Lo ideal es no ponerse nervioso durante el examen y dejarse llevar por la corriente (valga el juego de palabras) para decidir qué respuesta encaja mejor en el contexto de un examen a nivel no graduado. En este libro se ha hecho todo lo posible por evitar la ambigüedad en las preguntas del examen FE.

www.elsolucionario.net

1.13. TÉCNICAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El análisis de los flujos genera una gran cantidad de problemas, ¡sólo en este libro hay unos 1600! Para resolver estos problemas, uno debe manejar ecuaciones, datos, tablas, hipótesis, sistemas de unidades y números. El autor recomienda seguir los siguientes pasos a la hora de resolver un problema:

1. Reúna los parámetros y los datos del problema en un mismo lugar.
2. Obtenga, usando tablas o gráficos, todas las propiedades necesarias de los fluidos: ρ, μ, c_p, k, Υ y demás.
3. Utilice unidades SI (N, s, kg, m) si es posible, con lo que no harán falta factores de conversión.
4. Entienda bien lo que *preguntan*. A menudo los estudiantes responden a preguntas incorrectas; por ejemplo, dan el flujo másico en lugar del flujo volumétrico, la presión en lugar del gradiente de presión, la resistencia en lugar de la sustentación. Se supone que los ingenieros saben leer cuidadosamente.
5. Haga un esquema detallado del sistema, indicando todo con claridad.
6. Piense cuidadosamente y a continuación enumere las *hipótesis* de trabajo. En este caso, saber es poder; no se debe adivinar la respuesta. Uno debe ser capaz de decidir correctamente si el flujo se puede considerar estacionario o no estacionario, compresible o incompresible, unidimensional o multidimensional, viscoso o no viscoso; y si basta un análisis de volumen de control o es necesario recurrir a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.
7. A partir de la información recopilada en los pasos 1 a 6, escriba las ecuaciones, correlaciones de datos y relaciones de estado que gobiernan los fluidos que intervienen en el problema en cuestión. Si la solución puede obtenerse algebraicamente, calcule lo que le *pidan*. Si las ecuaciones son más complicadas (no lineales, o demasiado numerosas, por ejemplo), utilic el Resolvedor de Ecuaciones de Ingeniería (EES).
8. Escriba la solución con claridad, indicando las unidades apropiadas y usando un número de cifras significativas (normalmente dos o tres) adecuado a la incertidumbre de los datos.

Los ejemplos de este libro seguirán siempre estos pasos.

www.elsolucionario.net

1.14. HISTORIA Y PERSPECTIVA DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

Como la mayor parte de las ciencias, la Mecánica de Fluidos tiene una historia de antecedentes lejanos aislados, después una época de descubrimientos fundamentales en los siglos XVIII y XIX y, finalmente, una época de «práctica actual», como denominamos a nuestros conocimientos ya bien establecidos. Las civilizaciones antiguas tenían conocimientos rudimentarios, pero suficientes para resolver algunos problemas. La navegación a vela y el regadío datan de tiempos prehistóricos. Los griegos introdujeron la información cuantitativa. Arquímedes y Herón de Alejandría postularon la ley del paralelogramo para la suma de vectores en el siglo tercero antes de Cristo. Arquímedes (285-212 AC) formuló las leyes de flotabilidad y las supo aplicar a cuerpos sumergidos, utilizando cierta forma de cálculo diferencial en su análisis. Los romanos construyeron multitud de acueductos en el siglo cuarto antes de Cristo, pero no dejaron escritos sobre los principios cuantitativos de sus diseños.

Hasta el Renacimiento hubo mejoras sustanciales en el diseño de naves, canales, conducciones de agua, etcétera, pero tampoco nos queda evidencia de los análisis realizados. Leonardo da Vinci (1452-1519) obtuvo la ecuación de la continuidad para flujos unidimensionales. Fue un excelente experimentalista y en sus notas nos dejó descripciones muy reales sobre chorros, olas, resaltos hidráulicos, formación de torbellinos y diseños de cuerpos de baja y alta resistencia (cuerpos fuselados y paracaídas). Un francés, Edme Mariotte (1620-1684), construyó el primer túnel aerodinámico y realizó diversas pruebas en él.

Pero el definitivo impulso se debe a Isaac Newton (1642-1727), que propuso las leyes generales del movimiento y la ley de resistencia viscosa lineal para los fluidos que hoy denominamos newtonianos. Los matemáticos del siglo XVIII (Daniel Bernoulli, Leonhard Euler, Jean D'Alembert, Joseph-Louis Lagrange y Pierre-Simon Laplace) obtuvieron soluciones a muchos problemas de flujos no viscosos. Euler desarrolló las ecuaciones diferenciales del movimiento de flujos incompresibles no viscosos, y posteriormente dedujo su forma integrada, que hoy conocemos como ecuación de Bernoulli. Utilizando estas ecuaciones, D'Alembert propuso su famosa paradoja: un cuerpo inmerso en un flujo no viscoso tiene resistencia nula. Estos brillantes resultados son deslumbrantes, pero en la práctica tienen pocas aplicaciones, porque la viscosidad siempre

www.elsolucionario.net

juega un papel crucial. Los ingenieros de la época rechazaron estas teorías por irreales y desarrollaron la ciencia denominada *hidráulica*, que es esencialmente empírica. Experimentalistas como Chézy, Pitot, Borda, Weber, Francis, Hagen, Poiseuille, Darcy, Manning, Bazin y Wiesbach trabajaron en gran variedad de flujos como canales abiertos, resistencia de barcos, flujos en tuberías, olas y turbinas. La mayor parte de los datos eran utilizados sin tener en cuenta los fundamentos físicos de los flujos.

Al final del siglo XIX comenzó la unificación entre *hidráulicos* e *hidrodinámicos*. William Froude (1810-1879) y su hijo Robert (1846-1924) desarrollaron leyes para el estudio con modelos a escala; Lord Rayleigh (1842-1919) propuso la técnica del análisis dimensional; y Osborne Reynolds (1842-1912) publicó en 1883 su clásico experimento, mostrando la importancia de los efectos viscosos a través de un parámetro adimensional, el número de Reynolds, como se denomina hoy a dicho parámetro. Mientras tanto, la teoría de los flujos viscosos que había sido desarrollada por Navier (1785-1836) y Stokes (1819-1903), añadiendo los términos viscosos a las ecuaciones del movimiento, permanecía en el olvido debido a su dificultad matemática. Fue entonces, en 1904, cuando un ingeniero alemán, Ludwig Prandtl (1875-1953), publicó el artículo quizá más importante de la historia de la Mecánica de Fluidos. Según Prandtl, en los flujos de fluidos poco viscosos, como el aire y el agua, el campo fluido puede dividirse en dos regiones: una capa viscosa delgada, o *capa límite*, en las proximidades de superficies sólidas y entrefases donde los efectos viscosos son importantes, y una región exterior que se puede analizar con las ecuaciones de Euler y Bernoulli. La teoría de la capa límite ha demostrado ser la herramienta más importante en el análisis de los flujos. Las aportaciones esenciales a la Mecánica de Fluidos durante el siglo XX son diversos trabajos teóricos y experimentales de Prandtl y de sus dos principales colegas competidores, Theodore von Kármán (1881-1963) y Sir Geoffrey I. Taylor (1886-1975). La mayor parte de las contribuciones citadas en este breve resumen histórico serán expuestas detalladamente a lo largo del libro. Para una perspectiva más detallada se pueden consultar las Referencias 23 a 25.

Como la tierra está cubierta en un 75 por 100 por agua y en un 100 por 100 por aire, las posibilidades de la Mecánica de Fluidos son enormes y abarcan de alguna forma la totalidad de la actividad humana. Ciencias como la meteorología, la oceanografía o la hidrología versan sobre los flujos naturales, sin olvidar las implicaciones fluidomecánicas de la circulación sanguínea o la respiración. El transporte en general está relacionado con el movimiento de los fluidos, bien sea a través de la aerodinámica de los aviones y cohetes o de la hidrodinámica de barcos y submarinos. La casi totalidad de la energía eléctrica procede de turbinas hidráulicas o de vapor. Todos los problemas de combustión incluyen movimiento de fluidos, como también lo hacen las técnicas modernas de regadío, control de inundaciones, abastecimiento de agua, tratamiento de aguas residuales, movimiento de proyectiles y transporte de petróleo o gas por conductos. La finalidad de este libro es presentar los conceptos fundamentales y las aplicaciones prácticas de la Mecánica de Fluidos, para que el futuro ingeniero pueda adentrarse en cualquiera de los campos específicos señalados anteriormente y estar en condiciones de comprender los posibles desarrollos tecnológicos posteriores.

Problemas

La mayoría de los problemas propuestos aquí son bastante sencillos. Los más difíciles, o de final abierto, se indican con un asterisco, como en el Problema P1.18. Para resolver los problemas señalados con un icono EES (por ejemplo, el Problema P1.7) se recomienda el uso del Resolvedor de Ecuaciones de Ingeniería (EES, *Engineering Equation Solver*), mientras que los problemas señalados con un disquete pueden requerir el uso de un ordenador. Los problemas estándar de final de capítulo P1.1 a P1.85 (ordenados por temas en la lista de abajo) están seguidos por los problemas del examen de fundamentos de ingeniería (FE, *Fundamentals of Engineering Exam*) FE1.1 a FE1.10 y los problemas extensos PE1.1 a PE1.8.

Distribución de los problemas

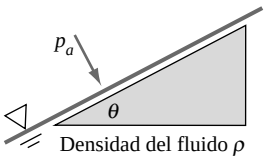
Sección	Tema	Problemas
1.1, 1.2, 1.3	Concepto de fluido como medio continuo	P1.1-P1.3
1.4	Dimensiones, unidades, dinámica	P1.4-P1.21
1.5	Campo de velocidades	P1.22-P1.23
1.6	Propiedades termodinámicas	P1.24-P1.37
1.7	Viscosidad; condición de no deslizamiento	P1.38-P1.61
1.7	Tensión superficial	P1.62-P1.71
1.7	Presión de vapor; cavitación	P1.72-P1.74
1.7	Velocidad del sonido; número de Mach	P1.75-P1.79
1.8, 1.9	Descripción del flujo, líneas de corriente, etc.	P1.80-P1.84
1.10	Historia de la Mecánica de Fluidos	P1.85

P1.1 Un gas a 20 °C se puede considerar *rarificado*, desviándose de la hipótesis de medio continuo, cuando hay menos de 10^{12} moléculas por milímetro cúbico. Si el número de Avogadro es $6{,}023 \times 10^{23}$ moléculas por mol, ¿a qué presión absoluta (en Pa) corresponde este límite en el aire?

P1.2 La Tabla A.6 proporciona la densidad de la atmósfera estándar en función de la altitud. Use dichos valores para estimar de forma aproximada —por ejemplo, con un error del ±50 por 100— el número de moléculas de aire que forman la atmósfera de la tierra.

www.elsolucionario.net

P1.3 Considere el elemento triangular de la Figura P1.3. Demuestre que la superficie libre *inclinada* de un líquido, en contacto con una atmósfera de gas a presión p_a, debe soportar esfuerzos cortantes y por tanto comenzar a fluir. *Consejo*: tenga en cuenta el peso del fluido y demuestre que una condición libre de esfuerzos cortantes conduce a un desequilibrio de fuerzas horizontales.



P1.3

P1.4 Las cantidades viscosidad μ, velocidad V y tensión superficial Υ pueden combinarse para formar un grupo adimensional. Encuentre la combinación que es proporcional a μ. Este grupo suele recibir un nombre que empieza por *C*. ¿Puede adivinar cuál es este nombre?

P1.5 El *camino libre medio* de un gas, l, se define como la distancia media recorrida por sus moléculas entre colisiones. Una fórmula para estimar el valor de l para un gas ideal es

$$l = 1{,}26\frac{\mu}{\sqrt{RT}}$$

¿Qué dimensiones tiene la constante 1,26? Use la fórmula anterior para estimar el camino libre medio en aire a 20 °C y 7 kPa. ¿Considera que el aire en estas condiciones está rarificado?

P1.6 Si p es la presión e y es una coordenada, establezca, en el sistema $\{MLT\}$, las dimensiones de las siguientes cantidades: (*a*) $\partial p/\partial y$, (*b*) $\int p\,dy$, (*c*) $\partial^2 p/\partial y^2$ y (*d*) ∇p.

P1.7 Una pequeña aldea consume 1,5 acres · ft/día de agua de un depósito. Convierta este consumo medio de agua a (*a*) galones por minuto y (*b*) litros por segundo.

P1.8 Supongamos que sabemos poco de resistencia de materiales pero que nos dicen que el esfuerzo flector σ en una viga es *proporcional* al semiespesor y de la viga y que también depende del momento flector M y del momento de inercia I de la sección de la viga. También nos dicen que, en el caso particular $M = 2900$ in · lbf, $y = 1{,}5$ in e $I = 0{,}4$ in^4, el esfuerzo que predice la teoría es de 75 MPa. Usando esta información y el análisis dimensional únicamente, halle, con tres cifras significativas, la única fórmula dimensionalmente homogénea posible $\sigma = y\,f(M, I)$.

P1.9 El *número adimensional de Galileo Ga* expresa la relación entre los efectos gravitatorios y los efectos viscosos en un flujo, combinando la densidad ρ, la aceleración de la gravedad g, la escala de longitud L y la viscosidad μ. Sin consultar ningún otro libro, halle la forma del número de Galileo sabiendo que g está en el numerador.

P1.10 La fórmula de Stokes-Oseen [18] que determina la resistencia F que actúa sobre una esfera de diámetro D que se desplaza lentamente en una corriente fluida con velocidad V, densidad ρ y viscosidad μ es

$$F = 3\pi\mu DV + \frac{9\pi}{16}\rho V^2 D^2$$

¿Es esta fórmula dimensionalmente homogénea?

P1.11 Los ingenieros suelen usar la siguiente fórmula para el caudal Q de un líquido que fluye a través de un agujero de diámetro D en la pared lateral de un tanque:

$$Q = 0{,}68D^2\sqrt{gh}$$

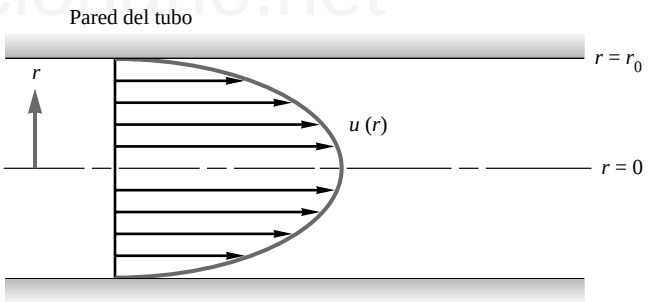
donde g es la aceleración de la gravedad y h es la altura de la superficie del líquido respecto al agujero. ¿Qué dimensiones tiene la constante 0,68?

P1.12 En el flujo estacionario (laminar) a baja velocidad a través de un conducto circular, como se muestra en la Figura P1.12, la velocidad u varía con el radio según la expresión

$$u = B\frac{\partial p}{\mu}(r_0^2 - r^2)$$

donde μ es la viscosidad del fluido y Δp es la caída de presión entre la entrada y la salida. ¿Cuáles son las dimensiones de la constante B?

www.elsolucionario.net



P1.12

P1.13 El rendimiento η de una bomba se define como la relación (adimensional) entre la potencia consumida por el flujo y la potencia requerida para accionar la bomba:

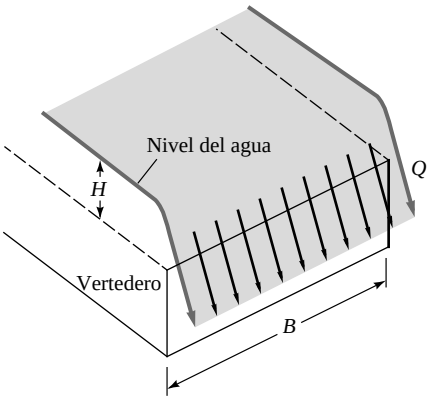
$$\eta = \frac{Q\Delta p}{\text{potencia suministrada}}$$

donde Q es el caudal y Δp es la sobrepresión producida por la bomba. Suponga que una cierta bomba desarrolla una sobrepresión de 35 lbf/in^2 para un caudal de 40 L/s. Si la potencia consumida es de 16 hp, ¿cuál es el rendimiento?

***P1.14** La Figura P1.14 representa el flujo sobre un vertedero. Se sabe que el caudal Q sólo depende de la anchura B del dique, la aceleración de la gravedad g, y la altura H

www.elsolucionario.net

del agua sobre la cresta del vertedero aguas arriba. Se sabe también que Q es proporcional a B. ¿Qué forma tiene la única expresión dimensionalmente homogénea para el caudal?



P1.14

1.15 Como una aplicación práctica del flujo de la Figura P1.14, llamado vertedero de pared delgada, los ingenieros civiles utilizan la siguiente fórmula para el caudal: $Q \approx 3{,}3BH^{3/2}$, con Q en ft^3/s y B y H en pies. ¿Es esta formulación dimensionalmente homogénea? En caso contrario, explique la dificultad y cómo podría expresarse la fórmula de forma más homogénea.

P1.16 Las ecuaciones algebraicas como la de Bernoulli, Ecuación (1) del Ejemplo 1.3, son dimensionalmente consistentes, pero ¿qué ocurre con las ecuaciones diferenciales físicas? Considere, por ejemplo, la ecuación de cantidad de movimiento de la teoría de la capa límite según el eje x, obtenida en primer lugar por Ludwig Prandtl en 1904:

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

donde τ es el esfuerzo cortante en la capa límite y g_x es la componente de la gravedad según el eje x. ¿Es esta ecuación dimensionalmente consistente? ¿Se puede generalizar este resultado?

P1.17 Una fórmula muy común en hidráulica es la fórmula de Hazen-Williams para determinar el flujo volumétrico Q en una tubería de diámetro D y longitud L:

$$Q \approx 61{,}9D^{2{,}63}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)^{0{,}54}$$

donde Δp es la caída de presión necesaria para mantener el flujo. ¿Cuáles son las dimensiones de la constante 61,9? ¿Puede aplicarse esta fórmula a diversos líquidos y gases?

***P1.18** En el flujo de partículas pequeñas a baja velocidad, el primer término de la ley de resistencia de Stokes-Oseen, Problema P1.10, es el dominante; luego, $F \approx KV$, donde K es una constante. Consideremos una partícula de masa m que se mueve horizontalmente desde su posición inicial $x = 0$ con velocidad inicial V_0. Muestre (*a*) que la velocidad de la partícula decae exponencialmente con el tiempo y (*b*) que la partícula se detiene después de desplazarse una distancia $x = mV_0/K$.

P1.19 La *convección de Marangoni* aparece cuando existen diferencias de tensión superficial a lo largo de una superficie libre. El número adimensional de Marangoni M es una combinación de la difusividad térmica $\alpha = k/(\rho c_p)$ (donde k es la conductividad térmica), la longitud característica L, la viscosidad μ, y la diferencia de tensión superficial $\delta\Upsilon$. Obtenga la expresión para M sabiendo que es proporcional a L.

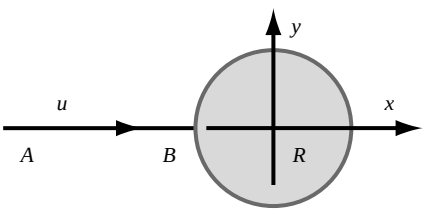
P1.20 Una pelota de béisbol, con $m = 145$ g, se lanza hacia arriba desde su posición inicial $z = 0$ con $V_0 = 45$ m/s. La resistencia que ejerce el aire sobre la pelota es CV^2, donde $C \approx 0{,}0013\ N \cdot s^2/m^2$. Escriba una ecuación diferencial para el movimiento de la pelota, y resuélvala para obtener la velocidad instantánea $V(t)$ y la posición $z(t)$. Determine la altura máxima $z_{máx}$ alcanzada por la pelota, y compare los resultados con los obtenidos cuando se desprecia la resistencia del aire.

P1.21 El *número adimensional de Grashof Gr* se obtiene combinando la densidad ρ, la viscosidad μ, la diferencia de temperaturas ΔT, la longitud característica L, la aceleración de la gravedad g y el coeficiente de expansión volumétrica β, definido por $\beta = (-1/\rho)(\partial\rho/\partial T)_p$. Obtenga la expresión para Gr sabiendo que este número es proporcional a g y a β.

***P1.22** De acuerdo con la teoría del Capítulo 8, cuando una corriente uniforme incide sobre un cilindro de radio R, la velocidad tiene una única componente a lo largo de la línea de simetría AB de la Figura P1.22:

$$u = U_\infty\left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right) \quad \text{para} \quad -\infty < x < -R$$

donde U_∞ es la velocidad de la corriente lejos del cilindro. Usando las ideas del Ejemplo 1.5, determine (*a*) la máxima deceleración del flujo a lo largo de AB y (*b*) el punto en que se produce.



P1.22

P1.23 Experimente con el chorro de un grifo (de cocina o similar) para determinar los caudales típicos Q en m^3/h, midiendo por ejemplo el tiempo que se tarda en llenar un volumen conocido. Trate de obtener condiciones de descarga en las que el chorro sea (*a*) suave y redondo y (*b*) desordenado y fluctuante. Mida el diámetro del conducto de alimentación (mire debajo del fregadero). En ambos casos, calcule la velocidad media

www.elsolucionario.net

del flujo, $V_{med} = Q/A_{sección\ transversal}$ y el número de Reynolds del flujo, $Re = \rho V_{med} D/\mu$. Comente los resultados.

P1.24 Considere dióxido de carbono a 10 atm y 400 °C. Calcule los valores correspondientes de ρ y c_p y estime la nueva presión cuando el gas se enfría isentrópicamente a 100 °C. Utilice dos métodos: (*a*) la hipótesis de gas ideal y (*b*) las tablas de gases o el software EES.

P1.25 Un tanque contiene 0,9 m^3 de helio a 200 kPa y 20 °C. Estime la masa total de este gas, en kg, (*a*) en la tierra y (*b*) en la luna. Calcule además (*c*) la cantidad de calor, en MJ, necesaria para expandir este gas a temperatura constante hasta alcanzar un volumen de 1,5 m^3.

P1.26 Cuando en los Estados Unidos se dice que el neumático de un coche está inflado «a 32 lb», significa que la presión interna es 32 lbf/in^2 superior a la presión atmosférica. Si el neumático se encuentra a nivel del mar, tiene un volumen de 3,0 ft^3 y está a 75 °F, estime el peso total de aire, en lbf, contenido en el neumático.

P1.27 Según la Referencia 13, el volumen específico a distintas temperaturas del vapor de agua a 40 lbf/in^2 es el siguiente:

T, °F	400	500	600	700	800
v, ft^3/lbm	12,624	14,165	15,685	17,195	18,699

¿Se comporta el vapor de agua, en estas condiciones, como un gas perfecto, o tiene un comportamiento fuertemente no ideal? Si fuera razonablemente perfecto, obtenga mediante un ajuste de mínimos cuadrados† el valor de la constante de los gases R, en $m^2/(s^2 \cdot K)$, estime el porcentaje de error de esta aproximación y compare con la Tabla A.4.

P1.28 El aire húmedo de la atmósfera con un 100 por 100 de humedad relativa contiene vapor de agua saturado y, según la ley de Dalton de las presiones parciales,

$$p_{atm} = p_{aire\ seco} + p_{vapor\ de\ agua}$$

Supongamos que el aire atmosférico se encuentra a 40 °C y 1 atm. Calcule la densidad del aire húmedo con un 100 por 100 de humedad, y compárelo con la densidad del aire seco en las mismas condiciones.

P1.29 Un tanque de aire comprimido contiene 5 ft^3 de aire a 120 lbf/in^2 por encima de la presión atmosférica. Estime la energía, en ft · lbf, necesaria para comprimir este aire desde las condiciones atmosféricas, suponiendo un proceso isotermo ideal.

P1.30 Repita el Problema P1.29 si el tanque está lleno con agua comprimida en lugar de aire. ¿Por qué el resultado es miles de veces más pequeño que el resultado de 215.000 ft · lbf del Problema P1.29?

***P1.31** La densidad del agua (dulce) a 1 atm, en el intervalo de temperaturas de 0 a 100 °C, se indica en la Tabla A.1. Ajuste estos valores mediante mínimos cuadrados† a una curva de la forma $\rho = a + bT + cT^2$, con T en °C, y estime el error cometido. Utilice la fórmula para calcular la densidad del agua a 45 °C, y compare el resultado con el valor experimental de 990,1 kg/m^3.

P1.32 Un dirigible puede modelarse como un elipsoide de revolución de 90 m de largo y 30 m de diámetro. Estime el peso de gas contenido en un dirigible, a 20 °C, lleno de (*a*) helio a 1,1 atm y (*b*) aire a 1,0 atm. ¿Qué representa la diferencia entre estos dos valores (véase Capítulo 2)?

***P1.33** La variación de la densidad del mercurio con la presión a 20 °C viene dada por los siguientes datos experimentales:

p, atm	1	500	1000	1500	2000
ρ, kg/m^3	13,545	13,573	13,600	13,625	13,653

Ajuste estos datos a la ecuación empírica de estado para líquidos, Ecuación (1.19), para obtener los valores más apropiados de los coeficientes B y n para el mercurio. A continuación, suponiendo que los datos son casi isentrópicos, utilice estos valores para estimar la velocidad del sonido del mercurio a 1 atm y compare con la Tabla 9.1.

P1.34 Considere vapor de agua en el siguiente estado, próximo a la línea de saturación: (p_1, T_1) = (1,31 MPa, 290 °C). Calcule y compare, para un gas ideal (Tabla A.4) y usando las tablas de vapor (o el programa EES), (*a*) la densidad ρ_1 y (*b*) la densidad ρ_2 si el vapor se expande isentrópicamente hasta una presión de 414 kPa. Discuta los resultados.

P1.35 Como se observa en la Tabla A.4, la mayoría de los gases comunes (aire, nitrógeno, oxígeno, hidrógeno) tienen una relación de calores específicos $\gamma \approx 1{,}40$. ¿Por qué el argón y el helio tienen valores tan altos? ¿Por qué el NH_3 tiene un valor tan bajo? ¿Cuál es el valor más pequeño de γ entre los gases comunes que usted conozca?

P1.36 El módulo de compresibilidad isentrópico B de un fluido se define como el cambio isentrópico de presión medido con el cambio relativo de densidad:

$$B = \left(\frac{dp}{d\rho/\rho}\right)_s$$

¿Cuáles son las dimensiones de B? Usando relaciones $p(\rho)$ teóricas, estime el módulo de compresibilidad de (*a*) N_2O, suponiendo que se trata de un gas ideal, y (*b*) agua, a 20 °C y 1 atm.

P1.37 Un gas casi-ideal tiene un peso molecular de 44 y un calor específico c_v = 610 J/(kg · K). ¿Cuál es (*a*) su relación de calores específicos, γ, y (*b*) su velocidad del sonido a 100 °C?

P1.38 En la Figura 1.6, si el fluido es glicerina a 20 °C y el ancho entre las placas es de 6 mm, ¿qué esfuerzo cortante (en Pa) se requiere para mover la placa superior a una velocidad de 5,5 m/s? ¿Cuál es el número de Reynolds basado en la distancia L entre las placas?

P1.39 A partir de la viscosidad μ del aire a 20 °C, dada por la Tabla 1.4, estime su viscosidad a 500 °C usando (*a*) la

† El concepto de «mínimos cuadrados» es muy importante y todo estudiante debería conocerlo.

www.elsolucionario.net

ley potencial y (*b*) la ley de Sutherland. Estímela también usando (*c*) la Figura 1.5. Compare los resultados con el valor aceptado $\mu \Xi 3{,}58 \times 10^{-5}$ kg/m · s.

***P1.40** Una simplificación de la ley logarítmico-cuadrática para la viscosidad de un líquido en función de la temperatura, dada por la Ecuación (1.28), es la ecuación de Andrade [11], $\mu \Xi A \exp(B/T)$, donde (A, B) son constantes obtenidas del ajuste de datos experimentales y T es la temperatura absoluta. Ajuste esta relación a los datos del agua de la Tabla A.1 y estime el porcentaje de error cometido en la aproximación.

P1.41 La siguiente tabla muestra valores experimentales de la viscosidad del argón a 1 atm:

T, K	300	400	500	600	700	800
μ, kg/(m · s)	$2{,}27 \times 10^{-5}$	$2{,}85 \times 10^{-5}$	$3{,}37 \times 10^{-5}$	$3{,}83 \times 10^{-5}$	$4{,}25 \times 10^{-5}$	$4{,}64 \times 10^{-5}$

Ajuste estos valores mediante (*a*) una ley potencial y (*b*) la ley de Sutherland, Ecuación (1.30).

P1.42 La siguiente tabla muestra valores experimentales de la viscosidad del helio a 1 atm:

T, K	200	400	600	800	1000	1200
μ, kg/(m · s)	$1{,}50 \times 10^{-5}$	$2{,}43 \times 10^{-5}$	$3{,}20 \times 10^{-5}$	$3{,}88 \times 10^{-5}$	$4{,}50 \times 10^{-5}$	$5{,}08 \times 10^{-5}$

Ajuste estos valores mediante (*a*) una ley potencial y (*b*) la ley de Sutherland, Ecuación (1.30).

***P1.43** Yaws et al. [34] proponen la siguiente fórmula de ajuste para la viscosidad de líquidos orgánicos en función de la temperatura:

$$\log_{10} \mu \Xi A + \frac{B}{T} + CT + DT^2$$

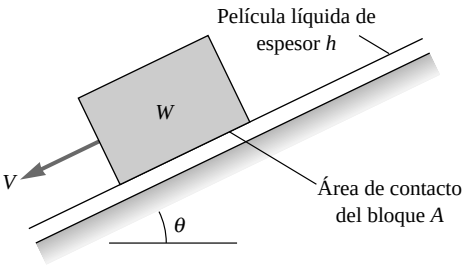
siendo T la temperatura absoluta. (*a*) ¿Se puede poner alguna objeción a esta fórmula desde un punto de vista dimensional? (*b*) Haciendo caso omiso de (*a*), indique cómo podrían obtenerse analíticamente las constantes de ajuste A, B, C y D a partir de N puntos experimentales (μ_i, T_i) usando el método de los mínimos cuadrados. No es necesario llevar a cabo ningún cálculo.

P1.44 Los valores correspondientes al aceite SAE 30 de la Tabla 1.4 son estrictamente «representativos», no exactos, porque las propiedades de los aceites lubricantes varían considerablemente según el tipo de petróleo crudo del cual se han refinado. La Sociedad de Ingenieros de Automoción (SAE, *Society of Automotive Engineers*) [26] permite ciertos *rangos* de viscosidad cinemática para todos los aceites lubricantes: para el SAE 30, $9{,}3 < \nu < 12{,}5$ mm²/s a 100 °C. La densidad del aceite SAE 30 también puede variar un ±2 por 100 respecto al valor tabulado de 891 kg/m³. Consideremos los siguientes datos correspondientes a un aceite SAE 30 aceptable:

T, °C	0	20	40	60	80	100
μ, kg/(m · s)	2,00	0,40	0,11	0,042	0,017	0,0095

¿Cómo es este aceite comparado con el de la Figura A.1 de los Apéndices? ¿Cómo de bien se ajustan los datos a la ecuación de Andrade del Problema 1.40?

P1.45 Un bloque cuyo peso es W se desliza sobre un plano inclinado lubricado por una película de aceite, como se indica en la Figura P1.45. La superficie de contacto del bloque es A y el espesor de la película de aceite h. Suponiendo una distribución lineal de velocidad en el aceite, halle una expresión para la velocidad «límite» V del bloque.

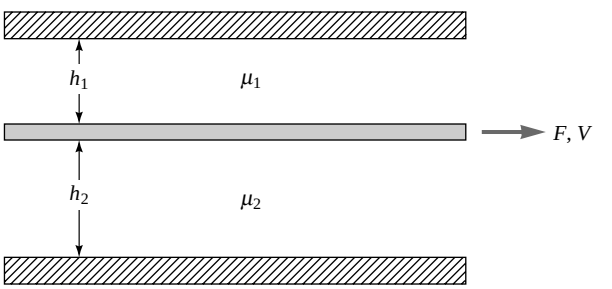


P1.45

P1.46 Calcule la velocidad límite del bloque de la Figura P1.45 si la masa del mismo es 6 kg, A = 35 cm², θ = 15° y la película lubricante es de aceite SAE 30 a 20 °C y tiene 1 mm de espesor.

P1.47 Un eje de 6,00 cm de diámetro se aloja en una carcasa de 6,02 cm de diámetro y 40 cm de largo. La holgura, que se supone uniforme, está llena de un aceite de viscosidad ν = 0,003 m²/s y densidad relativa S = 0,88. Si el eje se mueve en dirección axial a 0,4 m/s, calcule la fuerza de resistencia producida por el aceite.

P1.48 Una placa plana está separada de dos placas fijas por dos líquidos muy viscosos de viscosidades μ_1 y μ_2, respectivamente, como muestra la Figura P1.48. Como puede verse, los espaciados entre las placas h_1 y h_2 son distintos. La placa central tiene un área de contacto A con cada fluido. (*a*) Suponiendo un perfil de velocidad lineal en ambos fluidos, halle la fuerza F requerida para mover la placa con velocidad V. (*b*) ¿Debe existir alguna *relación* entre las dos viscosidades μ_1 y μ_2?



P1.48

P1.49 El número de aparatos comerciales y de laboratorio que se han desarrollado para medir la viscosidad de los fluidos es muy abundante, como se puede comprobar

www.elsolucionario.net

en la Referencia 27. Consideremos un cilindro y un eje coaxial, como el del Problema 1.47, que en este caso tiene restringido el movimiento axial y gira dentro de la carcasa. Sean r_i y r_e los radios de los cilindros interior y exterior, respectivamente, L la longitud del cojinete, Ω (rad/s) la velocidad de giro y M el par motor aplicado. Usando estos datos, obtenga una expresión analítica para la viscosidad μ del fluido lubricante.

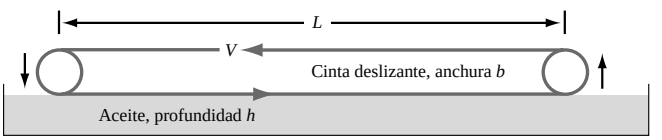
P1.50 Una forma muy sencilla de medir la viscosidad es medir el tiempo t que tarda una esfera sólida en caer una distancia L a través de un fluido de ensayo de densidad ρ. La viscosidad μ del fluido viene entonces dada por

$$\mu = \frac{W_{neto}t}{3\pi DL} \quad \text{si} \quad t = \frac{2\pi D^2 L}{\mu}$$

donde D es el diámetro de la esfera y W_{neto} es el peso neto de la esfera dentro del fluido. (*a*) Demuestre que ambas fórmulas son dimensionalmente homogéneas. (*b*) Suponga que una esfera de aluminio (densidad 2700 kg/m^3) de 2,5 mm de diámetro cae a través de un aceite de densidad 875 kg/m^3. Si el tiempo que tarda en caer 50 cm es de 32 s, estime la viscosidad del aceite y verifique que se cumple la desigualdad anterior.

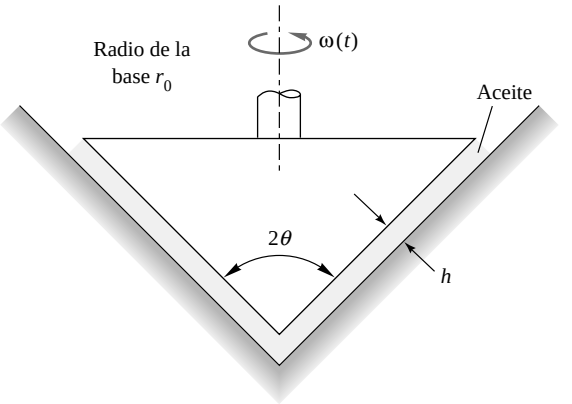
P1.51 Utilice la teoría del Problema P1.49 (o derive una expresión *ad hoc* si lo desea) para un eje de 8 cm de largo, rotando a 1200 rpm, con r_i = 2,00 cm y r_e = 2,05 cm. Si el par medido es de 0,293 N · m, ¿cuál es la viscosidad del fluido? Suponga que las incertidumbres experimentales son las siguientes: L (±0,5 mm), M (±0,003 N · m), V (±1 por 100), y r_i o r_e (±0,02 mm). ¿Cuál es la incertidumbre de la medida de la viscosidad?

P1.52 La cinta de la Figura P1.52 se mueve con velocidad uniforme V y está en contacto con la superficie de un tanque de aceite de viscosidad μ. Suponiendo un perfil de velocidad lineal en el aceite, obtenga una fórmula sencilla para la potencia P requerida para mover la cinta en función de (h, L, V, b, μ). ¿Qué potencia P se requiere si la cinta se mueve a 2,5 m/s sobre aceite SAE 30W a 20 °C, siendo L = 2 m, b = 60 cm y h = 3 cm?



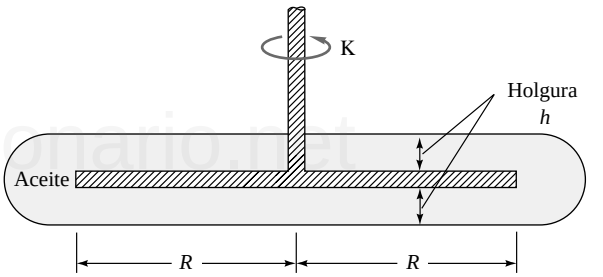
P1.52

***P1.53** Un cono sólido de ángulo 2θ, radio de la base r_0 y densidad ρ_c está girando con una velocidad angular ω_0 en su asiento cónico, como se muestra en la Figura P1.53. La holgura h está llena de aceite con viscosidad μ. Despreciando la resistencia del aire, obtenga una expresión para la velocidad angular del cono $\omega(t)$ si no se aplica ningún par motor.



P1.53

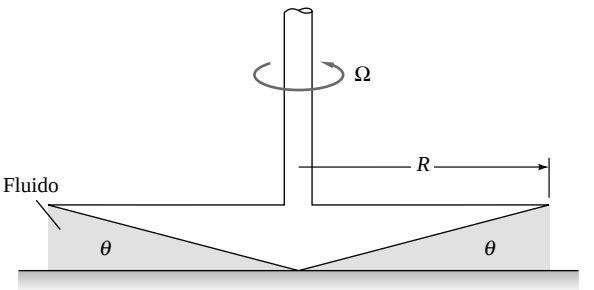
***P1.54** Un disco de radio R gira con velocidad angular Ω dentro de un contenedor discoidal lleno de aceite con viscosidad μ, como se muestra en la Figura P1.54. Suponiendo un perfil de velocidad lineal y despreciando los esfuerzos cortantes en el borde exterior del disco, obtenga una expresión para el par de resistencia viscoso que actúa sobre el disco.



P1.54

***P1.55** El dispositivo de la Figura P1.54 se denomina *viscosímetro de disco giratorio* [27]. Supongamos que R = 5 cm y h = 1 mm. Si el par requerido para hacer girar el disco a 900 rpm es de 0,537 N · m, ¿cuál es la viscosidad del fluido? Si la incertidumbre en los datos (M, R, h, Ω) es del ±1 por 100, ¿cuál es la incertidumbre global de la medida de la viscosidad?

***P1.56** El dispositivo de la Figura P1.56 se denomina *viscosímetro cono-placa* [27]. El ángulo del cono es muy pe-



P1.56

www.elsolucionario.net

queño, luego sen $\theta \Xi \theta$, y el hueco entre cono y placa se llena con el líquido a ensayar, midiendo el par M que hay que aplicar para hacer girar el cono a la velocidad Ω. Suponiendo un perfil de velocidad lineal en la película fluida, obtenga una expresión para la viscosidad del fluido μ en función de (M, R, Ω, θ).

***P1.57** Supongamos que el viscosímetro cono-placa de la Figura P1.56 tiene por dimensiones $R = 6$ cm y $\theta = 3°$. Si el par necesario para hacer girar el cono a 600 rpm es 0,157 N · m, ¿cuál es la viscosidad del fluido? Si la incertidumbre en los datos (M, R, Ω, θ) es del ±1 por 100, ¿cuál es la incertidumbre global de la medida de la viscosidad?

***P1.58** El análisis del flujo laminar en un conducto circular del Problema P1.12 se puede usar para diseñar un *viscosímetro capilar* [27]. Si Q es el caudal, L es la longitud del conducto y Δp es la caída de presión entre la entrada y la salida, la teoría del Capítulo 6 permite expresar la viscosidad en la forma:

$$\mu \Xi \frac{\Theta r_0^4 \mathrm{O} p}{8LQ}$$

donde se desprecian los efectos de borde [27]. Supongamos que nuestro viscosímetro capilar tiene $r_0 = 2$ mm y $L = 25$ cm. Para un cierto fluido se obtienen los siguientes valores para el caudal y la caída de presiones:

Q, m³/h	0,36	0,72	1,08	1,44	1,80
Δp, kPa	159	318	477	1274	1851

¿Cuál es la viscosidad del fluido? *Nota:* sólo los tres primeros puntos dan la viscosidad adecuada. ¿Qué tienen de especial los últimos dos puntos, cuyas medidas se obtuvieron con gran precisión?

P1.59 Un cilindro de diámetro D, longitud L y densidad ρ_c cae por efecto de la gravedad dentro de un tubo de diámetro D_0. La holgura, $D_0 - D \ll D$, está llena de un fluido lubricante de densidad ρ y viscosidad μ. Despreciando el efecto del aire situado por encima y por debajo del cilindro, obtenga una fórmula para la velocidad límite de caída del cilindro. Aplique la fórmula al caso de un cilindro de acero, $D = 2$ cm, $D_0 = 2{,}04$ cm, $L = 15$ cm, con una película de aceite SAE 30 a 20 °C.

P1.60 Un fluido muy viscoso (flujo laminar) llena el espacio entre dos cilindros coaxiales alargados de radios a y $b > a$, respectivamente. Si el cilindro exterior está fijo y el interior se mueve axialmente con velocidad U constante, la distribución de velocidad axial en el fluido es

$$\downarrow_z \frac{U \ln(b/r)}{\ln(b/a)}$$

La Figura 4.2 muestra cómo se define la componente de la velocidad v_z. Represente la distribución de velocidades entre los dos cilindros y comente el resultado. Obtenga expresiones para el esfuerzo cortante en la pared, tanto del cilindro interior como del exterior, y explique por qué son diferentes.

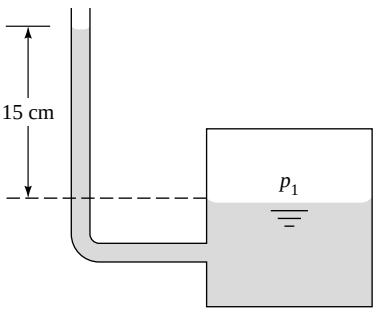
***P1.61** Un disco aerodeslizante tiene una masa de 50 g y un diámetro de 9 cm. Cuando se coloca sobre una mesa de hockey sobre aire, se forma bajo el disco una delgada película de aire a 20 °C, de 0,12 mm de espesor. Tras golpear el disco, éste adquiere una velocidad inicial de 10 m/s. Suponiendo una distribución de velocidad lineal en la película de aire, ¿cuánto tiempo tardará el disco en (*a*) reducir su velocidad a 1 m/s y (*b*) pararse completamente? Además, (*c*) ¿qué distancia habrá recorrido el disco a lo largo de la (extraordinariamente larga) mesa en la condición (*a*)?

P1.62 Las burbujas de hidrógeno utilizadas para visualizar los perfiles de velocidades de la Figura 1.13 son muy pequeñas, $D \Xi 0{,}01$ mm. Si la entrefase hidrógeno-agua es comparable a la entrefase aire-agua y la temperatura del agua es de 30 °C, estime la sobrepresión en el interior de la burbuja.

P1.63 Obtenga la Ecuación (1.34) imponiendo el equilibrio de fuerzas en la entrefase fluida de la Figura 1.9*c*.

P1.64 A bajas velocidades, un chorro de agua del grifo presenta una entrefase limpia aire-agua con forma aproximadamente cilíndrica. La presión en el interior del chorro es aproximadamente 200 Pa mayor que la presión atmosférica. Estime el diámetro del chorro en mm.

P1.65 El sistema de la Figura P1.65 permite calcular la presión p_1 en el interior del tanque midiendo la altura de la columna de líquido de 15 cm en el tubo de 1 mm de diámetro. El fluido está a 60 °C. Calcule la altura real del fluido en el tubo y el porcentaje del error debido a la capilaridad si el fluido es (*a*) agua o (*b*) mercurio.



P1.65

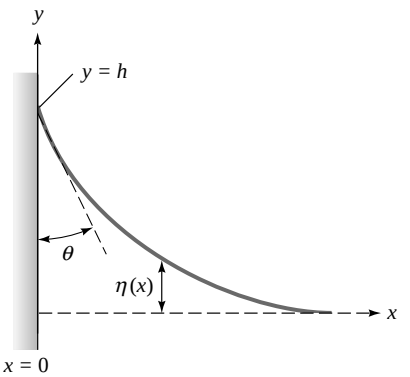
P1.66 Un anillo delgado de 3 cm de diámetro es levantado de la superficie del agua a 20 °C. Despreciando el peso del metal, ¿qué fuerza se necesitaría para subir el anillo? ¿Puede ser ésta una buena forma de medir la tensión superficial? ¿Debería ser el anillo de un material determinado?

P1.67 Dos cilindros coaxiales, con radio exterior r_e e interior r_i, se sumergen en un fluido de tensión superficial Υ y ángulo de contacto $\theta < 90°$. Obtenga una expresión para el ascenso capilar h en la holgura anular entre los dos cilindros cuando esta holgura es muy estrecha.

***P1.68** Analice la forma $h(x)$ de la entrefase agua-aire en las proximidades de una pared plana, como en la Figu-

www.elsolucionario.net

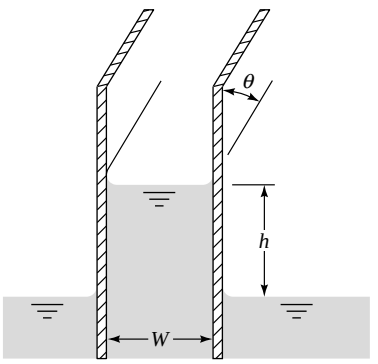
ra P1.68, suponiendo que la pendiente es pequeña y por tanto $R^{-1} \Xi d^2\eta/dx^2$, y que la diferencia de presiones a través de aquélla está equilibrada por el peso de la altura de la entrefase, $\Delta p \Xi \rho g \eta$. Las condiciones de contorno son un ángulo de contacto θ en $x = 0$ y una superficie horizontal $\eta = 0$ al hacer $x \rightarrow \div$. ¿Cuál es la máxima altura h en la pared?



P1.68

P1.69 Una aguja cilíndrica sólida de diámetro d, longitud L y densidad ρ_a puede flotar en la superficie de un líquido de tensión superficial Υ. Despreciando la flotabilidad y suponiendo un ángulo de contacto de 0°, obtenga una expresión para el diámetro máximo $d_{máx}$ de una aguja que flota en el líquido. Calcule $d_{máx}$ para una aguja de acero (densidad relativa S = 7,84) en agua a 20 °C.

P1.70 Obtenga una expresión para el ascenso capilar h de un fluido de tensión superficial Υ y ángulo de contacto θ entre dos placas paralelas verticales separadas una distancia W, como se muestra en la Figura P1.70. ¿Cuál será el valor de h si W = 0,5 mm en agua a 20 °C?



P1.70

***P1.71** Una pompa de jabón de diámetro D_1 se funde con otra pompa de diámetro D_2 para formar una única pompa de diámetro D_3 que contiene la misma cantidad de aire. Suponiendo que el proceso es isotermo, obtenga una expresión para D_3 en función de D_1, D_2, p_{atm} y Υ.

P1.72 Antiguamente, los montañeros hervían el agua para estimar la altura a la que se encontraban. ¿Qué altura tendrá una montaña si al alcanzar la cima observamos que el agua hierve a 84 °C?

P1.73 Un pequeño sumergible se mueve con velocidad V en agua dulce a 20 °C, a 2 m de profundidad, donde la presión ambiente es de 131 kPa. Se sabe que su número de cavitación crítico es Ca = 0,25. ¿A qué velocidad empezarán a formarse burbujas de cavitación? ¿Se producirá cavitación si V = 30 m/s y el agua está fría (5 °C)?

P1.74 Se distribuye petróleo, que tiene una presión de vapor de 20 kPa, a través de un oleoducto usando bombas equiespaciadas, cada una de las cuales incrementa la presión del petróleo en 1,3 MPa. Las pérdidas de fricción en la tubería son de 150 Pa por metro de tubería. ¿Cuál es el espaciado máximo entre las bombas si queremos evitar la cavitación del petróleo?

P1.75 Un avión vuela a 555 mi/h. ¿A qué altitud en la atmósfera estándar el número de Mach del avión será exactamente 0,8?

P1.76 Estime la velocidad del sonido del vapor de agua a 200 °C y 400 kPa (*a*) suponiendo que se trata de un gas ideal (Tabla A.4) y (*b*) usando el programa EES (o las tablas de vapor) y haciendo pequeños cambios isentrópicos en la presión y en la densidad para aproximar la Ecuación (1.38).

***P1.77** La densidad de la gasolina a 20 °C varía con la presión como se indican en la siguiente tabla:

p, atm	1	500	100	1500
ρ, lbm/ft^3	42,45	44,85	46,60	47,98

Use estos datos para estimar (*a*) la velocidad del sonido (m/s) y (*b*) el módulo de compresibilidad (MPa) de la gasolina a 1 atm.

P1.78 Isaac Newton midió la velocidad del sonido cronometrando el tiempo entre el avistamiento del humo del disparo de un cañón y el sonido del cañonazo. Si el cañón se encuentra en una montaña a 5,2 millas de distancia, estime la temperatura del aire en °C sabiendo que la diferencia de tiempos entre ambos es de (*a*) 24,2 s y (*b*) 25,1 s.

P1.79 La más mínima cantidad de gas disuelto en un líquido puede cambiar dramáticamente la velocidad del sonido de una mezcla líquido-gas. Estimando las variaciones de presión y volumen de diversas mezclas, Olson [40] obtuvo la siguiente fórmula aproximada:

$$a_{\text{mezcla}} \Xi \sqrt{\frac{p_g K_l}{[x \Leftarrow_g + (1 \Phi x) \Leftarrow_l][x K_l + (1 \Phi x) p_g]}}$$

Donde x es la fracción volumétrica de gas, K es el módulo de compresibilidad y los subíndices l y g denotan el líquido y el gas, respectivamente. (*a*) Demuestre que la fórmula es dimensionalmente homogénea. (*b*) En el caso de tener burbujas de aire (densidad 1,7 kg/m^3 y presión 150 kPa) en agua (densidad 998 kg/m^3 y módulo de compresibilidad 2,2 GPa), represente gráficamente la velocidad del sonido en el intervalo 0 A x A 0,002 y discuta los resultados.

***P1.80** Un campo de velocidades bidimensional y estacionario viene dado por $u = x^2 - y^2$, $v = -2xy$. Obtenga la expre-

www.elsolucionario.net

sión de las líneas de corriente y represéntelas esquemáticamente en el semiplano $y \leq 0$. *Consejo:* la ecuación diferencial es exacta.

P1.81 Repita el Ejemplo 1.13 suponiendo que las componentes de la velocidad crecen linealmente con el tiempo:

$$\mathbf{V} = Kxt\mathbf{i} - Kyt\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Obtenga y dibuje esquemáticamente las líneas de corriente instantáneas en varios instantes representativos. ¿En qué difieren de las líneas de corriente estacionarias del Ejemplo 1.13?

P1.82 Un campo de velocidades viene dado por $u = V\cos\theta$, $v = V$ sen θ y $w = 0$, donde V y θ son constantes. Obtenga la expresión de las líneas de corriente de este flujo.

***P1.83** Un campo de velocidades bidimensional no estacionario viene dado por $u = x(1 + 2t)$, $v = y$. Obtenga la expresión de las líneas de corriente que en diversos instantes pasan por el punto (x_0, y_0) y esquematice algunas de ellas.

***P1.84** Repita el Problema P1.83 para determinar la senda que en $t = 0$ pasa por el punto (x_0, y_0).

P1.85 Consulte algún libro y enumere las principales contribuciones a la Mecánica de Fluidos de
(*a*) Evangelista Torricelli (1608-1647)
(*b*) Henri de Pitot (1695-1771)
(*c*) Antoine Chézy (1718-1798)
(*d*) Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1797-1884)
(*e*) Julius Weisbach (1806-1871)
(*f*) George Gabriel Stokes (1819-1903)
(*g*) Moritz Weber (1871-1951)
(*h*) Theodor von Kármán (1881-1963)
(*i*) Paul Richard Heinrich Blasius (1883-1970)
(*j*) Ludwig Prandtl (1875-1953)
(*k*) Osborne Reynolds (1842-1912)
(*l*) John William Strutt, Lord Rayleigh (1842-1919)
(*m*) Daniel Bernoulli (1700-1782)
(*n*) Leonhard Euler (1707-1783)

Problemas del examen de fundamentos de ingeniería

FE1.1 La viscosidad absoluta μ de un fluido es fundamentalmente función de la
(*a*) Densidad, (*b*) Temperatura, (*c*) Presión, (*d*) Velocidad, (*e*) Tensión superficial.

FE1.2 Si un cuerpo sólido uniforme pesa 50 N en el aire y 30 N en el agua, su densidad relativa es de
(*a*) 1,5, (*b*) 1,67, (*c*) 2,5, (*d*) 3,0, (*e*) 5,0

FE1.3 El helio tiene un peso molecular de 4,003. ¿Cuánto pesan 2 m^3 de helio a 1 atm y 20 °C?
(*a*) 3,3 N, (*b*) 6,5 N, (*c*) 11,8 N, (*d*) 23,5 N, (*e*) 94,2 N

FE1.4 Un aceite tiene una viscosidad cinemática de $1{,}25 \times 10^{-4}$ m^2/s y una densidad relativa de 0,80. ¿Cuál es su viscosidad dinámica (absoluta) en kg/(m · s)?
(*a*) 0,08, (*b*) 0,10, (*c*) 0,125, (*d*) 1,0, (*e*) 1,25

FE1.5 Considere una pompa de jabón de 3 mm de diámetro. Si el coeficiente de tensión superficial es 0,072 N/m y la presión externa es la atmosférica, ¿cuál es la sobrepresión en el interior de la burbuja respecto a la presión atmosférica?
(*a*) –24 Pa, (*b*) +48 Pa, (*c*) +96 Pa, (*d*) +192 Pa, (*e*) –192 Pa

FE1.6 El único grupo adimensional que combina la velocidad V, el tamaño del cuerpo L, la densidad del fluido ρ y el coeficiente de tensión superficial Υ es
(*a*) $L\rho\Upsilon/V$, (*b*) $\rho VL^2/\Upsilon$, (*c*) $\rho\Upsilon V^2/L$, (*d*) $\Upsilon LV^2/\rho$, (*e*) $\rho LV^2/\Upsilon$

FE1.7 Dos placas paralelas, una moviéndose a 4 m/s y la otra en reposo, están separadas por una película de aceite de 5 mm de espesor. La densidad relativa del aceite es de 0,80 y su viscosidad cinemática $1{,}25 \times 10^{-4}$ m^2/s. ¿Cuál es el esfuerzo cortante medio en el aceite?
(*a*) 80 Pa, (*b*) 100 Pa, (*c*) 125 Pa, (*d*) 160 Pa, (*e*) 200 Pa

FE1.8 El dióxido de carbono tiene una relación de calores específicos de 1,30 y una constante del gas de 189 J/(kg · °C). Si su temperatura se incrementa de 20 a 45 °C, ¿cuál es el incremento de energía interna?
(*a*) 12,6 kJ/kg, (*b*) 15,8 kJ/kg, (*c*) 17,6 kJ/kg, (*d*) 20,5 kJ/kg, (*e*) 25,1 kJ/kg

FE1.9 Un flujo de agua a 20 °C tiene un número de cavitación crítico, para el cual se forman burbujas, $Ca \leq 0{,}25$, donde $Ca = 2(p_a - p_{vap})/\rho V^2$. Si p_a = 1 atm y la presión de vapor absoluta es 0,34 libras por pulgada cuadrada (psia, *pounds per square inch absolute*), ¿a qué velocidad del agua se produce la cavitación?
(*a*) 12 mi/h, (*b*) 28 mi/h, (*c*) 36 mi/h, (*d*) 55 mi/h, (*e*) 63 mi/h

FE1.10 Un flujo estacionario e incompresible, que atraviesa una sección de contracción de longitud L, tiene una distribución de velocidad media unidimensional que viene dada por $u \leq U_0(1 + 2x/L)$. ¿Cuál es la aceleración convectiva al final de la contracción, $x = L$?
(*a*) U_0^2/L, (*b*) $2U_0^2/L$, (*c*) $3U_0^2/L$, (*d*) $4U_0^2/L$, (*e*) $6U_0^2/L$

Problemas extensos

PE1.1 En ocasiones podemos llegar a obtener ecuaciones y resolver problemas prácticos sin conocer más que las dimensiones de los parámetros más importantes del problema. Consideremos, por ejemplo, las pérdidas de calor a través de una ventana de un edificio. El rendimiento de una ventana se mide en términos de un cierto «parámetro R», con unidades de $(ft^2 \cdot h \cdot °F)/Btu$. Un cierto fabricante anuncia una ventana de doble cristal con un parámetro R de 2,5. La misma compañía fabrica una ventana de triple cristal con un parámetro R

www.elsolucionario.net

de 3,4. En ambos casos las dimensiones de la ventana son 3 ft por 5 ft. En un día de invierno, la diferencia de temperatura entre el interior y el exterior del edificio es de 45 °F.

(*a*) Obtenga una ecuación para el calor que se pierde, en un cierto intervalo de tiempo Δt, a través de una ventana de área A, con parámetro R igual a R y diferencia de temperaturas ΔT. ¿Cuánto calor (en Btu) se pierde a través de la ventana de doble cristal durante un periodo de 24 h?

(*b*) ¿Cuánto calor (en Btu) se pierde a través de la ventana de triple cristal durante un periodo de 24 h?

(*c*) Supongamos que la calefacción del edificio funciona con gas propano, cuyo precio es de 1,25 dólares por galón. El quemador de propano tiene una eficiencia del 80 por 100. El propano tiene aproximadamente 90.000 Btu de energía disponible por galón. En el mismo periodo de 24 h, ¿cuánto dinero se ahorraría por cada ventana de triple cristal que se instalara en lugar de las de doble cristal?

(*d*) Finalmente, supongamos que el propietario de una vivienda compra 20 ventanas de triple cristal para su casa. Durante un invierno típico, el número de días que se utiliza la calefacción es de 120, siendo la diferencia de temperaturas media de 45 °F. Cada ventana de triple cristal cuesta 85 dólares más que una de doble cristal. Ignorando los intereses y la inflación, ¿cuántos años tardará el propietario en rentabilizar los costes adicionales de las ventanas de triple cristal con el ahorro en la factura de calefacción?

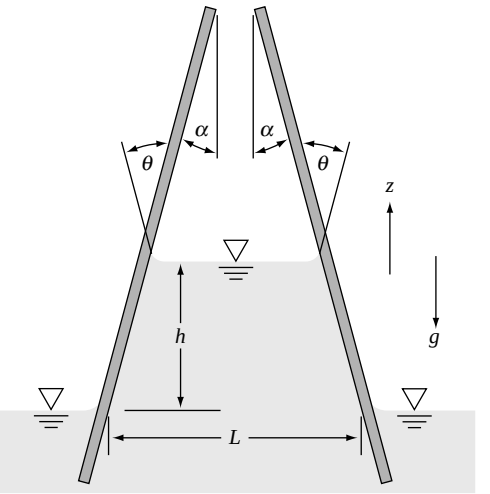
PE1.2 Cuando una persona patina sobre hielo, la superficie del hielo se funde bajo las cuchillas, de modo que él o ella patina sobre la delgada película de agua que se forma entre la cuchilla y el hielo.

(*a*) Obtenga una expresión para la fuerza total de fricción ejercida sobre la cuchilla en función de la velocidad del patinador V, la longitud de la cuchilla L, el espesor de la película de agua (entre la cuchilla y el hielo) h, la viscosidad del agua μ, y el ancho de la cuchilla W.

(*b*) Supongamos que un patinador de masa m está patinando a velocidad constante V_0 cuando de repente deja de propulsarse y continúa patinando en la misma posición hasta detenerse. Despreciando la resistencia del aire, ¿qué distancia recorrerá el patinador antes de pararse? (Recuerde que el patinador se desliza sobre *dos* cuchillas.) Exprese la distancia total recorrida, x, en función de V_0, m, L, h, μ y W.

(*c*) Determine x siendo $V_0 = 4{,}0$ m/s, $m = 100$ kg, $L = 30$ cm, $W = 5{,}0$ mm y $h = 0{,}10$ mm. ¿Cree que es razonable la hipótesis de que la resistencia del aire es despreciable?

PE1.3 Dos placas planas delgadas, inclinadas un ángulo α, se encuentran semisumergidas en un depósito que contiene un líquido de tensión superficial conocida Υ y ángulo de contacto θ, como muestra la Figura PE1.3. A la altura de la superficie libre del líquido en el depósito, las dos placas se encuentran separadas una distancia L y tienen un espesor b en la dirección perpendicular al papel. En la región entre las placas el líquido sube una distancia h, tal como se indica.

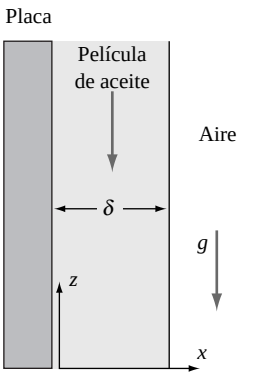


PE1.3

(*a*) ¿Cuál es la fuerza total hacia arriba (según el eje z), debida a la tensión superficial, que actúa sobre la columna de líquido entre las placas?

(*b*) Si la densidad del líquido es ρ, obtenga una expresión que dé la tensión superficial Υ en función del resto de las variables.

PE1.4 Un aceite de viscosidad μ y densidad ρ desciende de forma estacionaria por un lado de una placa vertical de grandes dimensiones, tal como ilustra la Figura PE1.4. En la región que se muestra en la figura el flujo está *completamente desarrollado*; es decir, la forma del perfil de velocidades y el espesor δ de la película de aceite son independientes de la distancia z a lo largo de la placa. La velocidad vertical w es sólo función de x, y la resistencia debida al esfuerzo cortante en la entrefase con la atmósfera es despreciable.



PE1.4

(*a*) Dibuje esquemáticamente la forma del perfil de velocidades $w(x)$ teniendo en cuenta las condiciones de contorno en la pared y en la superficie libre de la película.

www.elsolucionario.net

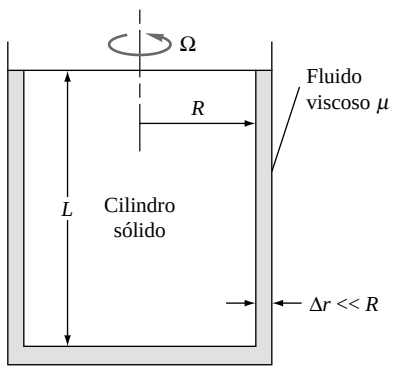
(*b*) Supongamos que el espesor de la película δ, y la pendiente del perfil de velocidades en la pared, $(dw/dx)_{pared}$, se miden usando anemometría láser Doppler (a discutir en el Capítulo 6). Halle una expresión para la viscosidad del aceite en función de ρ, δ, $(dw/dx)_{pared}$, y la aceleración de la gravedad g. Nótese que, en el sistema de coordenadas considerado, tanto w como $(dw/dx)_{pared}$ son negativas.

PE1.5 La viscosidad se puede medir haciendo pasar un fluido a través de un tubo *capilar* de pequeño calibre, si el flujo volumétrico es suficientemente pequeño. Si la longitud del tubo es L, el diámetro $D \ll L$, la caída de presión Δp y el caudal Q, la fórmula para la viscosidad es $\mu = D^4\Delta p/(CLQ)$, donde C es una constante. (*a*) Verifique que C es adimensional. Los siguientes datos corresponden al flujo de agua a través de un tubo de 2 mm de diámetro y 1 metro de largo. La caída de presiones se mantiene constante e igual a $\Delta p = 5$ kPa.

T, °C	10,0	40,0	70,0
Q, L/min	0,091	0,179	0,292

(*b*) Usando las unidades apropiadas del SI, determine un valor medio de C teniendo en cuenta la variación de la viscosidad del agua con la temperatura.

PE1.6 En el *viscosímetro de cilindro rotatorio* de la Figura PE1.6 el fluido se encuentra sometido a cortadura dentro de la estrecha holgura Δr que queda entre los cilindros. Suponiendo un perfil de velocidad lineal en el fluido, si se mide el par motor M, halle una expresión para μ (*a*) despreciando y (*b*) reteniendo el efecto de la fricción en el fondo.



PE1.6

PE1.7 Consideremos el flujo de aceite SAE 10W a 20 °C en contacto con una superficie plana, como en la Figura 1.4*b*. Tras medir el perfil de velocidades $u(y)$, se obtienen los siguientes resultados:

y, m	0,0	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015
u, m/s	0,0	1,99	3,94	5,75	7,29	8,46

Usando técnicas de interpolación apropiadas, determine el esfuerzo cortante en el aceite (*a*) en la pared y (*b*) en $y = 15$ mm.

PE1.8 El *viscosímetro Stormer* [27] es un dispositivo mecánico que usa el cilindro rotatorio de la Figura PE1.6. En lugar de girar a una velocidad constate Ω, se enrolla una cuerda alrededor del eje en cuyo extremo se coloca un peso W que se deja caer libremente. Midiendo el tiempo t que tarda el eje en dar un cierto número de vueltas (normalmente cinco) para distintos valores de la viscosidad, se obtiene la siguiente correlación

$$t \Xi \frac{A\mu}{W\,\Phi B}$$

donde A y B son constantes que deben determinarse calibrando el dispositivo utilizando un fluido conocido. Estos son valores de calibración para un viscosímetro Stormer ensayado con glicerol, usando un peso de 50 N:

μ, kg/m · s	0,23	0,34	0,57	0,84	1,15
t, seg.	15	23	38	56	77

(*a*) Halle valores razonables de A y B que ajusten estos valores de calibración. [*Consejo:* los datos no son muy sensibles al valor de B.] (*b*) Al ensayar un fluido más viscoso con un peso de 100 N se mide un tiempo de 44 s. Estime la viscosidad de este fluido.

www.elsolucionario.net

Referencias

1. J. C. Tannehill, D. A. Anderson y R. H. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer,* 2.ª ed., Taylor and Francis, Bristol, PA, 1997.
2. J. H. Ferziger y M. Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics,* Springer-Verlag, Nueva York, 1999.
3. F. M. White, *Viscous Fluid Flow,* 2.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1991.
4. R. J. Goldstein (ed.), *Fluid Mechanics Measurements,* 2.ª ed., Taylor and Francis, Bristol, PA, 1997.
5. R. A. Granger, *Experiments in Fluid Mechanics,* Oxford University Press, 1995.
6. H. A. Barnes, J. F. Hutton y K. Walters, *An Introduction to Rheology,* Elsevier, Nueva York, 1989.
7. P. B. Whalley, *Two-Phase Flow and Heat Transfer,* Oxford University Press, Nueva York, 1996.
8. Carlo Cercignani, «*Rarefied Gas Dynamics: From Basic Concepts to Actual Calculations*», Cambridge University Press, Nueva York, 2000.
9. F. Carderelli y M. J. Shields, «*Scientific Unit Conversion: A Practical Guide to Metrification*», 2.ª ed., Springer-Verlag, Nueva York, 1999.
10. J. P. Holman, *Heat Transfer,* 8.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1997.
11. R. C. Reid, J. M. Prausnitz y T. K. Sherwood, *The Properties of Gases and Liquids,* 4.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1987.
12. J. Hilsenrath et al., «Tables of Thermodynamic and Transport Properties», *U. S. Nat. Bur. Stand. Circ. 564,* 1955; reeditado por Pergamon, Nueva York, 1960.
13. W. T. Parry, J. C. Bellows, J. S. Gallagher y A. H. Harvey, *ASME International Steam Tables for Industrial Use,* ASME Press, Nueva York, 2000 (software disponible).
14. O. A. Hougen y K. M. Watson, *Chemical Process Principles Charts,* Wiley, Nueva York, 1960.
15. A. W. Adamson, *Physical Chemistry of Surfaces,* 6.ª ed., Wiley, Nueva York, 1997.
16. J. A. Knauss, *Introduction to Physical Oceanography,* 2.ª ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
17. National Committee for Fluid Mechanics Films, *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics,* M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1972.
18. I. G. Currie, *Fundamental Mechanics of Fluids,* 2.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1993.
19. M. van Dyke, *An Album of Fluid Motion,* Parabolic Press, Stanford, CA, 1982.
20. Y. Nakayama (ed.), *Visualized Flow,* Pergamon Press, Oxford, 1988.
21. W. J. Yang (ed.), *Handbook of Flow Visualization,* Hemisphere, Nueva York, 1989.
22. W. Merzkirch, *Flow Visualization,* 2.ª ed., Academic, Nueva York, 1987.
23. H. Rouse y S. Ince, *History of Hydraulics,* Iowa Institute of Hydraulic Research, Univ. of Iowa, Iowa City, 1957; reeditado por Dover, Nueva York, 1963.
24. H. Rouse, *Hydraulics in the United States 1776–1976,* Iowa Institute of Hydraulic Research, Univ. of Iowa, Iowa City, 1976.
25. G. Garbrecht, *Hydraulics and Hydraulic Research: An Historical Review,* Gower Pub., Aldershot, Reino Unido, 1987.
26. *1999 SAE Handbook,* 4 vols., Society of Automotive Engineers, Warrendale, PA.
27. J. R. van Wazer, *Viscosity and Flow Measurement,* Interscience, Nueva York, 1963.
28. *SAE Fuels and Lubricants Standards Manual,* Society of Automotive Engineers, Warrendale, PA, 2000.
29. John F. Wendt (ed.), *Computational Fluid Dynamics: An Introduction,* Springer-Verlag, Nueva York, 1996.
30. H. W. Coleman y W. G. Steele, *Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers,* 2.ª ed., John Wiley, Nueva York, 1998.
31. R. J. Moffatt, «Describing the Uncertainties in Experimental Results», *Experimental Thermal and Fluid Science,* vol. 1, 1988, págs. 3-17.
32. Paul A. Libby, *An Introduction to Turbulence,* Taylor and Francis, Bristol, PA, 1996.
33. Sanford Klein y William Beckman, *Engineering Equation Solver* (*EES*), F-Chart Software, Middleton, WI, 2001.
34. C. L. Yaws, X. Lin y L. Bu, «Calculate Viscosities for 355 Compounds. An Equation Can Be Used to Calculate Liquid Viscosity as a Function of Temperature», *Chemical Engineering,* vol. 101, núm. 4, abril 1994, págs. 119–128.
35. R. W. Miller, *Flow Measurement Engineering Handbook,* McGraw-Hill, Nueva York, 1996.
36. Carl L. Yaws, *Handbook of Viscosity,* 3 vols., Gulf Publishing, Houston, TX, 1994.
37. G. L. Mellor, *Introduction to Physical Oceanography,* Springer-Verlag, Nueva York, 1996.
38. M. Raffel, C. E. Willert y J. Kompenhaus, *Particle Image Velocimetry: A Practical Guide* (*Experimental Fluid Mechanics*), Springer-Verlag, Nueva York, 1998.
39. MathPad Corp., *Internet Steam Tables Calculator,* Dirección URL <http://www.mathpad.com/public/htmls/main/left/SteamInfo.html>.
40. R. M. Olson, *Essentials of Engineering Fluid Mechanics,* Harper & Row, Nueva York, 1980.
41. Wen-Jai Yang, *Computer-Assisted Flow Visualization,* Begell House, Nueva York, 1994.
42. S. Y. Son et al., «Coolant Flow Field Measurements in a Two-Pass Channel Using Particle Image Velocimetry», 1999 Heat Transfer Gallery, *Journal of Heat Transfer,* vol. 121, agosto.
43. B. Carr y V. E. Young, «Videotapes and Movies on Fluid Dynamics and Fluid Machines», en *Handbook of Fluid Dynamics and Fluid Machinery,* vol. II, eds. J. A. Schetz y A. E. Fuhs, John Wiley, Nueva York, 1996, págs. 1171-1189.

www.elsolucionario.net

La Presa Roosevelt, en Arizona. La presión hidrostática, debida al peso de un fluido en reposo, puede provocar fuerzas y momentos enormes sobre grandes estructuras como esta presa. Este capítulo tiene por objeto el análisis de la hidrostática de los fluidos. (*Cortesía del Dr. E. R. Degginger/Color-Pic Inc.*)

www.elsolucionario.net

Capítulo 2
Distribución de presiones en un fluido

Motivación. En muchos problemas de la Mecánica de Fluidos no existe movimiento, y sólo se estudia la distribución de presiones en un fluido en reposo y sus efectos sobre los objetos sumergidos o en flotación.

Cuando la velocidad de un fluido es nula, lo que se denomina *condición hidrostática*, las variaciones de presión se deben exclusivamente al peso del fluido. Considerando conocidas las características de un fluido, resulta sencillo calcular la distribución de presiones en presencia de un campo gravitatorio dado mediante integración. Aplicaciones importantes de este capítulo son (1) la distribución de presiones en la atmósfera y el océano, (2) el diseño de instrumentos de medida de presión, o manómetros, (3) la determinación de las fuerzas sobre superficies sumergidas, planas y curvas, (4) la fuerza de flotabilidad que actúa sobre cuerpos sumergidos, y (5) el comportamiento de los cuerpos en flotación. De las dos últimas se derivan los principios de Arquímedes.

Cuando el fluido se *mueve* como un *sólido rígido*, como es el caso de un depósito de líquido que ha estado en rotación durante el tiempo suficiente, la presión también puede calcularse fácilmente, ya que los esfuerzos de cortadura del fluido son nulos. En la Sección 2.9 se aplicará esta idea a la aceleración de un fluido como sólido rígido. En la Sección 2.10 se discutirán los instrumentos de medida de la presión. Aunque también es posible analizar la presión en un fluido con movimiento $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ arbitrario (no de sólido rígido), pospondremos este análisis hasta el Capítulo 4.

2.1. PRESIÓN Y GRADIENTE DE PRESIÓN

En la Figura 1.1 vimos que un fluido en reposo no puede soportar esfuerzo cortante y por ello el círculo de Mohr se reduce a un punto. En otras palabras, el esfuerzo normal sobre cualquier plano que pase por una partícula fluida en reposo es igual a un único valor denominado *presión del fluido p*; convencionalmente este esfuerzo se considera positivo a pesar de ser de compresión. El concepto de presión es tan importante que lo vamos a ver con otra perspectiva.

La Figura 2.1 muestra una pequeña cuña de fluido en reposo de tamaño Δx por Δz por Δs y anchura b perpendicular al papel. Por definición, no hay esfuerzo cortante, pero postulamos que las presiones p_x, p_z y p_n pueden ser diferentes. El peso del elemento también puede ser importante. Se supone que el elemento es muy pequeño, por lo que la presión es constante en cada una de las caras. La suma de fuerzas debe ser cero (no hay aceleración) en las direcciones x y z.

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &= p_x b\,\Delta z - p_n b\,\Delta s \operatorname{sen}\theta \\ \Sigma F_z = 0 &= p_z b\,\Delta x - p_n b\,\Delta s\cos\theta - \tfrac{1}{2}\rho g b\,\Delta x\,\Delta z \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pero por la geometría de la cuña tenemos que

$$\Delta s \operatorname{sen}\theta = \Delta z \qquad \Delta s\cos\theta = \Delta x \tag{2.2}$$

Sustituyendo en la Ecuación (2.1) y reagrupando queda

$$p_x = p_n \qquad p_z = p_n + \tfrac{1}{2}\rho g\,\Delta z \tag{2.3}$$

www.elsolucionario.net

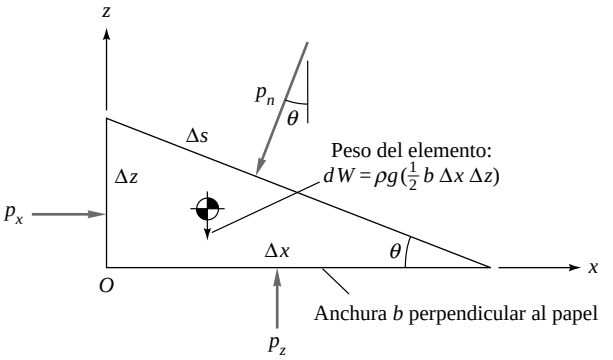


Figura 2.1. Equilibrio de una pequeña cuña de fluido en reposo.

Estas expresiones muestran dos resultados importantes de la condición hidrostática o condición sin esfuerzos tangenciales: (1) no hay variación de presión en dirección horizontal y (2) hay una variación vertical proporcional a la densidad, la gravedad y la diferencia de alturas. Analizaremos exhaustivamente estos resultados a partir de la Sección 2.3.

En el límite en que la cuña colapsa hasta ser «un punto», $\Delta z \to 0$ y las Ecuaciones (2.3) quedan

$$p_x = p_z = p_n = p \tag{2.4}$$

Como θ es arbitrario, concluimos que la presión p en cualquier punto de un fluido en reposo es independiente de la orientación.

¿Qué ocurre cuando el fluido se mueve? Si hay velocidades de deformación habrá esfuerzos viscosos, tanto normales como tangenciales (Sección 4.3). En este caso puede definirse la presión (véase Capítulo 4) como la media de los tres esfuerzos normales σ_{ii} que actúan sobre el elemento

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \tag{2.5}$$

El signo negativo se debe a que los esfuerzos de compresión se consideran normalmente negativos, mientras que p es positiva. La Ecuación (2.5) se usa en raras ocasiones, ya que la mayoría de los flujos viscosos tienen esfuerzos viscosos normales despreciables (véase Capítulo 4).

Fuerzas de presión sobre una partícula fluida

La presión (o cualquier otro esfuerzo, para este particular) no produce fuerza resultante sobre una partícula fluida a menos que varíe *espacialmente*[1]. Para ver esto mejor, considere la presión que actúa sobre las dos caras perpendiculares al eje x de la Figura 2.2. Supongamos que la presión varía arbitrariamente

$$p = p(x, y, z, t) \tag{2.6}$$

La fuerza resultante en dirección x sobre el elemento de la Figura 2.2 vendrá dada por

$$dF_x = p\,dy\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy\,dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx\,dy\,dz \tag{2.7}$$

[1] Una aplicación interesante de este enunciado a un volumen de control se muestra en la Figura 3.7.

www.elsolucionario.net

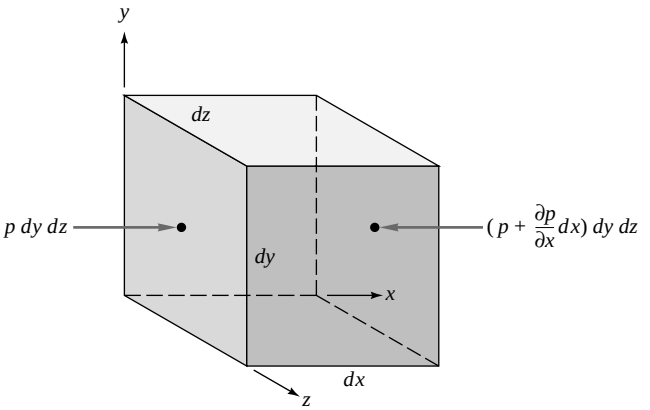


Figura 2.2. Fuerza resultante en dirección *x* sobre un elemento, debida a variaciones de presión.

De la misma manera, la fuerza resultante dF_y depende de $-\partial p/\partial y$, y la componente dF_z de $-\partial p/\partial z$. El vector fuerza resultante sobre el elemento, debido a la presión, es

$$d\mathbf{F}_{\text{pres}} = \left[\mathbf{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz \tag{2.8}$$

El término entre paréntesis es el opuesto al vector gradiente de *p*. Tomando **f** como resultante por unidad de volumen, reescribimos la Ecuación (2.8) como

$$\mathbf{f}_{\text{pres}} = -\nabla p \tag{2.9}$$

Así, no es la presión, sino el *gradiente* de presión el causante de la fuerza que debe ser equilibrada por la gravedad, la aceleración u otro efecto en el fluido.

2.2. EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA FLUIDA

El gradiente de presión es una fuerza de *superficie* que actúa sobre las caras de una partícula. Puede haber también fuerzas de *volumen*, debidas a efectos gravitatorios o electromagnéticos, actuando sobre toda la masa de la partícula. Aquí sólo consideraremos la fuerza de la gravedad, o peso del elemento:

$$d\mathbf{F}_{\text{grav}} = \rho\mathbf{g}\, dx\, dy\, dz$$
o
$$\mathbf{F}_{\text{grav}} = \rho\mathbf{g} \tag{2.10}$$

En general puede haber también una fuerza de superficie debida al gradiente, si existe, de los esfuerzos viscosos. Escribimos este término aquí sin deducirlo y lo obtendremos más detalladamente en el Capítulo 4. Para un fluido incompresible con viscosidad constante, la resultante de los efectos viscosos es

$$\mathbf{f}_{\text{EV}} = \mu\left[\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial z^2}\right] = \mu\nabla^2\mathbf{V} \tag{2.11}$$

donde el subíndice EV significa esfuerzos viscosos y μ es el coeficiente de viscosidad del Capítulo 1. El término **g** de la Ecuación (2.10) indica aceleración de la gravedad, que es un vector que actúa hacia el centro de la Tierra. Su módulo, en la superficie de la Tierra, tiene un valor medio de 9,807 m/s^2 = 32,174 ft/s^2.

La resultante de estas tres fuerzas, presión, gravedad y esfuerzos viscosos, debe mantener a la partícula en equilibrio o bien producir sobre ella una aceleración **a**. De la segunda Ley de Newton con densidad constante y viscosidad, Ecuación (1.2), tendremos

$$\rho\mathbf{a} = \Sigma\,\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{pres}} + \mathbf{f}_{\text{grav}} + \mathbf{f}_{\text{EV}} = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \mu\nabla^2\mathbf{V} \tag{2.12}$$

www.elsolucionario.net

Ésta es una forma de la ecuación diferencial de cantidad de movimiento para una partícula fluida, que estudiaremos más detalladamente en el Capítulo 4. Hay que tener en cuenta que en la Ecuación (2.12) la suma es vectorial: la aceleración refleja el equilibrio local de fuerzas y no tiene por qué ser paralela al vector velocidad local, que indica la dirección del movimiento en ese instante.

El presente capítulo trata aquellos casos en que la velocidad y la aceleración son conocidas, lo que nos permite calcular las variaciones de presión en el fluido. En capítulos posteriores se analizará el problema general, en que tanto la presión como la velocidad y la aceleración son incógnitas. Reescribamos la Ecuación (2.12) en la forma

$$\nabla p = \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) + \mu\nabla^2\mathbf{V} = \mathbf{B}(x, y, z, t) \tag{2.13}$$

donde **B** representa el vector suma del segundo miembro. Si **V** y **a** = $d\mathbf{V}/dt$ son funciones conocidas del espacio y del tiempo y conocemos también la densidad y la viscosidad, podemos integrar directamente la Ecuación (2.13) para hallar $p(x, y, z, t)$. La Ecuación (2.13) es equivalente a tres ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = B_x(x,y,z,t) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = B_y(x,y,z,t) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = B_z(x,y,z,t) \tag{2.14}$$

Como los segundos miembros son conocidos, las ecuaciones pueden ser integradas sistemáticamente para obtener la distribución $p(x, y, z, t)$, salvo una función del tiempo, ya que no disponemos de una relación para $\partial p/\partial t$. Esta función adicional se determina al conocer la variación temporal $p_0(t)$ en algún punto (x_0, y_0, z_0). Si el flujo es estacionario (independiente del tiempo), la función incógnita es una constante que se determina a partir del valor de la presión p_0 en un punto (x_0, y_0, z_0). Aunque parezca complicado, no lo es: lo demostraremos con múltiples ejemplos.

Analizando la Ecuación (2.13), podemos considerar al menos cuatro casos especiales:

1. **Flujo en reposo o a velocidad constante**: la aceleración y los esfuerzos viscosos desaparecen y p depende sólo de la densidad y la gravedad. Es la condición *hidrostática*. Véase la Sección 2.3.
2. **Traslación y rotación como sólido rígido**: el término viscoso desaparece y p depende sólo del término $\rho(\mathbf{g} - \mathbf{a})$. Véase la Sección 2.9.
3. **Movimiento irrotacional ($\nabla \times \mathbf{V} \equiv \mathbf{0}$)**: el término viscoso desaparece y existe una integral primera denominada *ecuación de Bernoulli* que permite hallar la distribución de presiones. Véase la Sección 4.9.
4. **Movimiento viscoso arbitrario:** no hay ninguna simplificación particular, ni regla general, pero aun así la integración es sencilla. Véase la Sección 6.4.

En este capítulo sólo consideraremos los casos 1 y 2.

Presión manométrica y de vacío: términos relativos

Antes de comenzar con los casos señalados, debemos resaltar que los ingenieros suelen medir la presión de dos formas: (1) refiriéndola a un nivel de presión nula, en cuyo caso se denomina presión *absoluta*, o (2) refiriéndola a la presión atmosférica local. La segunda forma se emplea porque muchos instrumentos de medida son de tipo *diferencial* y sólo representan diferencias entre la presión del fluido y la atmosférica, en lugar de su magnitud absoluta. Según la presión sea superior o inferior a la atmosférica, se denomina de la siguiente forma:

1. $p > p_a$ Presión *manométrica*: $p(\text{manométrica}) = p - p_a$
2. $p < p_a$ Presión *de vacío*[2]: $p(\text{vacío}) = p_a - p$

[2] No se debe confundir *presión de vacío* con *vacío*. La primera expresa la diferencia entre la presión atmosférica y la presión, según se indica en el texto; mientras que se denomina vacío a la presión absoluta cuando es muy pequeña (*N. del T.*).

www.elsolucionario.net

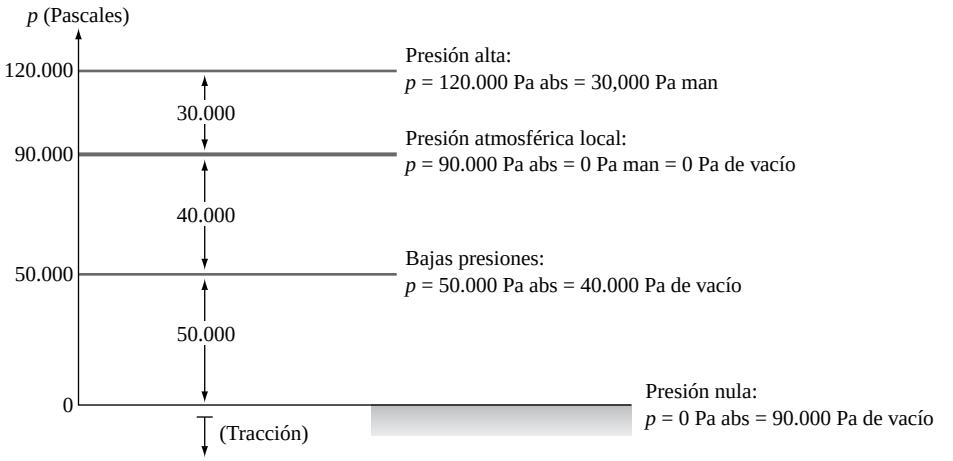


Figura 2.3. Ilustración de las lecturas de presión absoluta, manométrica y de vacío.

Ésta es una forma simple de representar la presión, que permite obtener la presión absoluta sin más que sumar (o restar) la presión atmosférica.

Una situación típica se muestra en la Figura 2.3. Supongamos que la presión atmosférica local es, por ejemplo, 90.000 Pa, lo que puede representar las condiciones de una borrasca a nivel del mar, o condiciones normales a una altura de 1000 m sobre el nivel del mar. Esta presión se puede escribir como p_a = 90.000 Pa absoluta = 0 Pa manométrica = 0 Pa de vacío. Supongamos que un barómetro en un laboratorio señala una presión absoluta de p_1 = 120.000 Pa. Esta presión se corresponde con una presión *manométrica* de p_1 = 120.000 – 90.000 = 30.000 Pa. (Problema aparte será determinar posteriormente cuál era la presión atmosférica en el laboratorio ese día, ya que p_a cambia gradualmente.) Supongamos que otro barómetro señala una presión absoluta de p_2 = 50.000 Pa. Localmente ésta será una presión *de vacío* p_2 = 90.000 – 50.000 = 40.000 Pa. En algunos problemas de esta sección especificaremos la presión manométrica o de vacío para recordar estas definiciones. Siempre que una presión se represente sin los calificativos manométrica o de vacío, asumiremos que se trata de una presión absoluta.

2.3. DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES EN HIDROSTÁTICA

Cuando un fluido se mantiene en reposo o se mueve con velocidad constante, $\mathbf{a} = 0$ y $\nabla^2\mathbf{V} = 0$. La Ecuación (2.13) se reduce entonces a

$$\nabla p = \rho \mathbf{g} \tag{2.15}$$

Ésta es la distribución *hidrostática* de presiones y la expresión es correcta para cualquier fluido en reposo, no importa cuál sea su viscosidad, ya que en ese caso el término viscoso se hace idénticamente nulo.

Recuérdese del análisis vectorial que el vector ∇p representa la magnitud y la dirección del máximo ritmo de variación espacial de la propiedad escalar p. Por tanto, ∇p es perpendicular en todo punto a las superficies p constante. La Ecuación (2.15) indica, pues, que en un fluido en equilibrio hidrostático las superficies de presión constante serán perpendiculares en todo punto al vector gravedad local. El máximo aumento de presión tendrá lugar en la dirección de la gravedad, esto es, «hacia abajo». Si el fluido es un líquido, su superficie libre, que estará a la presión atmosférica, será normal a la gravedad local, o sea, «horizontal». Aunque probablemente el lector ya sabía esto antes, la Ecuación (2.5) lo demuestra de forma rigurosa.

En nuestro sistema de coordenadas habitual z es «hacia arriba». Por eso el vector gravedad local debe ser representado por

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{k} \tag{2.16}$$

www.elsolucionario.net

donde g es la magnitud de la gravedad local, por ejemplo, 9,807 m/s^2. En estas coordenadas, la Ecuación (2.15) tiene las siguientes componentes:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{2.17}$$

Las dos primeras nos indican que p es independiente de x y de y. Entonces $\partial p/\partial z$ puede ser sustituido por la derivada total dp/dz, y la condición hidrostática se reduce a

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

o

$$p_2 - p_1 = -\int_1^2 \rho g \, dz \tag{2.18}$$

La Ecuación (2.18) es la solución al problema hidrostático. La integración requiere hipótesis acerca de las distribuciones de densidad y gravedad. Los gases y los líquidos se tratan generalmente de forma distinta.

Podemos extraer las siguientes conclusiones sobre la condición hidrostática:

> En un fluido uniforme en reposo, la presión varía sólo con la distancia vertical y es independiente de la forma del recipiente. La presión en todos los puntos de un plano horizontal dado es la misma. La presión en el fluido aumenta con la profundidad.

Esto queda bien reflejado en la Figura 2.4. La superficie libre del depósito está a la presión atmosférica y forma un plano horizontal. Los puntos *a*, *b*, *c* y *d* están a la misma profundidad e interconectados por el mismo fluido, agua; por tanto, todos ellos tienen la misma presión. Lo mismo ocurre con los puntos *A*, *B* y *C* del fondo, todos los cuales tienen la misma presión, superior a la de *a*, *b*, *c* y *d*. Sin embargo, el punto *D*, aunque está a la misma profundidad que *A*, *B* y *C*, tiene distinta presión porque está debajo de un fluido diferente, mercurio.

www.elsolucionario.net

Efecto de una gravedad variable

En un planeta esférico de densidad uniforme, la aceleración de la gravedad varía inversamente proporcional al cuadrado de la distancia hasta su centro

$$g = g_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \tag{2.19}$$

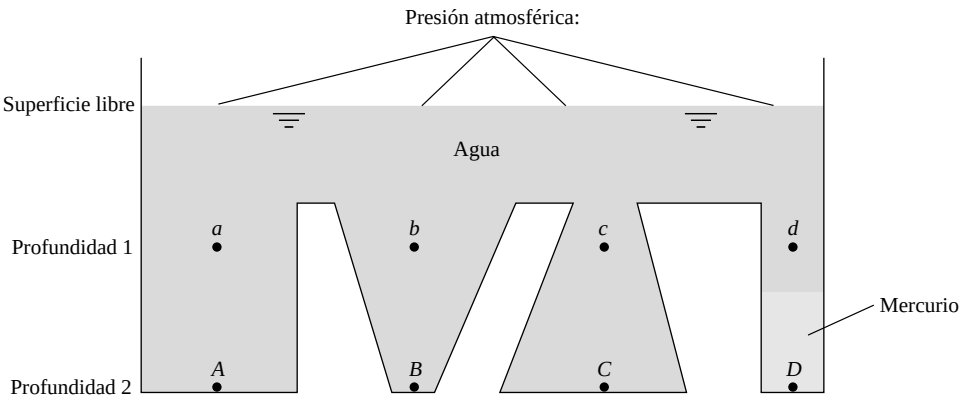


Figura 2.4. Distribución de presión hidrostática. Los puntos *a*, *b*, *c*, y *d* están a la misma profundidad dentro del agua y tienen, por tanto, presiones idénticas. Los puntos *A*, *B* y *C* están también a la misma profundidad en el agua y tienen presiones idénticas, mayores que las correspondientes a *a*, *b*, *c*, y *d*. El punto *D* tiene una presión distinta a la de los puntos *A*, *B* y *C* porque no está conectado con ellos a través del agua.

www.elsolucionario.net

donde r_0 es el radio del planeta y g_0 la aceleración de la gravedad en la superficie. Para la Tierra, $r_0 \Xi 3960$ mi (terrestre) $\Xi 6400$ km. En los problemas típicos de la ingeniería, las variaciones de la distancia r_0 al centro de la tierra no sobrepasan los 11 km de las profundidades oceánicas o los 20 km de los vuelos supersónicos comerciales. Esto da una variación máxima de g de $(6400/6420)^2$, o sea, un 0,6 por 100. Por ello, en la mayoría de los problemas no se tendrá en cuenta la variación de g.

Presión hidrostática en líquidos

Los líquidos son tan incompresibles que podemos despreciar la variación de su densidad en hidrostática. En el Ejemplo 1.7 vimos que la densidad del agua sólo aumentaba un 4,6 por 100 a la máxima profundidad oceánica. Sus efectos en la hidrostática serían como máximo la mitad de ese valor, o sea, el 2,3 por 100. Por eso supondremos que la densidad es constante en el caso de los líquidos, en el que la Ecuación (2.18) se integra para dar

Líquidos: $$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1) \tag{2.20}$$

o $$z_1 \Phi z_2 = \frac{p_2}{\Leftarrow g} \Phi \frac{p_1}{\Leftarrow g}$$

En la mayoría de los problemas se suele emplear la primera expresión. La cantidad ρg es denominada *peso específico* del fluido, con dimensiones de peso por unidad de volumen; algunos valores típicos aparecen tabulados en la Tabla 2.1. La cantidad $p/\rho g$ es una longitud denominada *carga o altura manométrica* del fluido.

Tabla 2.1. Peso específico de algunos fluidos comunes.

Fluido	Peso específico ρg a 68 °F = 20 °C lbf/ft³	N/m³
Aire (a 1 atm)	0,0752	11,8
Alcohol etílico	49,2	7.733
Aceite SAE 30	55,5	8.720
Agua	62,4	9.790
Agua de mar	64,0	10.050
Glicerina	78,7	12.360
Tetracloruro de carbono	99,1	15.570
Mercurio	846	133.100

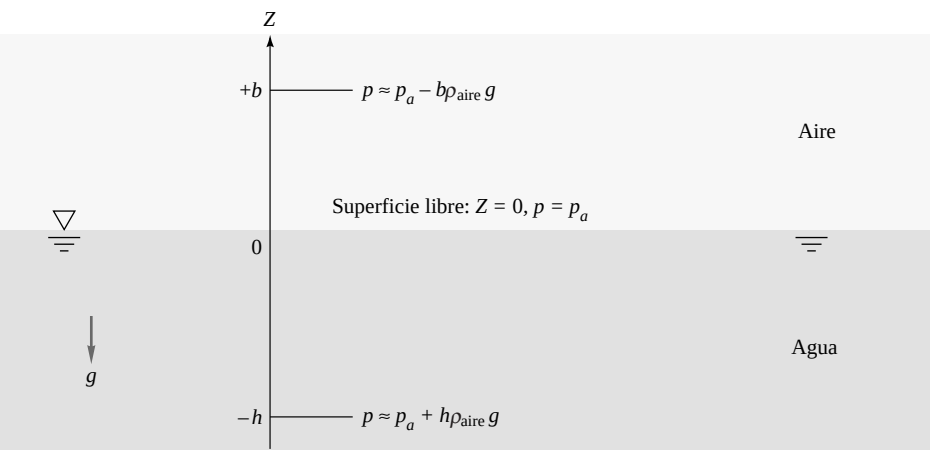


Figura 2.5. Distribución de presión hidrostática en océanos y en la atmósfera.

www.elsolucionario.net

En lagos y océanos, el sistema de coordenadas utilizado habitualmente es el de la Figura 2.5, con $z = 0$ en la superficie libre, donde p tiene el valor de la presión atmosférica p_a. Cuando introducimos el valor de referencia $(p_1, z_1) = (p_a, 0)$, la Ecuación (2.20) permite expresar la presión p a una profundidad z (negativa) de la siguiente forma

Lagos y océanos: $$p = p_a - \rho g z \tag{2.21}$$

donde ρg es el peso específico medio del lago u océano. Como veremos, la Ecuación (2.21) es válida también en los niveles más bajos de la atmósfera, con un error del 2 por 100 a alturas z inferiores a 1000 m.

EJEMPLO 2.1

El lago Newfound, un lago de agua dulce cerca de Bristol, New Hampshire, tiene una profundidad máxima de 60 m. La presión atmosférica media es de 91 kPa. Calcule la presión absoluta en kPa a la profundidad máxima.

Solución

- *Diagrama del sistema.* Imaginemos que la Figura 2.5 representa el lago Newfound, con $h = 60$ m y $z = 0$ en la superficie.
- *Valores de las propiedades.* De la Tabla 2.1, $\rho_{agua} g = 9790$ N/m^3. Sabemos que $p_a = 91$ kPa.
- *Resolución.* Aplicamos la Ecuación (2.21) al punto más profundo. Usamos unidades del SI, pascales, no kilopascales:

$$p_{máx} = p_a - \rho g z = 91.000 \text{ Pa} - 9790 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} (-60 \text{ m}) = 678.400 \text{ Pa} = 678 \text{ kPa} \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios.* No conviene usar kilopascales. Utilizamos pascales en la fórmula y luego convertimos la respuesta a kilopascales.

www.elsolucionario.net

El barómetro de mercurio

La aplicación práctica más sencilla de la fórmula de la hidrostática (2.20) es el barómetro (Figura 2.6), un instrumento empleado para medir la presión atmosférica. Se puede construir un barómetro llenando con mercurio un tubo cerrado por uno de sus extremos, dándole la vuelta y sumergiendo el extremo abierto en un recipiente. Esto produce un vacío en la parte superior del tubo, dado que la presión de vapor del mercurio a la temperatura ambiente es muy pequeña (0,16 Pa a 20 °C). Al estar la superficie superior del mercurio a presión nula, la presión atmosférica fuerza a la columna de mercurio a elevarse hasta una altura h.

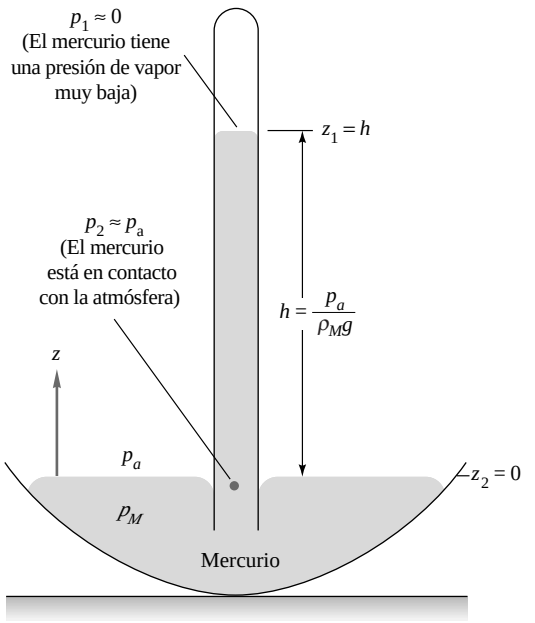
Usando los valores de la Figura 2.6 en la Ecuación (2.20), $p_1 = 0$ a $z_1 = h$ y $p_2 = p_a$ a $z_2 = 0$, queda:

$$p_a - 0 = -\rho_M g(0 - h)$$

o $$h = \frac{p_a}{\rho_M g} \tag{2.22}$$

En condiciones estándar a nivel del mar, con $p_a = 101.350$ Pa y tomando $\rho_M g = 133.100$ N/m^3 de la Tabla 2.1, la altura barométrica calculada es $h = 101.350/133.100 = 0{,}761$ m o 761 mm. En los Estados Unidos, el servicio meteorológico proporciona este dato como una «presión» atmosférica de 29,96 inHg (pulgadas de mercurio). Los barómetros se construyen con mercurio por tratarse del líquido común más denso que existe. Un barómetro de agua daría alturas de la columna de unos 34 ft.

www.elsolucionario.net



(*a*)

(*b*)

Figura 2.6. Un barómetro mide la presión atmosférica absoluta local: (*a*) la altura de la columna de mercurio es proporcional a p_{atm}; (*b*) un moderno barómetro portátil, con lector digital, emplea el elemento resonante de silicio de la Figura 2.28*c*. (*Cortesía de Paul Lupke, Druck Inc.*)

Presión hidrostática en gases

www.elsolucionario.net

Los gases son fluidos compresibles cuya densidad es casi proporcional a la presión. Por ello, la densidad debe ser considerada variable en la Ecuación (2.18) si la integración supone grandes cambios de presión. Pueden obtenerse resultados bastante precisos utilizando la ley de los gases perfectos $p = \rho RT$ junto con la Ecuación (2.18):

$$\frac{dp}{dz} = \Phi\rho g = \Phi\frac{p}{RT}g$$

Separando variables e integrando entre 1 y 2, tenemos:

$$\int_1^2 \frac{dp}{p} = \ln\frac{p_2}{p_1} = \Phi\frac{g}{R}\int_1^2 \frac{dz}{T} \tag{2.23}$$

La integración respecto a z requiere conocer la variación de la temperatura $T(z)$. Una aproximación muy común es la de *atmósfera isoterma*, en la que $T = T_0$:

$$p_2 = p_1 \exp\left[\Phi\frac{g(z_2 - z_1)}{RT_0}\right] \tag{2.24}$$

El término entre corchetes es adimensional (piénselo un momento, debe ser adimensional, ¿de acuerdo?). La Ecuación (2.24) es una buena aproximación para alturas pequeñas en la atmósfera terrestre, aunque realmente la temperatura atmosférica media disminuye casi linealmente con z hasta una altura de unos 36.000 ft (11.000 m):

$$T \approx T_0 - Bz \tag{2.25}$$

www.elsolucionario.net

donde T_0 es la temperatura (absoluta) a nivel del mar y B es el *gradiente térmico*, los cuales pueden variar de un día a otro. Por acuerdo internacional [1] se consideran los siguientes valores estándar en el intervalo de 0 a 36.000 ft:

$$T_0 = 518{,}69°\text{R} = 288{,}16\ \text{K} = 15°\text{C}$$
$$B = 0{,}003566°\text{R/ft} = 0{,}00650\ \text{K/m} \tag{2.26}$$

Esta parte inferior de la atmósfera se denomina *troposfera*. Introduciendo la Ecuación (2.25) en la (2.23) e integrando, se obtiene una relación más precisa

$$p = p_a\left[1 - \frac{Bz}{T_0}\right]^{g/(RB)} \quad \text{donde } \frac{g}{RB} = 5{,}26 \text{ (aire)} \tag{2.27}$$

en la troposfera, con $z = 0$ a nivel del mar. El exponente $g/(RB)$ es adimensional (de nuevo como debe ser) y tiene un valor estándar para el aire de 5,26, con $R = 287\ \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})$.

La atmósfera estándar [1] aparece esquematizada en la Figura 2.7. Obsérvese que la presión es casi nula a $z = 30$ km. Los valores del resto de las propiedades se han tabulado en la Tabla A.6.

EJEMPLO 2.2

Si la presión atmosférica estándar a nivel del mar es 101.350 Pa, calcule la presión estándar a una altura de 5000 m, utilizando (*a*) la fórmula exacta y (*b*) la hipótesis de atmósfera isoterma con una temperatura estándar de 15 °C a nivel del mar. ¿Es adecuada la aproximación isoterma?

Solución

www.elsolucionario.net

Apartado (*a*)

Use la temperatura absoluta en la fórmula exacta, Ecuación (2.27):

$$p = p_a\left[1 - \frac{(0{,}00650\ \text{K/m})(5000\ \text{m})}{288{,}16\ \text{K}}\right]^{5{,}26} = (101.350\ \text{Pa})(0{,}8872)^{5{,}26}$$
$$= 101.350(0{,}5328) = 54.000\ \text{Pa} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Ésta es la presión estándar que da la Tabla A.6 para $z = 5000$ m.

Apartado (*b*)

Si la atmósfera fuera isoterma a 288,16 K, la Ecuación (2.24) se aplicaría de la siguiente forma:

$$p \approx p_a \exp\left[-\frac{gz}{RT}\right] = (101.350\ \text{Pa})\exp\left[-\frac{(9{,}807\ \text{m/s}^2)(5000\ \text{m})}{[287\ \text{m}^2/(\text{s}^2\,\text{K})](288{,}16\ \text{K})}\right]$$
$$= (101.350\ \text{Pa})\exp(-0{,}5929) \approx 56.000\ \text{Pa} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

Que es sólo un 4 por 100 mayor que el resultado exacto. Sin embargo, la fórmula isoterma no es suficientemente precisa en la troposfera.

¿Es la fórmula lineal adecuada para los gases?

La aproximación lineal de las Ecuaciones (2.20) o (2.21), $\Delta p \approx \rho g\, \Delta z$, es adecuada para líquidos, por ser prácticamente incompresibles. Esta aproximación puede emplearse hasta las grandes profundidades del

www.elsolucionario.net

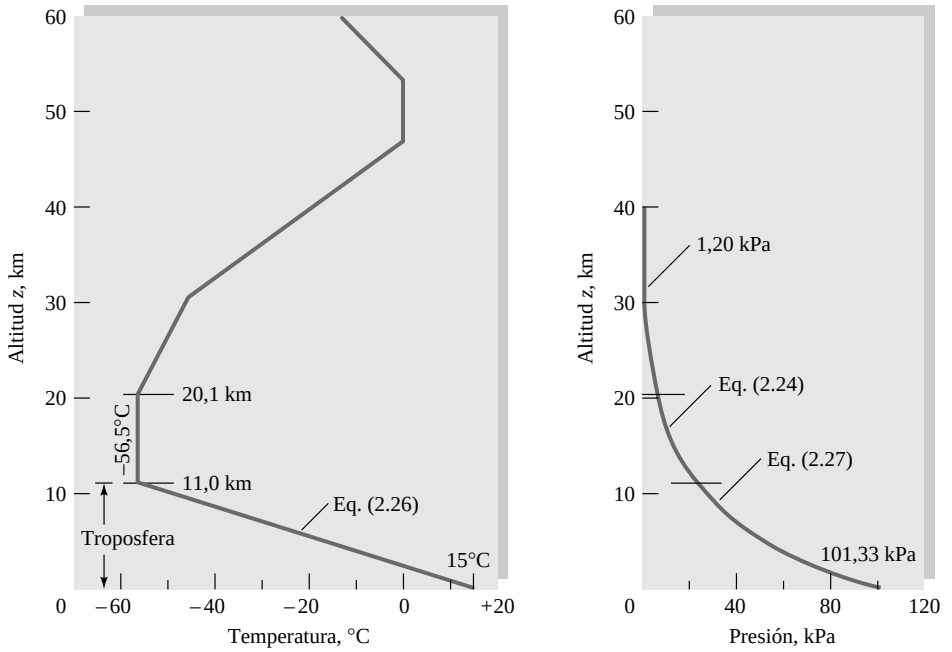


Figura 2.7. Distribución de presión y temperatura en la atmósfera estándar. (*Tomada de la Referencia 1.*)

océano. En cambio, para los gases, que son muy compresibles, sólo es válida para cambios de altura moderados.

El error que se comete al utilizar la aproximación lineal, Ecuación (2.21), se puede estimar desarrollando en serie la fórmula exacta (2.27):

$$\left(1-\frac{Bz}{T_0}\right)^n = 1-n\frac{Bz}{T_0}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{Bz}{T_0}\right)^2-\cdots \tag{2.28}$$

donde $n = g/(RB)$. Introduciendo los tres primeros términos de la serie en la Ecuación (2.27) y reagrupando, obtenemos

$$p = p_a\left(1-\frac{gz}{a}\left(1-\frac{n-1}{2}\frac{Bz}{T_0}+\cdots\right)\right) \tag{2.29}$$

Así, el error cometido al utilizar la fórmula lineal de la Ecuación (2.21) es pequeño si el segundo término del paréntesis es pequeño comparado con la unidad. Lo cual es cierto si

$$z \ll \frac{2T_0}{(n-1)B} = 20.800 \text{ m} \tag{2.30}$$

Tendremos, pues, errores inferiores al 5 por 100 si z o δz son inferiores a 1000 m.

2.4. APLICACIÓN A LA MEDIDA DE PRESIONES

En la Ecuación (2.20) vemos que una variación de altura $z_2 - z_1$ en un líquido es equivalente a una diferencia de presiones $(p_2 - p_1)/\rho g$. Por ello, para medir diferencias de presión entre dos puntos, se pueden utilizar columnas estáticas de uno o más líquidos o gases. Un instrumento de este tipo se denomina *manómetro*. Si se

www.elsolucionario.net

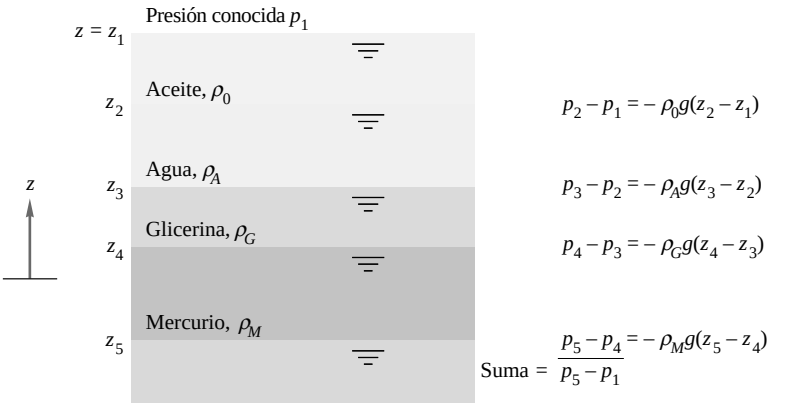


Figura 2.8. Cálculo de las variaciones de presión en una columna compuesta por diferentes fluidos.

utilizan varios fluidos, se debe cambiar la densidad que aparece en la Ecuación (2.20) al pasar de unos a otros. La Figura 2.8 ilustra el procedimiento a seguir. Las variaciones de presión se calculan para cada fluido por separado. Si se quiere conocer la variación total $p_5 - p_1$, sumaremos las variaciones sucesivas $p_2 - p_1$, $p_3 - p_2$, $p_4 - p_3$ y $p_5 - p_4$. Los valores intermedios de p se cancelan y tenemos, para el ejemplo de la Figura 2.8,

$$p_5 - p_1 = -\rho_0 g(z_2 - z_1) - \rho_A g(z_3 - z_2) - \rho_G g(z_4 - z_3) - \rho_M g(z_5 - z_4) \tag{2.31}$$

No se puede hace ninguna simplificación adicional en el segundo miembro porque las densidades son diferentes. Nótese que hemos colocado los fluidos verticalmente en orden de menor a mayor densidad. Ésta es la única configuración estable. Si los intentamos estratificar de cualquier otra forma, habrá una agitación y al cabo de un tiempo corto aparecerá la configuración estable.

www.elsolucionario.net

Una regla mnemotécnica: arriba frente abajo

La relación básica de la hidrostática, Ecuación (2.20), es matemáticamente correcta pero de difícil interpretación para los ingenieros porque combina dos signos negativos para obtener un incremento de la presión hacia abajo. Cuando los ingenieros calculan cambios en la presión hidrostática, instintivamente consideran los cambios de presión positivos hacia abajo y negativos hacia arriba. Para evitar confusiones es útil emplear la siguiente regla mnemotécnica, sugerida por el Profesor John Foss, de la Universidad del Estado de Michigan:

$$p_{\text{abajo}} = p^{\text{arriba}} + \Leftarrow g \,|\, \Rightarrow z \,| \tag{2.32}$$

De este modo, no es necesario preocuparse de a qué punto corresponde «z_1» y a qué otro «z_2», ya que la fórmula aumenta o disminuye la presión en función de que nos movamos hacia abajo o hacia arriba. Por ejemplo, la Ecuación (2.31) se podría reescribir siguiendo el formalismo de «incrementos múltiples» de la siguiente forma:

$$p_5 = p_1 + \rho_0 g|z_1 - z_2| + \rho_A g|z_2 - z_3| + \rho_G g|z_3 - z_4| + \rho_M g|z_4 - z_5|$$

Esto es, añadiendo incrementos de presión según nos desplazamos hacia abajo en un fluido estratificado. Otra aplicación es el manómetro, que involucra cálculos tanto hacia «arriba» como hacia «abajo».

La Figura 2.9 muestra un manómetro simple abierto para medir la presión p_A en una cámara cerrada con respecto a la presión atmosférica p_a, es decir, para medir la presión manométrica. El fluido de la cámara, de densidad ρ_1, se combina con otro fluido, de densidad ρ_2, por dos razones: (1) para proteger el ambiente de los posibles efectos corrosivos del fluido de la cámara y (2) porque un fluido más pesado ρ_2 necesitará me-

www.elsolucionario.net

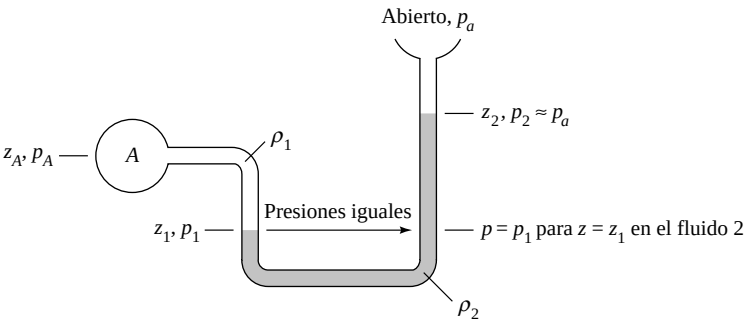


Figura 2.9. Manómetro simple abierto para medir p_A relativa a la presión atmosférica.

nor z_2 y el tubo de medida podrá ser más corto. Desde luego, aquí podría aplicarse la relación básica de la hidrostática, Ecuación (2.20), pero resulta más sencillo empezar en *A*, aplicar la Ecuación (2.32) para «descender» hasta z_1, saltar a través del fluido 2 hasta el mismo nivel de presión p_1 (véase Figura 2.9) y volver a utilizar la Ecuación (2.32) hacia «arriba» hasta el nivel z_2:

$$p_A + \rho_1 g|z_A - z_1| - \rho_2 g|z_1 - z_2| = p_2 \,\Xi\, p_{\text{atm}} \tag{2.33}$$

El fundamento físico que nos permite «saltar a través» del fluido 2 es que la presión al nivel z_1 es igual a p_1 en ambas ramas del tubo, porque hay continuidad a través del fluido que conecta las dos ramas. La relación hidrostática (2.20) expresa de esta forma la Ley de Pascal:

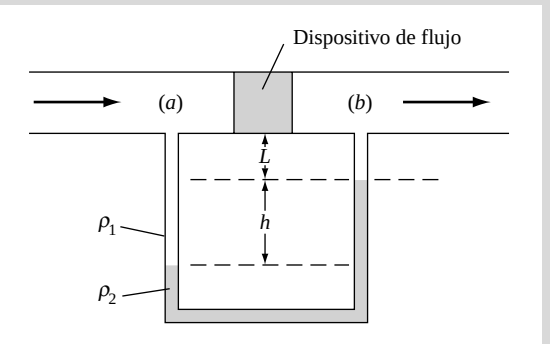
> Dos puntos cualesquiera, situados a la misma altura y unidos por una masa continua del mismo fluido en reposo, tendrán la misma presión.

Esta regla puede ser utilizada para facilitar los cálculos en problemas con tubos múltiples. Se puede saltar de una rama a otra si permanecemos dentro del mismo fluido.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 2.3

El manómetro clásico se caracteriza porque los dos brazos del tubo en U tienen la misma longitud, como en la Figura E2.3, y porque la medida involucra diferencias de presión entre dos puntos horizontales. Una aplicación típica es la medida de los cambios de presión a través de un dispositivo de flujo, como se muestra en la figura. Obtenga una relación para la diferencia de presiones $p_a - p_b$ en función de los parámetros del sistema de la Figura E2.3.



E2.3

Solución

Usando nuestro concepto de «arriba-abajo» como en la Ecuación (2.32), comenzando en (*a*) y terminando en (*b*), evaluamos el cambio de presión en el tubo en U:

www.elsolucionario.net

$$p_a + \rho_1 gL + \rho_1 gh - \rho_2 gh - \rho_1 gL = p_b$$

o
$$p_a - p_b = (\rho_2 - \rho_1)gh \qquad \textit{Resp.}$$

La medida sólo tiene en cuenta la diferencia de altura *h*, desapareciendo los términos que contienen *L*. Hay que destacar cómo aparece la *diferencia* entre las densidades de los dos fluidos. Es un error común entre los estudiantes el olvidar restar la densidad del fluido ρ_1, lo que se traduce en un gran error numérico si ambos fluidos son líquidos y menos serio si el fluido 1 es un gas. En cualquier caso, desde un punto de vista académico, este error siempre se considera serio.

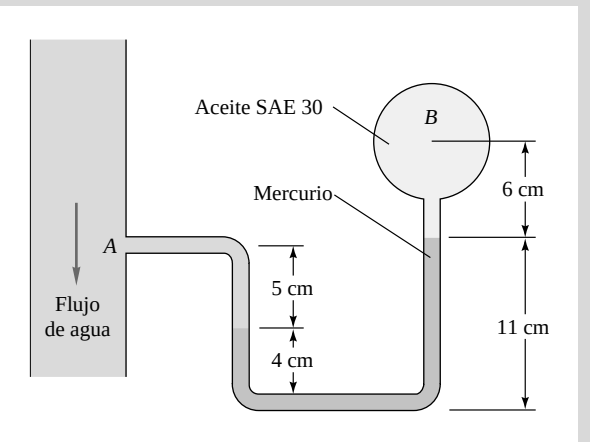
Aunque, dado su uso extendido en experimentos de ingeniería, la fórmula del Ejemplo 2.3 se suele considerar como la «fórmula del manómetro», es preferible *no* memorizarla. Resulta más eficaz recordar las Ecuaciones (2.20) o (2.32) y adaptarlas a cada nuevo problema de fluidos múltiples en reposo. Por ejemplo, la Figura 2.10 ilustra el problema de un manómetro de fluidos múltiples utilizado para hallar la diferencia de presiones entre dos cámaras *A* y *B*. Para ello aplicamos repetidamente la Ecuación (2.20), saltando con la misma presión entre puntos distintos situados a la misma altura conectados por una masa continua del mismo fluido. Así, en la Figura 2.10 calculamos cuatro diferencias de presión dando tres saltos:

$$\begin{aligned} p_A - p_B &= (p_A - p_1) + (p_1 - p_2) + (p_2 - p_3) + (p_3 - p_B) \\ &= -\rho_1 g(z_A - z_1) - \rho_2 g(z_1 - z_2) - \rho_3 g(z_2 - z_3) - \rho_4 g(z_3 - z_B) \end{aligned} \tag{2.34}$$

Las presiones intermedias $p_{1,2,3}$ se cancelan. Aunque parezca complicado, es un proceso *secuencial*. Comenzamos en *A*, bajamos a 1, saltamos, subimos a 2, saltamos, bajamos a 3, saltamos y, finalmente, subimos a *B*.

EJEMPLO 2.4

La lectura de la presión manométrica en *B* se emplea para medir la presión en el punto *A* de un flujo de agua. Si la presión en *B* es de 87 kPa, estime la presión en *A* en kPa. Suponga que todos los fluidos se encuentran a 20 °C. Véase la Figura E2.4



E2.4

Solución

- *Diagrama del sistema*. El sistema se muestra en la Figura E2.4.
- *Consideraciones*. Fluidos hidrostáticos, no miscibles, la vertical representa «arriba» en la Figura E2.4.
- *Procedimiento*. Uso secuencial de la Ecuación (2.32) para ir de *A* a *B*.

www.elsolucionario.net

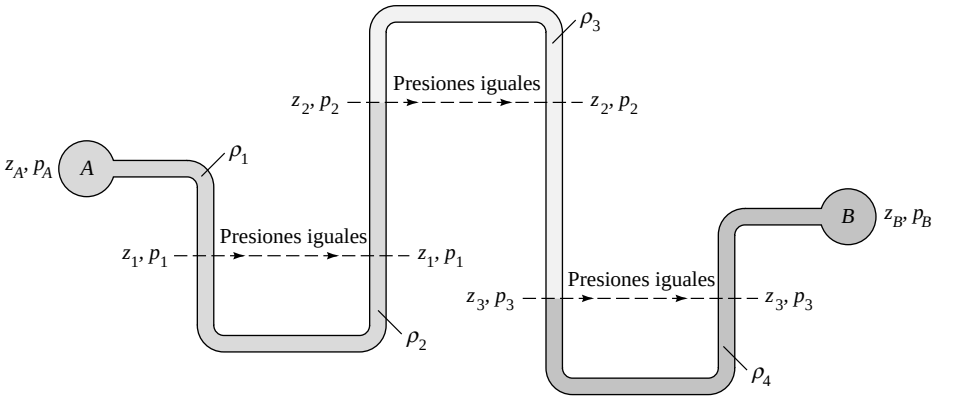


Figura 2.10. Manómetro complicado de múltiples fluidos, para relacionar p_A con p_B. Este sistema no es especialmente práctico, pero puede ser un buen problema para hacer en casa o en un examen.

- *Valores de las propiedades*. De la Tabla 2.1 o la Tabla A.3:

$$\rho_{agua}g = 9790 \text{ N/m}^3; \quad \rho_{mercurio}g = 133.100 \text{ N/m}^3; \quad \rho_{aceite}g = 8720 \text{ N/m3}$$

- *Resolución*. Procedemos de *A* a *B*, primero «abajo», después «arriba», saltando en el menisco de mercurio de la izquierda:

$$P_A + \rho_a g|\Delta z|_a - \rho_m g|\Delta z_m| - \rho_{ac} g|\Delta z|_{ac} = p_B$$

o $$p_A + (9790 \text{ N/m}^3)(0{,}05 \text{ m}) - (133.100 \text{ N/m}^3)(0{,}07 \text{ m}) - (8720 \text{ N/m}^3)(0{,}06 \text{ m}) = 87.000$$

o $$p_A + 490 - 9317 - 523 = 87.000 \quad \text{despejando} \quad p_A = 96.350 \text{ N/m}^2 \Xi 96{,}4 \text{ kPa} \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios*. Observe que las unidades N/m^2 se abrevian como pascales, o Pa. El resultado intermedio p_A = 96.350 Pa, con precisión de un pascal, no es realista, ya que los datos son conocidos con una precisión menor.

Al hacer estos cálculos manométricos hemos despreciado los ascensos capilares, debidos a la tensión superficial, que fueron comentados en el Ejemplo 1.9. Estos efectos se cancelan si hay una entrefase, o *menisco*, entre fluidos similares en ambas ramas del tubo en U. En los demás casos, como en la rama de más a la derecha del tubo en U de la Figura 2.10, hay que hacer una corrección por capilaridad o utilizar tubos de gran diámetro interior (B 1 cm) para reducir su efecto.

2.5. FUERZAS HIDROSTÁTICAS SOBRE SUPERFICIES PLANAS

El diseño de estructuras de contención requiere el cálculo de las fuerzas hidrostáticas sobre las superficies adyacentes al fluido. Estas fuerzas están relacionadas con el efecto del peso del fluido sobre las superficies que lo contienen. Por ejemplo, un depósito con una base plana y horizontal de área A_b que contenga una altura H de agua soportará una fuerza vertical hacia abajo en la base igual a $F_b = \rho_{agua} g H A_b$. Si la superficie no es horizontal, se requerirán cálculos adicionales para determinar las componentes de la fuerza hidrostática.

Si despreciamos las variaciones en la densidad del fluido, la Ecuación (2.20) nos dice que la presión sobre cualquier superficie sumergida varía linealmente con la profundidad. El caso de una superficie plana es análogo al problema de flexión y compresión combinadas en resistencia de materiales, ya que en ambos se presenta una distribución lineal de esfuerzos. El problema hidrostático se reduce, pues, a fórmulas simples que atañen al centroide o centro de gravedad y a los momentos de inercia de la sección plana.

La Figura 2.11 muestra una placa plana de forma arbitraria sumergida completamente en un líquido. La placa forma un ángulo θ con la horizontal, de forma que su profundidad varía de un punto a otro. Si h es la

www.elsolucionario.net

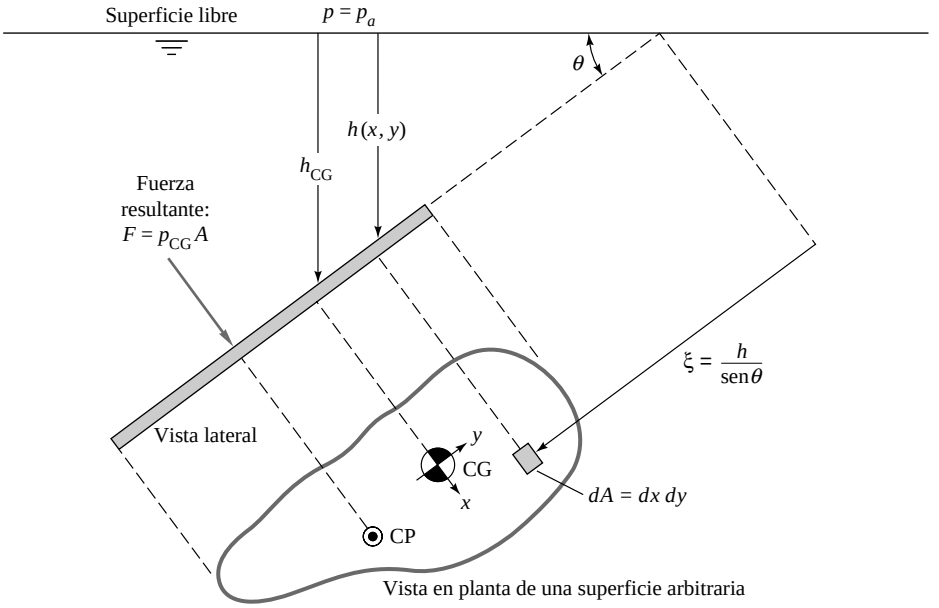


Figura 2.11. Fuerza hidrostática y centro de presión sobre una superficie plana arbitraria de área A, inclinada un ángulo θ, debajo de la superficie libre.

profundidad de un elemento diferencial de área dA de la placa, según la Ecuación (2.20) la presión sobre dicho elemento será $p = p_a + \rho gh$.

Para deducir expresiones que tengan en cuenta la forma de la placa, tomemos un sistema de coordenadas xy sobre el plano de la placa con origen en el centroide, y una coordenada muda ξ que mide la distancia por debajo de la superficie libre sobre el plano de la placa. La fuerza hidrostática total sobre una cara de la placa será entonces

$$F = \int p\,dA = \int (p_a + \rho g h)\,dA = p_a A + \rho g \int h\,dA \tag{2.35}$$

La integral que queda se calcula teniendo en cuenta que, según la Figura 2.11, $h = \xi$ sen θ y, por definición, la distancia del centroide a la superficie es tal que

$$\bar{\xi}_{CG} = \frac{1}{A}\int \xi\,dA \tag{2.36}$$

Por tanto, como θ es constante sobre la placa, la Ecuación (2.35) queda

$$F = p_a A + \rho g \text{ sen } \theta \int \xi\,dA = p_a A + \rho g \text{ sen } \theta\, \bar{\xi}_{CG} A \tag{2.37}$$

Finalmente, recordando que ξ_{CG} sen $\theta = h_{CG}$ es la profundidad del centroide de la placa, tendremos

$$\boxed{F = p_a A + \rho g h_{CG} A = (p_a + \rho g h_{CG})A = p_{CG} A} \tag{2.38}$$

La fuerza sobre una cara de cualquier superficie plana sumergida en un fluido uniforme es igual a la presión que hay en el centro de gravedad de dicha cara por su área, independientemente de la forma de la placa o de su ángulo de inclinación θ.

La Ecuación (2.38) puede ser visualizada físicamente en la Figura 2.12 como la resultante de una distribución lineal de esfuerzos sobre la placa. Esto es semejante a la flexión y compresión combinadas sobre

www.elsolucionario.net

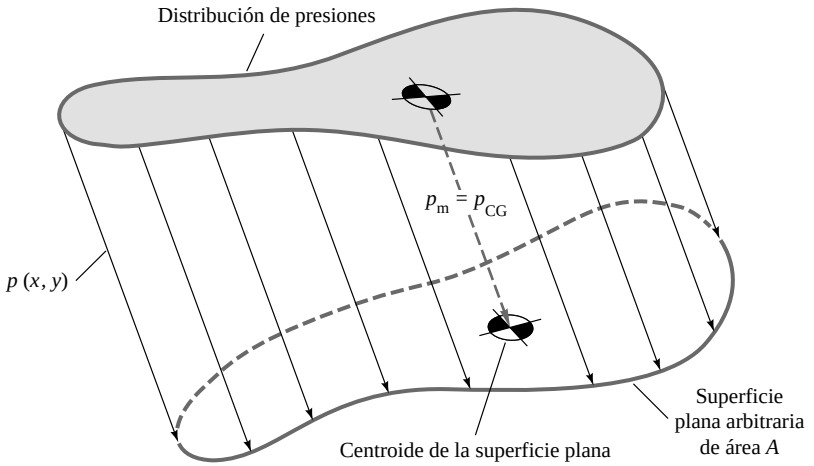


Figura 2.12. La fuerza hidrostática de presión sobre una superficie plana es igual, independientemente de la forma, a la resultante de la distribución lineal tridimensional de presiones sobre dicha superficie, $F = p_{CG}A$.

una viga de la misma sección transversal. Ocurre que la parte del esfuerzo que proviene de la «flexión» da resultante nula si su «eje neutro» pasa por el centro de gravedad de la sección. La parte restante, procedente de la «compresión», es la que produce la fuerza resultante, igual al esfuerzo existente en el centro de gravedad por el área de la sección. Este resultado es el que expresa la Ecuación (2.38).

Sin embargo, para equilibrar la contribución de la flexión, la fuerza resultante F no debe actuar en el centroide, sino más abajo, hacia la zona de presiones más elevadas. Su línea de acción pasará por el *centro de presiones* CP de la placa, como se indica en la Figura 2.11. Para hallar las coordenadas (x_{CP}, y_{CP}), sumamos los momentos de todas las fuerzas elementales $p\,dA$ respecto al centro de gravedad e igualamos al momento de la resultante F. Para calcular y_{CP}, haremos

$$Fy_{CP} = \int yp\,dA = \int y(p_a + \rho g \operatorname{sen}\theta)dA = \rho g \operatorname{sen}\theta \int y\,dA \tag{2.39}$$

El término $\int p_a y\,dA$ se anula por definición de centro de gravedad. Introduciendo $\xi = \xi_{CG} - y$, obtenemos

$$Fy_{CP} = \rho g \operatorname{sen}\theta \left(\xi_{CG} \int y\,dA + \int y^2\,dA\right) = \rho g \operatorname{sen}\theta I_{xx} \tag{2.40}$$

donde de nuevo $\int y\,dA = 0$ e I_{xx} es el momento de inercia del área de la placa respecto a su eje central x, calculado en el plano de la placa. Sustituyendo F por su valor, resulta

$$\boxed{y_{CP} = \rho g \operatorname{sen}\theta \frac{I_{xx}}{p_{CG}A}} \tag{2.41}$$

El signo negativo de la Ecuación (2.41) muestra que y_{CP} está por debajo del centro de gravedad, a una profundidad mayor y, contrariamente a F, sí depende del ángulo de inclinación θ. Si ponemos la placa a profundidades mayores, y_{CP} se acerca al centro de gravedad, ya que todos los factores de la Ecuación (2.41) permanecen constantes, excepto p_{CG}, que aumenta.

La determinación de x_{CP} es exactamente igual:

$$\begin{aligned} Fx_{CP} &= \int xp\,dA = \int x[p_a + \rho g(\xi_{CG} + y)\operatorname{sen}\theta]\,dA \\ &= \rho g \operatorname{sen}\theta \int xy\,dA = \rho g \operatorname{sen}\theta I_{xy} \end{aligned} \tag{2.42}$$

www.elsolucionario.net

donde I_{xy} es el producto de inercia de la placa, calculado en el plano de la placa con respecto a ejes que pasan por el centro de gravedad. Sustituyendo F por su valor, tendremos

$$x_{CP} = \frac{\rho g \operatorname{sen} \alpha I_{xy}}{p_{CG} A} \tag{2.43}$$

Cuando I_{xy} es positivo, x_{CP} es negativo porque la fuerza de presión actúa en el tercer cuadrante, o inferior izquierdo, de la placa. Si $I_{xy} = 0$, lo que suele implicar simetría, $x_{CP} = 0$ y el centro de presiones está inmediatamente debajo del centroide, sobre el eje y.

Fórmulas para el cálculo de la presión manométrica

En muchos casos la presión ambiente p_a se desprecia porque actúa en ambos lados de la placa. Por ejemplo, cuando el otro lado de la placa es la cara interior del casco de un barco o la cara seca de una compuerta o presa. En este caso $p_{CG} = \rho g\, h_{CG}$ y el centro de presiones resulta independiente del peso específico del fluido:

$$F = \rho g h_{CG} A \qquad y_{CP} = \frac{\rho I_{xx} \operatorname{sen} \alpha}{h_{CG} A} \qquad x_{CP} = \frac{\rho I_{xy} \operatorname{sen} \alpha}{h_{CG} A} \tag{2.44}$$

La Figura 2.13 proporciona el área y los momentos de inercia de varias secciones transversales comunes, para su uso en estas fórmulas. Tenga en cuenta que θ es el ángulo que la placa forma con el horizonte.

www.elsolucionario.net

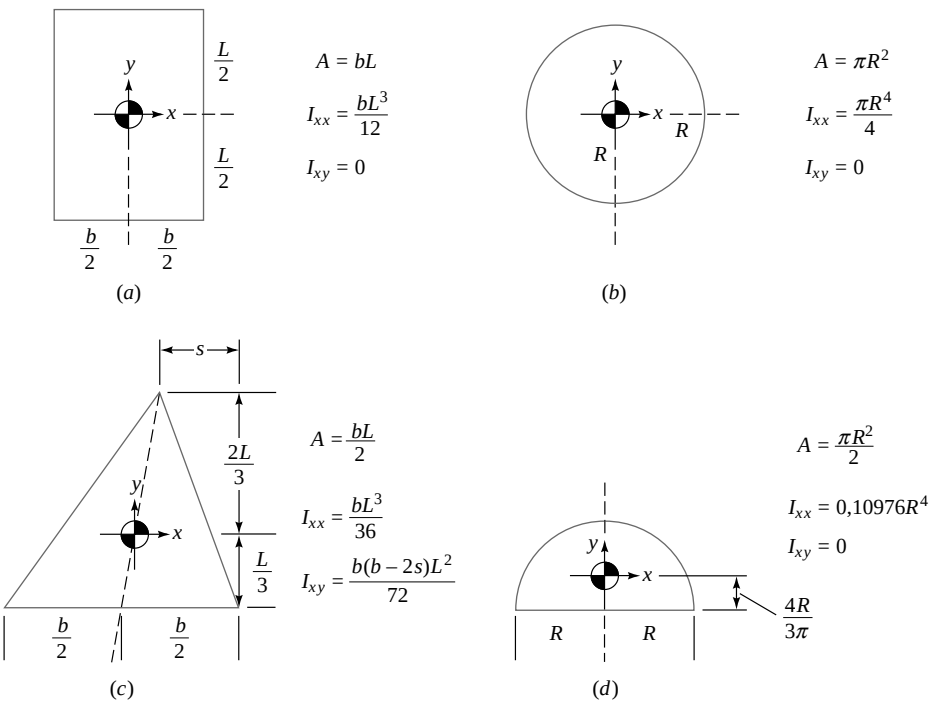
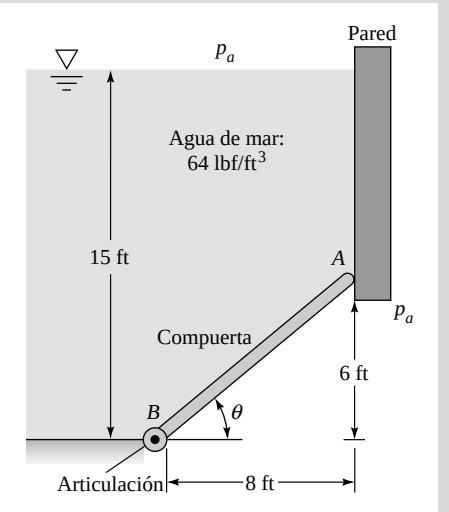


Figura 2.13. Momentos de inercia respecto al centroide para varias formas planas: (*a*) rectángulo, (*b*) círculo, (*c*) triángulo y (*d*) semicírculo.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 2.5

La compuerta de la Figura E2.5*a* tiene 5 ft de ancho, está articulada en el punto *B* y descansa sobre una pared lisa en el punto *A*. Calcule (*a*) la fuerza sobre la compuerta debida a la presión del agua, (*b*) la fuerza horizontal *P* que se ejerce sobre la pared en *A* y (*c*) las reacciones en la charnela *B*.



E2.5a

Solución

Apartado (*a*)

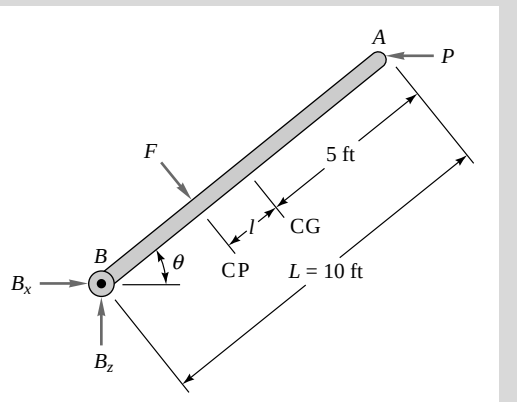
Por geometría, la puerta mide 10 ft de longitud de *A* a *B*, y su centro de gravedad está en el punto medio entre ambos puntos, es decir, a una altura de 3 ft sobre el punto *B*. La profundidad h_{CG} es, pues, 15 – 3 = 12 ft. El área de la compuerta es $5 \times 10 = 50$ ft^2. Podemos despreciar la presión p_a, ya que actúa en ambas caras. De la Ecuación (2.38) tenemos que la fuerza es

$$F = p_{CG}A = \rho g h_{CG} A = (64 \text{ lbf/ft}^3)(12 \text{ ft})(50 \text{ ft}^2) = 38.400 \text{ lbf} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Apartado (*b*)

Hallemos primero el centro de presiones. El diagrama de cuerpo libre de la componente se muestra en la Figura E2.5*b*. La puerta es un rectángulo y, por tanto,

$$I_{xy} = 0 \quad \text{y} \quad I_{xx} = \frac{bL^3}{12} = \frac{(5 \text{ ft})(10 \text{ ft})^3}{12} = 417 \text{ ft}^4$$



E2.5b

www.elsolucionario.net

La distancia l de CG a CP viene dada por la Ecuación (2.44), ya que p_a es despreciable:

$$l = \Phi y_{CP} = + \frac{I_{xx} \text{ sen } \alpha}{h_{CG} A} = \frac{(417 \text{ ft}^4)(\frac{6}{10})}{(12 \text{ ft})(50 \text{ ft}^2)} = 0,417 \text{ ft}$$

La distancia de B a la fuerza F es, pues, $10 - l - 5 = 4,583$ ft. Sumando momentos en sentido antihorario con respecto a B, tenemos:

$$PL \text{ sen } \theta - F(5 - l) = P(6 \text{ ft}) - (38.400 \text{ lbf})(4,583 \text{ ft}) = 0$$

o

$$P = 29.300 \text{ lbf} \qquad \textit{Resp.} (b)$$

Apartado (*c*)

Conocidas F y P, las reacciones B_x y B_z se obtienen del equilibrio de fuerzas sobre la compuerta:

$$\Sigma F_x = 0 = B_x + F \text{ sen } \theta - P = B_x + 38.400 \text{ lbf } (0,6) - 29.300 \text{ lbf}$$

o

$$B_x = 6300 \text{ lbf}$$

$$\Sigma F_x = 0 = B_x - F \cos \theta = B_z - 38.400 \text{ lbf } (0,8)$$

o

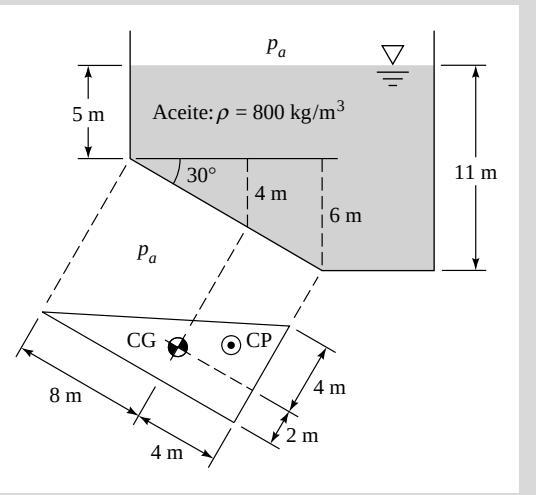
$$B_z = 30.700 \text{ lbf} \qquad \textit{Resp.} (c)$$

Este ejemplo debe haber servido para recordar los conocimientos de estática.

EJEMPLO 2.6

Un depósito de aceite tiene el fondo con forma de triángulo rectángulo, como se muestra en la Figura E2.6. Omitiendo p_a, determine (*a*) la fuerza hidrostática sobre el fondo, (*b*) el centro de presiones de éste.

www.elsolucionario.net



E2.6

Solución

Apartado (*a*)

El triángulo tiene las propiedades dadas en la Figura 2.13*c*. El centroide se sitúa a un tercio de la altura de la base (2 m) y a dos tercios del vértice superior (4 m), según se muestra en la figura. El área vale

$$\tfrac{1}{2}(6 \text{ m})(12 \text{ m}) = 36 \text{ m}^2$$

www.elsolucionario.net

Los momentos de inercia son

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{36} = \frac{(6\text{ m})(12\text{ m})^3}{36} = 288\text{ m}^4$$

e

$$I_{xy} = \frac{b(b-2s)L^2}{72} = \frac{(6\text{ m})[6\text{ m} - 2(6\text{ m})](12\text{ m})^2}{72} = -72\text{ m}^4$$

La profundidad del centro de gravedad es $h_{CG} = 5 + 4 = 9$ m. La fuerza hidrostática según la Ecuación (2.44) vale

$$F = \rho g h_{CG} A = (800\text{ kg/m}^3)(9{,}807\text{ m/s}^2)(9\text{ m})(36\text{ m}^2)$$
$$= 2{,}54 \times 10^6\text{ (kg} \cdot \text{m)/s}^2 = 2{,}54 \times 10^6\text{ N} = 2{,}54\text{ MN} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Apartado (*b*)

La posición del centro de presiones CP está dada por la Ecuación (2.44):

$$y_{CP} = -\frac{I_{xx}\,\text{sen}\,\alpha}{h_{CG}A} = -\frac{(288\text{ m}^4)(\text{sen }30°)}{(9\text{ m})(36\text{ m})^2} = -0{,}444\text{ m}$$

$$x_{CP} = -\frac{I_{xy}\,\text{sen}\,\alpha}{h_{CG}A} = -\frac{(-72\text{ m}^4)(\text{sen }30°)}{(9\text{ m})(36\text{ m})^2} = +0{,}111\text{ m} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

La fuerza resultante $F = 2{,}54$ MN actúa en este punto, que está por debajo y a la derecha del centro de gravedad, como se muestra en la Figura E2.6.

www.elsolucionario.net

2.6. FUERZAS HIDROSTÁTICAS SOBRE SUPERFICIES CURVAS

La resultante de fuerzas de presión sobre superficies curvas se calcula más fácilmente separando las componentes vertical y horizontal. Considérese la superficie curva arbitraria de la Figura 2.14*a*. Las fuerzas elementales de presión, por actuar perpendicularmente a la superficie en cada punto, varían en dirección a lo largo de ésta y no pueden ser sumadas simplemente. Podríamos sumar por separado las tres componentes de las fuerzas elementales, pero esta triple integración no es necesaria.

La Figura 2.14*b* muestra el diagrama de cuerpo libre de la columna de fluido contenida en la proyección vertical hacia arriba de la superficie curva. Las fuerzas F_H y F_V son las ejercidas por la columna de fluido sobre la superficie. Se muestran también las fuerzas debidas al peso y a la presión que actúa sobre las paredes verticales. La columna de fluido debe estar en equilibrio estático. En la parte superior de la columna, *bcde*, las componentes horizontales F_1 se equilibran y son irrelevantes en la discusión. En la parte inferior, la región irregular de fluido *abc* próxima a la superficie curva, el equilibrio de fuerzas muestra que la componente horizontal F_H, que ejerce la superficie sobre el fluido, ha de ser igual a la fuerza F_H que actúa en la pared vertical izquierda. Esta última puede calcularse con las expresiones conocidas para superficies planas, según se ve en la Ecuación (2.38), aplicadas a la proyección sobre un plano vertical de la superficie curva considerada. La siguiente regla general simplifica el análisis:

> La componente horizontal de la fuerza ejercida sobre una superficie curva es igual a la fuerza ejercida sobre el área plana formada por la proyección de aquélla sobre un plano vertical normal a dicha componente.

Si existen dos componentes horizontales, ambas pueden calcularse utilizando el procedimiento anterior. La suma de las fuerzas verticales muestra que

$$F_V = W_1 + W_2 + W_{\text{aire}} \tag{2.45}$$

www.elsolucionario.net

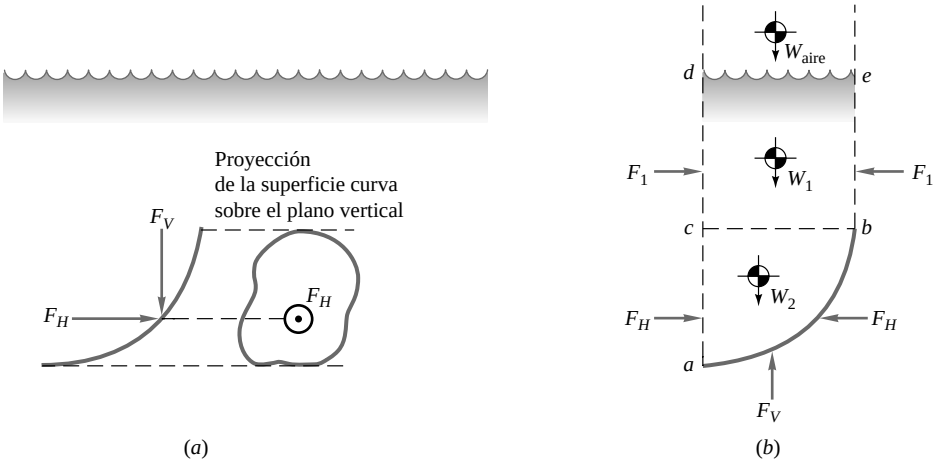


Figura 2.14. Cálculo de la fuerza hidrostática sobre una superficie curva: (*a*) superficie curva sumergida; (*b*) diagrama de cuerpo libre del fluido que está sobre la superficie curva.

Podemos resumir esto de la siguiente forma:

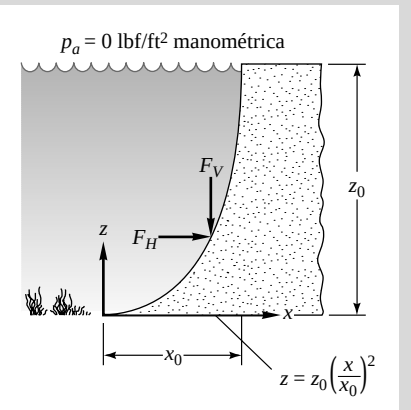
La componente vertical de las fuerzas de presión que actúan sobre una superficie curva es igual en magnitud y dirección al peso de la columna de fluido, líquido y aire atmosférico que hay encima de dicha superficie.

Por tanto, el cálculo de F_V es poco más que encontrar el centroide de gravedad de la columna de fluido; quizás una pequeña integración si la región inferior *abc* de la Figura 2.14*b* tiene una forma particularmente compleja.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 2.7

Una presa tiene una forma parabólica $z/z_0 = (x/x_0)^2$, como se muestra en la Figura E2.7*a*, con $x_0 = 10$ ft y $z_0 = 24$ ft. El fluido es agua, $\rho g = 62{,}4$ lbf/ft^3, y se puede despreciar la presión atmosférica. Calcule las fuerzas F_H y F_V sobre la presa y la posición del CP sobre el que actúan. La anchura de la presa es de 50 ft.



E2.7a

Solución

- *Diagrama del sistema*. En la Figura E2.7*a* se esquematizan las dimensiones de la presa. La anchura de la presa es $b = 50$ ft.
- *Procedimiento*. Calculamos F_H y su línea de acción mediante las Ecuaciones (2.38) y (2.44). Calculamos F_V y su línea de acción a partir del peso del fluido sobre la parábola y la posición de su centroide.

www.elsolucionario.net

- *Resolución para la componente horizontal*. Como se muestra en la Figura E2.7*b*, la proyección de la parábola sobre un plano vertical es un rectángulo de 24 ft de alto por 50 ft de ancho, cuyo centroide está a mitad de altura, esto es, $h_{CG} = 24/2 = 12$ ft, y cuyo área es $A_{proy} = (24 \text{ ft})(50 \text{ ft}) = 1200 \text{ ft}^2$. Así, empleando la Ecuación (2.38), la fuerza F_H es

$$F_H = \rho g h_{CG} A_{proy} = 62{,}4 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3} (12 \text{ ft})(1200 \text{ ft}^2) = 898.560 \text{ lbf} \cong 899 \times 10^3 \text{ lbf}$$

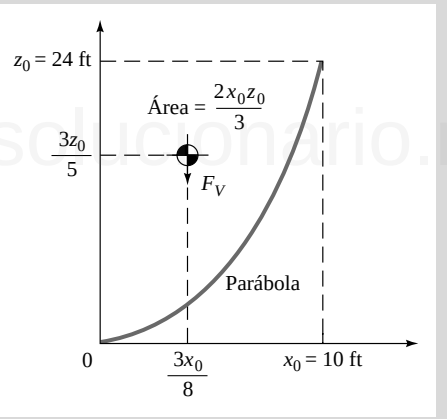
La línea de acción de F_H está por debajo del centroide, en la posición dada por la Ecuación (2.44):

$$y_{CP,proy} = \frac{I_{xx} \operatorname{sen} \theta}{h_{CG} A_{proy}} = \frac{(1/12)(50 \text{ ft})(24 \text{ ft})^3 \operatorname{sen} 90°}{(12 \text{ ft})(1200 \text{ ft}^2)} = 4 \text{ ft}$$

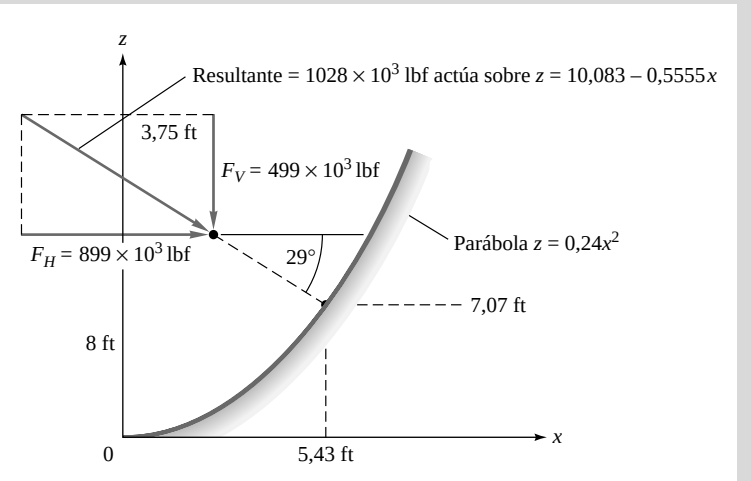
De esta forma, F_H actúa a 12 + 4 = 16 ft, o dos tercios de la altura de la presa, por debajo de la superficie libre (a 8 ft del fondo).

- *Comentarios*. Tenga en cuenta que para calcular F_H y su línea de acción se emplea la *proyección* de la parábola sobre la vertical y no la propia parábola. Como la proyección es sobre la *vertical*, el ángulo es $\theta = 90°$.
- *Resolución para la componente vertical*. La fuerza vertical F_V es igual al peso del agua sobre la parábola. Las propiedades geométricas de la parábola no se muestran en la Figura 2.13, por lo que debemos buscarlas en otro libro. El área y el centroide de la parábola se representan en la Figura E2.7*b*. El peso de esta columna de agua es

$$F_V = \rho g A_{sección} b = 62{,}4 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3} \left[\frac{2}{3}(24 \text{ ft})(10 \text{ ft})\right](50 \text{ ft}) = 499.200 \text{ lbf} \cong 499 \times 10^3 \text{ lbf}$$



E2.7b



E2.7c

www.elsolucionario.net

Esta fuerza actúa hacia abajo aplicada sobre el centroide de la sección parabólica, a una distancia $3x_0/8 = 3{,}75$ ft del origen de coordenadas, según se presenta en las Figuras E2.7*b* y *c*. Así, la fuerza hidrostática resultante sobre la presa es

$$F = (F_H^2 + F_V^2)^{1/2} = [(899 \times 10^3 \text{ lbf})^2 + (499 \times 10^3 \text{ lbf})^2]^{1/2} = 1028 \times 10^3 \text{ lbf a } 29° \qquad \textit{Resp.}$$

Esta resultante se muestra en la Figura E2.7*c* y pasa por un punto a 8 ft por encima del origen y 3,75 ft a su derecha, actuando directamente sobre la presa sobre un punto 5,43 ft a la derecha y 7,07 ft por encima del origen.

- *Comentarios*. Obsérvese que para calcular las resultantes F_H y F_V se emplean fórmulas completamente distintas. En opinión del autor, el concepto de centro de presiones CP resulta algo artificial en el caso de superficies curvas, pero la complicación es insoslayable.

2.7. FUERZAS HIDROSTÁTICAS EN FLUIDOS ESTRATIFICADOS

Las fórmulas descritas en las Secciones 2.5 y 2.6 para superficies planas y curvas son válidas únicamente si el fluido es de densidad uniforme. Si el fluido está estratificado con distintas densidades, como en la Figura 2.15, el problema no se puede resolver empleando una simple fórmula, ya que la pendiente de la distribución lineal de presiones cambia de capa a capa. Sin embargo, las fórmulas ya conocidas se pueden aplicar por separado a cada una de las capas, de modo que el procedimiento adecuado es calcular las fuerzas y momentos de cada capa y sumarlos posteriormente para obtener la resultante total.

Considérese la superficie plana indicada en la Figura 2.15, sumergida en una región fluida con dos capas. La pendiente de la distribución de presión se hace más acusada al pasar a la segunda capa, formada por un fluido más denso. La fuerza total sobre la placa *no* es igual a la presión en el centro de masas por el área, sino que cada parte de la placa cumple esto por separado, de modo que sumamos las dos contribuciones para hallar el total:

www.elsolucionario.net

$$F = \Sigma F_i = \Sigma p_{CG_i} A_i \tag{2.46}$$

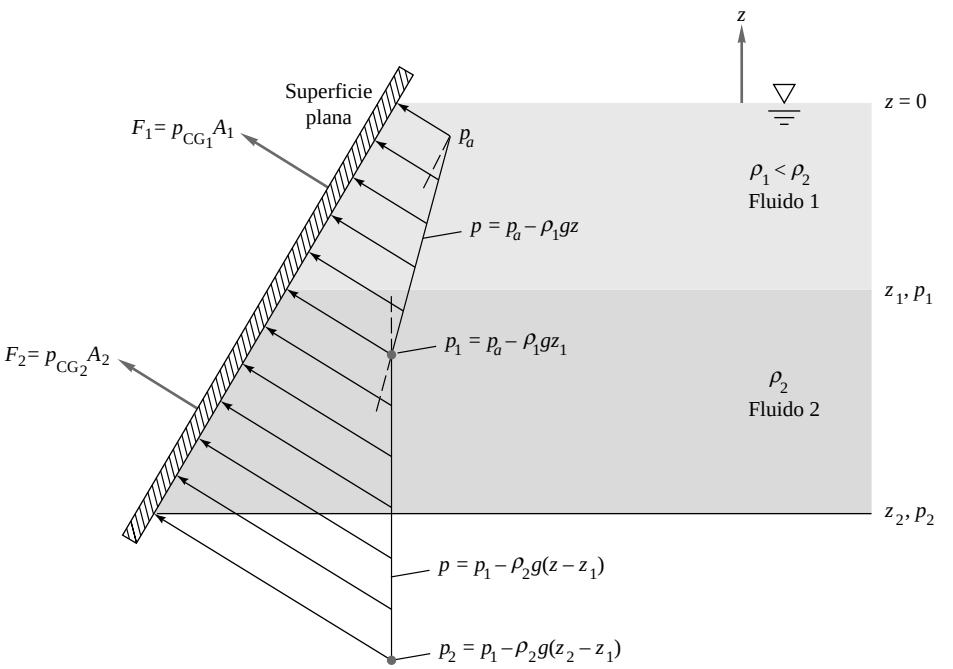


Figura 2.15. Las fuerzas hidrostáticas sobre una superficie inmersa en fluidos estratificados deben ser obtenidas por separado y sumadas posteriormente.

www.elsolucionario.net

Análogamente, el centroide de cada parte de la placa puede ser utilizado para saber dónde está el centro de presiones de dicha parte:

$$y_{\mathrm{CP}_i} = \Phi \frac{\Leftarrow g \text{ sen } \aleph I_{xx_i}}{p_{\mathrm{CG}_i} A_i} \qquad x_{\mathrm{CP}_i} = \Phi \frac{\Leftarrow g \text{ sen } \aleph I_{xy_i}}{p_{\mathrm{CG}_i} A_i} \tag{2.47}$$

Estas fórmulas sitúan el centro de presiones de cada F_i respecto al centroide de la parte respectiva, no respecto al de la placa completa. El centro de presiones de la fuerza total $F = \mathrm{Z}\ F_i$ debe obtenerse sumando momentos respecto a algún punto conveniente, por ejemplo, la superficie libre. El siguiente ejemplo servirá de ilustración.

EJEMPLO 2.8

Un depósito de 20 ft de profundidad y 7 ft de anchura contiene 8 ft de aceite, 6 ft de agua y 4 ft de mercurio. Calcule (*a*) la fuerza hidrostática total y (*b*) el centro de presiones resultante sobre la pared derecha del depósito.

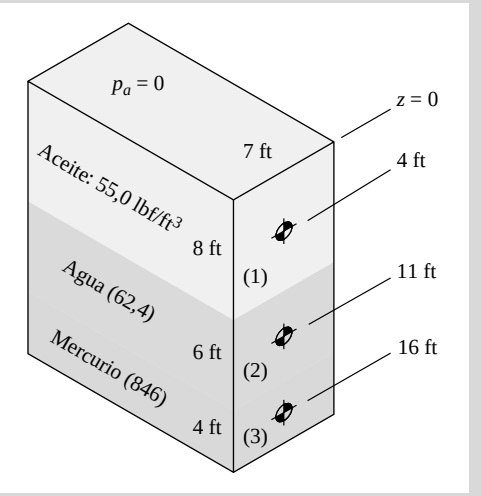
Solución

Apartado (*a*)

Dividimos la pared en tres partes, según se esquematiza en la Figura E2.8, y calculamos la presión hidrostática en el centroide de cada parte, haciendo uso de la Ecuación (2.38):

$$p_{\mathrm{CG}_1} = (55{,}0 \text{ lbf/ft}^3)(4 \text{ ft}) = 220 \text{ lbf/ft}^2$$
$$p_{\mathrm{CG}_2} = (55{,}0)(8) + 62{,}4(3) = 627 \text{ lbf/ft}^2$$
$$p_{\mathrm{CG}_3} = (55{,}0)(8) + 62{,}4(6) + 846(2) = 2506 \text{ lbf/ft}^2$$

www.elsolucionario.net



E2.8

Para obtener la fuerza sobre cada porción, multiplicamos ahora estas presiones por las áreas correspondientes a cada parte:

$$F_1 = p_{\mathrm{CG}_1} A_1 = (220 \text{ lbf/ft}^2)(8 \text{ ft})(7 \text{ ft}) = \quad 12.300 \text{ lbf}$$
$$F_2 = p_{\mathrm{CG}_2} A_2 = 627(6)(7) = \quad 26.300 \text{ lbf}$$
$$F_3 = p_{\mathrm{CG}_3} A_3 = 2506(4)(7) = \quad \underline{70.200 \text{ lbf}}$$
$$F = \mathrm{Z}\ F_i = 108.800 \text{ lbf} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

www.elsolucionario.net

Apartado (*b*)

Podemos hacer uso de las Ecuaciones (2.47) para hallar el CP de cada fuerza F_i, teniendo en cuenta que $\theta = 90°$ y sen $\theta = 1$ en las tres partes. Los momentos de inercia son $I_{xx_1} = (7 \text{ ft})(8 \text{ ft})^3/12 = 298{,}7 \text{ ft}^4$, $I_{xx_2} = 7(6)^3/12 = 126{,}0 \text{ ft}^4$ e $I_{xx_3} = 7(4)^3/12 = 37{,}3 \text{ ft}^4$. Los centros de presiones son entonces

$$y_{CP_1} = -\frac{\gamma I_{xx_1}}{F_1} = -\frac{(55{,}0 \text{ lbf/ft}^3)(298{,}7 \text{ ft}^4)}{12.300 \text{ lbf}} = -1{,}33 \text{ ft}$$

$$y_{CP_2} = -\frac{62{,}4(126{,}0)}{26.300} = -0{,}30 \text{ ft} \qquad y_{CP_3} = -\frac{846(37{,}3)}{70.200} = -0{,}45 \text{ ft}$$

Esto hace que $z_{CP_1} = -4 - 1{,}33 = -5{,}33$ ft, $z_{CP_2} = -11 - 0{,}30 = -11{,}30$ ft y $z_{CP_3} = -16 - 0{,}45 = -16{,}45$ ft. Sumando momentos con respecto a la superficie tenemos

$$\Sigma F_i z_{CP_i} = F z_{CP}$$

o $$12.300(-5{,}33) + 26.300(-11{,}30) + 70.200(-16{,}45) = 108.800 z_{CP}$$

o $$z_{CP} = -\frac{1.518.000}{108.800} = -13{,}95 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

El centro de presiones de la fuerza total que actúa sobre la pared del depósito está a 13,95 ft bajo la superficie.

2.8. FLOTACIÓN Y ESTABILIDAD

Los mismos principios que empleamos para calcular las fuerzas hidrostáticas sobre superficies pueden aplicarse al cálculo de la resultante sobre un cuerpo completamente sumergido o un cuerpo que flota. Se deducen entonces las dos leyes de flotación enunciadas por Arquímedes en el siglo tercero a.C.:

1. Un cuerpo sumergido en un fluido experimenta una fuerza de flotación vertical igual al peso del fluido que desaloja.
2. Un cuerpo que flota desaloja su propio peso en el fluido en que flota.

Estas dos leyes se deducen fácilmente observando la Figura 2.16. En la Figura 2.16*a* vemos que el cuerpo está limitado por una superficie superior curvada 1 y otra inferior, también curvada, 2. La Ecuación (2.45) nos indica que el cuerpo experimenta un empuje vertical de

$$\begin{aligned} F_F &= F_V(2) - F_V(1) \\ &= (\text{peso del fluido sobre 2}) - (\text{peso del fluido sobre 1}) \\ &= \text{peso del fluido desplazado por el cuerpo} \end{aligned} \tag{2.48}$$

Alternativamente, en la Figura 2.16*b* podemos sumar las fuerzas verticales elementales que actúan sobre el cuerpo:

$$F_F = \int_{\text{cuerpo}} (p_2 - p)\, dA_H = -\gamma \int (z_2 - z_1)\, dA_H = -\gamma(\text{volumen del cuerpo}) \tag{2.49}$$

Ambos resultados son la expresión matemática de la primera ley de Arquímedes expuesta anteriormente.

La Ecuación (2.49) supone que el fluido tiene un peso específico ρg uniforme. La línea de acción de la fuerza de flotación pasa por el centro de volumen del cuerpo, que coincide con el centro de gravedad si el cuerpo tiene densidad uniforme. Este punto en el que actúa F_F se denomina *centro de flotación*, designado con *F* o CF en la figuras. Es evidente que el punto *F* no tiene por qué coincidir con el centro de gravedad del cuerpo, que puede tener densidad variable.

www.elsolucionario.net

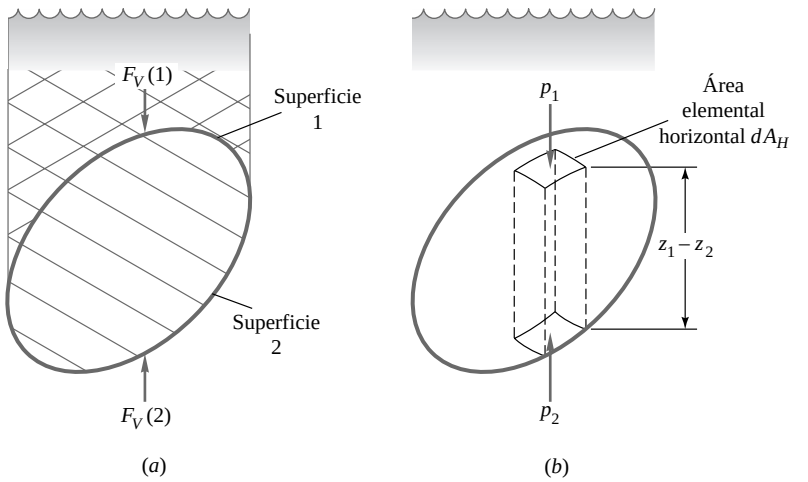


Figura 2.16. Dos perspectivas distintas de la fuerza de flotación sobre un cuerpo arbitrario sumergido: (*a*) fuerzas sobre las superficies curvas superior e inferior; (*b*) suma de fuerzas de presión verticales elementales.

La Ecuación (2.49) se puede generalizar para el caso de fluidos estratificados (FE) sumando las contribuciones de cada capa de densidad ρ_i desalojada por el cuerpo:

$$(F_F)_{\text{FE}} = \text{Z } \rho_i g \text{ (volumen desplazado)} \tag{2.50}$$

Cada capa desalojada tendría su propio centro de volumen y habría que sumar los momentos de las distintas fuerzas para encontrar el centro de flotación del cuerpo.

Como los líquidos son relativamente pesados, somos conscientes de sus fuerzas de flotación, pero los gases también ejercen fuerzas análogas en los cuerpos sumergidos en ellos. Por ejemplo, los seres humanos tienen un peso específico medio de aproximadamente 60 lbf/ft^3. El peso de una persona es de unas 180 lbf y su volumen, por tanto, de 3,0 ft^3. Sin embargo, al hacer esto estamos despreciando la flotación producida por el aire ambiente. En condiciones normales, el peso específico del aire es de 0,0763 lbf/ft^3 y, por tanto, la fuerza de flotación es aproximadamente 0,23 lbf. Si se midiera en el vacío, el peso de una persona aumentaría en 0,23 lbf. En el caso de globos y dirigibles, la fuerza de flotación no sólo no es despreciable, sino que es el factor dominante en el diseño. Muchos otros fenómenos, como la convección natural del calor y la mezcla vertical en los océanos, dependen de fuerzas de flotación que, pese a ser muy pequeñas, juegan un papel decisivo.

Los cuerpos que flotan son un caso especial, ya que sólo una parte está sumergida, permaneciendo el resto por encima de la superficie libre. La Figura 2.17 ilustra este caso, apareciendo sombreado el volumen desplazado. En este caso, la Ecuación (2.49) se modifica ligeramente y queda:

$$F_F = (\rho g) \text{ (volumen desplazado)} = \text{peso del cuerpo flotante} \tag{2.51}$$

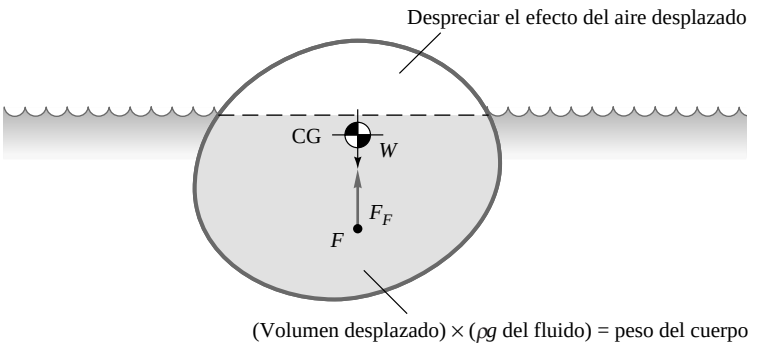


Figura 2.17. Equilibrio estático de un cuerpo flotante.

www.elsolucionario.net

La fuerza de flotación no sólo equilibra el peso, sino que debe estar aplicada en la *misma línea vertical*, ya que en equilibrio estático no puede haber momentos. La Ecuación (2.51) es el equivalente matemático de la segunda ley de Arquímedes, citada anteriormente.

EJEMPLO 2.9

Un bloque de hormigón pesa 100 lbf en el aire y sólo «pesa» 60 lbf sumergido en agua (62,4 lbf/ft^3). ¿Cuál es el peso específico medio del bloque?

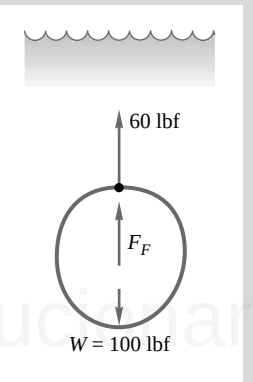
Solución

El diagrama de cuerpo libre del bloque sumergido (véase Figura E2.9) muestra el equilibrio entre el peso aparente, la fuerza de flotación y el peso real:

$$\Sigma F_z = 0 = 60 + F_F - 100$$

o

$$F_F = 40 \text{ lbf} = (62{,}4 \text{ lbf/ft}^3)(\text{volumen del bloque, ft}^3)$$



E2.9

De la expresión anterior obtenemos que el volumen del bloque es 40/62,4 = 0,641 ft^3. Por tanto, el peso específico pedido es

$$(\gamma)_{\text{bloque}} = \frac{100 \text{ lbf}}{0{,}641 \text{ ft}^3} = 156 \text{ lbf/ft}^3 \qquad \textit{Resp.}$$

En ocasiones, un cuerpo puede tener el peso y el volumen adecuados para que su peso específico sea igual al del fluido. En estos casos, el cuerpo tendrá *flotabilidad neutra* y permanecerá en el punto en el que se le sumerja. En visualización se utilizan a veces partículas pequeñas con flotabilidad neutra, y cierto tipo de boya, el *flotador Swallow* [2], se utiliza para seguir las corrientes oceánicas. Un submarino puede adquirir flotabilidad negativa, neutra o positiva al bombear agua hacia dentro o hacia fuera de los tanques de lastre.

Estabilidad

Un cuerpo que flota, como el de la Figura 2.17, puede encontrarse en una posición estáticamente *inestable*. En este caso, el cuerpo volcará a la primera oportunidad, como un lápiz que está apoyado sobre su punta y se desplaza ligeramente de la vertical. La más mínima perturbación le llevará a buscar otra posición de equilibrio que sí sea estable. Los ingenieros deben cuidar los diseños para impedir la inestabilidad de la flotación. La única forma de asegurar que una posición de equilibrio es estable es dar una pequeña «perturbación» matemática al cuerpo y ver si aparece un momento restaurador que lo lleve a su posición de

www.elsolucionario.net

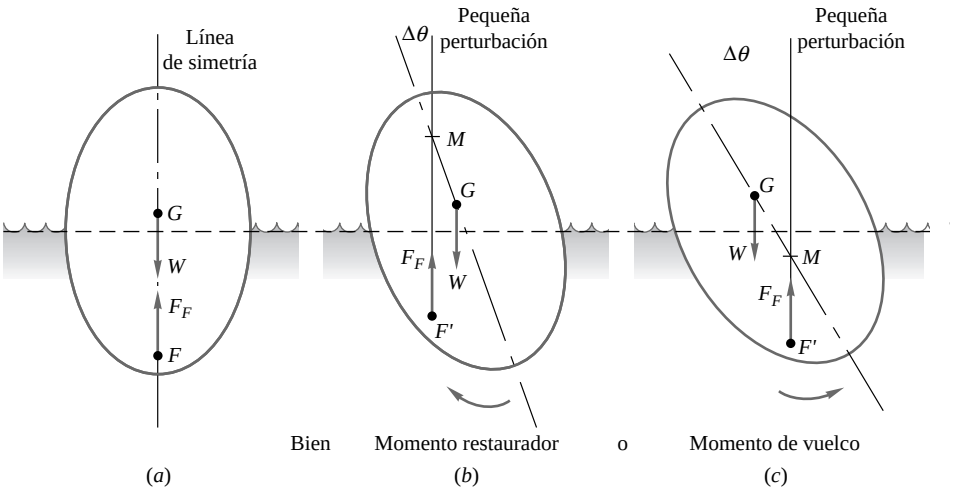


Figura 2.18. Cálculo de la altura metacéntrica M de un cuerpo flotante para determinar su flotabilidad estática: (*a*) posición de flotación inicial; (*b*) F' se mueve ligeramente (el punto M sobre G denota estabilidad); (*c*) F' se aleja (que el punto M debajo de G denota inestabilidad).

equilibrio original. Si esto ocurre, la posición es estable; en caso contrario, es instable. Este tipo de cálculos, para cuerpos flotantes arbitrarios, constituyen un arte específico de los ingenieros navales [3], pero aquí podemos dar también los principios básicos del cálculo de la estabilidad estática. La Figura 2.18 ilustra este cálculo para el caso muy común de un cuerpo simétrico. Los pasos a aplicar son los siguientes:

1. La posición inicial de flotación se calcula con la Ecuación (2.51). Se calculan asimismo el centro de gravedad G y el de flotación F.
2. Se desvía al cuerpo un pequeño ángulo $\Delta\theta$, apareciendo una nueva línea de flotación. Se calcula el nuevo centro de flotación F'. La vertical trazada desde F' corta a la línea de simetría en el punto M, denominado *metacentro*, que es independiente de $\Delta\theta$ si éste es pequeño.
3. Si el punto M está por encima de G (es decir, si la *altura metacéntrica* $\overline{MG}$ es positiva) aparecerá un momento restaurador y decimos que la posición original es estable. Si M está por debajo de G ($\overline{MG}$ negativa), el cuerpo es instable y volcará a la mínima perturbación. Cuanto mayor sea $\overline{MG}$ más estable será la posición original.

La altura metacéntrica es una magnitud característica de la sección transversal del cuerpo para un peso dado, y su valor da una indicación de la estabilidad del cuerpo. Si el cuerpo tiene sección transversal y calado variables, como en un barco, el cálculo del metacentro puede ser muy complicado.

Estabilidad referida a la línea de flotación

Los arquitectos navales [3] han desarrollado los conceptos generales de estabilidad de la Figura 2.18 y han reducido el problema de la estabilidad a un sencillo cálculo en el que interviene el momento de inercia del área delimitada por la *línea de flotación* respecto al eje de rotación. El desarrollo de esta idea, que se ilustra en la Figura 2.19, presupone que la forma del cuerpo varía suavemente (no de forma discontinua) cerca de la línea de flotación.

Supongamos que el cuerpo es simétrico con respecto al eje y. Si inclinamos el cuerpo un ángulo θ pequeño, el triángulo Obd se sumerge, mientras que el triángulo cOa se eleva por encima del nivel de flotación. El nuevo centro de flotación F' se calcula como el centroide de la porción sumergida del cuerpo $aObde$:

$$\bar{x}v_{abOde} = \int_{cOdea} x\,dv + \int_{Obd} x\,dv - \int_{cOa} x\,dv = 0 + \int_{Obd} x(LdA) - \int_{cOa} x(LdA)$$

$$= 0 + \int_{Obd} xL(x\ \text{tg}\ \theta dx) - \int_{cOa} xL(-x\ \text{tg}\ \theta dx) = \text{tg}\ \theta \int_{\text{línea flot.}} x^2\,dA_{\text{línea flot.}} = I_O\ \text{tg}\ \theta$$

www.elsolucionario.net

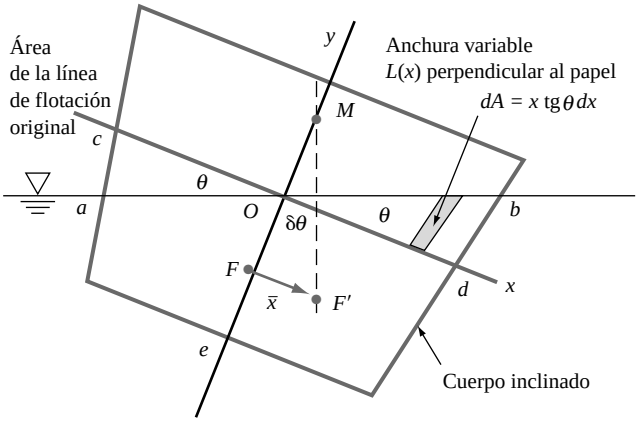


Figura 2.19. Un cuerpo que flota se inclina un ángulo pequeño θ. El movimiento del centro de flotación F está relacionado con el momento de inercia del área delimitada por la línea de flotación.

donde I_O es el momento de inercia de área de la *huella de la línea de flotación* del cuerpo respecto al eje de rotación O. La primera integral se cancela como consecuencia de la simetría de la porción sumergida inicialmente *cOdea*. Las dos integrales restantes contribuyen por igual a I_O como consecuencia de la simetría de las dos «cuñas» sobre las que se realiza la integración[3]. De esta forma es posible determinar la distancia de M a F:

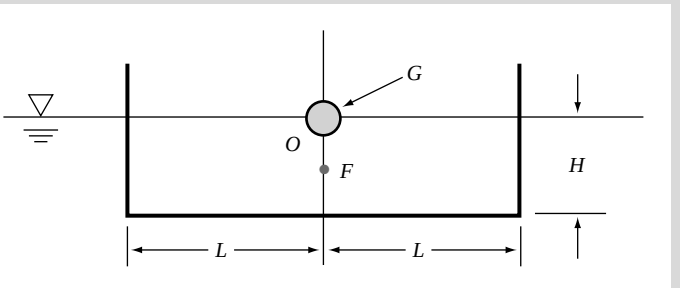
$$\frac{\bar{x}}{\text{tg}\,\theta} = \overline{MF} = \frac{I_O}{v_{\text{sum}}} = \overline{MG} + \overline{GF} \quad \text{o} \quad \overline{MF} = \frac{I_O}{v_{\text{sum}}} \Phi \overline{GF} \tag{2.52}$$

www.elsolucionario.net

El ingeniero debe determinar la distancia de G a F a partir de la forma básica del cuerpo flotante y realizar entonces el cálculo de I_O y del volumen sumergido v_{sum}. Si la altura metacéntrica MG es positiva, el cuerpo será estable ante pequeñas perturbaciones. Conviene observar que si $\overline{GF}$ es negativo, es decir, si F está situado *sobre* G, el cuerpo es siempre estable.

EJEMPLO 2.10

Una gabarra tiene una sección transversal uniforme, rectangular, de anchura $2L$ y calado H, como se muestra en la Figura E2.10. Determine (*a*) la altura metacéntrica para un pequeño ángulo de balance y (*b*) el rango del cociente L/H para que la gabarra sea estáticamente estable. Supóngase que el centro de gravedad está exactamente en la línea de flotación, tal como se muestra.



E2.10

[3] Cuando las paredes laterales del cuerpo no son paralelas las cuñas no son exactamente iguales, pero las integrales se cancelan, en primera aproximación, para valores pequeños del ángulo θ (*N. del T.*).

www.elsolucionario.net

Solución

Si la gabarra tiene una anchura b perpendicular al papel, el área de la línea de flotación, relativa al eje de rotación O, tiene una base b y una altura $2L$, por lo que $I_O = b(2L)^3/12$ y $v_{sum} = 2LbH$. De la Ecuación (2.52) se obtiene

$$\overline{MG} = \frac{I_O}{v_{sum}} \Phi \overline{GF} = \frac{8bL^3/12}{2LbH} = \frac{H}{2} = \frac{L^2}{3H} \Phi \frac{H}{2} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

De esta forma, la gabarra sólo será estable si

$$L^2 > 3H^2/2 \qquad \text{o} \qquad 2L > 2{,}45H \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

La gabarra será tanto más estable cuanto mayor sea su anchura relativa a su calado. Bajar la posición de G también contribuirá a una mayor estabilidad.

La determinación de la estabilidad de cuerpos en flotación con formas irregulares es difícil incluso para los expertos. Estos cuerpos pueden tener dos o más posiciones estables. Por ejemplo, un barco puede flotar en su posición normal o invertido. En la Referencia 11 se presenta un interesante procedimiento matemático para determinar la estabilidad de flotación. El autor de esta referencia hace énfasis en que incluso las formas simples, como un cubo de densidad uniforme, presentan numerosas orientaciones de flotación estables, que pueden ser no simétricas. Los cilindros circulares homogéneos pueden flotar con el eje de simetría inclinado con respecto a la vertical.

La inestabilidad de flotación es común en la naturaleza. Los peces nadan generalmente manteniendo su plano de simetría en posición vertical. Cuando mueren, esta posición es inestable, por lo que acaban flotando con su plano de simetría horizontal. Los icebergs gigantes pueden girar sobre sí mismos al cambiar sus condiciones de estabilidad cuando se derrite parcialmente la parte sumergida. Este espectacular fenómeno se ha presenciado en muy pocas ocasiones.

La Figura 2.20 muestra un iceberg típico del Atlántico Norte, formado al romperse parte de un glaciar de Groenlandia que sobresalía sobre el océano. Su parte visible es irregular, indicando que se han producido roturas secundarias posteriores. Los icebergs están formados por agua dulce congelada procedente de los glaciares y su densidad media es de unos 900 kg/m^3. De esta forma, cuando un iceberg está flotando sobre el agua del mar, cuya densidad media es de 1025 kg/m^3, aproximadamente una fracción 900/1025 de su volumen, unos siete octavos, queda sumergida.

Figura 2.20. Un iceberg del Ártico formado a partir de un glaciar de Groenlandia. Estos icebergs, junto con sus hermanos antárticos, que llegan a ser incluso más grandes, son los mayores cuerpos flotantes del mundo. Obsérvese la existencia de fracturas posteriores sobre la superficie frontal. (*© Corbis.*)

www.elsolucionario.net

2.9. DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES EN MOVIMIENTO COMO SÓLIDO RÍGIDO

En un movimiento como sólido rígido, todas las partículas están sometidas a traslación y rotación combinadas, sin que exista movimiento relativo entre ellas. Sin este movimiento relativo no hay velocidades de deformación y los esfuerzos viscosos $\mu\nabla^2\mathbf{V}$ de la Ecuación (2.13) desaparecen, quedando un equilibrio entre presión, gravedad y aceleración de las partículas:

$$\nabla p = \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) \tag{2.53}$$

El gradiente de presiones actúa en la dirección $\mathbf{g} - \mathbf{a}$, y las líneas de presión constante (incluyendo la superficie libre, de existir) son perpendiculares a esta dirección. El caso general de movimiento como sólido rígido con rotación y traslación combinadas se discute en el Capítulo 3, Figura 3.12. Si el centro instantáneo de rotación está en el punto *O* y su velocidad de traslación es $\mathbf{V}_0$, la velocidad de un punto arbitrario *P* vendrá dada por[4]

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_0$$

donde Ω es el vector velocidad angular y $\mathbf{r}_0$ es la posición del punto *P*. Derivando obtenemos la expresión más general del vector aceleración de un sólido rígido:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}_0}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_0) + \frac{d\mathrm{K}}{dt} \times \mathbf{r}_0 \tag{2.54}$$

Mirando al segundo miembro vemos que el primer término es la aceleración de arrastre, el segundo término la *aceleración centrípeta*, dirigida desde el punto *P* perpendicularmente al eje de giro, y el tercero es la aceleración debida a variaciones de la velocidad angular. Raramente intervienen los tres términos simultáneamente en el movimiento de un fluido. De hecho, los fluidos no suelen moverse como sólidos rígidos a menos que se les confine durante largo tiempo. Supongamos, por ejemplo, que tenemos un depósito lleno de agua en un coche que arranca con aceleración constante. El agua comenzaría a agitarse y esa agitación se iría amortiguando muy lentamente hasta que al final las partículas de agua estarían aproximadamente en aceleración como un sólido rígido. Esto llevaría tanto tiempo que el coche habría alcanzado velocidades hipersónicas. Sin embargo, si el agua tiene un movimiento acelerado como sólido rígido, por lo menos podemos saber la distribución de presiones en el depósito. El siguiente ejemplo es un caso particular en el que el agua alcanza rápidamente una aceleración uniforme.

EJEMPLO 2.11

Un depósito de agua de 1 m de profundidad cae libremente por acción de la gravedad con resistencia despreciable. Calcule la presión en el fondo del depósito si p_a = 101 kPa.

Solución

En estas condiciones, las partículas de agua tienden a caer como un bloque rígido de fluido. En caída libre, en ausencia de resistencia, la aceleración vale $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. La Ecuación (2.53) expresa entonces que $\nabla p = \rho(\mathbf{g} - \mathbf{g}) = 0$. La presión en el agua es *constante* en todo punto e igual a la atmosférica, 101 kPa. En otras palabras, las paredes no rinden el servicio de contener al fluido y soportar la distribución de presiones que existe normalmente.

Aceleración lineal uniforme

En este caso particular de movimiento, **a** tiene la misma magnitud y dirección para todas las partículas, propiedad que se emplea al aplicar la Ecuación (2.53). Como se observa en la Figura 2.21, el vector suma de **g**

[4] Para una deducción más detallada, véase la Sección 2.7 de la Referencia 4.

www.elsolucionario.net

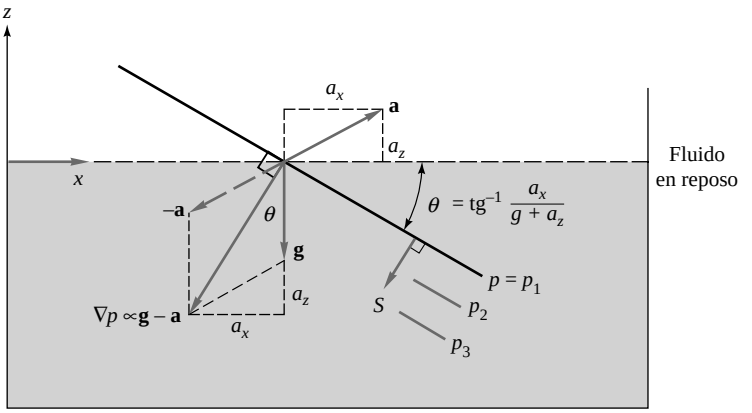


Figura 2.21. Inclinación de las superficies de presión constante en un depósito que contiene líquido en movimiento acelerado como sólido rígido.

y –**a** tiene la dirección del gradiente de presiones o línea de máxima variación de *p*. Las superficies de presión constante deben ser perpendiculares a aquéllas y, por tanto, estarán giradas un ángulo θ

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{a_x}{g + a_z} \tag{2.55}$$

Una de estas líneas es la superficie libre, que se determina con la condición de que el volumen de líquido se conserva a menos que se derrame. Las variaciones de presión en la dirección **g** – **a** son mayores que en el caso hidrostático ordinario y vienen dadas por

www.elsolucionario.net

$$\frac{dp}{ds} = \gamma G \quad \text{donde} \quad G = [a_x^2 + (g + a_z)^2]^{1/2} \tag{2.56}$$

Este resultado es independiente de la forma y tamaño del depósito siempre que el fluido ocupe una región simplemente conexa.

EJEMPLO 2.12

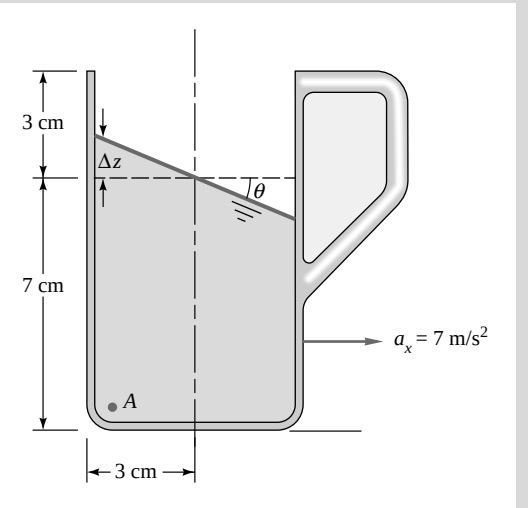
Una cinta transportadora lleva una taza de café sobre una bandeja horizontal mientras se acelera a 7 m/s^2. La taza tiene 10 cm de profundidad y 6 cm de diámetro y el café que contiene llega hasta 3 cm del borde en reposo. (*a*) Suponiendo que el café adquiere una aceleración uniforme, determine si se derramará o no. (*b*) Calcule la presión manométrica en el punto *A* si la densidad del café es de 1010 kg/m^3.

Solución

- *Diagrama del sistema*. La Figura E2.12 muestra la superficie de café inclinada durante la aceleración.
- *Consideraciones*. Aceleración horizontal como sólido rígido, a_x = 7 m/s^2. La taza de café es simétrica.
- *Valores de las propiedades*. La densidad del café es 1010 kg/m^3.
- *Procedimiento* (*a*). Determinamos el ángulo de inclinación conocida la aceleración; hecho esto, calculamos la elevación de la superficie.
- *Resolución*. Usando la Ecuación (2.55), el ángulo de inclinación es

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{a_x}{g} = \text{tg}^{-1} \frac{7{,}0 \text{ m/s}^2}{9{,}81 \text{ m/s}^2} = 35{,}5°$$

www.elsolucionario.net



E2.12

Si la taza es simétrica, la superficie inclinada pasa por el punto medio de la superficie en reposo, según se muestra en la Figura E2.12. De esta forma, la parte trasera de la superficie se elevará una cantidad Oz dada por

$$\Delta z = (3\text{ cm})(\text{tg } 35{,}5°) = 2{,}14\text{ cm} < 3\text{ cm} \qquad \text{por lo que no hay derrame} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

- *Comentario* (*a*). Esta solución desprecia el chapoteo que podría producirse durante el principio de la aceleración si ésta fuera irregular.
- *Procedimiento* (*b*). La presión en *A* se puede calcular a partir de la Ecuación (2.56), empleando la distancia Os perpendicular desde la superficie a *A*. En reposo, $p_A = \rho g h_{\text{reposo}} = (1010\text{ kg/m}^3)(9{,}81\text{ m/s}^2)(0{,}07\text{ m}) = 694\text{ Pa}$. Durante la aceleración,

$$p_A = \rho G Os = \text{™}1010\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\left[\sqrt{(9{,}81)^2 + (7{,}0)^2}\right][(0{,}07 + 0{,}0214)\cos 35{,}5°] \Xi 906\text{ Pa} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

- *Comentario* (*b*). La aceleración ha hecho aumentar la presión en *A* en un 31 por 100. Piense por qué funciona el siguiente procedimiento de cálculo alternativo. Como $a_z = 0$, podemos calcular p_a aplicando la ecuación de la hidrostática a lo largo de la pared izquierda de la Figura E2.12:

$$p_A = \rho g(z_{\text{sup}} - z_A) = (1010\text{ kg/m}^3)(9{,}81\text{ m/s}^2)(0{,}0214 + 0{,}07\text{ m}) = 906\text{ Pa}$$

Rotación como sólido rígido

Un segundo caso especial es la rotación de un fluido alrededor del eje z, sin traslación, como se indica en la Figura 2.22. Suponemos que el recipiente ha estado girando a velocidad angular constante Ω el tiempo suficiente para que el fluido haya alcanzado el régimen de giro como sólido rígido. En ese caso, el fluido sólo estará sometido a la aceleración centrípeta de la Ecuación (2.54). En el sistema de coordenadas de la Figura 2.22 los vectores velocidad angular y posición vienen dados por

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{k}\Omega \qquad r_0 = \mathbf{i}_r r \tag{2.57}$$

La aceleración será, pues,

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_0) = -r\Omega^2 \mathbf{i}_r \tag{2.58}$$

como se indica en la Figura 2.22, y la Ecuación (2.53) queda

www.elsolucionario.net

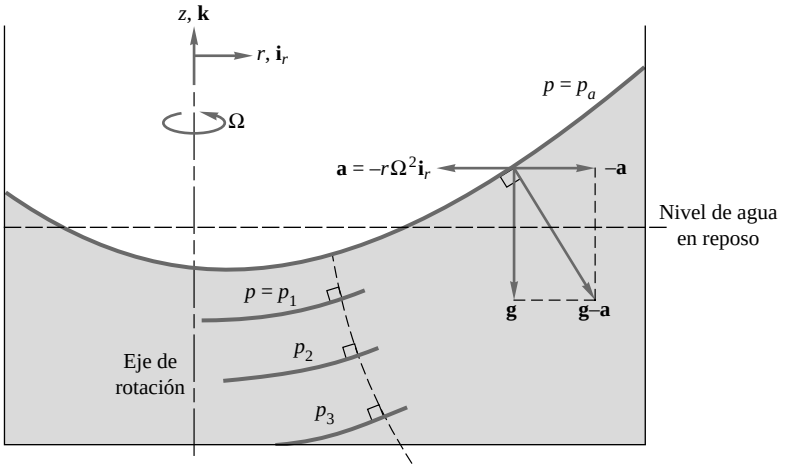


Figura 2.22. Paraboloides de presión constante en un fluido en rotación como sólido rígido. La línea de puntos que indica la dirección de máximo aumento de presión es una exponencial.

$$\nabla p = \mathbf{i}_r \frac{\partial p}{\partial r} = \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) = -\rho(g\mathbf{k} + r\Omega^2 \mathbf{i}_r) \tag{2.59}$$

Igualando componentes se determina el campo de presiones al resolver las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \Omega^2 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{2.60}$$

www.elsolucionario.net

Éste es nuestro primer ejemplo de problema tridimensional descrito por las Ecuaciones (2.14) para el caso de más de una variable independiente. Los segundos miembros de (2.60) son funciones conocidas de r y z. El procedimiento es el siguiente: se integra «parcialmente» la primera ecuación con respecto a r manteniendo z constante. El resultado es

$$p = \tfrac{1}{2}\rho r^2 \Omega^2 + f(z) \tag{2.61}$$

donde la «constante» de integración es realmente una función de z, $f(z)$.[5] Ahora se deriva esta expresión con respecto a z y se compara el resultado con la segunda relación de (2.60):

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 + f'(z) = -\rho g$$

o

$$f(z) = -\rho g z + C \tag{2.62a}$$

donde C es una constante. La Ecuación (2.61) queda ahora

$$p = \text{cte} - \rho g z + \tfrac{1}{2}\rho r^2 \Omega^2 \tag{2.62b}$$

Ésta es la distribución de presiones en el fluido. Para determinar el valor de C es necesario conocer la presión en un punto. Si $p = p_0$ en $(r, z) = (0, 0)$, entonces $C = p_0$. La distribución final buscada es

$$\boxed{p = p_0 - \rho g z + \tfrac{1}{2}\rho r^2 \Omega^2} \tag{2.63}$$

[5] Esto ocurre porque $f(z)$ desaparece cuando derivamos parcialmente respecto a r. Si no comprende esta simplificación, repase sus conocimientos de cálculo.

www.elsolucionario.net

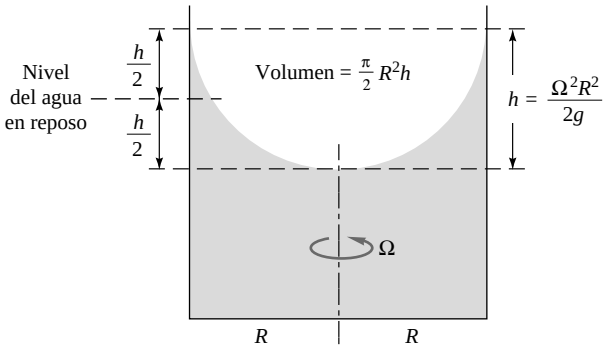


Figura 2.23. Determinación de la posición de la superficie libre en la rotación de un cilindro de fluido alrededor de su eje central.

La distribución de presiones es una función lineal respecto a z y parabólica respecto a r. Si queremos un gráfico de superficies de presión constante, por ejemplo $p = p_1$, la Ecuación (2.63) toma la forma

$$z = \frac{p_0 - p_1}{\rho g} + \frac{r^2\Omega^2}{2g} = a + br^2 \tag{2.64}$$

Estas superficies son paraboloides de revolución, cóncavos hacia arriba y con su punto mínimo en el eje de giro. En la Figura 2.22 se muestran algunos ejemplos.

Como en el ejemplo de la aceleración lineal, la posición de la superficie libre se determina mediante la condición de que el volumen de fluido se conserva. En el caso de un recipiente no circular y con un eje de rotación que no pasa por su centro, como el de la Figura 2.22, los cálculos necesarios son muy laboriosos y la solución de un solo problema puede llevar todo un fin de semana. En cambio, en el caso de un cilindro que gira alrededor de su eje de simetría, como en la Figura 2.23, el cálculo es muy sencillo. Como el volumen de un paraboloide es la mitad del área de la base por la altura, el nivel de reposo está exactamente a mitad de camino entre el máximo y el mínimo de la superficie libre. El mínimo queda a $h/2 = \Omega^2R^2/(4g)$ por debajo de aquél, y los bordes suben la misma cantidad.

EJEMPLO 2.13

La taza de café del Ejemplo 2.12 se quita de la cinta transportadora y se coloca sobre una mesa giratoria, dando vueltas alrededor de su eje el tiempo suficiente para que el fluido gire como un sólido rígido. Calcule (*a*) la velocidad angular a la que el café llega justo al borde de la taza y (*b*) la presión manométrica en el punto *A* en esas condiciones.

Solución

Apartado (*a*)

La taza contiene 7 cm de café. En la Figura 2.23, la distancia de 3 cm hasta el borde de la taza debe ser igual a $h/2$, con lo que

$$\frac{h}{2} = 0{,}03 \text{ m} = \frac{\Omega^2R^2}{4g} = \frac{\Omega^2(0{,}03 \text{ m})^2}{4(9{,}81 \text{ m/s}^2)}$$

Despejando, se obtiene

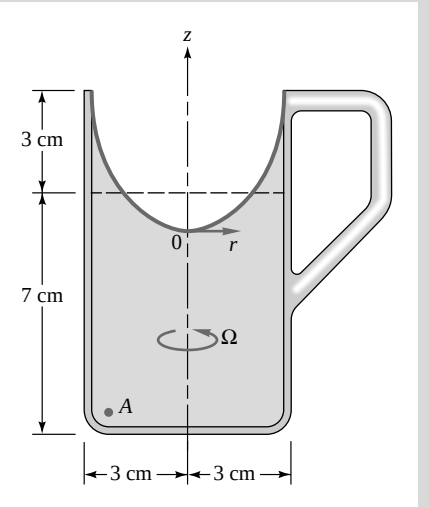
$$\Omega^2 = 1308 \qquad \text{o} \qquad \Omega = 36{,}2 \text{ rad/s} = 345 \text{ rpm} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

www.elsolucionario.net

Apartado (*b*)

Para calcular la presión, es conveniente tomar el origen de coordenadas en el punto mínimo de la superficie libre, según se muestra en la Figura E2.13. En ese punto, la presión manométrica es $p_0 = 0$, y en el punto A, con $(r, z) = (3\text{ cm}, -4\text{ cm})$, la Ecuación (2.63) resulta

$$p_A = 0 - (1010\text{ kg/m}^3)(9{,}81\text{ m/s}^2)(-0{,}04\text{ m}) + \tfrac{1}{2}(1010\text{ kg/m}^3)(0{,}03\text{ m})^2(1308\text{ rad}^2/\text{s}^2)$$
$$= 396\text{ N/m}^2 + 594\text{ N/m}^2 = 990\text{ Pa} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$



E2.13

www.elsolucionario.net

Este valor es aproximadamente un 43 por 100 mayor que el de reposo $p_A = 694$ Pa.

Aquí, como en el caso de la aceleración lineal, se debe resaltar que la distribución de presión dada por la Ecuación (2.63) es válida para *cualquier* fluido en rotación como sólido rígido, sin influir la forma o el tamaño del recipiente, que también puede ser cerrado y estar lleno de líquido. Sólo es necesario que la región fluida sea simplemente conexa en su interior. El siguiente ejemplo ilustrará un caso peculiar en el que una superficie libre imaginaria se extiende fuera del recipiente.

EJEMPLO 2.14

Un tubo en U con un radio de 10 in y que contiene mercurio hasta una altura de 30 in, gira alrededor de su centro a 180 rpm hasta que el fluido alcanza el movimiento como sólido rígido. El diámetro del tubo se considera despreciable. La presión atmosférica es de 2116 lbf/ft^2. Calcule la presión en el punto A en las condiciones anteriores. Véase la Figura E2.14.

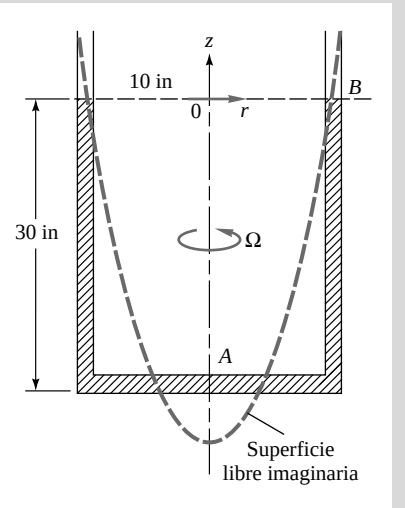
Solución

Pasemos la velocidad angular a radianes por segundo:

$$\text{K} = (180\text{ rpm})\frac{2\Theta\text{rad/rev}}{60\text{ s/min}} = 18{,}85\text{ rad/s}$$

En la Tabla 2.1 tememos que para el mercurio $\rho g = 846$ lbf/ft^3 y, por tanto, $\rho = 846/32{,}2 = 26{,}3$ slugs/ft^3. A esta elevada velocidad de rotación, la superficie libre se inclinará hacia arriba un ángulo muy acusado [alrededor de 84°; compruébese con la Ecuación (2.64)], pero el tubo es tan delgado que la superficie libre permanecerá aproximada-

www.elsolucionario.net



E2.14

mente al mismo nivel de 30 in, punto *B*. Situando a esta altura el origen de coordenadas, es posible calcular la constante *C* de la Ecuación (2.62*b*), con la condición de que $p_B = 2116$ lbf/ft^2 a $(r, z) = (10 \text{ in}, 0)$:

$$p_B = 2116 \text{ lbf/ft}^2 = C - 0 + \tfrac{1}{2}(26{,}3 \text{ slugs/ft}^3)(\tfrac{10}{12} \text{ ft})^2(18{,}85 \text{ rad/s})^2$$

o

$$C = 2116 - 3245 = -1129 \text{ lbf/ft}^2$$

Particularizando la Ecuación (2.63) para $(r, z) = (0, -30 \text{ in})$:

$$p_A = -1129 - (846 \text{ lbf/ft}^3)(-\tfrac{30}{12} \text{ ft}) = -1129 + 2115 = 986 \text{ lbf/ft}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Este valor es inferior a la presión atmosférica, y podemos ver por qué: si seguimos al paraboloide de la superficie libre desde *B*, la línea de trazos corta el tramo horizontal de tubo en U (en los puntos donde $p = p_a$) y cae *por debajo* de *A*. La Figura 2.23 indica que la caída de presión desde *B* es

$$h = \frac{\mathrm{K}^2 R^2}{2g} = \frac{(18{,}85)^2(\frac{10}{12})^2}{2(32{,}2)} = 3{,}85 \text{ ft} = 46 \text{ in}$$

Esto significa que p_A es aproximadamente 16 inHg inferior a la presión atmosférica, es decir, aproximadamente $\frac{16}{12}(846) = 1128$ lbf/ft^2 por debajo de $p_a = 2116$ lbf/ft^2, lo que concuerda con el resultado anterior. Cuando el tubo está en reposo

$$p_A = 2116 - 846(-\tfrac{30}{12}) = 4231 \text{ lbf/ft}^2$$

Así, se observa que la rotación reduce la presión del punto *A* hasta un 77 por 100. Si se gira a mayor velocidad, p_A puede reducirse hasta una presión casi nula y aparecerá cavitación.

Un interesante subproducto de este análisis de rotación como sólido rígido es que las líneas paralelas al gradiente de presión en todos los puntos forman una familia de superficies curvas, como se muestra en la Figura 2.22. Estas superficies son ortogonales en todo punto a las superficies de presión constante y, por tanto, su pendiente es inversa y con signo opuesto a la calculada con la Ecuación (2.64):

$$\left.\frac{dz}{dr}\right|_{\text{LG}} = \Phi\frac{1}{(dz/dr)_{p=\text{cte}}} = \Phi\frac{1}{r\mathrm{K}^2/g}$$

www.elsolucionario.net

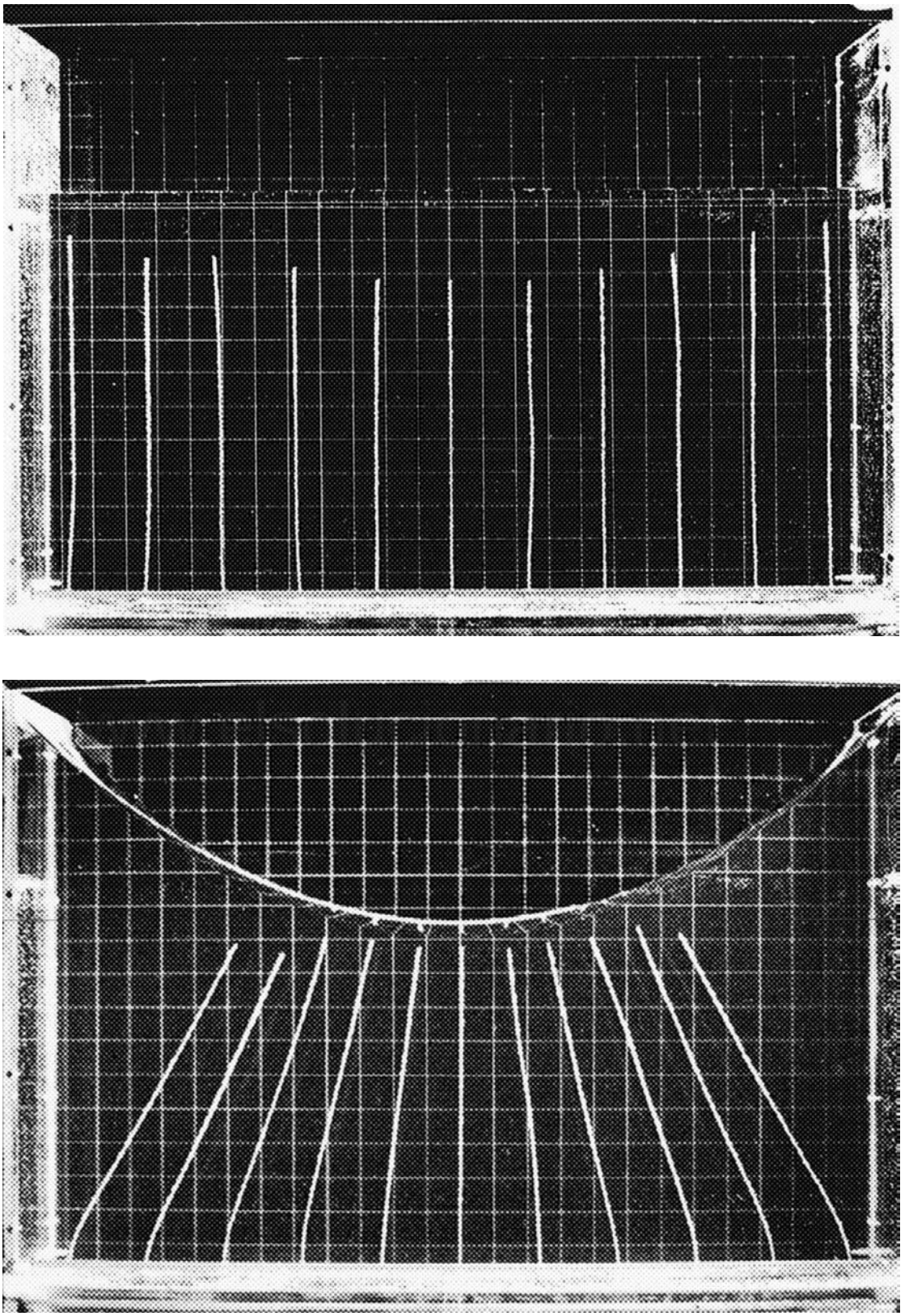


Figura 2.24. Demostración experimental del campo de fuerzas en rotación como sólido rígido con hilos flotadores: (arriba) fluido en reposo (los hilos están verticales); (abajo) rotación como sólido rígido (los hilos están alineados con la dirección del máximo gradiente de presión). (*© The American Association of Physics Teachers. Tomado de 'The Apparent Field of Gravity in a Rotating Fluid System'* por *R. Ian Fletcher. American Journal of Physics vol. 40, págs. 959-965, julio 1972.*)

www.elsolucionario.net

donde el subíndice LG significa línea del gradiente

o
$$\frac{dz}{dr} = \Phi\frac{g}{r\mathrm{K}^2} \tag{2.65}$$

Separando variables e integrando, obtenemos la ecuación de la superficie del gradiente de presiones:

$$r = C_1 \exp\left[\frac{\mathrm{K}^2 z}{g}\right] \tag{2.66}$$

Hay que destacar que tanto este resultado como la Ecuación (2.64) son independientes de la densidad del fluido. En ausencia de fricción y de efectos de Coriolis, la Ecuación (2.66) define las líneas a lo largo de las cuales actuaría el campo gravitatorio equivalente. Dependiendo de su densidad, una partícula pequeña o una burbuja tenderán a subir o a caer en el fluido a lo largo de estas líneas exponenciales, como se demuestra experimentalmente en la Referencia 5. De igual forma, los flotadores lineales también se alinearán con estas exponenciales, impidiendo otro efecto distinto a la tensión pura. La Figura (2.24) muestra la configuración de dichos flotadores antes y durante la rotación.

2.10. MEDIDA DE LA PRESIÓN

La presión es una propiedad derivada. La presión es la fuerza por unidad de área producida por el impacto de las moléculas del fluido sobre la superficie. Así, para medir la presión, la mayor parte de los instrumentos sólo pueden *inferir* su valor si son calibrados previamente con un dispositivo primario, como una balanza. Hay muchos tipos de instrumentos para medir presión, tanto en fluidos en reposo como en movimiento. Los libros de instrumentación, Referencias 7 a 10, 12 y 13, enumeran unos veinte dispositivos distintos. Todos ellos se pueden agrupar en cinco categorías según la magnitud física en la que se basen:

1. *Basados en la gravedad*: barómetro, manómetro y balanzas.
2. *Basados en la deformación elástica*: tubo bourdon (metal y cuarzo), diafragma, cápsulas, extensímetros, desplazamiento de haces ópticos.
3. *Basados en las propiedades de los gases*: compresión de gases (transductor de McLeod), conductancia térmica (transductor de Pirani), impacto molecular (transductor de Knudsen), ionización, conductividad térmica, pistón de aire.
4. *Con salida eléctrica*: resistivos (transductor de Bridgman), extensímetros integrados, capacitivos, piezoeléctricos, potenciométricos, inductivos, de reluctancia magnética, transformadores diferenciales lineales variables (LVDT, *Linear Variable Differential Transformer*), de frecuencia de resonancia.
5. *Pinturas luminiscentes* para distribución de presiones sobre superficies [15].

Los transductores basados en las propiedades de los gases son instrumentos especiales empleados en ciertos experimentos científicos concretos. La balanza es el instrumento que generalmente se emplea para las calibraciones, como el usado, por ejemplo, en el Instituto americano para la estandarización y la tecnología (NIST, *U.S. National Institute for Standards and Technology*). El barómetro se describe en la Figura 2.6.

El manómetro, analizado en la Sección 2.4, es un transductor simple y barato, está basado en principios puramente hidrostáticos y no tiene partes móviles, con excepción de la propia columna líquida. Al medir la presión en un fluido en movimiento (la denominada presión estática), se debe tomar la precaución de no perturbar el flujo. La mejor forma de hacerlo es medir en una *toma estática* en la pared del flujo, como se muestra en la Figura 2.25. El orificio de la toma debe ser perpendicular a la pared y se deben limpiar bien las rebabas. Si la toma es lo suficientemente pequeña (1 mm de diámetro es un valor muy común), no habrá flujo hacia el tubo de medida una vez que la presión se haya ajustado a su valor estacionario. De este modo se minimizan las perturbaciones del flujo principal. Sin embargo, cuando la presión en el flujo es variable, se puede cometer un gran error en la medida debido a la respuesta dinámica del tubo. Para medir presiones variables se emplean otros instrumentos de dimensiones menores. Nótese que los manómetros de

www.elsolucionario.net

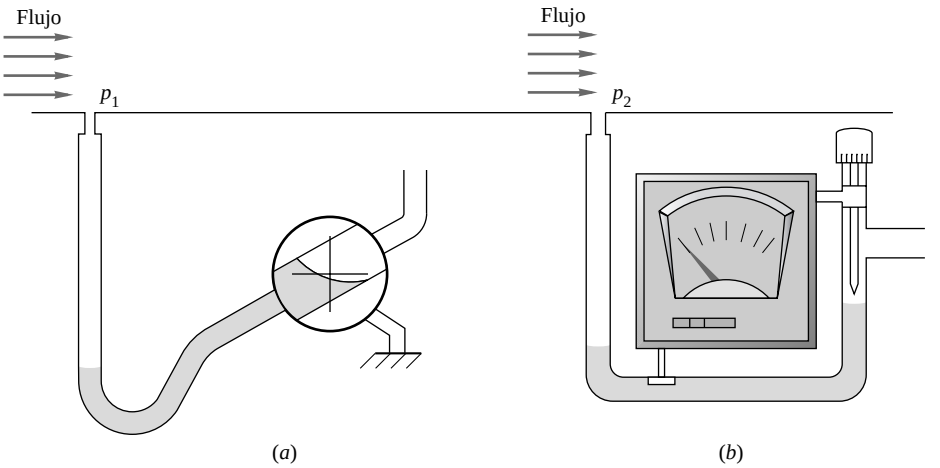


Figura 2.25. Dos tipos de manómetros de precisión: (*a*) tubo inclinado con lupa; (*b*) micromanómetro con amperímetro.

la Figura 2.25 están dispuestos de forma que midan presiones absolutas p_1 y p_2. Si se desea conocer la diferencia $p_1 - p_2$ se puede incurrir en un gran error si se restan dos medidas independientes, siendo preferible conectar ambas tomas a los extremos de un instrumento único de forma que se mida directamente la diferencia.

Entre los instrumentos de la categoría 2, basados en la deformación elástica, un instrumento popular, fiable y barato es el *tubo bourdon*, esquematizado en la Figura 2.26. Un tubo curvado de sección transversal plana se deflectará hacia afuera cuando se le presuriza internamente. La deflexión se puede medir utilizando una aguja indicadora calibrada conectada al tubo por una ligadura, como se muestra en la figura. Otra forma de medir es conectar el tubo bourdon a un dispositivo eléctrico de medida, como un transformador variable. Del mismo modo, también se puede emplear la deformación que la presión produce sobre una membrana o *diafragma* y medir la presión bien directamente o a través de un dispositivo conectado.

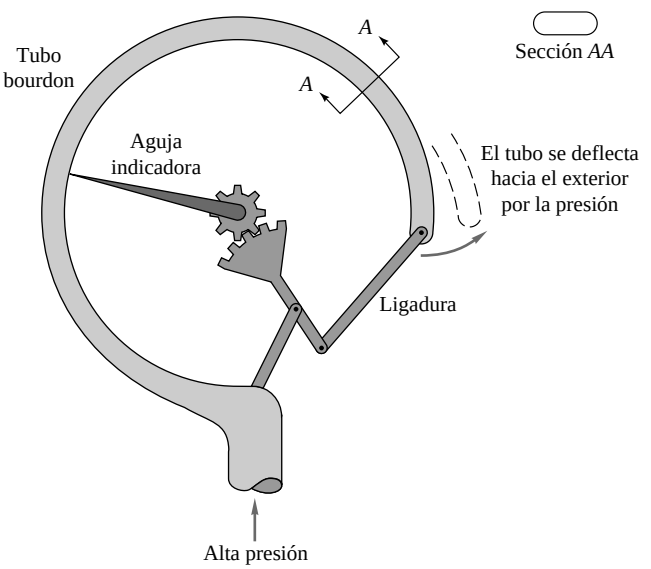


Figura 2.26. Esquema de tubo bourdon para la medida mecánica de altas presiones.

www.elsolucionario.net

Una interesante variación de la Figura 2.26 es el *tubo bourdon de cuarzo y fuerza equilibrada* que se muestra en la Figura 2.27. En él, la deflexión del tubo en espiral es detectada por un sensor óptico y reequilibrada al estado de referencia por un dispositivo magnético, cuya salida es proporcional a la presión que se quiere medir. El tubo bourdon de cuarzo y fuerza equilibrada es uno de los sensores de presión más precisos que existen y tiene una incertidumbre del orden del ±0,003 por 100.

Los transductores de cuarzo, ya sean de tipo bourdon o resonantes, son caros pero extremadamente precisos, estables y fiables [14]. A menudo se emplean para medir presiones en las profundidades del océano detectando tsunamis y grandes olas durante largos periodos de tiempo.

Los sensores de la cuarta categoría, los de *salida eléctrica*, tienen una gran importancia en ingeniería, ya que su salida puede ser directamente almacenada en ordenadores, manipulada, analizada y representada. En la Figura 2.28 se presentan tres ejemplos. En la Figura 2.28*a* se presenta un sensor *capacitivo* en el que la presión diferencial deflecta el diafragma de silicio y cambia la capacitancia del líquido que hay en la cavidad. En la Figura 2.28*b* se presenta un extensímetro integrado en un chip que se deforma como consecuencia de la presión aplicada. Finalmente, en la Figura 2.28*c* se muestra un sensor de silicio micromecanizado en el que se modifica la frecuencia de resonancia de forma proporcional a la presión que lo deforma. Un oscilador excita la frecuencia de resonancia del elemento y la convierte en la medida de presión correspondiente.

Otro transductor con salida eléctrica es el *piezoeléctrico*, que se muestra en la Figura 2.29. Los elementos sensibles son delgadas capas de cuarzo que producen carga eléctrica cuando están sometidas a esfuerzos. El diseño de la Figura 2.29 está embutido en una superficie sólida y puede detectar rápidamente las variaciones de presión, como las ondas de presión. Otros diseños posibles son los de tipo cavidad. Este tipo de dispositivos se emplean principalmente para detectar variaciones de presión pero no presiones estacionarias, aunque si están convenientemente aislados pueden ser también empleados para medidas estáticas durante tiempos limitados. Hay que destacar que, en cualquier caso, sólo son capaces de medir presiones *manométricas*, es decir, cambios con respecto a la presión ambiente.

www.elsolucionario.net

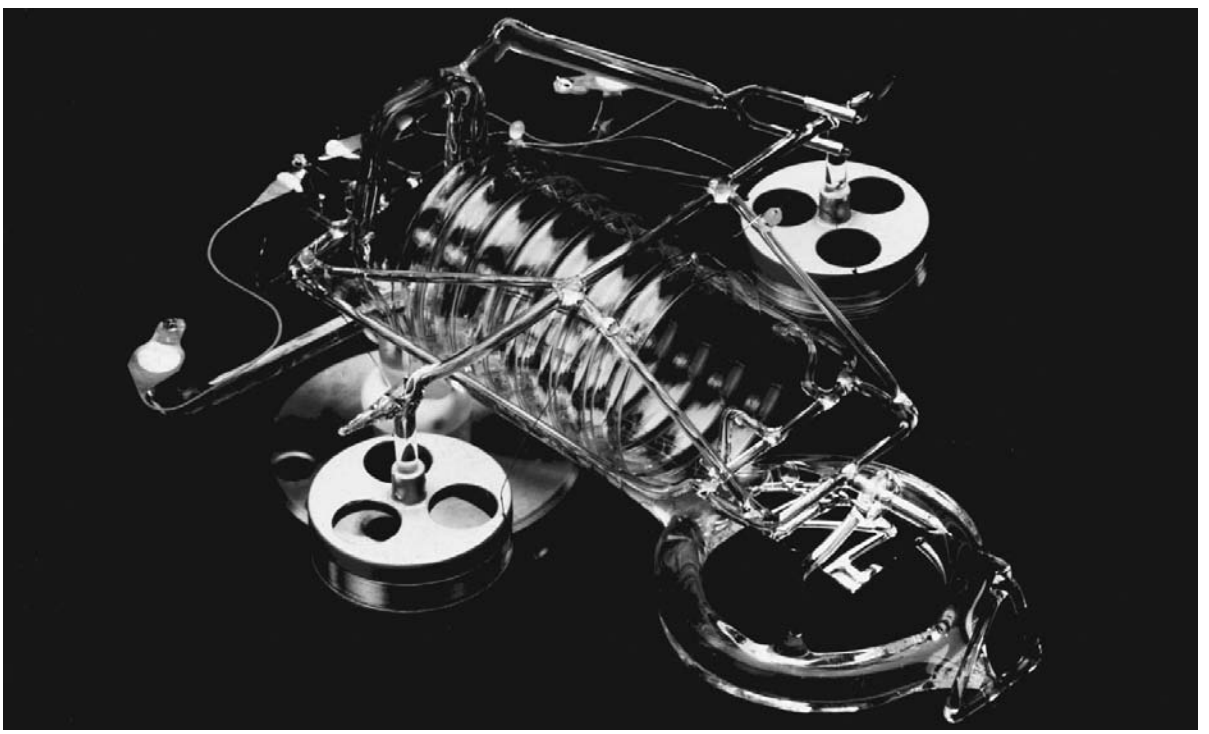
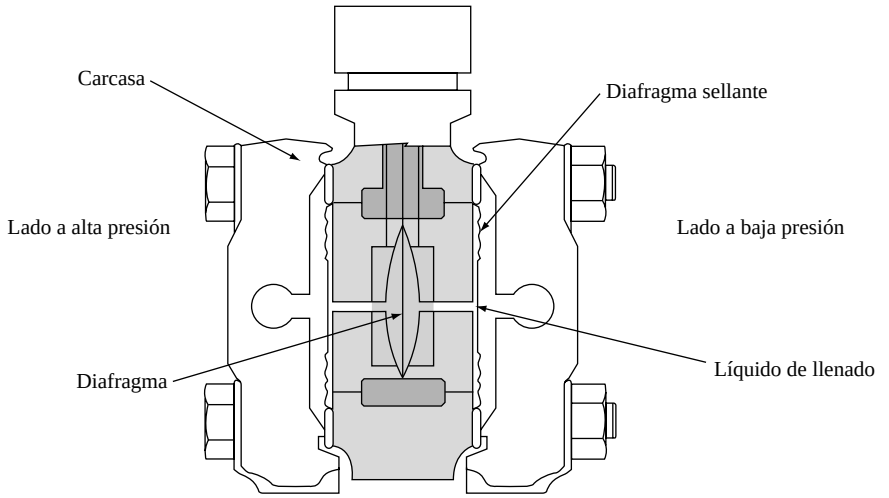
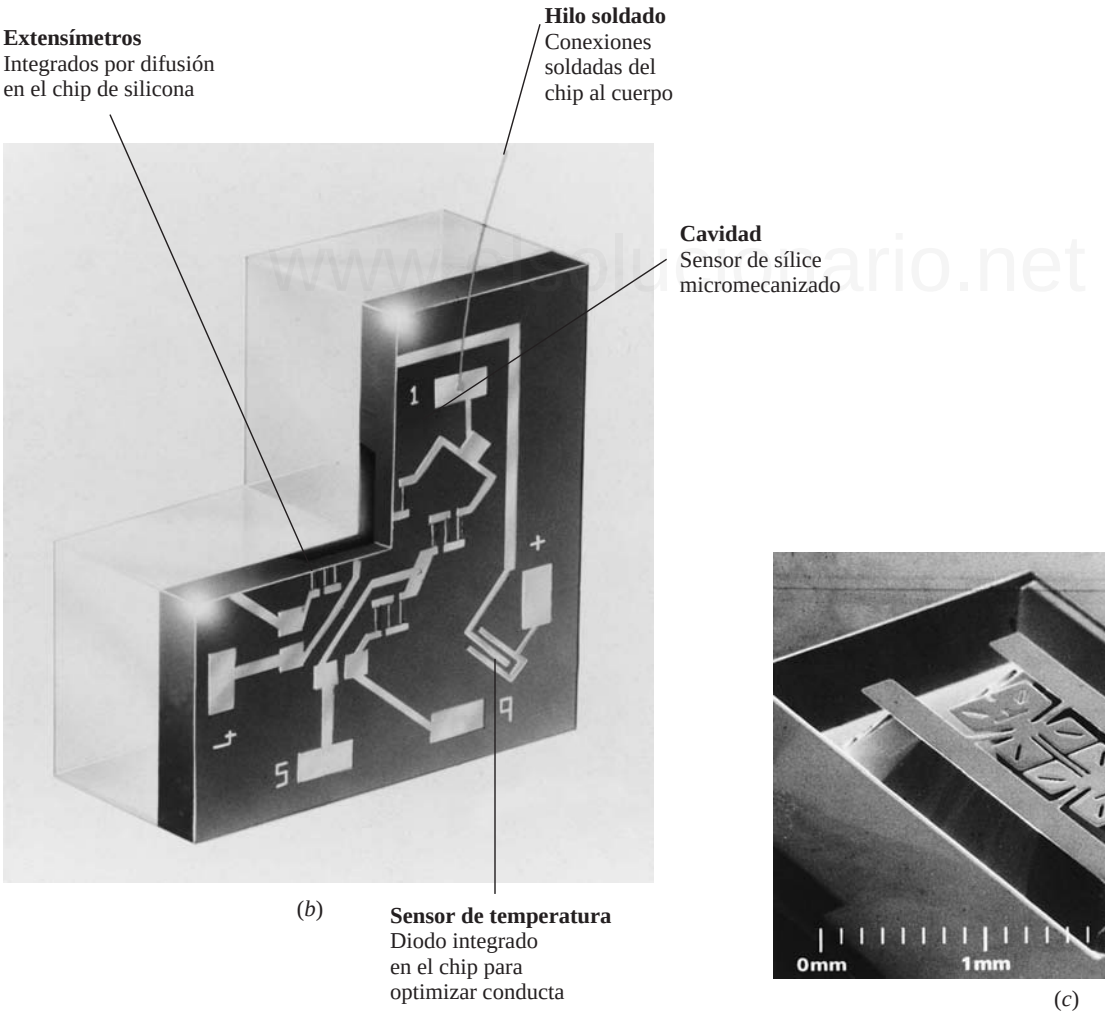


Figura 2.27. El tubo de bourdon de cuarzo y fuerza equilibrada es el sensor de presión más preciso entre los empleados actualmente en aplicaciones comerciales. (*Cortesía de Ruska Instrument Corporation, Houston, TX*).

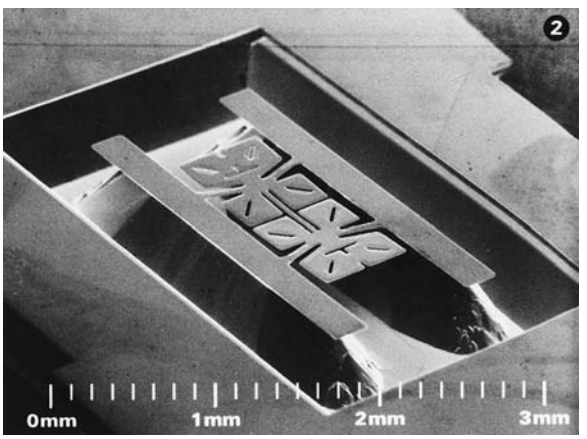
www.elsolucionario.net



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 2.28. Transductores de presión con salida eléctrica: (*a*) diafragma de silicio cuya deflexión cambia la capacitancia de la cavidad (*cortesía de Johnson-Yokogawa Inc*); (*b*) un extensímetro de silicio que se deforma por la presión aplicada; (*c*) un elemento de silicio micromecanizado que resuena a una frecuencia proporcional a la presión aplicada. [(*b*) *y* (*c*) *son cortesía de Druck, Inc., Fairfield, CT.*]

www.elsolucionario.net

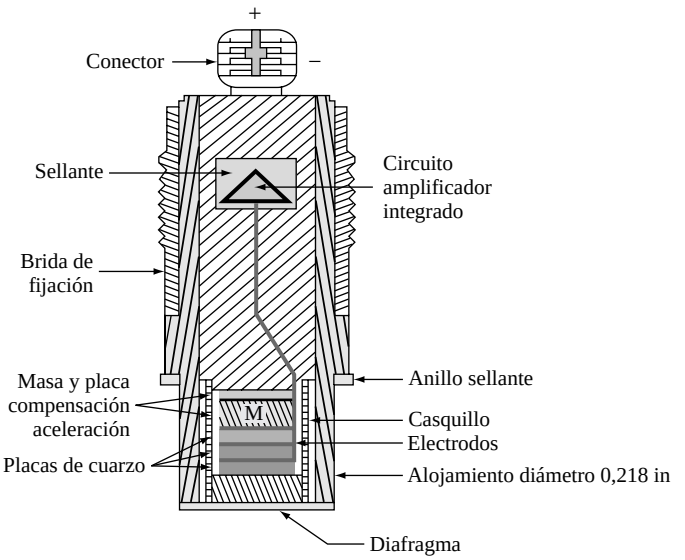


Figura 2.29. Un transductor piezoeléctrico mide rápidamente los cambios de presión. (*Cortesía de PCB Piezotronics, Inc. Depew, Nueva York.*)

Resumen

Este capítulo se ha dedicado por completo al cálculo de la distribución de presiones y los momentos y fuerzas resultantes en fluidos en reposo o cuando el campo de velocidades es conocido. Todos los problemas de hidrostática (Secciones 2.3 a 2.8) y de movimiento como sólido rígido (Sección 2.9) se resuelven de esta manera y son casos clásicos que todo estudiante debería comprender. Sin embargo, en los flujos arbitrarios viscosos, tanto la velocidad como la presión son incógnitas y deben obtenerse simultáneamente resolviendo un sistema de ecuaciones tal y como se muestra en los siguientes capítulos.

Problemas

La mayoría de los problemas propuestos aquí son bastante sencillos. Los más difíciles, o de final abierto, se indican con un asterisco, como el Problema 2.9. Para resolver los problemas señalados con un icono EES (por ejemplo, el Problema 2.62) se recomienda el uso del Resolvedor de Ecuaciones de Ingeniería (EES, *Engineering Equation Solver*), mientras que los problemas señalados con un disco pueden requerir el uso de un ordenador. Los problemas estándar van del P2.1 al P2.159 (ordenados por temas en la lista de de la izquierda), están seguidos de los problemas conceptuales C2.1 a C2.8, los problemas del examen de fundamentos de ingeniería (FE, *Fundamentals of Engineering*) FE2.1 a FE2.10, los problemas extensos PE2.1 a PE2.6 y los proyectos de diseño D2.1 a D2.3.

Distribución de los problemas

Sección	Tema	Problemas
2.1, 2.2	Esfuerzos; gradiente de presiones; presión manométrica	2.1-2.6
2.3	Presión hidrostática; barómetros	2.7-2.23
2.3	La atmósfera	2.24-2.29
2.4	Manómetros; fluidos múltiples	2.30-2.47
2.5	Fuerzas sobre superficies planas	2.48-2.81
2.6	Fuerzas sobre superficies curvas	2.82-2.100
2.7	Fuerzas sobre fluidos estratificados	2.101-2.102
2.8	Flotación; principios de Arquímedes	2.103-2.126
2.8	Estabilidad y cuerpos flotantes	2.127-2.136
2.9	Aceleración uniforme	2.137-2.151
2.9	Rotación como sólido rígido	2.152-2.159
2.10	Medida de la presión	Ninguno

P2.1 En el campo bidimensional de esfuerzos de la Figura P2.1 se tiene que

$$\sigma_{xx} = 3000 \text{ lbf/ft}^2 \quad \sigma_{yy} = 2000 \text{ lbf/ft}^2 \quad \sigma_{zz} = 500 \text{ lbf/ft}^2$$

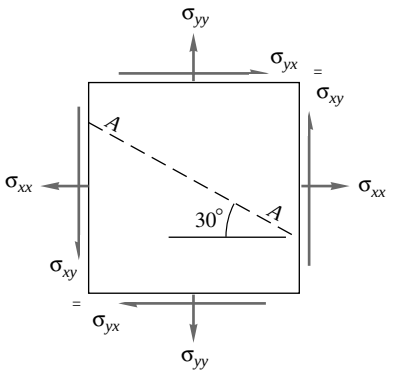
Calcule los esfuerzos normal y tangencial (en lbf/ft^2) que actúan sobre el plano *AA* que corta al elemento con un ángulo de 30° según se muestra en la figura.

P2.2 En el campo bidimensional de esfuerzos de la Figura P2.1 se tiene que

$$\sigma_{xx} = 2000 \text{ lbf/ft}^2 \quad \sigma_{yy} = 3000 \text{ lbf/ft}^2 \quad \sigma_{zz} = 2500 \text{ lbf/ft}^2$$

Calcule (*a*) el esfuerzo cortante σ_{xy} y (*b*) el esfuerzo cortante en el plano *AA*.

www.elsolucionario.net



P2.1

P2.3 Un tubo vertical de cristal tiene un diámetro interior de 1 mm. Cuando se le aplica presión, una columna de agua a 20 °C sube por el mismo hasta una altura de 25 cm. Estime la presión aplicada en pascales, una vez corregido el efecto de la tensión superficial.

P2.4 En cierto flujo bidimensional las líneas de presión constante, o *isobaras*, se pueden definir por la expresión $P_0 - Bz + Cx^2$ = constante, donde B y C son constantes y p_0 es la presión en el origen (constante), $(x, z) = (0, 0)$. Obtenga una expresión $x = f(z)$ para la familia de líneas que en cada punto son paralelas al gradiente de presiones Δp.

P2.5 Atlanta, en Georgia (EE.UU.), está a una altura media de 1100 ft. En un día estándar (véase Tabla A.6) la presión manométrica medida en el manómetro *A* de un laboratorio es de 93 kPa y la medida en un manómetro *B*, del mismo laboratorio, es 105 kPa. Exprese estas lecturas en presiones manométricas o de vacío (Pa), según corresponda.

P2.6 Cualquier medida de presión puede ser expresada como una altura o *carga* $h = p/\rho g$. ¿Cuál es la presión estándar a nivel del mar expresada en (*a*) pies de etilenglicol, (*b*) pulgadas de mercurio, (*c*) metros de agua y (*d*) milímetros de metanol? Considere que todos los fluidos se encuentran a 20 °C.

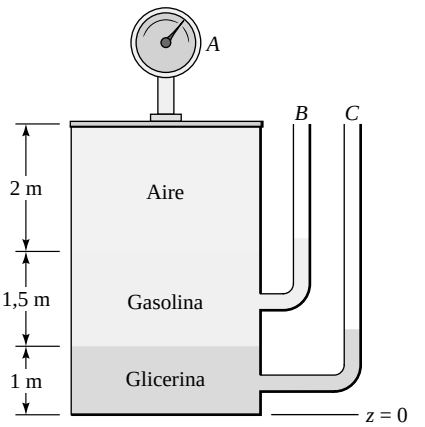
P2.7 La mayor profundidad oceánica conocida es la Fosa de las Marianas, en el Océano Pacífico, que se encuentra a 11.034 m. A esta profundidad el peso específico del agua del mar es aproximadamente 10.520 N/m^3. En la superficie, $\rho g \Xi$ 10.050 N/m^3. Estime en atmósferas la presión a esta profundidad.

P2.8 Una mina de diamantes se encuentra a dos millas de profundidad bajo el nivel del mar. (*a*) Estime la presión del aire a esta profundidad. (*b*) Si se introduce en la mina un barómetro, con una precisión de 1 mm de mercurio, ¿con cuánta precisión se puede estimar la profundidad de la mina? Relacione sus consideraciones al resolver el problema.

***P2.9** Integre la relación hidrostática de la Ecuación (2.18) particularizándola para un líquido. Suponga que el *módulo de compresibilidad*, $B = \rho(\Delta p/\Delta\rho)_s$, es constante, véase la Ecuación (9.18). Obtenga una expresión para $p(z)$ y aplíquela a los datos obtenidos en el Problema 2.7 para la Fosa de las Marianas, empleando B_{agua} de la Tabla A.3.

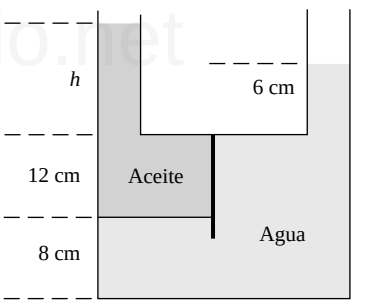
P2.10 Un depósito cerrado contiene 1,5 m de aceite SAE 30, 1 m de agua, 20 cm de mercurio, y una bolsa de aire en su parte superior, todos ellos a 20 °C. La presión absoluta en la base del depósito es de 60 kPa. ¿Cuál es la presión en la bolsa de aire?

P2.11 En la Figura P2.11 el manómetro *A* marca 1,5 kPa (manométrica). Los fluidos se encuentran a 20 °C. Determine la elevación *z* en metros del nivel al que se encuentran los líquidos en los tubos *B* y *C*.



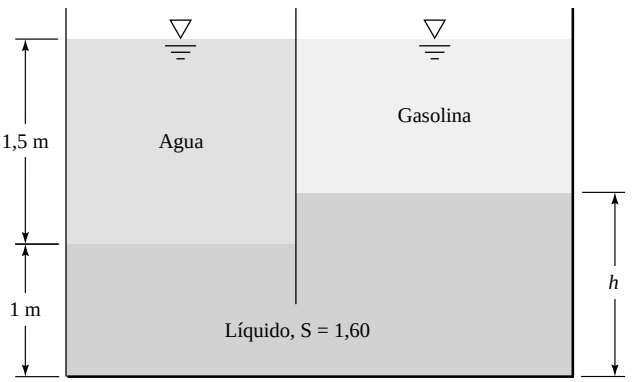
P2.11

P2.12 El depósito de la Figura P2.12 contiene agua y aceite inmiscible a una temperatura de 20 °C. ¿Cuál es la altura *h* en centímetros si la densidad del aceite es 898 kg/m^3?



P2.12

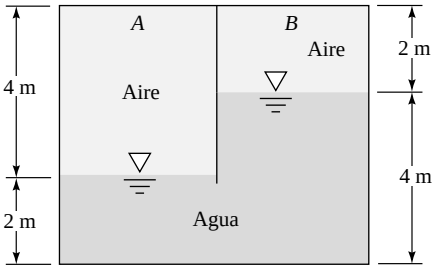
P2.13 Las superficies de agua y gasolina de la Figura P2.13 están abiertas a la atmósfera y a la misma altura. Si los dos fluidos se encuentran a 20 °C, ¿cuál es la altura *h* del tercer líquido del lado derecho?



P2.13

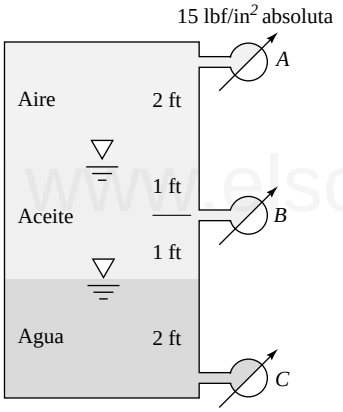
www.elsolucionario.net

P2.14 El depósito cerrado de la Figura P2.14 se encuentra a 20 °C. Si la presión absoluta en el punto *A* es de 95 kPa, ¿cuál es la presión absoluta en el punto *B*, medida en kilopascales? ¿Qué error porcentual se comete si se desprecia el peso específico del aire?



P2.14

P2.15 El sistema de aire, aceite y agua de la Figura P2.15 se encuentra a 20 °C. Sabiendo que el manómetro *A* indica una presión absoluta de 15 lbf/in^2 y que el manómetro *B* indica 1,25 lbf/in^2 menos que el manómetro *C*, calcule (*a*) el peso específico del aceite en lbf/ft^3 y (*b*) la presión absoluta que marca el manómetro *C* en lbf/in^2.



P2.15

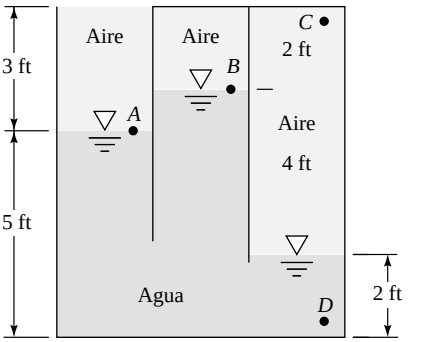
P2.16 Se desea construir un barómetro empleando etanol a 20 °C como fluido de trabajo (Tabla A.3). Determine la longitud máxima del barómetro, teniendo en cuenta la presión de vapor de equilibrio. Compare este resultado con el tradicional barómetro de mercurio.

P2.17 El sistema de la Figura P2.17 está a 20 °C. Si la presión del punto *A* es de 1900 lbf/ft^2, determine las presiones en los puntos *B*, *C* y *D* en lbf/ft^2.

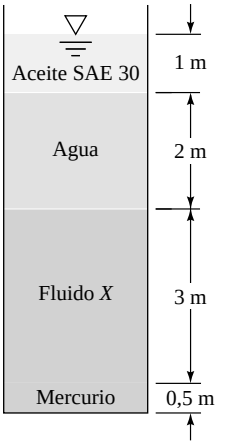
P2.18 El sistema de la Figura P2.18 está a 20 °C. Sabiendo que la presión atmosférica es de 101,33 kPa y que la presión en la parte superior del depósito es de 242 kPa, ¿cuál es la densidad relativa del fluido *X*?

P2.19 El tubo en U de la Figura P2.19 tiene un diámetro interior de 1 cm y está lleno con mercurio. Si se vierten 20 cm^3 de agua en la rama derecha, ¿cuál será la altura de cada rama una vez se estabilicen los fluidos?

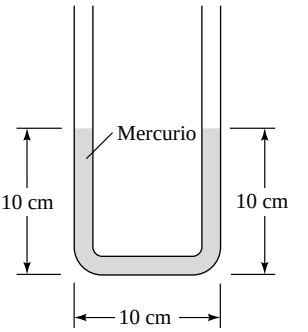
P2.20 El gato hidráulico de la Figura P2.20 está lleno de aceite con 56 lbf/ft^3. Si se desprecia el peso de ambos pistones, ¿qué fuerza hay que ejercer sobre la palanca si se quieren soportar 2000 lbf de peso?



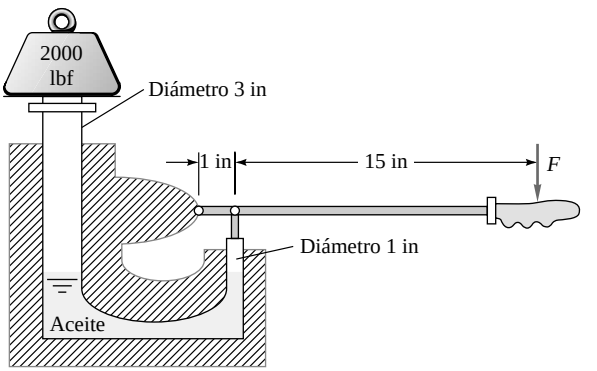
P2.17



P2.18



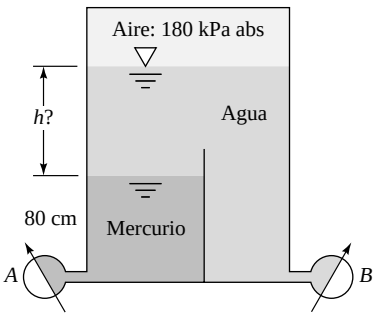
P2.19



P2.20

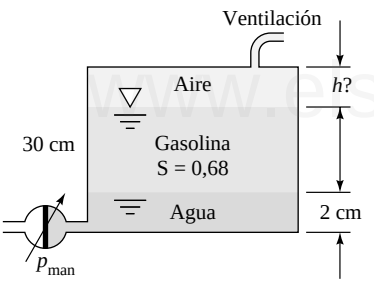
www.elsolucionario.net

P2.21 A una temperatura de 20 °C el manómetro *A* marca 350 kPa de presión absoluta. ¿Cuál es la altura *h* de agua en centímetros? ¿Qué presión absoluta en kilopascales marcará el manómetro *B*? Véase la Figura P2.21.



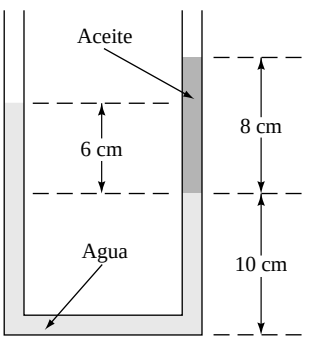
P2.21

P2.22 El indicador del depósito de gasolina de un coche marca proporcionalmente a la presión manométrica del fondo del depósito, como muestra la Figura P2.22. Si el depósito tiene 30 cm de alto y contiene accidentalmente 2 cm de agua además de la gasolina, ¿cuántos centímetros de aire habrá en la parte superior del depósito cuando el indicador señale erróneamente «lleno»?



P2.22

P2.23 Los dos fluidos de la Figura P2.23 están a 20 °C. Despreciando el efecto de la tensión superficial, ¿cuál es la densidad del aceite en kg/m^3?



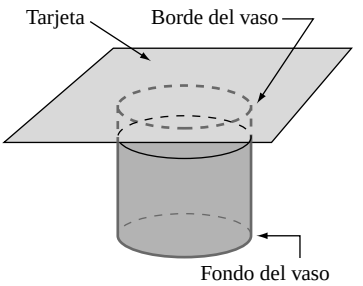
P2.23

P2.24 En el Problema 1.2 realizamos una integración aproximada de la distribución de densidad $\rho(z)$ de la Tabla A.6 y estimamos que la masa de la atmósfera terrestre debía ser $m \Xi 6 \times 10^{18}$ kg. ¿Puede usarse este resultado para estimar la presión a nivel del mar? ¿Se puede emplear que la presión a nivel del mar es de 101,35 kPa para estimar la masa de la atmósfera?

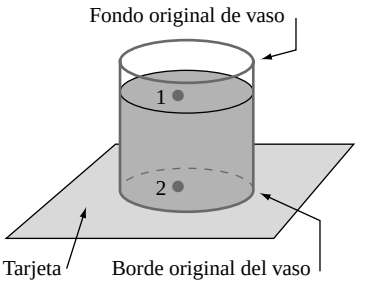
P2.25 Venus tiene una masa de $4{,}90 \times 10^{24}$ kg y un radio de 6050 km. Su atmósfera está compuesta en un 96 por 100 por CO_2, pero supongamos que se trata del 100 por 100. La temperatura media de su superficie es de 730 K, y decrece a 250 K a una altura de 70 km. La presión media de la superficie es de 9,1 MPa. Estime la presión atmosférica de Venus a una altura de 5 km.

***P2.26** Una *atmósfera politrópica* se define mediante la ley potencial $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^m$, donde m es un exponente próximo a 1,3 y p_0 y ρ_0 son los valores de la presión y la densidad a nivel del mar. (*a*) Integre esta expresión en una atmósfera estacionaria y obtenga la distribución $p(z)$. (*b*) Suponiendo gas ideal, $p = \rho RT$, demuestre que los resultados obtenidos en (*a*) implican una distribución lineal de temperatura como en la Ecuación (2.25). (*c*) Demuestre que el valor estándar $B = 0{,}0065$ K/m es equivalente a $m = 1{,}235$.

P2.27 Realicemos un experimento para ilustrar la presión atmosférica. *Nota*: realícelo sobre un fregadero o un lavabo para no mojarse. Coja un vaso de agua cuyo borde sea liso y uniforme y llénelo completamente con agua. Sitúe una placa plana, lisa y ligera sobre el borde del vaso, cubriéndolo completamente. Lo mejor sería utilizar una tarjeta postal, aunque cualquier otra cartulina también podría servir. Véase la Figura P2.27*a*.
(*a*) Mientras mantiene la tarjeta pegada contra el borde, gire el vaso boca abajo. Lentamente retire la presión sobre la tarjeta. ¿Se vierte el agua? Escriba sus impresiones sobre el experimento. (*b*) Encuentre una expresión para la presión en los puntos 1 y 2 de la Figura P2.27*b*. Observe que el vaso está ahora invertido, lo que implica que el borde del vaso se encuentra abajo. Desprecie el peso de la tarjeta. (*c*) Determine teórica-



P2.27a



P2.27b

www.elsolucionario.net

mente la máxima altura del vaso para la cual el agua no se derramará.

P2.28 ¿Cuál es la incertidumbre al usar la medida de la presión como un altímetro? El manómetro de un avión indica una presión local de 54 kPa con una incertidumbre de 3 kPa. La variación de temperatura es de 0,006 K/m con una incertidumbre de 0,001 K/m. La temperatura efectiva a nivel del mar es de 10 °C con una incertidumbre de 5 °C. La presión efectiva a nivel del mar es de 100 kPa con una incertidumbre de 2 kPa. Estime la altura del avión y su incertidumbre.

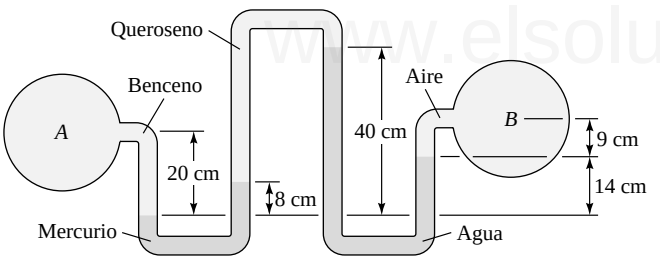
***P2.29** En determinadas condiciones la atmósfera es *adiabática*, $p \propto (\text{cte})(\rho^{\gamma})$, donde γ es la relación de calores específicos. Demuestre que, en una atmósfera adiabática, la variación de presiones está dada por

$$p = p_0 \left[1 - \frac{(\gamma - 1)gz}{RT_0}\right]^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Compare esta fórmula para el aire a $z = 5000$ m con la atmósfera estándar de la Tabla A.6.

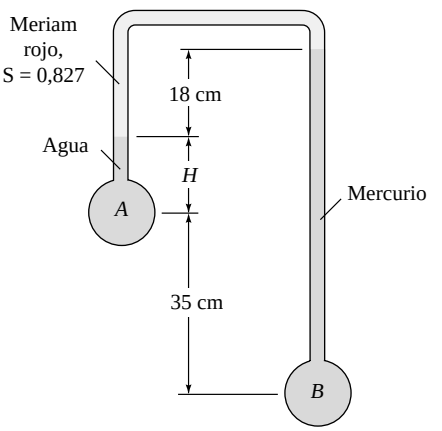
P2.30 Un manómetro de mercurio está conectado por dos puntos a un conducto de agua horizontal a 20 °C. Si el manómetro marca $h = 35$ cm, ¿cuál es la caída de presiones entre los dos puntos?

P2.31 Los fluidos de la Figura P2.31 se encuentran a 20 °C. Determine la diferencia de presiones (Pa) entre los puntos *A* y *B*.



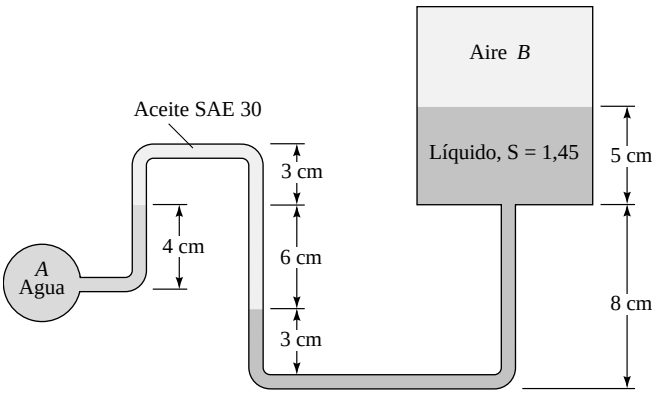
P2.31

P2.32 Los fluidos del manómetro invertido de la Figura P2.32 se encuentran a 20 °C. Si $p_B - p_A = 97$ kPa, ¿cuál es la altura *H* en centímetros?



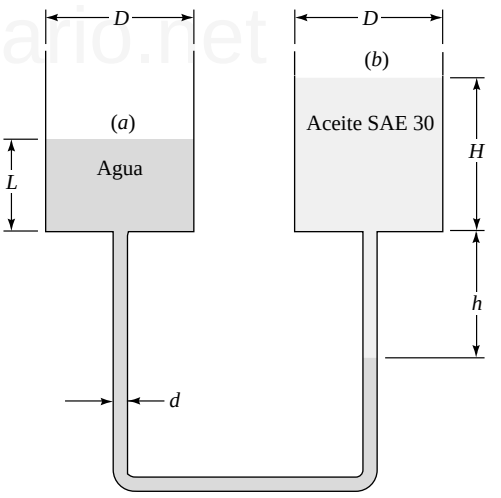
P2.32

P2.33 La presión del punto *A* de la Figura P2.33 es de 25 lbf/in^2. Todos los fluidos se encuentran a 20 °C. ¿Cuál es la presión del aire en pascales a la que se encuentra la cámara cerrada *B*?



P2.33

***P2.34** Las dimensiones de los manómetros pueden tener efectos significativos. Los contenedores de la Figura P2.34 (*a*) y (*b*) son cilíndricos y están en unas condiciones tales que $p_a = p_b$. Obtenga una fórmula para la diferencia de presiones $p_a - p_b$ cuando la entrefase aceite-agua del lado derecho sube una distancia $\Delta h < h$, para (*a*) $d \ll D$ y (*b*) $d = 0{,}15D$. ¿Cuál es el cambio porcentual en el valor de Δp?



P2.34

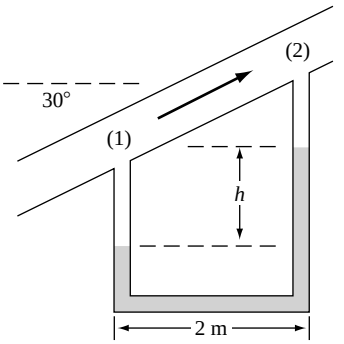
P2.35 En la Figura P2.35 el agua fluye hacia arriba en un tubo inclinado 30° con respecto a la horizontal. El manómetro de mercurio indica $h = 12$ cm. Ambos fluidos se encuentran a 20 °C. ¿Cuál es la diferencia de presiones $p_1 - p_2$ en el tubo?

P2.36 El depósito y el tubo de Figura P2.36 se encuentran abiertos a la atmósfera. Si $L = 2{,}13$ m, ¿cuál es el ángulo de inclinación θ del tubo?

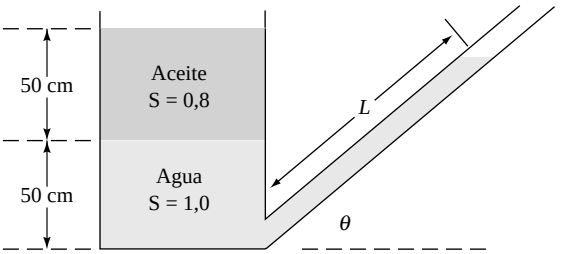
P2.37 El manómetro inclinado de la Figura P2.37 contiene aceite Meriam rojo de densidad relativa S = 0,827. Se supone que el depósito es muy grande. Si el tubo inclinado tiene marcas de pulgada en pulgada, ¿cuál

www.elsolucionario.net

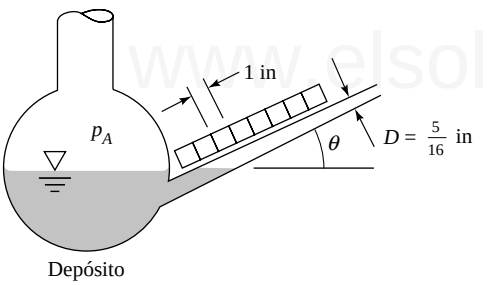
debe ser el ángulo θ para que cada división corresponda a una presión manométrica de 1 lbf/ft^2 para p_A?



P2.35

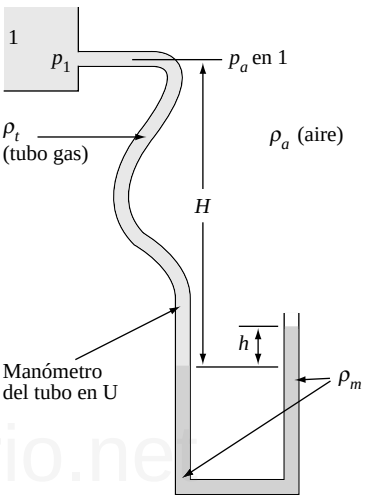


P2.36



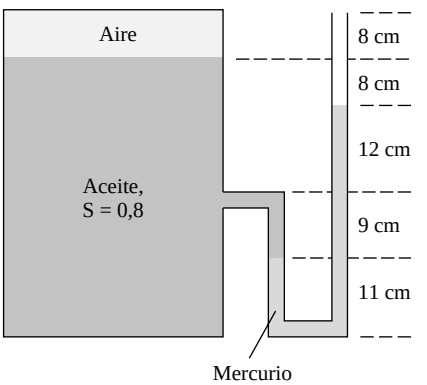
P2.37

P2.38 Consideremos un interesante artículo aparecido en el *AIAA Journal* (vol. 30, núm. 1, enero 1992, págs. 279-280). Los autores explican que el aire que se encuentra dentro de los tubos de plástico nuevos puede ser hasta un 25 por 100 más denso que el exterior, como consecuencia de la contaminación procedente del proceso de fabricación. La mayor parte de los investigadores asumen que los tubos que emplean están llenos con aire de densidad estándar, lo que puede dar lugar a errores significativos cuando se emplean esta clase de tubos para medir presiones. Para ilustrar este hecho, considere un manómetro en U con un fluido manométrico de densidad ρ_m. Un lado del manómetro está abierto al aire mientras que el otro se conecta a otro tubo que se conecta con el punto de medida de presión 1, a una altura H por encima de la superficie del líquido manométrico. Para ser consistentes, sea ρ_a la densidad del aire en la habitación, ρ_t la densidad del gas del tubo, ρ_m la densidad del líquido manométrico y h la diferencia de alturas entre los dos lados del manómetro. Véase la Figura P2.38. (*a*) Obtenga una expresión para la presión manométrica en el punto de medida. *Nota*: cuando calcule la presión manométrica, use la presión atmosférica local a la altura del punto de medida. Puede suponer que $h \ll H$; es decir, que todo el gas del lado izquierdo del manómetro tiene densidad ρ_t. (*b*) Escriba una expresión para el error causado por asumir que el gas dentro del tubo tiene la misma densidad que el aire circundante. (*c*) ¿Qué parte del error (en pascales) es causado por ignorar esta diferencia de densidades en las condiciones siguientes: ρ_m = 860 kg/m^3, ρ_a = 1,20 kg/m^3, ρ_t = 1,50 kg/m^3, H = 1,32 m y h = 0,58 cm? (*d*) ¿Se le ocurre una forma de evitar este error?



P2.38

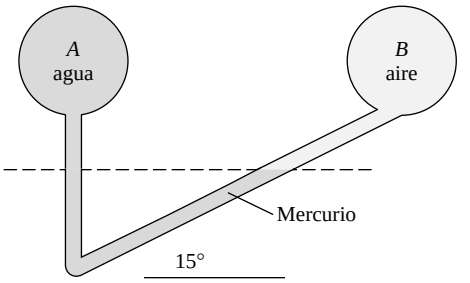
P2.39 La rama derecha del manómetro de la Figura P2.39 está abierta a la atmósfera. Determine la presión manométrica, en pascales, en la bolsa de aire del depósito.



P2.39

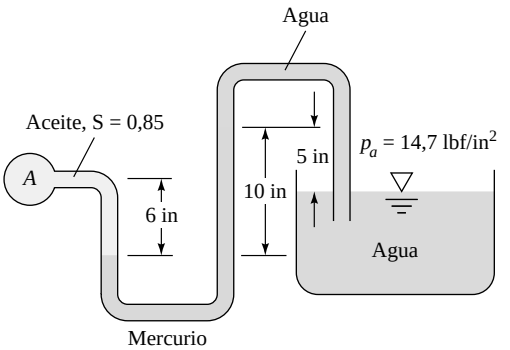
P2.40 Las presiones en los depósitos *A* y *B* de la Figura P2.40 son iguales. Si se introduce agua en el depósito *A* hasta aumentar p_A hasta 130 kPa, determine y esquematice las nuevas posiciones del menisco de mercurio. El diámetro del tubo de conexión es 1 cm. No considere cambio alguno en las densidades de los líquidos.

www.elsolucionario.net



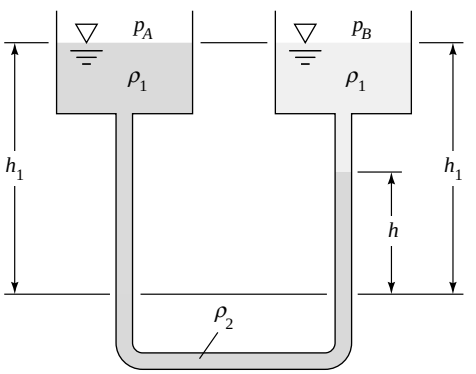
P2.40

P2.41 El sistema de la Figura P2.41 está a 20 °C. Calcule la presión absoluta en el punto *A* en lbf/ft^2.



P2.41

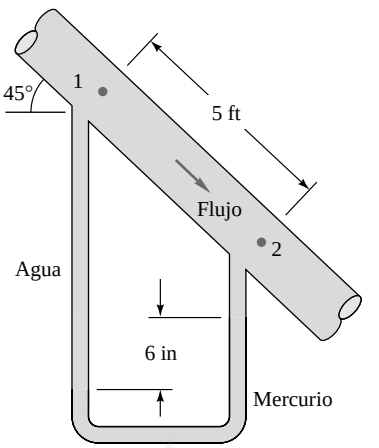
P2.42 Mediante el manómetro de dos fluidos de la Figura P2.42 se pueden medir de forma precisa pequeñas diferencias de presión $p_A - p_B$. La densidad del fluido 2, ρ_2, sólo es ligeramente mayor que la del fluido de encima ρ_1. Obtenga una expresión para la proporcionalidad entre h y $p_A - p_B$ considerando que los dos depósitos son muy grandes.



P2.42

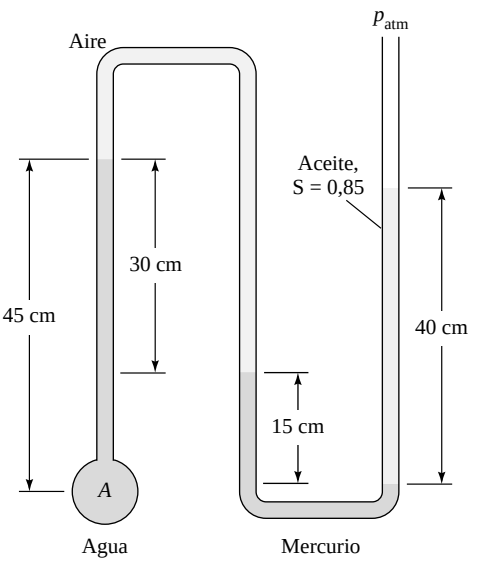
P2.43 La medida de la presión sanguínea se realiza tradicionalmente con un instrumento denominado *esfingomanómetro*, con el que primero se mide la presión alta (*sistólica*) y después la baja (*diastólica*), responsables del característico sonido de los latidos del corazón. Los pacientes con hipertensión pueden presentar presiones sistólicas de hasta 5 lbf/in^2. Los niveles normales de presión son 2,7 y 1,7 lbf/in^2, para las presiones sistólica y diastólica, respectivamente. El manómetro emplea como fluidos de trabajo aire y mercurio. (*a*) ¿Cuál debe ser la longitud del tubo del manómetro medida en centímetros? (*b*) Exprese las presiones diastólica y sistólica normales en milímetros de mercurio.

P2.44 En la Figura P2.44 se esquematiza un tubo con 45° de inclinación por el que fluye agua. La caída de presiones $p_1 - p_2$ es debida en parte al efecto de la gravedad y en parte al de la fricción. El manómetro de mercurio indica una diferencia de alturas de 6 in. ¿Cuál es la caída total de presiones $p_1 - p_2$ en lbf/in^2? ¿Cuál es la caída de presiones entre 1 y 2 debida a la fricción en libras por pulgada cuadrada? ¿Corresponde la lectura del manómetro únicamente al efecto de la fricción? ¿Por qué?



P2.44

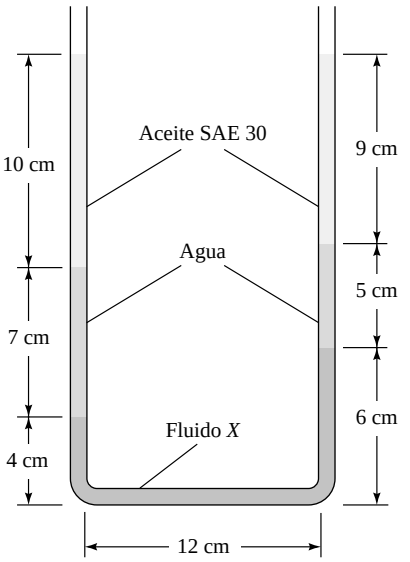
P2.45 Determine la presión manométrica en Pa que hay en el punto *A* de la Figura P2.45. ¿Es mayor o menor que la atmosférica?



P2.45

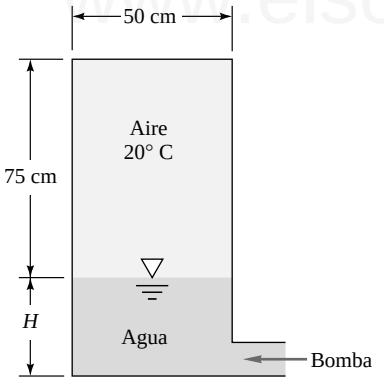
P2.46 Los dos tubos del manómetro de la Figura P2.46 están abiertos a la atmósfera. Estime el peso específico del fluido *X*.

www.elsolucionario.net



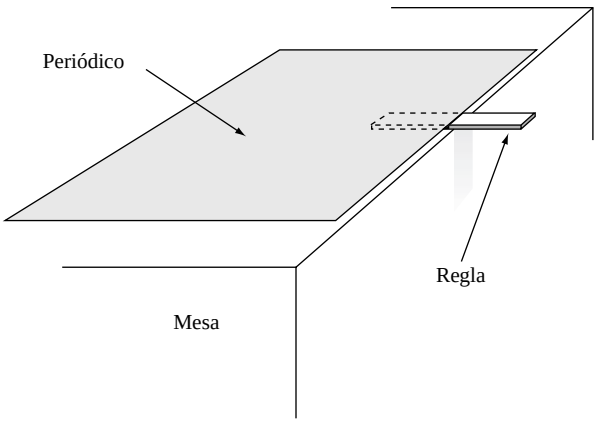
P2.46

P2.47 El depósito cilíndrico de la Figura P2.47 se está llenando con agua a 20 °C mediante una bomba que genera una presión de salida de 175 kPa. En el instante representado en la figura la presión del aire es 110 kPa y H = 35 cm. La bomba para cuando no puede elevar más la presión del agua. Considerando que el aire se comprime isotérmicamente, calcule H en ese instante.



P2.47

P2.48 Realice el siguiente experimento para ilustrar la presión del aire. Busque una regla de madera delgada (de aproximadamente un ft de longitud) o una paleta de madera para mover pintura. Sitúela sobre una mesa, sobresaliendo del borde un poco menos de la mitad de su longitud. Coja dos hojas de papel de periódico, ábralas y colóquelas sobre la parte de la regla que está apoyada en la mesa, según se representa en la Figura P2.48. (*a*) Estime la fuerza total que la presión del aire de la habitación ejerce sobre la superficie del papel. (*b*) Procurando que nadie se sitúe frente a la mesa para evitar posibles daños, dé un golpe de kárate sobre el extremo libre de la regla. Anote los resultados. (*c*) Explique los resultados obtenidos.

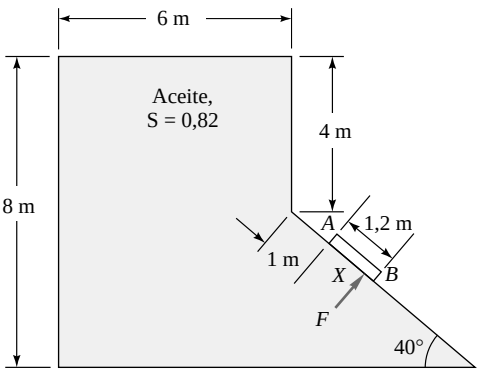


P2.48

P2.49 Un manómetro inclinado, semejante conceptualmente al de la Figura P2.37, tiene un depósito vertical cilíndrico tal que el área de su sección transversal es 35 veces la del tubo. El fluido de trabajo es etilén glicol a 20 °C. Sabiendo que $\theta = 20°$ y que, medido a lo largo del tubo, el fluido sube 25 cm por encima del nivel que alcanza cuando la diferencia de presiones es nula, ¿cuál es la diferencia de presiones que se está midiendo?

P2.50 Un recipiente lleno de aceite (densidad relativa, S = 0,85) tiene 7 m de longitud y 3 m de profundidad. Su sección transversal es trapezoidal con 2 m de anchura en su fondo y 4 m en su borde superior. Calcule (*a*) el peso del aceite del recipiente, (*b*) la fuerza sobre el fondo y (*c*) la fuerza sobre la placa trapezoidal.

P2.51 La compuerta *AB* de la Figura P2.51 mide 1,2 m de longitud y 0,8 m de anchura. Despreciando la presión atmosférica, calcule la fuerza F sobre la compuerta y la posición de su centro de presiones X.

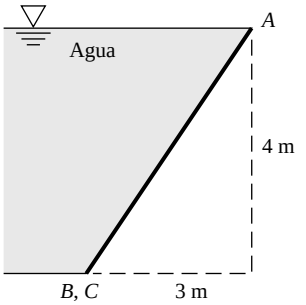


P2.51

P2.52 Una compuerta vertical mide 4 m de anchura y está separando un nivel de agua de 2 m de otro de 3 m, estando ambos a 20 °C. Calcule el momento con respecto al fondo que es necesario para mantener la compuerta en esa posición.

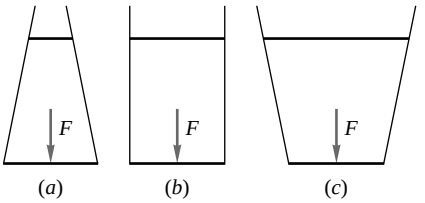
P2.53 El panel *ABC* de la cara inclinada del depósito de agua de la Figura P2.53 tiene forma de triángulo isósceles con vértice en *A* y base *BC* = 2 m. Calcule la fuerza del agua sobre el panel y su línea de acción.

www.elsolucionario.net



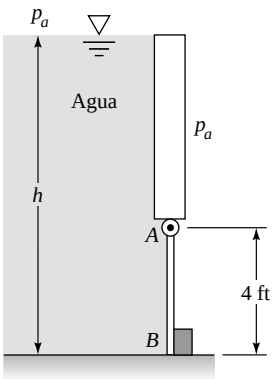
P2.53

P2.54 La fuerza hidrostática sobre el fondo de los tres depósitos de la Figura P2.54 es la misma, aun cuando el peso de los líquidos que hay sobre ellos es muy diferente. Los fluidos empleados y la forma de los tres fondos son idénticos, por lo que a este hecho se le denomina *paradoja hidrostática*. Explique por qué se cumple esta paradoja y represente un cuerpo libre en cada una de las columnas de líquido.



P2.54

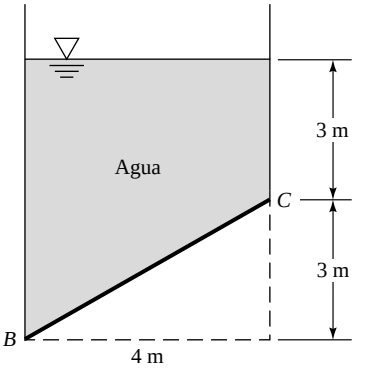
P2.55 La compuerta *AB* de la Figura P2.55 tiene una anchura de 5 ft, está articulada en *A* y sujeta en *B*. El agua está a 20 °C. Calcule (*a*) la fuerza sobre el apoyo *B* y (*b*) las reacciones en *A* si la profundidad del agua es de $h = 9{,}5$ ft.



P2.55

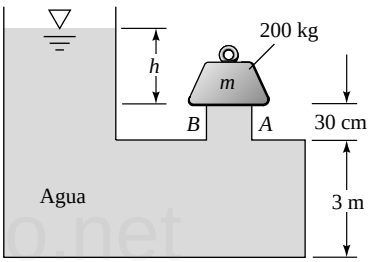
P2.56 La compuerta *AB* de la Figura P2.55 tiene una anchura de 5 ft, y su apoyo *B* se romperá si la fuerza que el agua ejerce sobre él supera las 9200 lbf. ¿Para qué profundidad *h* se alcanza esta condición?

P2.57 El depósito de la Figura P2.57 tiene una anchura de 2 m perpendicular al papel. Despreciando el efecto de la presión atmosférica, calcule la fuerza hidrostática resultante sobre el panel *BC* (*a*) a partir de la fórmula simple y (*b*) calculando separadamente las fuerzas horizontal y vertical, según el espíritu de la Sección 2.6.



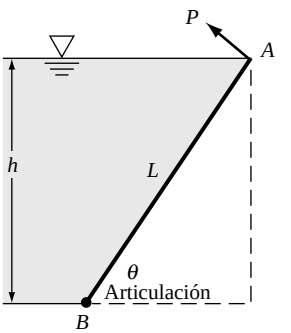
P2.57

P2.58 En la Figura P2.58 la compuerta superior *AB* tapa una apertura circular de 80 cm de diámetro. La compuerta se mantiene cerrada mediante una masa de 200 kg, según se muestra en la figura. Suponga que la gravedad es estándar y la temperatura 20 °C. ¿Para qué valor de *h* se desbloqueará la puerta? Desprecie el peso de la puerta.



P2.58

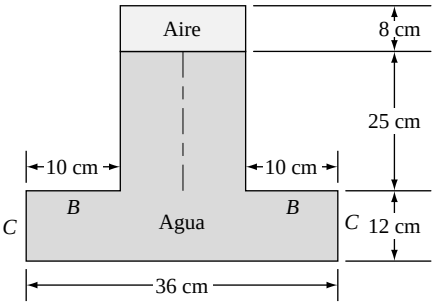
***P2.59** La compuerta *AB* de la Figura P2.59 tiene una longitud *L*, una anchura *b* perpendicular al papel, está articulada en *B* y tiene un peso despreciable. El nivel *h* del líquido permanece siempre en la parte superior de la compuerta, con independencia de su ángulo θ. Obtenga una expresión analítica para la fuerza *P*, perpendicular a *AB*, que hay que ejercer sobre la compuerta para mantenerla en equilibrio.



P2.59

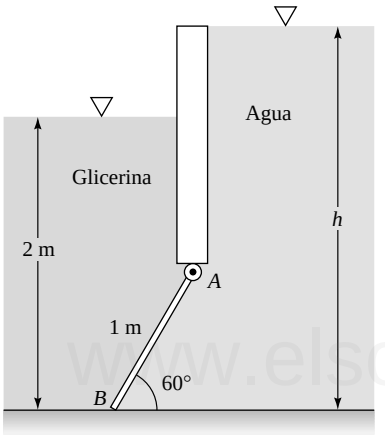
P2.60 La presión manométrica de la bolsa de aire de la Figura P2.60 es de 8000 Pa. El depósito es cilíndrico. Calcule la fuerza hidrostática neta (*a*) en el fondo del depósito, (*b*) en la superficie cilíndrica *CC* y (*c*) en la superficie anular *BB*.

www.elsolucionario.net



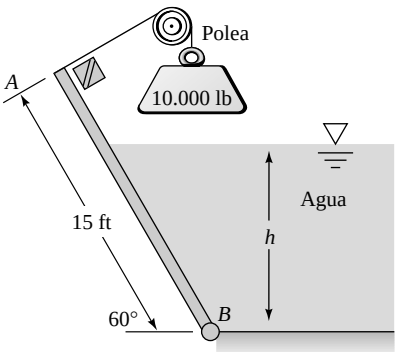
P2.60

***P2.61** La compuerta *AB* de la Figura P2.61 es una masa homogénea de 180 kg, 1,2 m de anchura, articulada en *A* y apoyada sobre *B*. Todos los fluidos se encuentran a 20 °C. ¿A qué profundidad del agua *h* se anula la fuerza en el punto *B*?



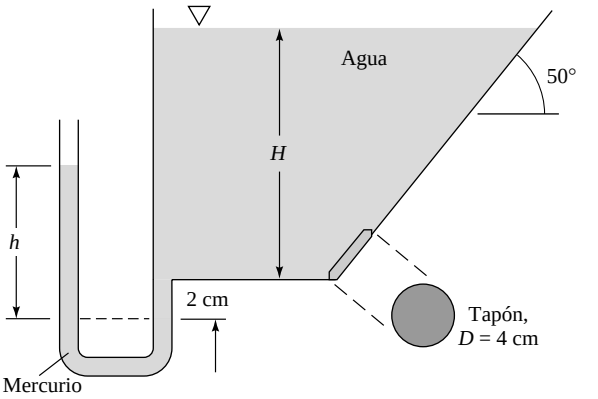
P2.61

P2.62 La compuerta *AB* de la Figura P2.62 tiene 15 ft de longitud, 8 ft de anchura perpendicular al papel y está articulada en *B* con un tope en *A*. El agua está a 20 °C. La compuerta está construida con acero de 1 in de espesor, cuya densidad relativa es S = 7,85. Calcule el nivel del agua *h* para el que la compuerta comienza a caer.



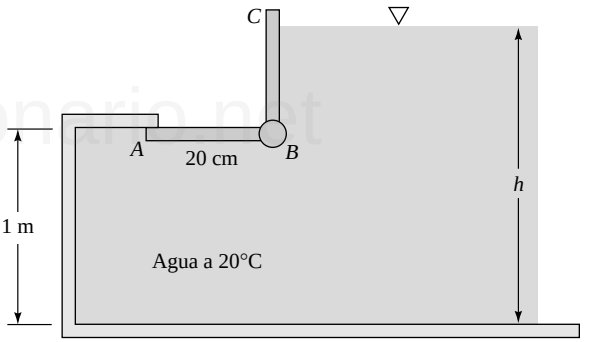
P2.62

P2.63 El depósito de la Figura P2.63 tiene un tapón de 4 cm de diámetro en el lado de la derecha. Todos los fluidos se encuentran a 20 °C. El tapón saltará si la fuerza hidrostática que soporta supera los 25 N. En esta condición, ¿cuál será la lectura *h* del manómetro de mercurio de la izquierda?



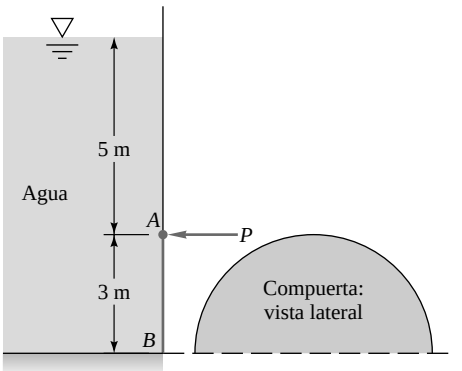
P2.63

***P2.64** La compuerta *ABC* de la Figura P2.64 está articulada en el punto *B* y tiene una anchura de 2 m. La compuerta se abrirá en el punto *A* si la profundidad del agua es suficiente. Calcule la profundidad *h* para la que la compuerta comienza a abrirse.



P2.64

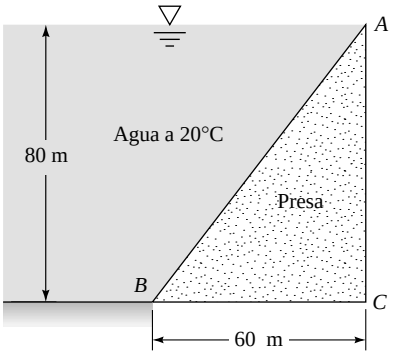
***P2.65** La compuerta *AB* de la Figura P2.65 es semicircular, está articulada en *B* y se mantiene vertical mediante una fuerza horizontal *P*. ¿Cuál es la fuerza *P* necesaria para mantener el equilibrio?



P2.65

www.elsolucionario.net

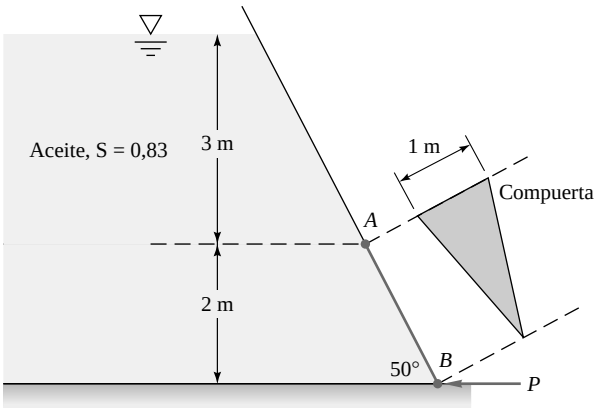
P2.66 La presa *ABC* de la Figura P2.66 tiene 30 m de ancho perpendicular al papel y está construida de hormigón (densidad relativa S = 2,4). Calcule la fuerza hidrostática sobre la superficie *AB* y su momento alrededor de *C*. Suponiendo que no hay filtraciones de agua bajo la presa, ¿podría esta fuerza volcar la presa? ¿Cómo cambiaría su razonamiento si existieran filtraciones?



P2.66

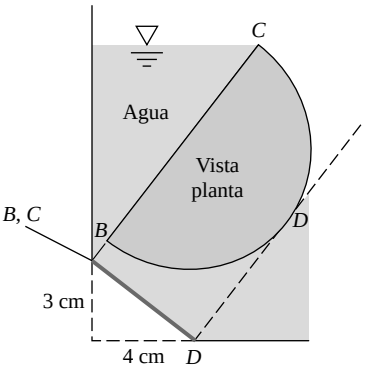
***P2.67** Generalizar el Problema 2.66 de la siguiente manera. Llamando *H* a la longitud *AB*, *L* a la longitud *BC* y θ al ángulo *ABC*. Sea S la densidad relativa del material de la presa y *b* su anchura. Suponiendo que no hay filtraciones bajo la presa, obtenga una relación analítica que relacione S con el ángulo crítico θ_c para el que la presa comenzará a volcarse a la derecha. Emplee esta relación para calcular θ_c en el caso del hormigón (S = 2,4).

P2.68 La compuerta *AB* de la Figura 2.68 tiene forma de triángulo isósceles, está articulada en *A* y pesa 1500 N. ¿Cuál es la fuerza horizontal *P* que se debe aplicar en el punto *B* para mantener el sistema en equilibrio?



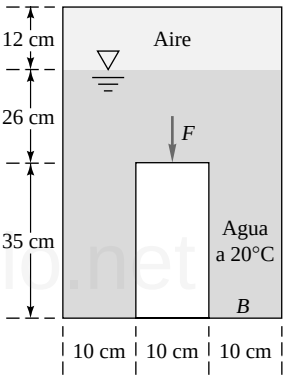
P2.68

P2.69 El panel *BCD* de la Figura P2.69 tiene forma semicircular y la línea *BC* se encuentra 8 cm por debajo de la superficie. Determine (*a*) la fuerza hidrostática sobre el panel y (*b*) el momento que esta fuerza ejerce alrededor de *D*.



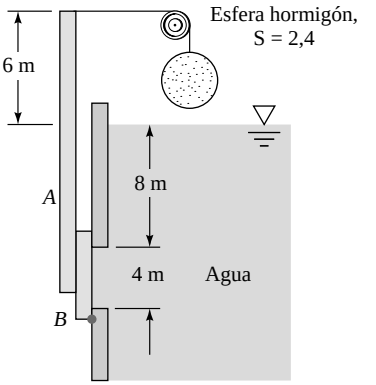
P2.69

P2.70 El depósito cilíndrico de la Figura P2.70 tiene un inserto también cilíndrico de 35 cm de alto. La presión en el punto *B* es de 156 kPa. Determine (*a*) la presión en el espacio de aire y (*b*) la fuerza *F* sobre la superficie superior del inserto. Desprecie la presión del aire fuera del depósito.



P2.70

***P2.71** La compuerta *AB* de la Figura P2.71 tiene 3 m de anchura y está conectada mediante una barra y una polea a una esfera de hormigón (densidad relativa S = 2,40). ¿Qué diámetro de la esfera es necesario para mantener la puerta cerrada?

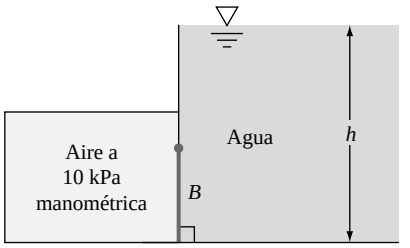


P2.71

P2.72 La compuerta *B* de la Figura P2.72 tiene 30 cm de alto, 60 cm de ancho y está articulada en su parte su-

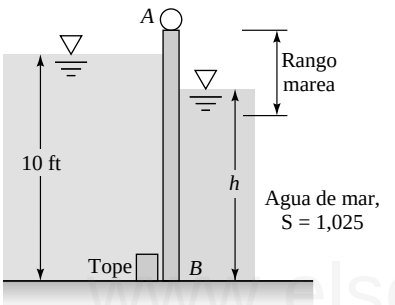
www.elsolucionario.net

perior. ¿Cuál es la mínima profundidad del agua h que abrirá la compuerta?



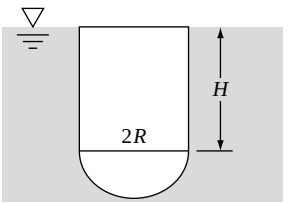
P2.72

P2.73 La compuerta AB tiene 5 ft de anchura y se abre para dejar salir agua dulce al océano cuando la marea está baja. La articulación en el punto A está 2 ft sobre el nivel del agua dulce. ¿A qué altura h del nivel del océano comienza a abrirse la compuerta? Desprecie el peso de la compuerta.



P2.73

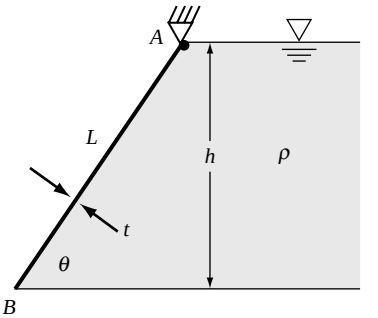
P2.74 Calcule la altura H de la Figura P2.74 para la que la fuerza hidrostática sobre el panel rectangular sea la misma que la fuerza sobre el panel semicircular inferior.



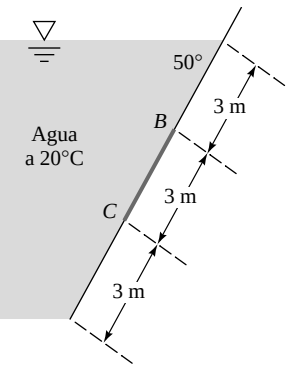
P2.74

***P2.75** La compuerta AB de la Figura P2.75 está articulada en el punto A, tiene una anchura b perpendicular al papel, y se apoya en el punto B. La compuerta tiene una densidad ρ_s y un espesor uniforme t. Determine la densidad ρ_s para la que la compuerta comienza a levantarse, y exprésela en función de (h, t, ρ, θ). ¿Por qué es independiente de la longitud de la compuerta L y la anchura b?

P2.76 El panel BC de la Figura P2.76 es circular. Calcule (*a*) la fuerza hidrostática del agua sobre el panel, (*b*) su centro de presiones y (*c*) el momento de esta fuerza alrededor de B.

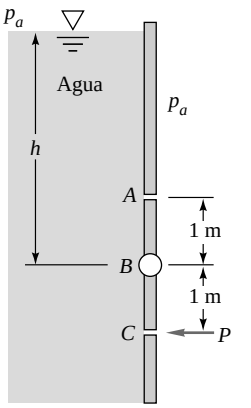


P2.75



P2.76

P2.77 La compuerta circular ABC de la Figura P2.77 tiene un radio de 1 m y está articulada en el punto B. Calcule la fuerza P mínima para mantener la compuerta cerrada cuando h = 8 m. Desprecie la presión atmosférica.

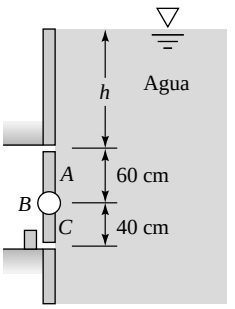


P2.77

P2.78 Repita el Problema 2.77 obteniendo una expresión analítica de P en función de h. ¿Existe algo extraño en la solución?

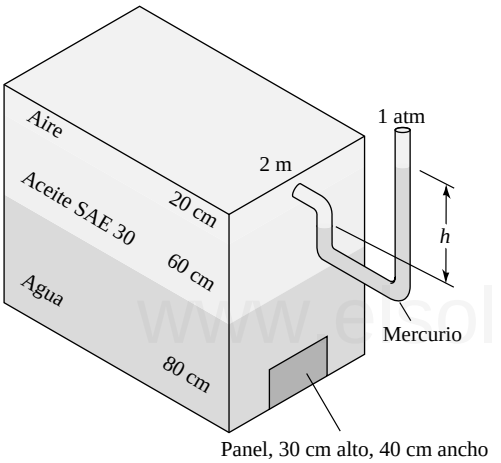
P2.79 La compuerta ABC de la Figura P2.79 es cuadrada, sus lados miden 1 m y está articulada en el punto B. La compuerta se abrirá automáticamente cuando el nivel del agua h sea suficiente. Determine la menor altura para la cual se producirá la apertura. Desprecie la presión atmosférica. ¿El resultado es independiente de la densidad del líquido?

www.elsolucionario.net



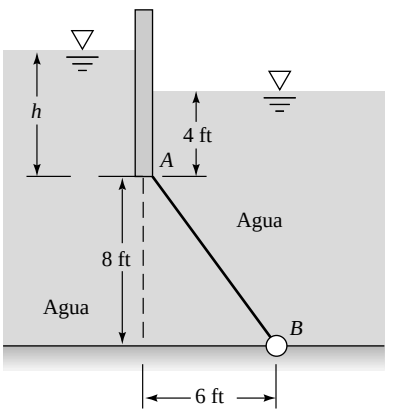
P2.79

P2.80 En el depósito cerrado de la Figura P2.80 todos los fluidos se encuentran a 20 °C y la bolsa de aire está presurizada. La fuerza hidrostática neta sobre el panel de 30 por 40 cm que está en la base del agua es de 8450 N. Estime (*a*) la presión en la bolsa de aire y (*b*) la lectura *h* en el manómetro de mercurio.



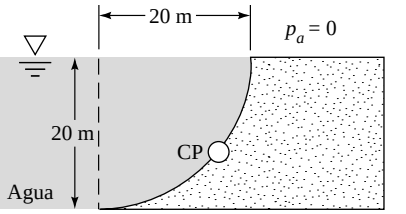
P2.80

P2.81 La compuerta *AB* de la Figura P2.81 tiene una anchura de 7 ft y pesa 3000 lbf cuando está sumergida. La compuerta está articulada en el punto *B* y se apoya sobre una pared lisa en *A*. Determine el mínimo nivel de agua *h* que abrirá la compuerta.



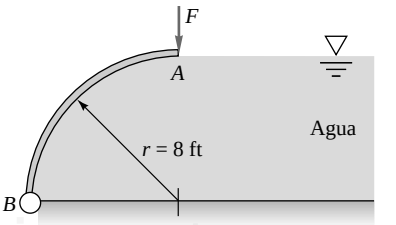
P2.81

***P2.82** La presa de la Figura P2.82 es un cuarto de círculo de 50 m de anchura. Determine las componentes vertical y horizontal que la fuerza hidrostática ejerce sobre la presa y el punto CP en el que la fuerza resultante incide sobre la presa.



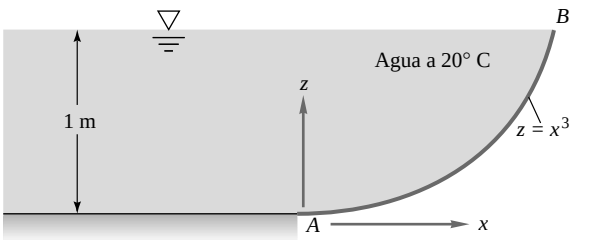
P2.82

***P2.83** La compuerta *AB* de la Figura P2.83 es un cuarto de círculo de 10 ft de anchura articulada en el punto *B*. Determine la mínima fuerza *F* que permite mantener abierta la compuerta. Suponga que la compuerta es uniforme y pesa 3000 lbf.



P2.83

P2.84 Determine (*a*) la fuerza hidrostática total sobre la superficie curva *AB* de la Figura P2.84 y (*b*) su línea de acción. Desprecie la presión atmosférica y considere que la superficie tiene anchura unidad.



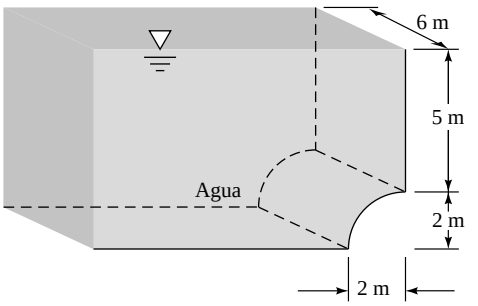
P2.84

P2.85 Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza hidrostática que se ejerce sobre el panel en cuarto de círculo situado en el fondo del depósito de agua de la Figura P2.85.

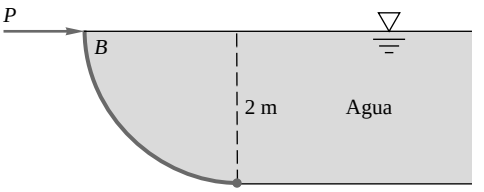
P2.86 La compuerta *BC* en cuarto de círculo de la Figura P2.86 está articulada en el punto *C*. Determine la fuerza horizontal *P* necesaria para mantener la compuerta en equilibrio.

P2.87 La botella de champagne (S = 0,96) de la Figura P2.87 está presurizada según indica la lectura del manómetro de mercurio. Calcule la fuerza neta sobre la base semiesférica de la botella si tiene un radio de 2 in.

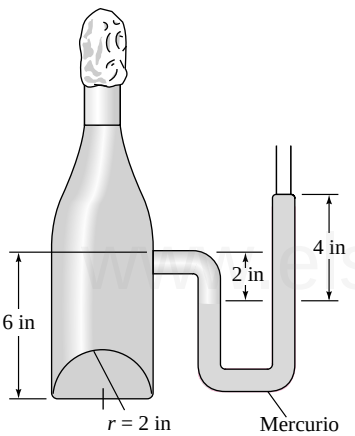
www.elsolucionario.net



P2.85

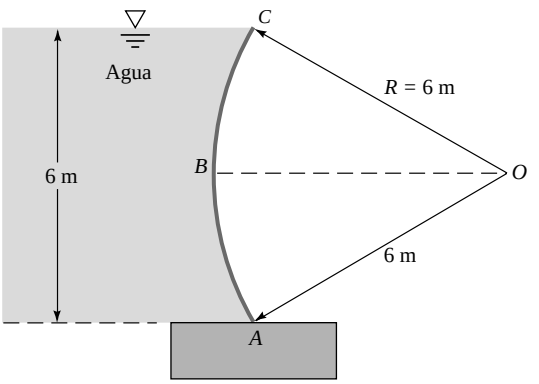


P2.86



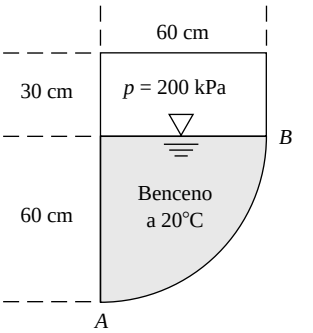
P2.87

***P2.88** La compuerta *ABC*, a veces llamada *compuerta Tainter*, tiene forma de arco de círculo y se puede subir y bajar haciéndola girar alrededor del punto *O* (véase Figura P2.88). En la posición que se muestra en la figura, determine (*a*) la fuerza hidrostática del agua sobre la compuerta y (*b*) su línea de acción. ¿Pasa la fuerza por el punto *O*?



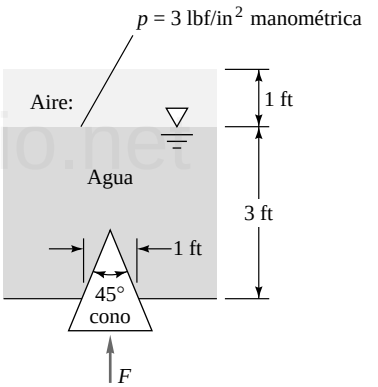
P2.88

P2.89 El depósito de la Figura P2.89 contiene benceno y está presurizado de tal forma que la presión manométrica de la bolsa de aire del depósito se encuentra a 200 kPa. Determine la fuerza hidrostática vertical sobre el arco de círculo *AB* y su línea de acción.



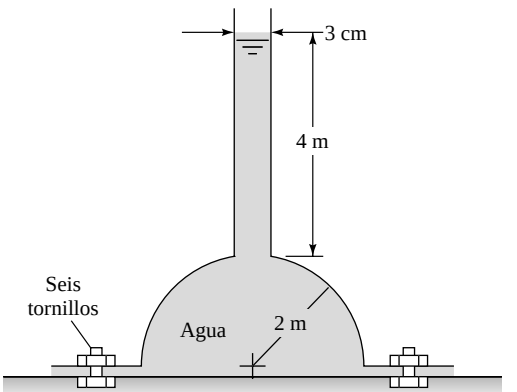
P2.89

P2.90 El depósito de la Figura P2.90 tiene un orifio de 1 ft de diámetro en su cara superior. El orificio se cierra mediante un tapón cónico de 45°. Si se desprecia el peso del tapón, calcule la fuerza *F* necesaria para mantener el tapón en el orificio.



P2.90

P2.91 El domo semiesférico de la Figura P2.91 tiene un peso de 30 kN, está lleno de agua y remachado al suelo mediante seis remaches equiespaciados. ¿Cuál es la

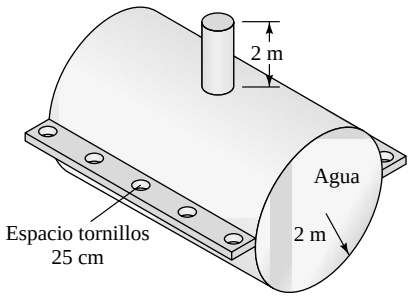


P2.91

www.elsolucionario.net

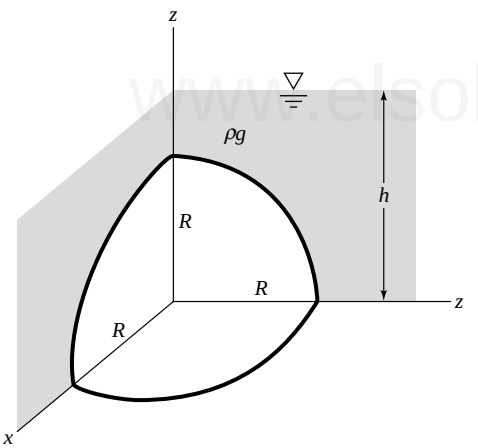
fuerza necesaria sobre cada remache para mantener el domo en su posición?

P2.92 Un depósito de agua de 4 m de diámetro está formado por dos semicilindros de 4,5 kN/m cada uno unidos mediante remaches, como se muestra en la Figura P2.92. Si se desprecia el efecto de las caras laterales, determine la fuerza que se ejerce sobre cada remache.



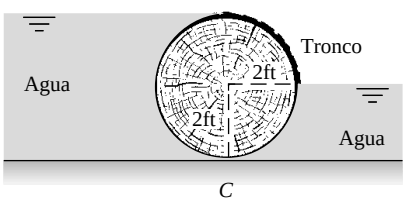
P2.92

***P2.93** Una cáscara con forma de un cuarto de esfera de radio R está sumergida en un líquido de peso específico ρg y profundidad $h > R$, según se muestra en la Figura P2.93. Determine una expresión analítica para la resultante de la fuerza hidrostática sobre la cáscara y su línea de acción.



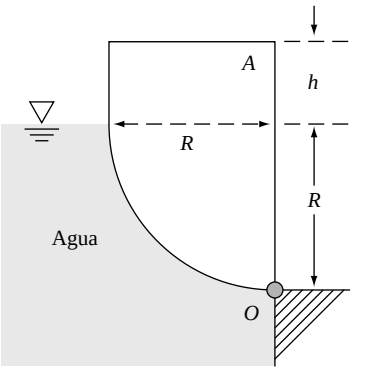
P2.93

P2.94 El tronco (S = 0,80) de la Figura P2.94 tiene un diámetro de 4 ft, una anchura de 8 ft perpendicular al papel y se encuentra reteniendo agua según se muestra en la figura. Calcule las reacciones vertical y horizontal netas en el punto *C*.



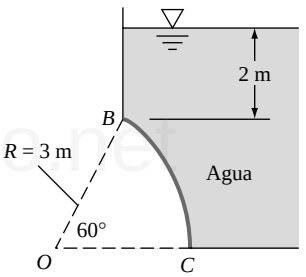
P2.94

***P2.95** El cuerpo uniforme *A* de la Figura P2.95 tiene una anchura *b* perpendicular al papel y está en equilibrio estático cuando se gira alrededor de la articulación *O*. ¿Cuál es la densidad relativa del cuerpo si (*a*) $h = 0$ y (*b*) $h = R$?



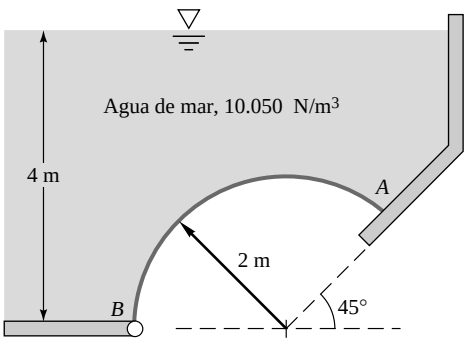
P2.95

P2.96 El panel curvo *BC* de la Figura P2.96 tiene un arco de 60° y es perpendicular al fondo en el punto *C*. Si el panel tiene una anchura de 4 m, estime la resultante de la fuerza hidrostática sobre el panel.



P2.96

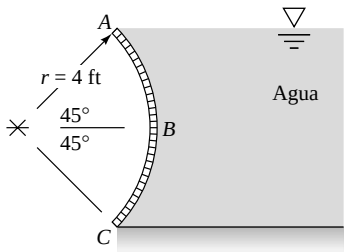
P2.97 La compuerta *AB* de la Figura P2.97 tiene forma de tres octavos de círculo, una anchura de 3 m, está articulada en *B* y se apoya sobre la pared en *A*. Calcule las fuerzas de reacción en los puntos *A* y *B*.



P2.97

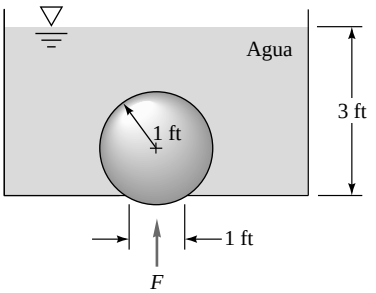
P2.98 La compuerta *ABC* de la Figura 2.98 es un cuarto de círculo de 8 ft de anchura. Calcule las fuerzas hidrostáticas vertical y horizontal sobre la compuerta y la línea de acción de la resultante.

www.elsolucionario.net



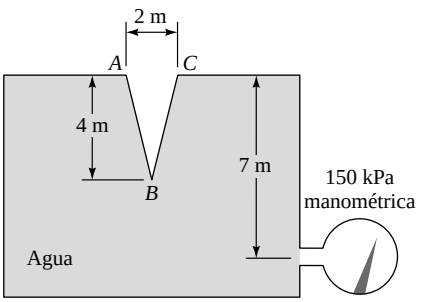
P2.98

P2.99 Una esfera de 2 ft de diámetro con un peso de 400 lbf cierra un orificio de 1 ft de diámetro del depósito de la Figura P2.99. Calcule la fuerza F requerida para sacar la esfera del orificio.



P2.99

P2.100 El depósito de la Figura P2.100 está lleno con agua presurizada. Calcule la fuerza hidrostática neta sobre la superficie cónica de la superficie *ABC*.



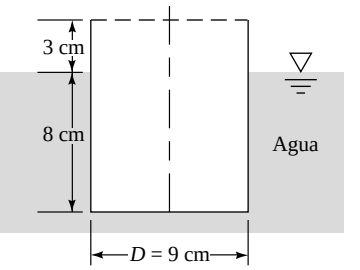
P2.100

P2.101 Un camión de combustible tiene un depósito de sección transversal aproximadamente elíptica de 3 m de eje mayor horizontal y 2 m de eje menor vertical. Su parte superior está ventilada a la atmósfera. Si la mitad del tanque está lleno con gasolina y la otra mitad con agua, ¿cuál es la fuerza hidrostática sobre el panel elíptico final?

P2.102 Un depósito cúbico de $3 \times 3 \times 3$ m contiene estratificados en su interior 1 metro de fluido cuya densidad relativa es S = 1,0, 1 metro de fluido con S = 0,9 y 1 metro de fluido con S = 0,8. Despreciando la presión atmosférica, determine (*a*) la fuerza hidrostática sobre el fondo y (*b*) la fuerza sobre uno de los paneles laterales.

P2.103 Un bloque sólido de densidad relativa 0,9 está flotando de forma que el 75 por 100 de su volumen está sumergido en agua y el 25 por 100 restante en un fluido *X*, situado sobre el agua. ¿Cuál es la densidad relativa del fluido *X*?

P2.104 Una lata está flotando en la posición que se muestra en la Figura P2.104. ¿Cuál es su peso en N?



P2.104

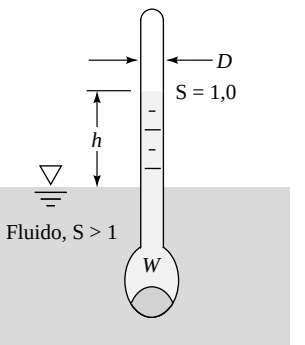
P2.105 Se dice que Arquímedes descubrió las leyes de la flotación cuando el rey Hiero de Syracusa le ordenó determinar si su corona era de oro puro (S = 19,3). Arquímedes midió que el peso de la corona en el aire era 11,8 N y su peso en agua 10,9 N. ¿Era de oro puro?

P2.106 Un globo esférico de 2,5 m de diámetro está lleno de helio y tiene una masa de 6,7 kg. Si se suelta el globo en la atmósfera estándar, ¿a qué altura se estabilizará?

P2.107 Repita el Problema P2.62 suponiendo que el peso de 10.000 lbf es aluminio (S = 2,71) y cuelga sumergido en el agua.

P2.108 Un trozo de madera de pino amarillo (S = 0,65) tiene una sección cuadrada de 5 cm de lado y una longitud de 2,2 m. ¿Cuántos newtons de plomo (S = 11,4) deberían colgarse de uno de sus extremos para que flote verticalmente con 30 cm fuera del agua?

P2.109 Un *hidrómetro* flota a un nivel que es una medida de la densidad relativa del líquido. El vástago tiene un diámetro constante D, y en su parte inferior un peso lo estabiliza para que flote verticalmente, como se muestra en la Figura P2.109. Si la posición $h = 0$ corresponde con agua pura (S = 1,0), obtenga una fórmula para h como una función del peso total W, D, S, y el peso específico del agua $\rho_{agua}g$.



P2.109

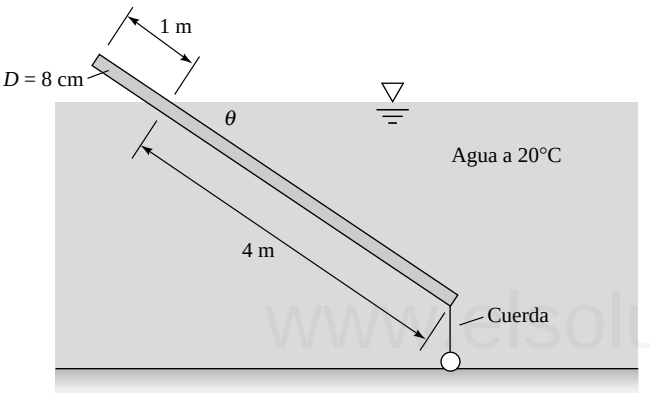
P2.110 Las pelotas de tenis de mesa tienen un diámetro aproximado de 3,81 cm y una masa de 2,6 g. Estime la

www.elsolucionario.net

(pequeña) profundidad a la que una pelota de estas características flotará en agua a 20° C y atmósfera estándar a nivel del mar si (*a*) se desprecia el efecto de flotación en el aire (*b*) se incluye este efecto.

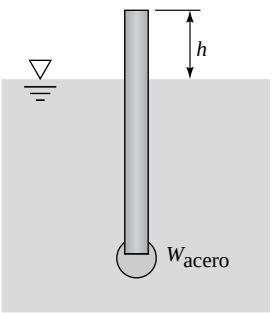
P2.111 Un globo de aire caliente se diseña para que soporte la barquilla, los cables y una persona, lo que corresponde a un peso total de 1300 N. El material del globo tiene una masa de 60 g/m^2. El aire ambiente se encuentra a 25 °C y 1 atm. El aire del interior del globo está a 70 °C y 1 atm. Si se considera que el globo es esférico, ¿qué diámetro sustentará exactamente el peso? Desprecie el tamaño de la válvula de admisión de aire caliente.

P2.112 El tronco cilíndrico de madera de la Figura P2.112 tiene una longitud de 5 m y está unido al fondo mediante una cuerda. Determine (*a*) la tensión de la cuerda y (*b*) la densidad relativa de la figura. Con la información proporcionada, ¿es posible determinar el ángulo de inclinación θ? Explique por qué.



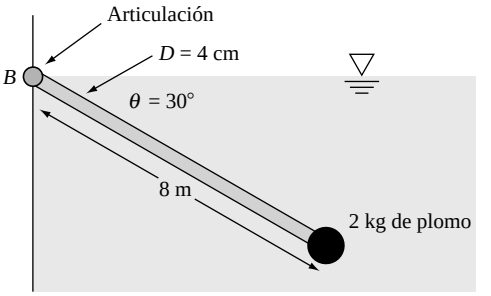
P2.112

P2.113 Una *boya tipo mástil* es una barra flotante lastrada para flotar verticalmente y sobresalir del agua según se muestra en la Figura P2.113. Puede usarse para realizar medidas o como baliza. Suponga que la boya está fabricada con madera de arce (S = 0,6), 2 in por 2 in por 12 ft, y flota en agua del mar (S = 1,025). ¿Cuántas libras de acero (S = 7,85) deberían añadirse en su extremo inferior para que fuera h = 18 in?



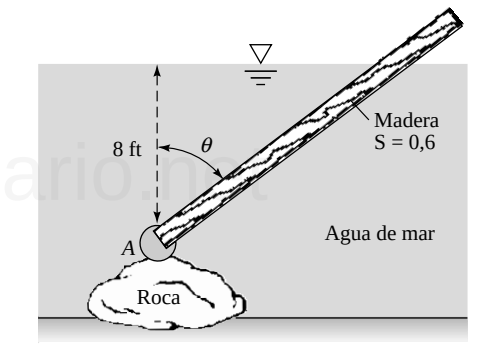
P2.113

P2.114 La barra uniforme de la Figura P2.114 está articulada en el punto *B* que está al nivel del agua. La barra se encuentra en equilibrio estático en la posición de la figura, cuando se lastra con 2 kg de plomo (S = 11,4) en su extremo opuesto. ¿Cuál es la densidad relativa del material con el que está fabricada la barra? ¿Qué tiene de peculiar el ángulo de equilibrio θ = 30°?



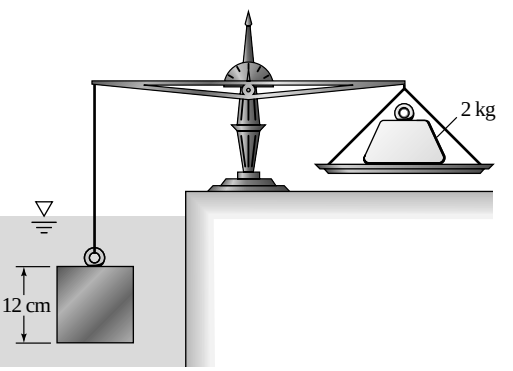
P2.114

P2.115 La boya tipo mástil de 2 in por 2 in por 12 ft de la Figura P2.113 tiene un lastre de 5 lbm de acero y ha encallado en una roca, como se muestra en la Figura P2.115. Calcule el ángulo θ al que la boya está inclinada suponiendo que la roca no ejerce momentos sobre la boya.



P2.115

P2.116 Cuando el tubo homogéneo de 12 cm de la Figura P2.116 se sumerge en etanol a 20° C, su peso se equilibra en una báscula mediante una pesa de 2 kg. ¿Cuál es la densidad relativa del cubo?

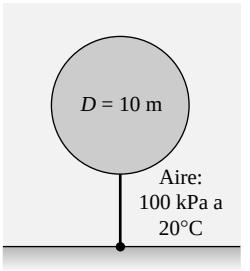


P2.116

P2.117 El globo de la Figura P2.117 está lleno de helio y presurizado a 135 kPa y 20 °C. El material del globo tiene

www.elsolucionario.net

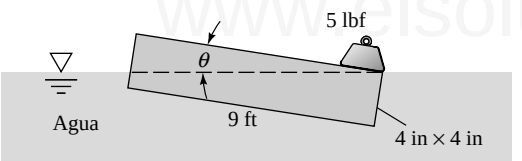
una densidad por unidad de superficie de 85 g/m^2. Estime (*a*) la tensión en la amarra y (*b*) la altura en la atmósfera estándar a la que el globo subirá si se corta la amarra.



P2.117

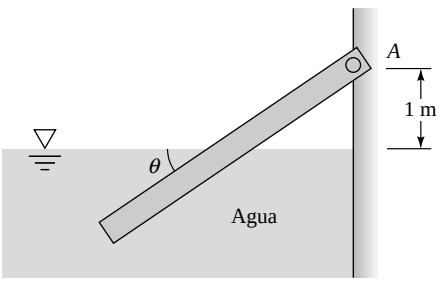
P2.118 Una esfera hueca de 14 in de diámetro y 0,16 in de espesor está hecha de acero (S = 7,85). ¿A qué altura flotará la esfera en agua a 20° C? ¿Cuánto peso debe añadirse dentro para que la esfera tenga flotación neutra?

P2.119 Cuando se coloca un peso de 5 lbf en el extremo de la viga uniforme de madera de la Figura P2.119, la viga se inclina hasta un ángulo θ tal que la esquina superior opuesta queda en la superficie del agua, según se muestra en la figura. Determine (*a*) el ángulo θ y (*b*) la densidad relativa de la madera. (*Consejo*: deben equilibrarse tanto las fuerzas verticales como los momentos alrededor del centroide de la viga).



P2.119

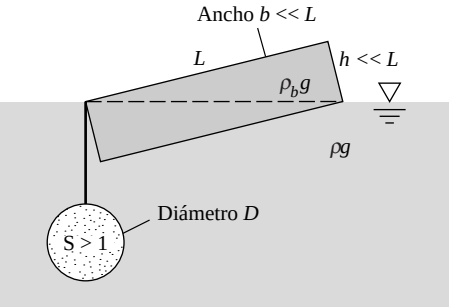
P2.120 Una viga uniforme de madera (S = 0,65) mide 10 cm por 10 cm por 3 m y está articulada en *A* según se muestra en la Figura P2.120. ¿Cuál es el ángulo θ con el que la viga flotará en agua a 20° C?



P2.120

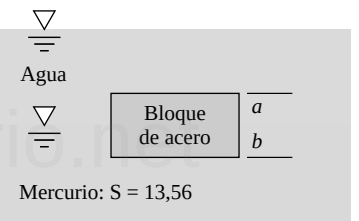
P2.121 La viga uniforme de la Figura P2.121, de tamaño *L* por *h* por *b* y con un peso específico de $\rho_b g$, flota exactamente sobre su diagonal, cuando se lastra mediante una esfera uniforme en su extremo izquierdo, según se muestra en la figura. Demuestre que esto sólo ocurre cuando (*a*) $\rho_b g = \rho g/3$ y (*b*) cuando la esfera tiene tamaño

$$D = \left[\frac{Lhb}{\pi(S-1)}\right]^{1/3}$$



P2.121

P2.122 En la Figura P2.122 se representa un bloque uniforme de acero (S = 7,85) «flotando» en una entrefase agua-mercurio. ¿Cuál es la relación entre las distancias *a* y *b* en estas condiciones?



P2.122

P2.123 Un globo esférico se llena a nivel del mar con helio. Conjuntamente, el peso del helio y del material del globo es de 500 N. Si la fuerza vertical hacia arriba sobre el globo es también de 500 N, ¿cuál es el diámetro del globo?

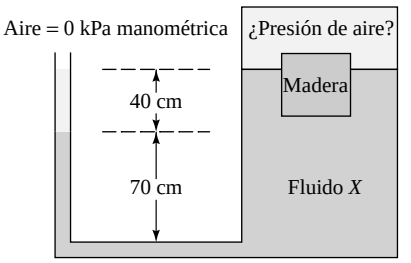
P2.124 Un globo de 6 ft de diámetro pesa 3,5 lbf. El globo está lleno con hidrógeno a una presión absoluta de 18 lbf/in^2 y 60 °F en el momento de soltarse. ¿A qué altura de la atmósfera estándar el globo se quedará flotando en equilibrio?

P2.125 Supongamos que el globo del Problema P2.111 tiene un diámetro de 14 m, se llena a nivel del mar con aire caliente a 70 °C y 1 atm, y se suelta. Si el aire en el interior del globo permanece constante y el calentador lo mantiene a 70 °C, ¿a qué altura quedaría flotando en equilibrio en la atmósfera estándar?

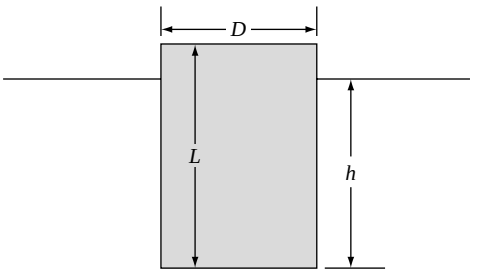
P2.126 El bloque de madera (S = 0,6) de la Figura P2.126 flota sobre un fluido *X* de forma que el 75 por 100 de su volumen está sumergido. Estime la presión de vacío del aire en el depósito.

***P2.127** El cilindro de la Figura P2.127 tiene una densidad relativa *S* < 1 y se encuentra flotando verticalmente en agua (*S* = 1). Obtenga una expresión para los valores de *D*/*L* para los que el cilindro es estable como función de *S* y aplíquela al caso *D*/*L* = 1,2.

www.elsolucionario.net

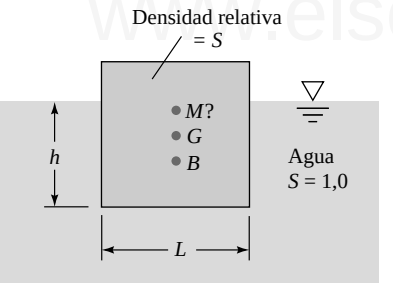


P2.126



P2.127

P2.128 Un iceberg se puede idealizar como un cubo de lado L como el de la Figura P2.128. Si se considera que el agua del mar tiene $S = 1{,}0$, entonces el agua de los glaciares (de la que están formados los icebergs) tiene $S = 0{,}88$. Determine si este iceberg «cúbico» es estable en la posición que se muestra en la Figura P2.128.



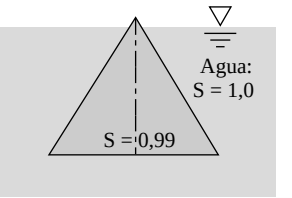
P2.128

P2.129 El iceberg idealizado del Problema 2.128 se puede hacer inestable si sus caras se derriten y su altura acaba por exceder su anchura. Suponga que en la Figura P2.128 la altura es L, la anchura en el plano del papel $H < L$ y la anchura perpendicular al papel L. Suponiendo que el iceberg tiene una densidad relativa $S = 0{,}88$, determine el valor de H/L para el que se presenta estabilidad neutra (en cuanto a su rotación).

P2.130 Considere un cilindro de madera (S = 0,6) de 1 m de diámetro y 0,8 m de longitud. ¿Sería estable si se dejara flotando en aceite (S = 0,8) con su eje vertical?

P2.131 Una gabarra tiene 15 ft de anchura y 40 ft de longitud y flota con un calado de 4 ft. Se llena con grava hasta que su centro de gravedad se sitúa 2 ft por encima de la línea de flotación. ¿Es estable?

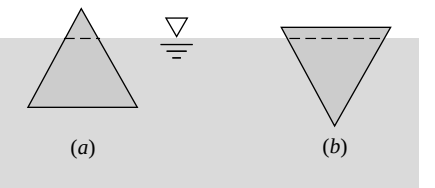
P2.132 Un cono circular sólido tiene S = 0,99 y flota verticalmente según se muestra en la Figura P2.132. ¿Es estable el cono en esa posición?



P2.132

P2.133 Un cono circular de densidad relativa $S < 1$ está flotando en agua ($S = 1$) con su vértice hacia *abajo*. El radio de su base es R y la altura del cono H. Calcule y represente la estabilidad del cono MG en forma adimensional como función de H/R para un rango de valores de S tales que $S < 1$.

P2.134 Cuando un triángulo equilátero (S = 0,9) flota en agua (S = 1,0) puede adoptar una de las dos posiciones de la Figura P2.134. ¿Cuál es la posición más estable? Suponga que la anchura del triángulo perpendicular al papel es muy grande.



P2.134

www.elsolucionario.net

P2.135 Un cilindro circular uniforme, de longitud L, radio R y densidad relativa S está flotando en agua (S = 1). Demuestre que el cuerpo será estable con su eje vertical si

$$\frac{R}{L} > [2S(1 \Phi S)]^{1/2}$$

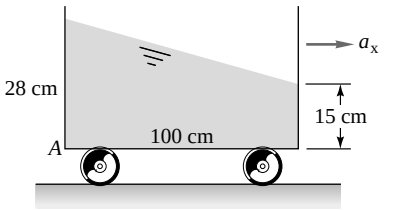
P2.136 Un cilindro circular uniforme, de longitud L, radio R y densidad relativa S = 0,5 está flotando en agua (S = 1). Demuestre que el cuerpo será estable sobre su eje horizontal si $L/R > 2{,}0$.

P2.137 Un depósito de agua de 4 m de profundidad está sometido a una aceleración vertical constante a_z hacia arriba. Determine (*a*) la presión manométrica en el fondo del depósito si $a_z = 5$ m/s^2 y (*b*) el valor de a_z que hace que la presión manométrica en el fondo del depósito sea 1 atm.

P2.138 Un vaso de 12 fl-oz, de 3 in de diámetro, parcialmente lleno de agua, se coloca en el borde de un tiovivo de 8 ft de diámetro, que gira a 12 rpm. ¿Cuánto se puede llenar el vaso antes de que se derrame? (*Consejo*: suponga que el vaso es mucho más pequeño que el radio del tiovivo).

P2.139 El depósito de líquido de la Figura P2.139 acelera hacia la derecha con su fluido moviéndose como un sólido rígido. (*a*) Calcule a_x en m/s^2. (*b*) ¿Por qué la solución del apartado (*a*) no depende de la densidad del fluido? (*c*) Determine la presión manométrica en el punto A si el fluido es glicerina a 20 °C.

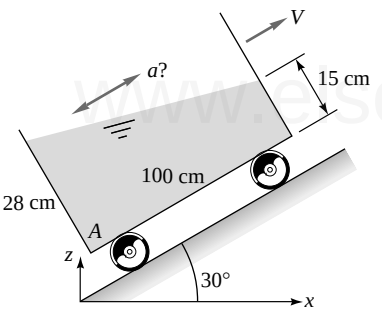
www.elsolucionario.net



P2.139

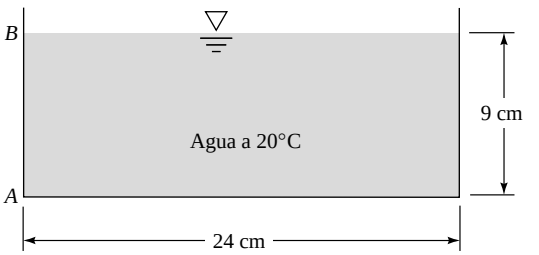
P2.140 Supongamos que el depósito elíptico de combustible del Problema 2.101 tiene 10 m de longitud y está lleno completamente con gasóleo (ρ = 890 kg/m^3). El depósito es empujado sobre una carretera horizontal. Considerando movimiento como sólido rígido, determine el valor y la dirección de la aceleración para la que (*a*) una superficie de presión constante se extiende desde el techo de la pared frontal al suelo de la pared trasera y (*b*) la parte trasera más alta se encuentra a una presión de 0,5 atm por debajo de la delantera.

P2.141 El mismo depósito del Problema 2.139 se mueve con aceleración constante sobre un plano inclinado de 30°, según se muestra en la Figura P2.141. Suponiendo movimiento como sólido rígido, calcule (*a*) el valor de la aceleración *a*, (*b*) si la aceleración es hacia arriba o hacia abajo y (*c*) la presión manométrica en el punto *A* si el fluido es mercurio a 20 °C.



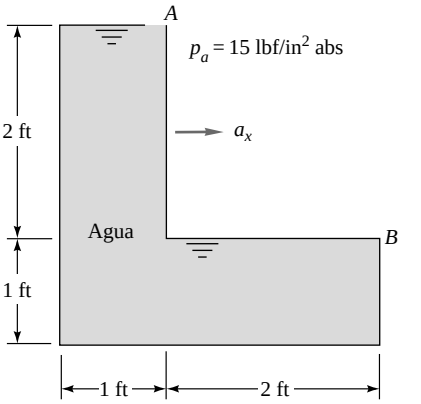
P2.141

P2.142 El depósito de agua de la Figura P2.142 tiene una anchura de 12 cm perpendicular al papel. Si el depósito se acelera como un sólido rígido a 6,0 m/s^2, calcule (*a*) la profundidad del agua en el lado *AB* y (*b*) la fuerza que la presión ejerce sobre el panel *AB*. Suponga que no se derrama agua.



P2.142

P2.143 El depósito de agua de la Figura P2.143 está lleno y abierto a la atmósfera por el punto *A*. ¿Para qué aceleración a_x en ft/s^2 la presión en el punto *B* será (*a*) la atmosférica y (*b*) cero absoluto?

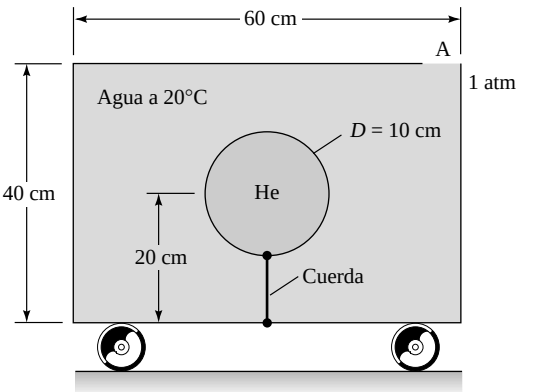


P2.143

P2.144 Se dispone de un cubo hueco de 22 cm de lado, lleno completamente con agua a 20 °C. La superficie superior del cubo es horizontal. Una de las esquinas superiores, el punto *A*, tiene un pequeño orificio a 1 atm de presión. La esquina diagonalmente opuesta sobre la cara superior es *B*. Determine y discuta las aceleraciones como sólido rígido para las que el agua del punto *B* comienza a cavitar considerando (*a*) movimiento horizontal y (*b*) movimiento vertical.

P2.145 Un depósito de pescado de 14 in de profundidad por 16 por 27 in tiene que transportarse en un vehículo cuya aceleración puede ser de hasta 6 m/s^2. ¿Cuál es la máxima profundidad de agua para la que no se producen derrames en el movimiento como sólido rígido? ¿Cuál es la mejor forma de colocar el depósito con respecto a la dirección del movimiento?

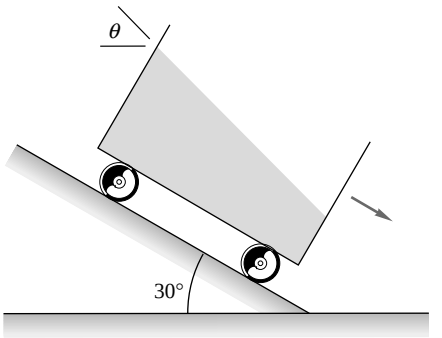
P2.146 El depósito de la Figura P2.146 está lleno de agua y dispone de un orificio de ventilación en *A*. Dentro del depósito se encuentra un globo de 10 cm de diámetro lleno de helio a 130 kPa, amarrado en el centro mediante una cuerda. Si el depósito acelera hacia la derecha a 5 m/s^2, ¿qué ángulo se inclinará el globo cuando se alcance el movimiento como sólido rígido? ¿Se inclinará a la derecha o a la izquierda?



P2.146

www.elsolucionario.net

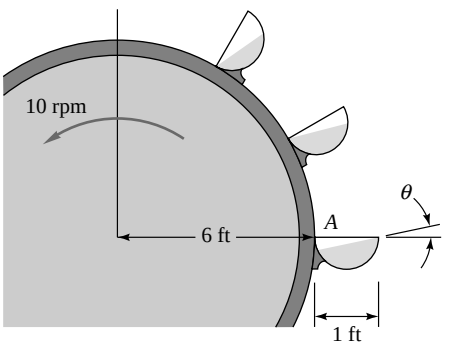
P2.147 El depósito de agua de la Figura P2.147 sufre una aceleración uniforme cuando rueda por un plano con 30° de inclinación. Si las ruedas no tienen rozamiento, ¿cuál es el ángulo θ? ¿Puede explicar este interesante resultado?



P2.147

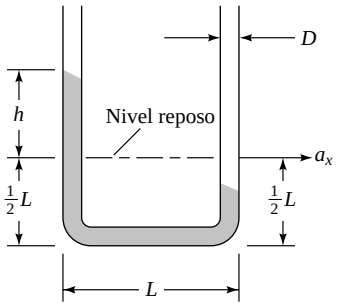
P2.148 Un niño sostiene un globo de helio atado con una cuerda. (*a*) El niño está quieto y de pronto acelera hacia adelante. En un sistema de referencia que se mueve con el niño, ¿cuál será la inclinación del globo, hacia delante o hacia atrás? Explique por qué. (*b*) El niño está sentado en un coche que está parado en un semáforo. El globo no está en contacto con ninguna parte del coche (asientos, techo, etc.) pero está sostenido por el niño mediante la cuerda. Todas las ventanas están cerradas. Cuando el semáforo se pone verde, el coche arranca. En un sistema de referencia que se mueve con el coche y el niño, ¿hacia dónde se inclinará el globo? Explique por qué. (*c*) Compre o pida prestado un globo de helio y realice el experimento para comprobar si las predicciones realizadas en los apartados (*a*) y (*b*) son correctas. En caso contrario, explique por qué.

P2.149 La noria de la Figura P2.149 tiene un radio de 6 ft y se emplea para elevar agua mediante sus paletas semicilíndricas de 1 ft de diámetro. Si la noria gira a 10 rpm, y se supone movimiento como sólido rígido, ¿cuál es el ángulo θ que forma la superficie del agua en la posición *A*?



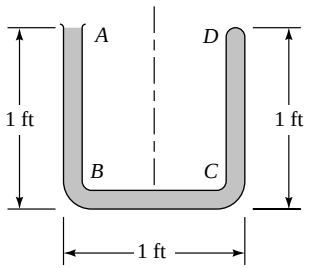
P2.149

P2.150 Se puede construir un acelerómetro barato, por un precio probablemente justo, mediante un tubo en U como el de la Figura P2.150. Si L = 18 cm y D = 5 mm, ¿cuánto valdrá h si a_x = 6 m/s²? ¿Puede ser lineal en a_x la escala de medida del tubo?



P2.150

P2.151 El tubo en U de la Figura P2.151 está abierto por su extremo *A* y cerrado por *D*. Si se acelera hacia la derecha con aceleración uniforme a_x, ¿qué valor de la aceleración hará que la presión en el punto *C* sea la atmosférica? El fluido es agua (S = 1,0).



P2.151

P2.152 Un cilindro abierto de 16 cm de diámetro y 27 cm de alto está lleno de agua. Calcule la velocidad de rotación como sólido rígido alrededor de su eje en rpm, para la que (*a*) se derramará un tercio del agua y (*b*) el agua llegará justo al borde.

P2.153 Supongamos que el tubo en U de la Figura P2.150 no se traslada sino que gira alrededor de su rama derecha a 95 rpm. ¿Cuál será el nivel h en la rama izquierda si L = 18 cm y D = 5 mm?

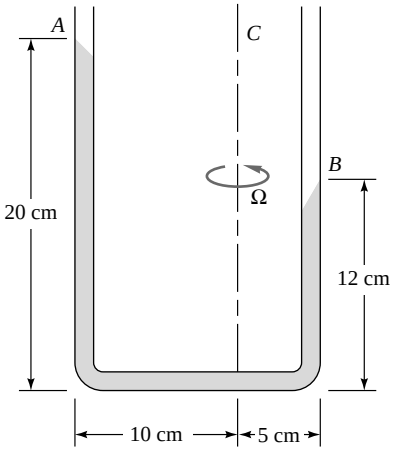
P2.154 Una lata muy profunda de 18 cm de diámetro contiene 12 cm de agua bajo 10 cm de aceite SAE 30. Si la lata gira como un sólido rígido alrededor de su eje central a 150 rpm, ¿cuál será la forma de las entrefases aire-aceite y agua-aceite? ¿Cuál será la máxima presión manométrica en la lata medida en pascales?

P2.155 ¿A qué velocidad de rotación uniforme alrededor de su eje *C* en rpm el tubo en U de la Figura P2.155 toma la configuración que se muestra? El fluido empleado es mercurio a 20 °C.

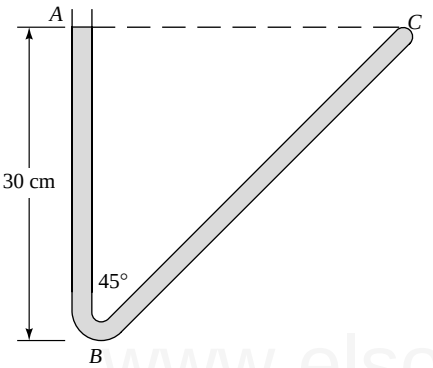
P2.156 Suponga que el tubo en U de la Figura P2.151 gira alrededor de su eje *DC*. Si el fluido es agua a 122 °F y la presión atmosférica absoluta es 2116 lbf/ft², ¿a qué velocidad de rotación el fluido del tubo comenzará a vaporizarse? ¿En qué punto del tubo ocurrirá?

P2.157 El tubo en V a 45° de la Figura P2.157 contiene agua y está abierto en *A* y cerrado en *C*. ¿Qué velocidad de rotación uniforme alrededor del eje *AB* en rpm hará que la presión sea igual en los puntos *B* y *C*? En esta condición, ¿en qué punto de la rama *BC* la presión es mínima?

www.elsolucionario.net



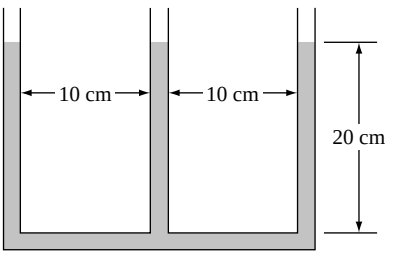
P2.155



P2.157

***P2.158** Se desea hacer el espejo parabólico de un telescopio de 3 m de diámetro hacienda girar vidrio fundido como sólido rígido hasta alcanzar la forma deseada y enfriándolo después. El foco del espejo está a una distancia de 4 m, medidos sobre su línea central. ¿Cuál es la velocidad de rotación del espejo adecuada, en rpm?

P2.159 El manómetro de tres ramas de la Figura P2.159 está lleno de agua hasta una altura de 20 cm. Todas las ramas son largas y tienen igual diámetro. Si el sistema gira a velocidad angular Ω alrededor del tubo central, (*a*) obtenga una fórmula para determinar el cambio de altura en los tubos; (*b*) determine la altura en cada tubo en centímetros si $\Omega = 120$ rpm. (*Consejo*: el tubo central debe proporcionar agua a los dos laterales).



P2.159

www.elsolucionario.net

Problemas conceptuales

C2.1 Se dispone de un cono hueco con un orificio de ventilación en su vértice junto con un cilindro también hueco, abierto en su parte superior y con la misma base que el cono. Se llenan los dos recipientes con agua. La *paradoja hidrostática* consiste en que ambos soportan la misma fuerza sobre su base, como consecuencia de la presión del agua, aunque el cono contiene un 67 por 100 menos. ¿Puede explicar la paradoja?

C2.2 ¿En la atmósfera real es posible que la temperatura *aumente* con la altura? ¿No implicaría esto que la presión del aire *aumentaría* hacia arriba? Explique la física de esta situación.

C2.3 Se dispone de una superficie curva formada por un arco de círculo bidimensional con un ángulo, profundidad y orientación arbitrarios. Demuestre que la fuerza de presión hidrostática resultante sobre esta superficie debe pasar por el centro de curvatura del arco.

C2.4 Se llena un vaso con agua hasta el 80 por 100 aproximadamente y se añade un gran cubo de hielo. Se marca el nivel de agua. El cubo de hielo, que tiene $S \Xi 0{,}9$, flota fuera del agua y comienza a derretirse. Si se desprecia el efecto de evaporación del agua, ¿el nivel del agua será mayor, igual o menor que antes?

C2.5 Un barco, que transporta una carga de acero, queda atrapado mientras navega en un pequeño lago. Los miembros de la tripulación quieren salir de allí pero no son capaces de alcanzar el borde superior de las paredes del lago. Un tripulante sugiere lanzar por la borda el acero del barco al lago, afirmando que así el barco subiría y sería posible alcanzar el borde. ¿Funcionará el plan?

C2.6 Se tiene un globo de masa *m* flotando de forma neutral en la atmósfera mientras transporta una persona en una cesta que conjuntamente tienen una masa $M > m$. Discuta la estabilidad de este sistema ante perturbaciones.

C2.7 Se tiene un globo de helio atado con una cuerda al asiento de un vehículo parado. Las ventanas están cerradas de forma que no hay aire en el interior. El vehículo acelera hacia delante. ¿Hacia dónde se inclinará el globo, hacia delante o hacia atrás? (*Consejo*: la aceleración produce un gradiente de presiones en el aire dentro del vehículo).

C2.8 Repita el análisis del Problema C2.7 si el vehículo se mueve a velocidad constante sobre una curva. ¿Se inclinará el globo hacia dentro o fuera de la curva?

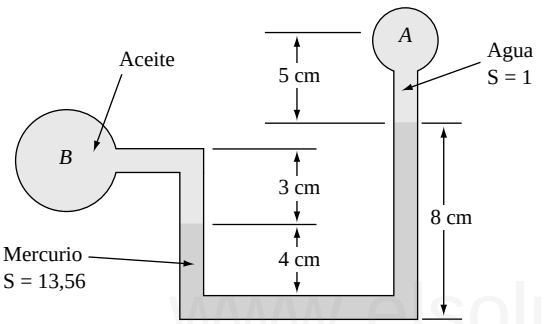
www.elsolucionario.net

Problemas del examen de fundamentos de ingeniería

FE2.1 Un manómetro localizado en un depósito de nitrógeno presurizado indica una presión manométrica de 28 pulgadas de mercurio. Si la presión atmosférica es 14,4 psia, ¿cuál es la presión absoluta del depósito?
(*a*) 95 kPa, (*b*) 99 kPa, (*c*) 101 kPa, (*d*) 194 kPa, (*e*) 203 kPa

FE2.2 En un día estándar a nivel del mar un sensor de presión, amarrado bajo la superficie del océano (S = 1,025), indica una presión absoluta de 1,4 MPa. ¿A qué profundidad se encuentra el instrumento?
(*a*) 4 m, (*b*) 129 m, (*c*) 133 m, (*d*) 140 m, (*e*) 2080 m

FE2.3 En la Figura FE2.3, si el aceite de la región *B* tiene una densidad relativa S = 0,8 y la presión absoluta en el punto *A* es 1 atm, ¿cuál es la presión absoluta en el punto *B*?
(*a*) 5,6 kPa, (*b*) 10,9 kPa, (*c*) 107 kPa, (*d*) 112 kPa, (*e*) 157 kPa



FE2.3

FE2.4 En la Figura FE2.3, si el aceite de la región *B* tiene una densidad relativa S = 0,8 y la presión absoluta en el punto *A* es 14 psia, ¿cuál es la presión absoluta en el punto *A*?
(*a*) 11 kPa, (*b*) 41 kPa, (*c*) 86 kPa, (*d*) 91 kPa, (*e*) 101 kPa

FE2.5 Un depósito de agua (S = 1,0) tiene una compuerta en su pared vertical de 5 m de altura y 3 m de anchura. El borde superior de la compuerta está 2 m por debajo de la superficie. ¿Cuál es la fuerza hidrostática sobre la compuerta?
(*a*) 147 kN, (*b*) 367 kN, (*c*) 490 kN, (*d*) 661 kN, (*e*) 1028 kN

FE2.6 En el Problema FE2.5, ¿a qué profundidad por debajo de la superficie está el centro de presiones de la fuerza hidrostática?
(*a*) 4,50 m, (*b*) 5,46 m, (*c*) 6,35 m, (*d*) 5,33 m, (*e*) 4,96 m

FE2.7 Una esfera sólida de 1 m de diámetro flota en la entrefase entre agua (S = 1,0) y mercurio (S = 13,56) de forma que el 40 por 100 está en el agua. ¿Cuál es la densidad relativa de la esfera?
(*a*) 6,02, (*b*) 7,28, (*c*) 7,78, (*d*) 8,54, (*e*) 12,56

FE2.8 Un globo de 5 m de diámetro contiene helio a 125 kPa de presión absoluta y 15 °C, y está amarrado en una atmósfera estándar a nivel del mar. Si la constante de los gases del helio es de 2077 $m^2/(s^2 \cdot K)$ y el peso del material del globo es despreciable, ¿cuál es la fuerza de flotación neta del globo?
(*a*) 67 N, (*b*) 134 N, (*c*) 522 N, (*d*) 653 N, (*e*) 787 N

FE2.9 Una barra de madera (S = 0,6) de sección cuadrada de 5 cm por 5 cm por 10 m de longitud, flota verticalmente en agua a 20 °C cuando se le colocan 6 kg de acero (S = 7,84) en uno de sus extremos. ¿A qué altura sobre la superficie del agua sobresale el otro extremo de la barra?
(*a*) 0,6 m, (*b*) 1,6 m, (*c*) 1,9 m, (*d*) 2,4 m, (*e*) 4,0 m

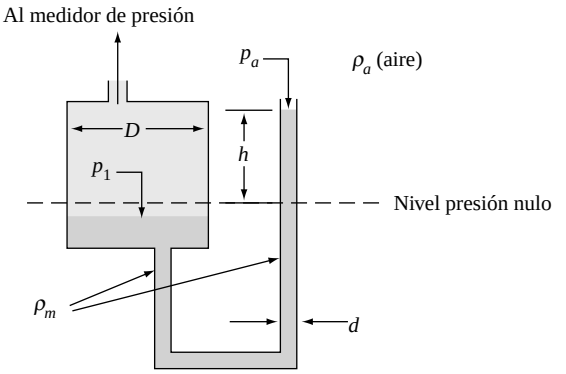
FE2.10 Un cuerpo en flotación será estable si
(*a*) su centro de gravedad está sobre su centro de flotación, (*b*) su centro de flotación está por debajo de la línea de flotación, (*c*) su centro de flotación está por encima de su metacentro, (*d*) su metacentro está por encima de su centro de flotación, (*e*) su metacentro está por encima de su centro de gravedad

Problemas extensos

PE2.1 Algunos manómetros se construyen como el de la Figura PE2.1, en el que uno de los lados es un gran depósito de diámetro *D* y el otro es un tubo delgado de diámetro *d* abierto a la atmósfera. De esta forma, la altura del líquido manométrico en el depósito se puede considerar constante. Este hecho tiene la ventaja de que sólo es necesario medir una de las dos alturas. El líquido manométrico tiene una densidad ρ_m y el aire ρ_a. Se puede despreciar el efecto de la tensión superficial. Cuando no hay diferencias de presión, la altura de los dos lados del manómetro es la misma, según indica la línea de puntos. La medida de la altura *h* con respecto al nivel nulo de presión se realiza según se indica a continuación. (*a*) Cuando se aplica presión en el lado izquierdo, el líquido en el depósito se reduce, mientras que la altura del tubo de la derecha aumenta para conservar la masa. Escriba una expresión exacta para p_{1manom}, teniendo en cuenta el movimiento de la superficie del depósito. La ecuación obtenida debería dar p_{1manom} en función de *h*, ρ_m, los parámetros físicos del problema, *h*, *d*, *D*, y la constante de la gravedad *g*. (*b*) Escriba una expresión aproximada para p_{1manom}, despreciando el cambio de altura en el depósito. (*c*) Suponiendo que en cierta aplicación *h* = 0,26 m, si p_a = 101.000 Pa y el líquido manométrico tiene una densidad de 820 kg/m^3, estime el radio *D*/*d* requerido para mantener el

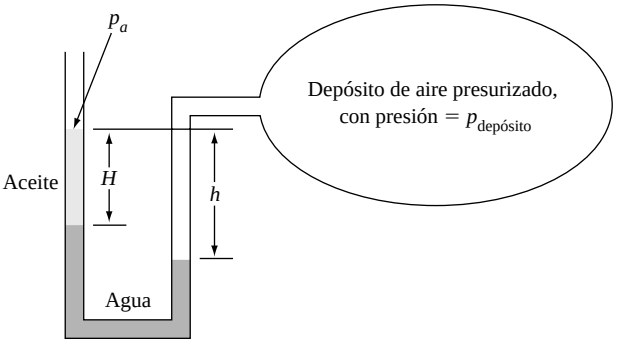
www.elsolucionario.net

error de la aproximación realizada en el apartado (*b*) dentro del 1 por 100 de la medida exacta del apartado (*a*). Repita el cálculo para un error del 0,1 por 100.



PE2.1

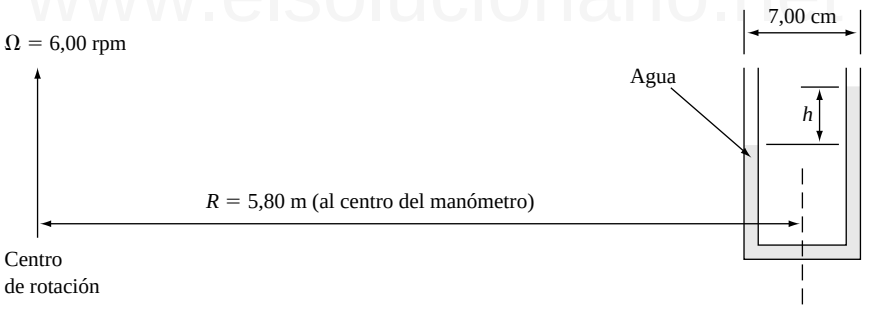
PE2.2 Un bromista ha añadido aceite de densidad relativa S_0 a la rama izquierda del manómetro de la Figura PE2.2. Incluso así, el tubo en U aún es útil como dispositivo para medir la presión. Según se muestra en la figura, el tubo se encuentra unido a un depósito presurizado. (*a*) Obtenga una expresión para *h* como función de *H* y el resto de los parámetros del problema. (*b*) Particularice el resultado obtenido en (*a*) cuando $p_{\text{depósito}} = p_a$. (*c*) Suponiendo que H = 5,0 cm, p_a es 101,2 kPa, $p_{\text{depósito}}$ es 1,82 kPa mayor que p_a, y S_0 = 0,85. Calcule *h* en centímetros, ignorando el efecto de la tensión superficial y despreciando el efecto de la densidad del aire.



PE2.2

PE2.3 El Profesor F. Dinámico ha llevado consigo su manómetro en U a montar en un tiovivo con su hijo (uno nunca sabe cuándo va a necesitar un manómetro). Según se muestra en la Figura PE2.3, el tiovivo gira a velocidad angular constante y las dos ramas del manómetro se encuentran a 7 cm de distancia. El centro del manómetro está a 5,8 m del eje de rotación. Determine la diferencia de alturas *h* de dos formas: (*a*) aproximadamente, suponiendo una traslación como sólido rígido con **a** igual a la aceleración media del manómetro; y (*b*) exactamente, usando la teoría de rotación como sólido rígido. ¿Es la aproximación adecuada?

www.elsolucionario.net



PE2.3

PE2.4 Un estudiante cuela un vaso de refresco en una montaña rusa. El vaso es cilíndrico, el doble de alto que de ancho y está lleno hasta el borde. El estudiante desea saber qué porcentaje de refresco debe beber antes de que se ponga en marcha la montaña rusa, de forma que no se derrame nada durante la peor maniobra, en la que se alcanza una aceleración de 0,55 *g* con ángulo de 45° bajo la horizontal. Realice el cálculo por él, despreciando el movimiento del fluido y suponiendo que el vaso permanece vertical durante todo el tiempo.

PE2.5 La *variación seca adiabática* (DALR, *Dry adiabatic lapse rate*) se define como el valor negativo del gradiente atmosférico de temperaturas, dT/dz, cuando la presión y la temperatura varían de forma isentrópica. Si se considera el aire como un gas ideal, DALR = $-dT/dz$ cuando $T = T_0(p/p_0)^a$, donde el exponente $a = (\gamma - 1)/\gamma$, $\gamma = c_p/c_v$ es la relación de calores específicos, y T_0 y p_0 son, respectivamente, la temperatura y presión a nivel del mar. (*a*) Suponiendo que la atmósfera está en equilibrio hidrostático, demuestre que la variación seca adiabática es constante y vale DALR = $g(\gamma - 1)/(\gamma R)$, donde *R* es la constante de los gases ideales para el aire. (*b*) Calcule el valor numérico del DALR para el aire en unidades de grado Celsius por kilómetro.

PE2.6 En líquidos «blandos» (con un módulo de compresibilidad β pequeño) puede ser necesario tener en cuenta la compresibilidad del líquido cuando se realizan los cálculos hidrostáticos. Una relación aproximada sería

$$dp \Xi \frac{\in}{\Leftarrow} dp = a^2\, dp \quad \text{o} \quad p \Xi p_0 + a^2(\Leftarrow \Phi \Leftarrow_0)$$

www.elsolucionario.net

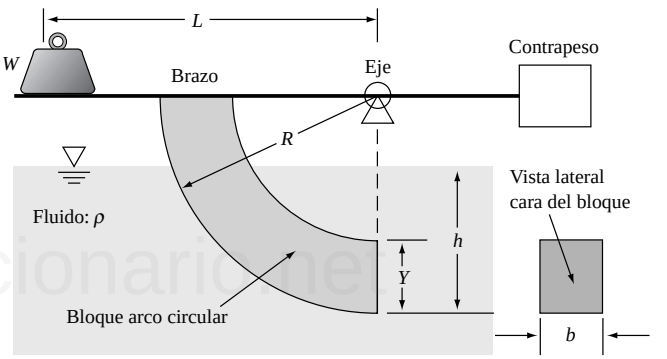
donde a es la velocidad del sonido y (p_0, ρ_0) son las condiciones en la superficie del líquido $z = 0$. Utilize esta aproximación para demostrar que la variación de densidad con la profundidad en un líquido blando es $\rho = \rho_0 e^{-gz/a^3}$ donde g es la aceleración de la gravedad y z positivo hacia arriba. Considere entonces una pared vertical de anchura b, que se extiende desde la superficie ($z = 0$) hasta una profundidad de $z = 2h$. Obtenga una expresión analítica para la fuerza hidrostática sobre la pared y compárela con el resultado incompresible $F = \rho_0 g h^2 b/2$. ¿Estará el centro de presiones por debajo de la posición incompresible $z = -2h/3$?

Proyectos de diseño

D2.1 Se desea tener un sistema flotante amarrado en el fondo, que produzca una fuerza no lineal en el amarre cuando el nivel de agua se eleve. La fuerza de diseño F sólo debe ser precisa en un rango de profundidades del mar entre 6 y 8 m, según se muestra en la tabla adjunta. Diseñe un sistema flotante que proporcione esta distribución de fuerzas. El sistema debe ser práctico (construido con materiales baratos y de construcción simple).

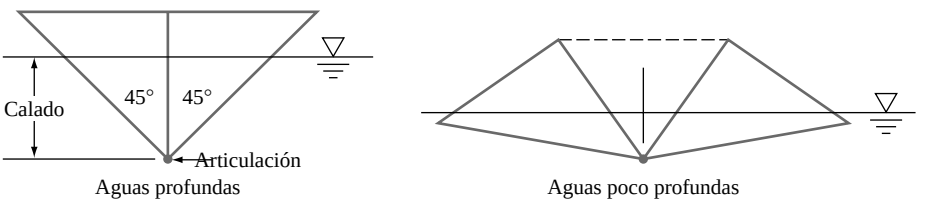
h, m	F, N	h, m	F, N
6,00	400	7,25	554
6,25	437	7,50	573
6,50	471	7,75	589
6,75	502	8,00	600
7,00	530		

D2.2 En la Figura D2.2 se muestra un instrumento de laboratorio empleado en muchas universidades. Su propósito es medir la fuerza hidrostática sobre la cara plana del bloque con forma de arco de círculo y compararla con el valor teórico dado para una profundidad h. El contrapeso se sitúa de forma que el brazo de equilibrado quede horizontal, cuando el bloque no esté sumergido. De esta forma se puede correlacionar la fuerza hidrostática con el peso W necesario para mantener horizontal el brazo. Demuestre que el instrumento es conceptualmente válido y obtenga después una fórmula de W como función de h y de los demás parámetros del sistema. Finalmente, sugiera los valores apropiados de los parámetros geométricos del instrumento y, para estos valores, represente gráficamente el valor del peso W en función de h.



D2.2

D2.3 La empresa *Leary Engineering Company* (véase *Popular Science*, noviembre 2000, pág. 14) ha propuesto un casco de barco con articulaciones que permitan darle una forma más plana para ser usado en aguas poco profundas. En la Figura D2.3 se representa una versión simplificada de este casco. En aguas profundas la sección transversal del casco es triangular, con un gran calado. En aguas poco profundas la articulación permite abrir el casco hasta un ángulo $\theta = 45°$. La línea de puntos indica que la proa y la popa estarían cerradas. Realice un estudio paramétrico de esta configuración para varios θ, suponiendo un peso razonable y la localización del centro de gravedad. Muestre cómo el calado, la altura metacéntrica y la estabilidad del barco varían al abrirse las articulaciones. Comente la eficacia de este concepto.



D2.3

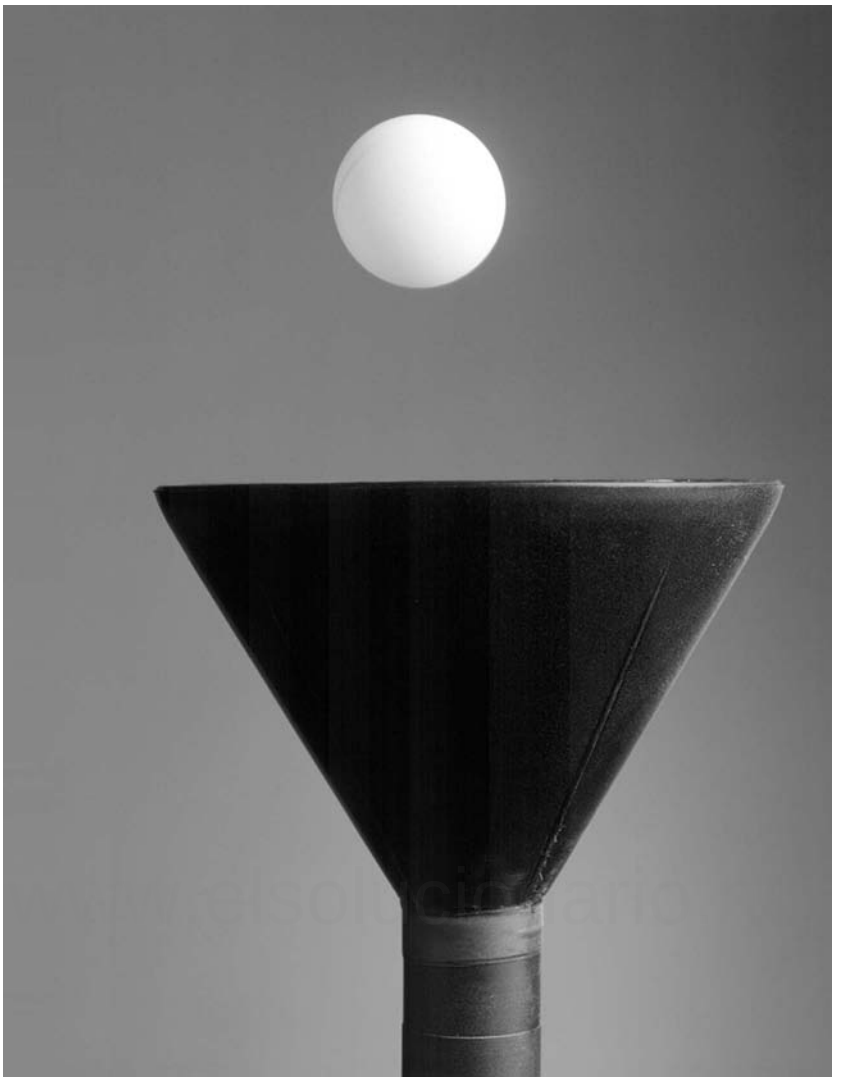
www.elsolucionario.net

Referencias

1. *U.S. Standard Atmosphere*, 1976, Government Printing Office, Washington, DC, 1976.
2. G. L. Pickard, *Descriptive Physical Oceanography*, Butterworth-Heinemann, Woburn, MA, 1990.
3. E. C. Tupper, *Introduction to Naval Architecture*, 3.ª ed., Butterworth-Heinemann, Woburn, MA, 1996.
4. D. T. Greenwood, *Principles of Dynamics*, 2.ª ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
5. R. I. Fletcher, «The Apparent Field of Gravity in a Rotating Fluid System», *Am. J. Phys.*, vol. 40, julio 1972, págs. 959-965.
6. National Committee for Fluid Mechanics Films, *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics*, M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1972.
7. J. P. Holman, *Experimental Methods for Engineers*, 6.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1993.
8. R. P. Benedict, *Fundamentals of Temperature, Pressure, and Flow Measurement*, 3.ª ed., Wiley, Nueva York, 1984.
9. T. G. Beckwith y R. G. Marangoni, *Mechanical Measurements*, 5.ª ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1993.
10. J. W. Dally, W. F. Riley y K. G. McConnell, *Instrumentation for Engineering Measurements*, Wiley, Nueva York, 1984.
11. E. N. Gilbert, «How Things Float», *Am. Math. Monthly*, vol. 98, núm. 3, 1991, págs. 201-216.
12. R. J. Figliola y D. E. Beasley, *Theory and Design for Mechanical Measurements*, 3.ª ed., Wiley, Nueva York, 2000.
13. R. W. Miller, *Flow Measurement Engineering Handbook*, 3.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1996.
14. L. D. Clayton, E. P. EerNisse, R. W. Ward y R. B. Wiggins, «Miniature Crystalline Quartz Electromechanical Structures», *Sensors and Actuators*, vol. 20, Nov. 15, 1989, págs. 171-177.
15. J. H. Bell et al., «Surface Pressure Measurement Using Luminescent Coatings», *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 33, 2001, págs. 155-206.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Una pelota de tenis de mesa suspendida por un chorro de aire. De acuerdo con el teorema de conservación de la cantidad de movimiento, que se estudia en este capítulo, para cambiar la dirección del flujo debe existir una fuerza. La pelota desvía el chorro, de modo que la fuerza resultante compensa su peso. (*Cortesía de Paul Silverman/Fundamental Photographs.*)

www.elsolucionario.net

Capítulo 3
Relaciones integrales para un volumen de control

Motivación. El movimiento de un fluido puede analizarse desde dos puntos de vista: (1) realizando una descripción detallada del flujo en cada punto (x, y, z) del campo fluido o (2) trabajando con una región finita del espacio, realizando un balance entre el fluido que entra y que sale de ella, y determinando los efectos netos, como la fuerza o el momento sobre un cuerpo o el cambio de energía total. La segunda técnica se conoce como análisis integral o de «volumen de control», y es el objeto del presente capítulo. La primera es el análisis «diferencial», que se desarrollará en el Capítulo 4.

En primer lugar desarrollaremos el concepto de volumen de control, al igual que se hace en un curso de termodinámica, y determinaremos la variación por unidad de tiempo de las propiedades del fluido, obteniendo como resultado el denominado *teorema del transporte de Reynolds*. A continuación aplicaremos este teorema a la masa, la cantidad de movimiento, el momento cinético y la energía, obteniendo así las cuatro relaciones básicas de la Mecánica de Fluidos para un volumen de control. El capítulo termina con una relación especial para el flujo no viscoso, sin adición de calor ni trabajo motor: la *ecuación de Bernoulli*. La ecuación de Bernoulli es un magnífico resultado de gran importancia histórica, pero es extremadamente restrictiva y siempre debe aplicarse cuidadosamente y con escepticismo al movimiento real (viscoso) de los fluidos.

3.1. LEYES BÁSICAS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

Es el momento de abordar seriamente el análisis de los flujos. Las aplicaciones fluidostáticas del Capítulo 2 eran, al menos en opinión del autor, más diversión que trabajo. Los problemas estáticos sólo requieren, básicamente, conocer la densidad del fluido y la posición de la superficie libre; sin embargo, en la mayoría de los problemas con flujos es necesario analizar un estado arbitrario de movimiento del fluido definido por la geometría, las condiciones de contorno y las leyes de la mecánica. Este capítulo y los dos siguientes presentan las tres técnicas básicas del análisis de los problemas de flujos arbitrarios:

1. Volumen de control, o análisis integral a gran escala (Capítulo 3).
2. Diferencial, o análisis a pequeña escala (Capítulo 4).
3. Experimental, o análisis dimensional (Capítulo 5).

Los tres métodos son aproximadamente iguales en importancia, pero el análisis con volúmenes de control, tratado en este capítulo, es válido para cualquier flujo, aunque a menudo se basa en propiedades «unidimensionales» o promediadas en el contorno, siendo una herramienta muy valiosa para el ingeniero de cara al análisis de los flujos. En principio, la descripción diferencial del Capítulo 4 también puede ser utilizada para cualquier problema; pero en la práctica sólo existen soluciones exactas para algunos pocos problemas, como el flujo en conductos rectos. No obstante, las ecuaciones diferenciales pueden resolverse de forma numérica y el floreciente campo de la Mecánica de Fluidos Computacional (CFD, *Computacional Fluid Dynamics*) [8] proporciona en la actualidad buenas estimaciones casi para cualquier geometría. Para terminar, el análisis dimensional del Capítulo 5 se puede aplicar a cualquier problema, ya sea analítico, numérico o experimental. Esta aproximación es particularmente útil para reducir el coste de la experimentación. El aná-

www.elsolucionario.net

lisis diferencial comenzó con Euler y Lagrange en el siglo XVIII, y el análisis dimensional dio sus primeros pasos con Lord Rayleigh a finales del siglo XIX, pero el método del volumen de control, aunque fue propuesto por Euler y utilizado más tarde por Osborne Reynolds a finales del siglo XIX, no se desarrolló sobre una base rigurosa como una herramienta analítica hasta la década de 1940.

Sistemas frente a volúmenes de control

Todas las leyes de la mecánica están escritas para *sistemas*, que se definen como cantidades arbitrarias de masa de identidad fija. Todo lo externo al sistema constituye el *entorno*, del que el sistema está separado por su *frontera* o *contorno*. Las leyes de la mecánica establecen lo que ocurre cuando hay una interacción entre el sistema y su entorno.

Primero, el sistema es una cantidad fija de masa, que designamos con m. Por ello, la masa del sistema se conserva y no cambia.[1] Esta ley de la mecánica tiene una expresión matemática muy simple, denominada *conservación de la masa*:

$$m_{\text{sist}} = \text{cte}$$

o

$$\frac{dm}{dt} = 0 \tag{3.1}$$

Ésto es tan obvio en los problemas de la mecánica de sólidos que a menudo nos olvidamos de ello. En Mecánica de Fluidos debemos prestar mucha atención a la conservación de la masa y asegurarnos que se cumple en nuestro análisis.

Segundo, si el entorno ejerce una fuerza resultante **F** sobre el sistema, la segunda ley de Newton expresa que la masa comenzará a acelerarse:[2]

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V}) \tag{3.2}$$

www.elsolucionario.net

En la Ecuación (2.12) vimos cómo se aplicaba esta relación a un elemento diferencial de un fluido viscoso e incompresible. En Mecánica de Fluidos, la segunda ley de Newton se denomina ley de conservación de la cantidad de movimiento o, alternativamente, ecuación de la cantidad de movimiento. Nótese que se trata de una ley vectorial que implica tres ecuaciones escalares $F_x = ma_x$, $F_y = ma_y$ y $F_z = ma_z$.

Tercero, si el entorno ejerce un momento resultante **M** respecto al centro de masas del sistema, habrá un efecto de rotación

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} \tag{3.3}$$

donde $\mathbf{H} = \mathrm{Z}(\mathbf{r} \times \mathbf{V})\delta m$ es el momento cinético, o momento de la cantidad de movimiento, del sistema con respecto a su centro de masas. Aquí denominaremos la Ecuación (3.3) ley de conservación del momento cinético, o alternativamente, ecuación del momento cinético. Nótese que se trata también de una ecuación vectorial que implica tres ecuaciones escalares de la forma $M_x = dH_x/dt$.

Para una masa y un momento arbitrarios, **H** es muy complicado y contiene nueve términos (véase, por ejemplo, Referencia [1]). En dinámica elemental sólo suele considerarse la rotación como sólido rígido alrededor de un eje x fijo, en cuyo caso, la Ecuación (3.3) se reduce a

$$M_x = I_x \frac{d}{dt}(\varnothing_x) \tag{3.4}$$

---

[1] Estamos suponiendo que no hay reacciones nucleares, en las que la masa se puede convertir en energía.

[2] Estamos suponiendo que no hay efectos relativistas, en cuyo caso habría que modificar la segunda ley de Newton.

www.elsolucionario.net

donde ω_x es la velocidad angular del cuerpo e I_x es su momento de inercia másico con respecto al eje *x*. Desgraciadamente, los sistemas fluidos no son rígidos y raramente se pueden aplicar relaciones tan simples, como veremos en la Sección 3.5.

Cuarto, si se comunica un calor δQ al sistema o éste realiza un trabajo δW sobre su entorno, la energía del sistema debe cambiar en una cantidad *dE* de acuerdo con la ecuación de conservación de la energía, o primera ley de la termodinámica:

$$\delta Q - \delta W = dE$$

o

$$\dot{Q} \Phi \dot{W} = \frac{dE}{dt} \tag{3.5}$$

Igual que la conservación de la masa, Ecuación (3.1), ésta es una relación escalar que sólo tiene una componente.

Finalmente, la segunda ley de la termodinámica relaciona los cambios de entropía *dS* con el calor añadido *dQ* y la temperatura absoluta *T*:

$$dS \, \mathrm{B} \, \frac{\delta Q}{T} \tag{3.6}$$

Esta relación también es válida para un sistema y puede expresarse para un volumen de control, pero no tiene apenas aplicaciones prácticas en Mecánica de Fluidos excepto para analizar los detalles de las pérdidas por fricción en los flujos (véase Sección 9.5).

Todas estas leyes incluyen propiedades termodinámicas y, por tanto, deben ser complementadas con las ecuaciones de estado $p = p(\rho, T)$ y $e = e(\rho, T)$ para el fluido particular que se estudia, como se muestra en la Sección 1.6. Aunque la Termodinámica no es la materia principal de este libro, su importancia es esencial para el estudio general de la Mecánica de Fluidos. En particular, la Termodinámica es crucial para los flujos compresibles, Capítulo 9. Por ello, el lector debería repasar la primera ley de la Termodinámica y las ecuaciones de estado, como se discute en las Referencias 6 y 7.

El propósito de este capítulo es aplicar nuestras cuatro leyes básicas a volúmenes de control, apropiados para el análisis de los flujos a escala macroscópica:

1. Conservación de la masa (Sección 3.3).
2. Conservación de la cantidad de movimiento (Sección 3.4).
3. Conservación del momento cinético (Sección 3.5).
4. Ecuación de la energía (Sección 3.6).

Siempre que sea necesario para completar el análisis, introduciremos una o más relaciones de estado del tipo de la ecuación de los gases perfectos.

Las Ecuaciones (3.1) a (3.6) se aplican tanto a sistemas sólidos como fluidos. Son ideales para la mecánica de sólidos, en la que seguimos siempre al mismo sistema, que representa el objeto que estamos diseñando o construyendo. Por ejemplo, seguimos a la viga a medida que se deflecta por acción de una carga. Seguimos a un pistón en su movimiento oscilatorio. Seguimos a una sonda espacial camino de Marte.

Pero los sistemas fluidos no demandan esa atención concentrada. Es muy raro que nos interese seguir la trayectoria de una partícula fluida concreta. En lugar de esto, es muy probable que el fluido sea el entorno de nuestro objeto y que deseemos conocer la interacción mutua. En los tres ejemplos citados anteriormente, desearíamos conocer las cargas o fuerzas del viento sobre la viga, la presión del fluido sobre el pistón y la sustentación y resistencia de la sonda espacial. Esto requiere que las leyes básicas sean reescritas para poderlas aplicar a una *región* específica en las proximidades de nuestro objeto. En otras palabras, lo que les ocurre a las partículas fluidas del viento lejos de la viga es de muy poco interés para el proyectista de la viga. Es el punto de vista del usuario el que determina la necesidad del análisis de volúmen de control de este capítulo.

Al analizar un volumen de control, modificamos las leyes de un sistema para aplicarlas a una región específica que el sistema puede ocupar en un instante determinado, con independencia de que el sistema permanezca o no en esa región. Las leyes básicas se reformulan para ser aplicadas a esta región particular, de-

www.elsolucionario.net

nominada volumen de control. Todo lo que se necesita saber es el campo fluido en esa región y a menudo basta con alguna simplificación, como la de flujo uniforme a la entrada o a la salida. Las condiciones del flujo lejos del volumen de control son entonces irrelevantes. La técnica necesaria para hacer este análisis local es el objeto del presente capítulo.

Flujo volumétrico y flujo másico

En todos los análisis de este capítulo es necesario evaluar el flujo volumétrico o caudal Q o el flujo másico $\dot{m}$ que atraviesa una superficie (imaginaria) definida en el flujo.

Supongamos que la superficie S de la Figura 3.1*a* es algún tipo de malla (imaginaria) a través de la cual el fluido pasa sin resistencia. ¿Cuál es el volumen de fluido que pasa a través de S por unidad de tiempo? Si, como suele ocurrir, $\mathbf{V}$ varía con la posición, necesitamos integrar sobre la superficie elemental dA de la Figura 3.1*a*. También suele ocurrir que $\mathbf{V}$ pasa a través de dA formando un ángulo θ con su normal. Si llamamos $\mathbf{n}$ al vector unitario normal a dA, la cantidad de fluido que atraviesa dA en el tiempo dt es el volumen del paralelepípedo representado en la Figura 3.1*b*:

$$d\forall = V\,dt\,dA\cos\theta = (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA\,dt$$

La integral de $d\forall/dt$ es el flujo volumétrico o caudal Q que atraviesa la superficie S:

$$Q = \int_S (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA = \int_S V_n\,dA \tag{3.7}$$

Podemos reemplazar $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$ por su equivalente, V_n, que es la componente de $\mathbf{V}$ ortogonal a dA, pero el uso del producto escalar permite asociar un signo a Q que distingue entre los flujos que entran y salen. Por convención, en este libro se considera positivo el vector unitario $\mathbf{n}$ normal *hacia fuera*. De esta forma, $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$ representa un flujo de salida si es positivo y un flujo de entrada si es negativo. Esta convención será extremadamente útil cuando se calculen los flujos volumétricos y másicos en las secciones siguientes.

Multiplicando el flujo volumétrico por la densidad obtenemos el flujo o gasto másico $\dot{m}$. Si la densidad varía sobre la superficie, debe ser parte de la integral, lo que conduce a

$$\dot{m} = \int_S \rho(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA = \int_S \rho V_n\,dA$$

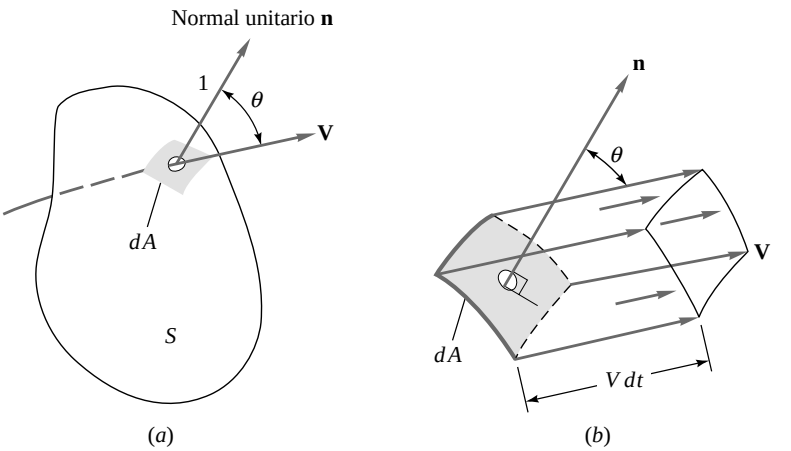


Figura 3.1. Flujo volumétrico a través de una superficie: (*a*) área infinitesimal dA sobre la superficie, (*b*) el volumen barrido a través de dA es igual a $V\,dt\,dA\cos\theta$.

www.elsolucionario.net

Si tanto la velocidad como la densidad son constantes sobre la superficie *S*, se obtiene una expresión muy sencilla:

Aproximación unidimensional: $\dot{m} = \rho Q = \rho AV$

3.2. TEOREMA DEL TRANSPORTE DE REYNOLDS

Para convertir el análisis de un sistema en el análisis de un volumen de control debemos utilizar nuestras matemáticas para poder aplicar las leyes básicas a regiones específicas en lugar de a masas concretas. Esta conversión se consigue mediante el llamado *teorema del transporte de Reynolds* y se puede aplicar a todas las leyes básicas. Examinando estas leyes básicas, (3.1) a (3.3) y (3.5), vemos que todas se refieren a derivadas temporales de propiedades fluidas *m*, **V**, **H** y *E*. Por tanto, lo que necesitamos es relacionar la derivada temporal de una propiedad del sistema con la variación de dicha propiedad dentro de una región concreta.

La fórmula de conversión difiere ligeramente según se trate de volúmenes fijos, móviles o deformables. La Figura 3.2 ilustra los tres casos. El volumen de control fijo de la Figura 3.2*a* encierra una región estacionaria, de interés para el proyectista de la tobera. La superficie de control es un concepto abstracto y no obstruye de ninguna forma al flujo. Corta al chorro que sale de la tobera, la rodea y corta de nuevo por los tornillos de sujeción y por el fluido que circula por el interior de aquélla. Este volumen de control particular resalta los esfuerzos de los tornillos de sujeción, reacciones que forman parte de las fuerzas aplicadas en la ecuación de cantidad de movimiento. En este sentido, el volumen de control recuerda al concepto de *cuerpo libre*, que se aplica a los sistemas en mecánica de sólidos.

La Figura 3.2*b* muestra un volumen de control móvil. Aquí el interés se centra en el barco, no en el océano, de forma que el volumen de control se mueve con el barco a la velocidad de éste *V*. El volumen de control tiene volumen fijo, pero hay que tener en cuenta el movimiento relativo entre el agua y el barco. Si *V* es constante, este movimiento relativo tendrá una configuración estacionaria, lo cual simplifica el análisis.[3] Si *V* es variable, el movimiento relativo será no estacionario, de forma que habrá dependencia temporal en los resultados y en la ecuación de cantidad de movimiento aparecerán ciertos términos que reflejarán el carácter no inercial (acelerado) del sistema de referencia.

La Figura 3.2*c* muestra un volumen de control deformable. Ha de tenerse en cuenta la variación del movimiento relativo en el contorno, y también deberá entrar en el análisis el cambio de forma del volumen de control. Comenzaremos por estudiar el caso del volumen de control fijo y consideraremos más adelante los otros como temas avanzados.

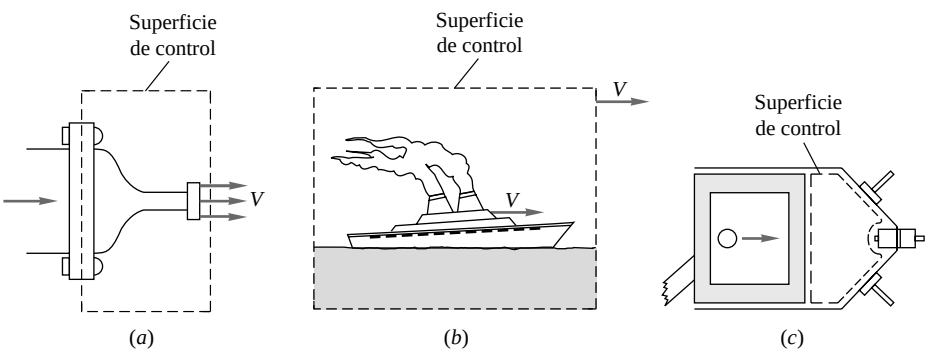


Figura 3.2. Volúmenes de control fijos, móviles y deformables: (*a*) volumen de control fijo para el análisis de fuerzas sobre una tobera, (*b*) volumen de control móvil con el barco para analizar su resistencia, (*c*) volumen de control deformable dentro de un cilindro para analizar transitorios de presión.

[3] Un *túnel aerodinámico* con una maqueta fija simula el flujo alrededor de un cuerpo en movimiento en el seno de un fluido. Un *canal hidrodinámico* o un *tanque de arrastre* usa un modelo en movimiento para simular la misma situación.

www.elsolucionario.net

Volumen de control fijo unidimensional

Como primer ejemplo, consideremos un conducto o tubo de corriente con flujo casi unidimensional $V = V(x)$, como muestra la Figura 3.3. El volumen de control seleccionado es la región de conducto entre la sección *a* y la sección *b*, que coincide exactamente con el sistema 2 en un instante determinado *t*. En el instante $t + dt$, el sistema 2 ha comenzado a salir del volumen de control y una pequeña parte del sistema 1 ha entrado por la izquierda. Las áreas rayadas muestran un volumen saliente $A_b V_b\, dt$ y un volumen entrante $A_a V_a\, dt$.

Sea ahora *B* una propiedad cualquiera del fluido (energía, cantidad de movimiento, etc.) y sea $\beta = dB/dm$ el *valor intensivo* o cantidad *B* por unidad de masa de una pequeña porción de fluido. La cantidad total de *B* en el volumen de control es

$$B_{VC} = \int_{VC} \rho\, d\mathcal{V} \qquad \rho = \frac{dB}{dm} \tag{3.8}$$

donde $\rho\, d\mathcal{V}$ es la masa de un elemento diferencial de fluido. Queremos relacionar las variaciones de B_{VC} con las variaciones de *B* en el sistema 2, que coincide con el volumen de control en el instante *t*. La derivada temporal de B_{VC} está definida por la expresión

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(B_{VC}) &= \frac{1}{dt} B_{VC}(t+dt) - \frac{1}{dt} B_{VC}(t) \\ &= \frac{1}{dt}[B_2(t+dt) - (\rho\, d\mathcal{V})_{sal} + (\rho\, d\mathcal{V})_{ent}] - \frac{1}{dt}[B_2(t)] \\ &= \frac{1}{dt}[B_2(t+dt) - B_2(t)] - (\rho A V)_{sal} + (\rho A V)_{ent}\end{aligned}$$

El primer término del segundo miembro es la variación temporal de *B* dentro del sistema 2 en el instante en que ocupa el volumen de control. Reagrupando la Ecuación (3.8) obtenemos la fórmula de conversión de-

www.elsolucionario.net

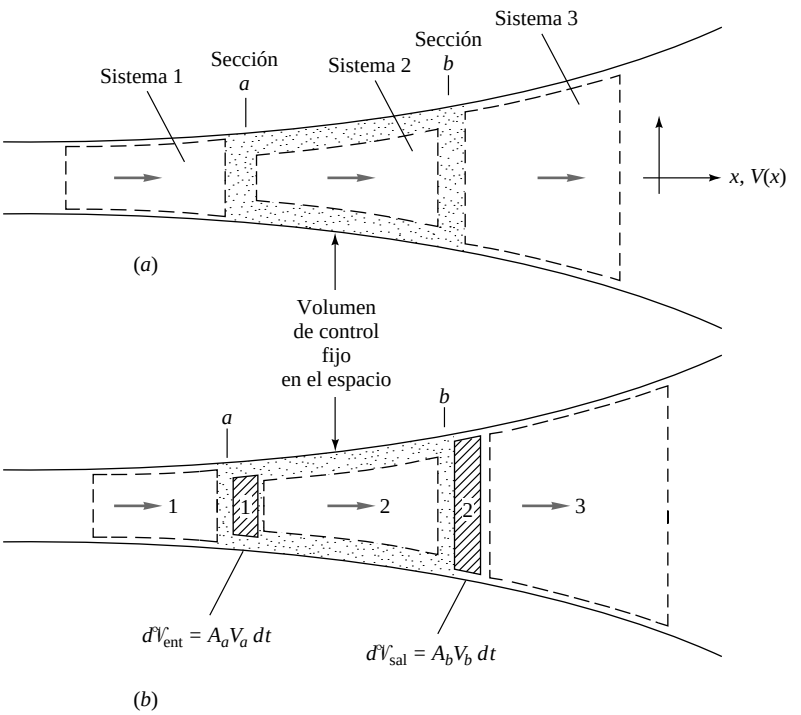


Figura 3.3. Ejemplo de flujos de entrada y salida cuando pasan tres sistemas a través de un volumen de control: (*a*) el sistema 2 ocupa el volumen de control en el instante *t*, (*b*) en el instante $t + dt$ el sistema 2 comienza a salirse y entra el sistema 1.

www.elsolucionario.net

seada para relacionar las variaciones de cualquier propiedad B de un sistema concreto en movimiento unidimensional con lo que ocurre en el volumen de control fijo que en cierto instante encierra el sistema:

$$\frac{d}{dt}(B_{\text{sist}}) = \frac{d}{dt}\left(\int_{\text{VC}} \rho\, d\mathcal{V}\right) + (\rho AV)_{\text{sal}} - (\rho AV)_{\text{ent}} \tag{3.9}$$

Esta expresión es el teorema del transporte de Reynolds en forma unidimensional y para un volumen de control fijo. Los tres términos del segundo miembro son, respectivamente:

1. Variación temporal de B dentro del volumen de control.
2. Flujo de B hacia el exterior a través de la superficie de control.
3. Flujo de B hacia el interior a través de la superficie de control.

Si el flujo es estacionario, el primer término se anula. La Ecuación (3.9) puede generalizarse fácilmente a una configuración arbitraria del flujo, en la forma siguiente.

Volumen de control fijo arbitrario

La Figura 3.4 muestra un volumen de control fijo cualquiera por el que pasa un flujo arbitrario. La única complicación adicional es que hay zonas de entrada y salida variables a lo largo de la superficie de control. En general, cada elemento diferencial de área dA de la superficie tendrá una velocidad diferente $\mathbf{V}$ que formará un ángulo θ también distinto con el vector local normal a dA. Ciertas áreas elementales tendrán flujos volumétricos de entrada $(VA\cos\theta)_{\text{ent}}dt$, y otros tendrán flujos de salida $(VA\cos\theta)_{\text{sal}}dt$, como se ve en la Figura 3.4. Parte de la superficie puede corresponder a líneas de corriente ($\theta = 90°$) o a paredes sólidas ($\mathbf{V} = 0$) por las que no hay entradas ni salidas. La Ecuación (3.9) se generaliza a

$$\boxed{\frac{d}{dt}(B_{\text{sist}}) = \frac{d}{dt}\left(\int_{\text{VC}} \rho\, d\mathcal{V}\right) + \int_{\text{SC}} \rho V\cos\theta\, dA_{\text{sal}} - \int_{\text{SC}} \rho V\cos\theta\, dA_{\text{ent}}} \tag{3.10}$$

www.elsolucionario.net

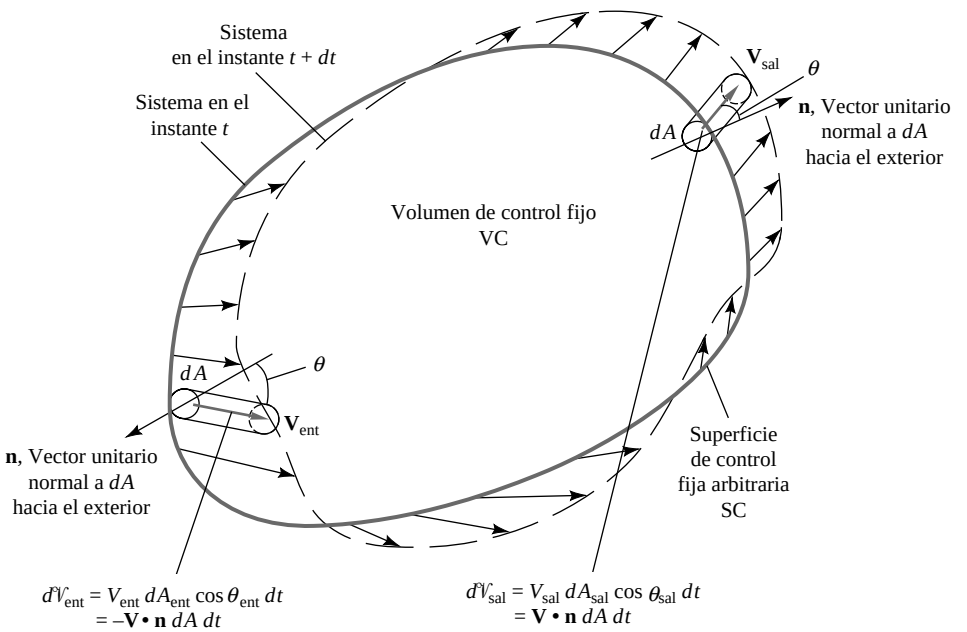


Figura 3.4. Generalización de la Figura 3.3 a un volumen de control arbitrario en una configuración de flujo arbitraria.

www.elsolucionario.net

Esta expresión es el teorema del transporte de Reynolds para un volumen de control fijo arbitrario. Cuando la propiedad B es la masa, la cantidad de movimiento, el momento cinético o la energía tenemos las leyes básicas en forma de volumen de control o forma integral. Nótese que las tres integrales que aparecen están relacionadas con la propiedad intensiva β. Como el volumen de control está fijo en el espacio, los volúmenes elementales $d\mathcal{V}$ no varían con el tiempo, de forma que la derivada temporal que aparece en el segundo miembro se anulará a menos que β o ρ varíen con el tiempo (flujo no estacionario).

La Ecuación (3.10) expresa el resultado esencial de que la derivada temporal de un sistema es igual a la variación dentro del volumen de control más el flujo de salida a través de la superficie de control menos el flujo de entrada a través de la superficie de control. La magnitud B (o β) puede ser cualquier propiedad vectorial o escalar del fluido. Existen dos formas alternativas para expresar los flujos. En primer lugar, tengamos en cuenta que $V \cos \theta$ es la componente de V perpendicular al elemento de área de la superficie de control. Así, podemos escribir

$$\text{Términos de flujo} = \int_{SC} \rho V_n \, dA_{sal} - \int_{SC} \rho V_n \, dA_{ent} = \int_{SC} \rho \, d\dot{m}_{sal} - \int_{SC} \rho \, d\dot{m}_{ent} \tag{3.11a}$$

donde $d\dot{m} = \rho V_n \, dA$ es el flujo másico diferencial a través de la superficie. La expresión (3.11a) ayuda a entender qué es lo que estamos calculando.

La segunda alternativa ofrece las ventajas de la elegancia y la compacidad. Si definimos **n** como el vector unitario normal *hacia el exterior* en cualquier punto de la superficie de control, entonces $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = V_n$ para el flujo saliente y $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -V_n$ para el flujo entrante. Por tanto, los términos del flujo se pueden representar por medio de integrales simples que incluyen a $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ tanto para flujos salientes positivos como entrantes negativos:

$$\text{Términos de flujo} = \int_{SC} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \tag{3.11b}$$

La forma compacta del teorema del transporte de Reynolds es, pues,

$$\boxed{\frac{d}{dt}(B_{sist}) = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \rho \, d\mathcal{V}\right) + \int_{SC} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA} \tag{3.12}$$

Esta expresión es muy elegante pero sólo es útil en ocasiones, cuando el sistema de coordenadas está adaptado idealmente al volumen de control escogido. Por otra parte, los cálculos son más sencillos cuando sumamos los flujos salientes de B y restamos los flujos entrantes, como en (3.10) o (3.11a).

El término de derivada temporal puede ser escrito en su forma equivalente

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \rho \, d\mathcal{V}\right) = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) d\mathcal{V} \tag{3.13}$$

para un volumen de control fijo, ya que los elementos de volumen no varían con el tiempo.

Volumen de control moviéndose a velocidad constante

Si el volumen de control se mueve con velocidad uniforme $\mathbf{V}_s$, como en la Figura 3.2b, un observador fijo al volumen de control verá al fluido atravesar la superficie de control con una velocidad relativa $\mathbf{V}_r$, definida por

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{V} - \mathbf{V}_s \tag{3.14}$$

donde **V** es la velocidad del fluido respecto al mismo sistema de referencia para el que la velocidad del volumen de control es $\mathbf{V}_s$. Nótese que en la Ecuación (3.14) hay una diferencia de vectores. Los términos de

www.elsolucionario.net

flujo serán proporcionales a $\mathbf{V}_r$, pero la integral de volumen de la Ecuación (3.12) permanece igual porque el volumen de control se mueve sin deformarse. El teorema del transporte de Reynolds en este caso de movimiento uniforme del volumen de control queda

$$\frac{d}{dt}(B_{\text{sist}}) = \frac{d}{dt}\left(\int_{\text{VC}} \rho\, d\forall\right) + \int_{\text{SC}} \rho(\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n})\, dA \tag{3.15}$$

que se reduce a la Ecuación (3.12) si $\mathbf{V}_s \equiv 0$.

Volumen de control de forma constante para velocidad variable[4]

Si el volumen de control se mueve con una velocidad $\mathbf{V}_s(t)$, pero conservando su forma, los elementos de volumen no cambiarán con el tiempo, aunque la velocidad relativa $\mathbf{V}_r = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{V}_s(t)$ queda algo más complicada. La Ecuación (3.15) sigue siendo válida para este caso, aunque el cálculo de la integral puede ser muy laborioso.

Volumen de control con deformación y movimiento arbitrarios[5]

La situación más general se presenta cuando el volumen de control se mueve y deforma arbitrariamente, como ilustra la Figura 3.5. El flujo de volumen a través de la superficie de control es de nuevo proporcional a la velocidad relativa normal $\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n}$, como en la Ecuación (3.15). Sin embargo, como la superficie de control se deforma, con velocidad $\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_s(\mathbf{r}, t)$, la velocidad relativa $\mathbf{V}_r = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{V}_s(\mathbf{r}, t)$ puede ser una función complicada, aunque la integral del flujo sea la misma que en la Ecuación (3.15). Por otra parte, debe tenerse en cuenta que los elementos de volumen de la integral de volumen de la Ecuación (3.15) se distor-

www.elsolucionario.net

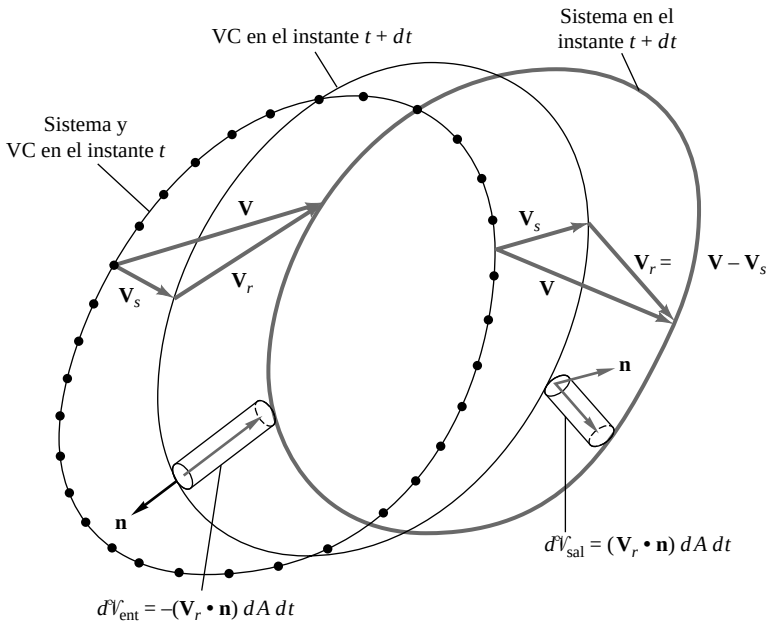


Figura 3.5. Efectos de las velocidades relativas entre el sistema y el volumen de control cuando ambos se mueven y se deforman. La frontera del sistema se mueve con velocidad $\mathbf{V}$ y la superficie de control lo hace con velocidad $\mathbf{V}_s$.

[4] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.
[5] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

sionan con el tiempo. Por ello, la derivada temporal debe ser tomada *después* de la integración. Para un volumen de control deformable, el teorema del transporte adopta la forma

$$\frac{d}{dt}(B_{\text{sist}}) = \frac{d}{dt}\left(\int_{\text{VC}} \rho\, d\forall\right) + \int_{\text{SC}} \rho(\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n})\, dA \tag{3.16}$$

Éste es el caso más general, que podemos comparar con la forma correspondiente para un volumen de control fijo

$$\frac{d}{dt}(B_{\text{sist}}) = \int_{\text{VC}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho)\, d\forall + \int_{\text{SC}} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA \tag{3.17}$$

La Ecuación (3.16) del volumen de control móvil y deformable sólo contiene dos complicaciones: (1) la derivada temporal de la integral triple debe ser tomada fuera de la integral, y (2) la segunda integral involucra velocidades *relativas* $\mathbf{V}_r$ entre el fluido y la superficie de control. Estas diferencias y las sutilezas matemáticas se entenderán mejor con ejemplos.

Aproximaciones unidimensionales al término de flujo

En muchas aplicaciones, el flujo que atraviesa la superficie de control en ciertas entradas y salidas es aproximadamente *unidimensional*; esto es, las propiedades del flujo son casi uniformes a través de las secciones transversales de entrada y salida. Para un volumen de control fijo, la integral de superficie de la Ecuación (3.12) se reduce a una suma de productos positivos (salida) y negativos (entrada) de las propiedades de cada sección:

www.elsolucionario.net

$$\frac{d}{dt}(B_{\text{sist}}) = \frac{d}{dt}\left(\int_{\text{VC}} \rho\, dm\right) + \sum_{\text{salidas}} \beta_i \dot{m}_i\,|_{\text{sal}} - \sum_{\text{entradas}} \beta_i \dot{m}_i\,|_{\text{ent}} \quad \text{donde} \quad \dot{m}_i = \rho_i A_i V_i \tag{3.18}$$

En opinión del autor, ésta es una forma atractiva de llevar a cabo un análisis de volumen de control sin utilizar la notación del producto escalar. Un ejemplo de flujos unidimensionales se presenta en la Figura 3.6.

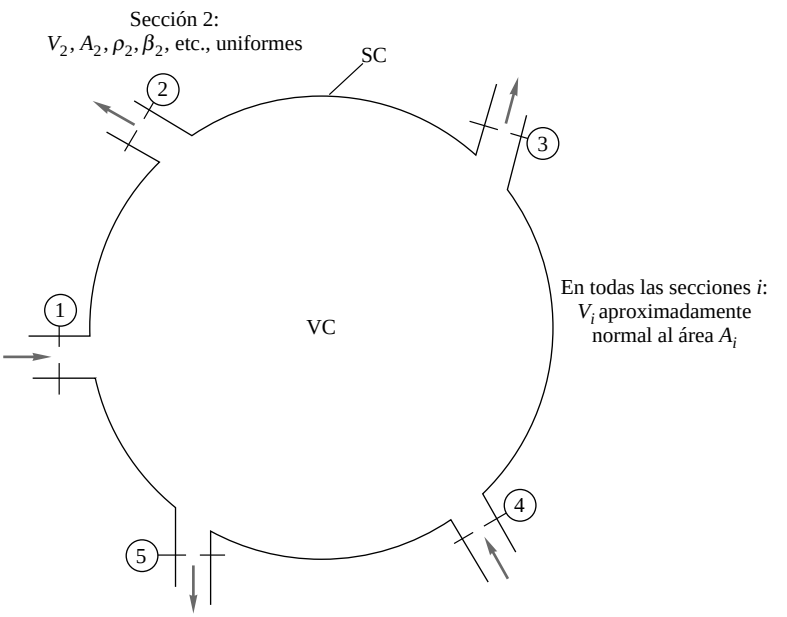


Figura 3.6 . Volumen de control con entradas y salidas unidimensionales.

www.elsolucionario.net

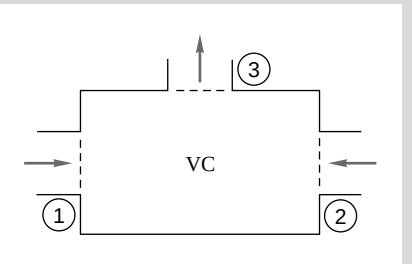
Hay flujos de entrada en las secciones 1 y 4 y de salida en las secciones 2, 3 y 5. En este problema particular, la Ecuación (3.18) sería

$$\frac{d}{dt}(B_{\text{sist}}) = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \rho e\, dm\right) + \rho_2 (eAV)_2 + \rho_3 (eAV)_3 + \rho_5 (eAV)_5$$
$$\Phi \rho_1 (eAV)_1 \Phi \rho_5 (eAV)_5 \qquad (3.19)$$

sin contribución de ninguna otra parte de la superficie de control, donde no hay flujo.

EJEMPLO 3.1

Un volumen de control fijo tiene tres secciones unidimensionales en el contorno, como se muestra en la Figura E3.1. El flujo es estacionario dentro del volumen de control. Las propiedades del flujo en cada sección están tabuladas a continuación. Determine la variación temporal de energía del sistema que ocupa en este instante el volumen de control.



E3.1

www.elsolucionario.net

Sección	Tipo	ρ, kg/m³	V, m/s	A, m²	e, J/kg
1	Entrada	800	5,0	2,0	300
2	Entrada	800	8,0	3,0	100
3	Salida	800	17,0	2,0	150

Solución

- *Diagrama del sistema*. La Figura E3.1 presenta dos flujos de entrada, 1 y 2, y uno de salida, 3.
- *Consideraciones*. Flujo estacionario, volumen de control fijo y flujos de entrada y salida unidimensionales.
- *Procedimiento*. Aplicamos la Ecuación (3.17) tomando la *energía* como propiedad, donde $B = E$ y $\beta = dE/dm = e$. Usamos la aproximación de flujo unidimensional e introducimos los valores numéricos de la tabla.
- *Resolución*. La salida 3 tiene una contribución positiva y las entradas 1 y 2 negativa. La forma apropiada de la Ecuación (3.12) es

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{\text{sist}} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} e\, \rho\, dv\right) + e_3 \dot{m}_3 \Phi e_1 \dot{m}_1 \Phi e_2 \dot{m}_2$$

Como el flujo es estacionario, el término de derivada temporal de la integral de volumen es nulo. Introduciendo $(\rho AV)_i$ como el grupo flujo másico, obtenemos

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{\text{sist}} = \Phi e_1 \rho_1 A_1 V_1 \Phi e_2 \rho_2 A_2 V_2 + e_3 \rho_3 A_3 V_3$$

www.elsolucionario.net

Introduciendo los valores numéricos de la tabla, queda

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{\text{sist}} = \Phi(300 \text{ J/kg})(800 \text{ kg/m}^3)(2 \text{ m}^2)(5 \text{ m/s}) - 100(800)(3)(8) + 150(800)(2)(17)$$

$$= (-2.400.000 - 1.920.000 + 4.080.000) \text{ J/s}$$

$$= -240.000 \text{ J/s} = -0,24 \text{ MJ/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Vemos que el sistema está perdiendo energía a un ritmo de 0,24 MJ/s = 0,24 MW. Como hemos tenido en cuenta todos los términos de energía que atraviesan el contorno, la primera ley de la termodinámica nos indica que debe haber pérdida de calor a través de las paredes de la superficie de control, o que el sistema está realizando trabajo por medio de algún dispositivo que no aparece en la figura. Nótese que el uso de unidades del SI conduce a un resultado consistente en julios por segundo, sin ningún factor de conversión. En el Capítulo 1 ya advertimos que así ocurriría.

- *Comentarios*. Este problema se refiere a la energía, pero supongamos que queremos hacer también un balance de masa. Entonces B = masa m, y $B = dm/dm$ tiene como valor la unidad. De nuevo, la integral de volumen se anula por ser un flujo estacionario, y la Ecuación (3.17) se reduce a

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{\text{sist}} = \int_{SC} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA = \Phi\rho_1 A_1 V_1 \Phi\rho_2 A_2 V_2 + \rho_3 A_3 V_3$$

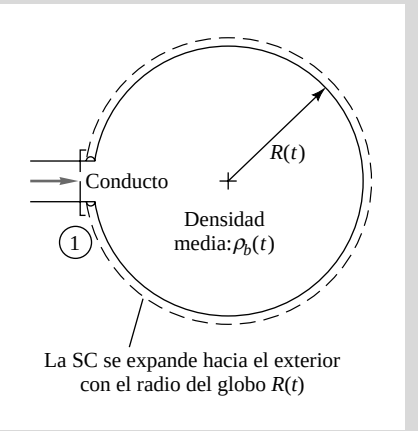
$$= \Phi(800 \text{ kg/m}^3)(2 \text{ m}^2)(5 \text{ m/s}) - 800(3)(8) + 800(17)(2)$$

$$= (-8000 - 19.200 + 27.200) \text{ kg/s} = 0 \text{ kg/s}$$

La masa del sistema no cambia, lo cual expresa correctamente la ley de conservación de la masa, Ecuación (3.1).

EJEMPLO 3.2

El globo de la Figura E3.2 se llena a través de la sección 1, de área A_1, donde la velocidad es V_1 y la densidad del fluido ρ_1. La densidad media del globo es $\rho_b(t)$. Obtenga una expresión para la variación temporal de la masa del sistema dentro del globo.



E3.2

Solución

- *Diagrama del sistema*. La Figura E3.2 muestra una entrada y ninguna salida. El volumen de control y el sistema se expanden a la vez, por lo que la velocidad relativa $V_r = 0$ en la superficie del globo.
- *Consideraciones*. Flujo no estacionario (la masa del volumen de control aumenta), superficie de control deformable, condiciones unidimensionales en la entrada.
- *Procedimiento*. Aplicamos la Ecuación (3.16) con $V_r = 0$ sobre la superficie del globo y $V_r = V_1$ en la entrada.

www.elsolucionario.net

- *Solución*. La propiedad estudiada es la *masa*, $B = m$ y $\beta = dm/dm = 1$. Aplicamos la Ecuación (3.16). La integral de volumen se evalúa usando una densidad media ρ_b, y la integral de superficie es negativa (en la entrada):

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{\text{sist}} = \frac{d}{dt}\left(\int_{\text{VC}} \rho\, d\forall\right) + \int_{\text{SC}} \rho(\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n})\, dA = \frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{3} R^3\right)\rho_b - \rho_1 A_1 V_1 \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios*. Ésta es la expresión buscada para la variación de la masa. En realidad, por la ley de conservación de la masa, Ecuación (3.1), $(dm/dt)_{\text{sist}} = 0$, y la respuesta podría escribirse en la forma

$$\frac{d}{dt}(\rho_b R^3) = \frac{3}{4\pi}\rho_1 A_1 V_1$$

Ésta es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que relaciona la densidad del gas y el radio del globo y que formaría parte del análisis de inflado del globo. Para resolverla necesitamos información adicional, procedente de la mecánica y la termodinámica, para relacionar las cuatro incógnitas ρ_b, ρ_1, V_1 y R. Para ello también habría que incluir en el análisis la presión, la temperatura y las propiedades elásticas del globo.

En los textos de Hansen [4] y Potter et al. [5] se puede encontrar un estudio más profundo y detallado del análisis de volúmenes de control deformables.

3.3. CONSERVACIÓN DE LA MASA

El Teorema del transporte de Reynolds, Ecuaciones (3.16) o (3.17), establece una relación entre las variaciones temporales del sistema y las integrales de volumen y de superficie del volumen de control. Pero las derivadas de las propiedades del sistema están dadas por las leyes básicas de la mecánica, Ecuaciones (3.1) a (3.5). Eliminando las derivadas temporales entre ambas relaciones obtenemos las leyes básicas de la Mecánica de Fluidos en forma *integral*. La variable muda B representa, sucesivamente, la masa, la cantidad de movimiento, el momento cinético y la energía.

En el caso de la conservación de la masa, como se vio en los Ejemplos 3.1 y 3.2, $B = m$ y $\beta = dm/dm = 1$. La Ecuación (3.1) queda

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{\text{sist}} = 0 = \frac{d}{dt}\left(\int_{\text{VC}} \rho\, d\forall\right) + \int_{\text{SC}} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA \tag{3.20}$$

Ésta es la forma integral de la conservación de la masa para un volumen de control deformable. Cuando el volumen de control es fijo, tenemos

$$\int_{\text{VC}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\forall + \int_{\text{SC}} \rho(\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n})\, dA = 0 \tag{3.21}$$

Si el volumen de control tiene sólo un cierto número de salidas y entradas unidimensionales, podemos escribir

$$\int_{\text{VC}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\forall + \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{\text{sal}} - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{\text{ent}} = 0 \tag{3.22}$$

También pueden darse otros casos especiales. Supongamos que el flujo en el interior del volumen de control es estacionario; entonces $\partial\rho/\partial t \equiv 0$, y la Ecuación (3.21) se reduce a

$$\int_{\text{SC}} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA = 0 \tag{3.23}$$

www.elsolucionario.net

Esta expresión indica que en flujo estacionario los flujos másicos que entran y salen del volumen de control deben compensarse idénticamente.[6] Si, además, las entradas y salidas son unidimensionales, en flujo estacionario tendremos

$$\sum_i (\rho A_i V_i)_{\text{ent}} = \sum_i (\rho A_i V_i)_{\text{sal}} \tag{3.24}$$

Esta aproximación simple se utiliza frecuentemente en análisis de ingeniería. Por ejemplo, volviendo a la Figura 3.6, si el flujo en ese volumen de control es estacionario, los flujos másicos de las tres salidas equilibran a los de las dos entradas:

$$\text{Flujo saliente} = \text{Flujo entrante}$$

$$\rho_2 A_2 V_2 + \rho_3 A_3 V_3 + \rho_5 A_5 V_5 = \rho_1 A_1 V_1 + \rho_4 A_4 V_4 \tag{3.25}$$

La cantidad ρAV es el *flujo o gasto másico* $\dot{m}$ que pasa a través de una sección transversal unidimensional y tiene unidades de kilogramo por segundo (o slugs por segundo) cuando se utiliza el SI (o el sistema británico). La Ecuación (3.25) se puede escribir abreviadamente en la forma

$$\dot{m}_2 + \dot{m}_3 + \dot{m}_5 = \dot{m}_1 + \dot{m}_4 \tag{3.26}$$

y, en general, la relación (3.23) de conservación de la masa para un flujo estacionario se puede escribir como

$$\sum_i (\dot{m}_i)_{\text{sal}} = \sum_i (\dot{m}_i)_{\text{ent}} \tag{3.27}$$

Si las entradas y las salidas no son unidimensionales, $\dot{m}$ debe ser obtenido mediante integración

$$\dot{m}_{\text{ST}} = \int_{\text{ST}} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA \tag{3.28}$$

www.elsolucionario.net

donde el subíndice «ST» significa sección transversal. El Ejemplo 3.4 ilustra este caso.

Flujo incompresible

Las ecuaciones pueden simplificarse aún más en el caso incompresible, lo que equivale a despreciar las variaciones de densidad en la ecuación de conservación de la masa.[7] Como vimos en el Capítulo 1, todos los líquidos son prácticamente incompresibles, y los flujos de gases *se comportan* a veces como si lo fueran, particularmente si la velocidad del gas es menor que alrededor del 30 por 100 de la del sonido.

Consideremos de nuevo el volumen de control fijo. Si el fluido es casi incompresible, el término $\partial\rho/\partial t$ es despreciable y la integral de volumen de la Ecuación (3.21) se puede suponer nula. En ese caso, la densidad puede salir fuera de la integral de superficie y desaparecer, ya que es distinta de cero, lo que conduce a la siguiente simplificación:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\text{VC}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv\right] + \int_{\text{SC}} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA = 0 = \int_{\text{SC}} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA = \rho \int_{\text{SC}} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA$$

o

$$\int_{\text{SC}} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA = 0 \tag{3.29}$$

---

[6] A lo largo de esta sección consideraremos que no existen *fuentes* ni *sumideros* de masa en el volumen de control. Las Ecuaciones (3.20) y (3.21) se pueden modificar fácilmente para tenerlos en cuenta, aunque raras veces se necesita.

[7] Adviértase que esta definición de la incompresibilidad es subjetiva. Los oceanógrafos consideran significativa una variación de densidad de un 0,1 por 100, mientras que los aerodinámicos desprecian a veces variaciones de densidad en flujos de gas altamente compresibles, incluso hipersónicos. Es labor de cada analista justificar la aproximación de incompresible cuando se hace.

www.elsolucionario.net

Si la entrada y la salida son unidimensionales,

$$\sum_i (V_i A_i)_{\text{sal}} = \sum_i (V_i A_i)_{\text{ent}} \tag{3.30}$$

o

$$\sum Q_{\text{sal}} = \sum Q_{\text{ent}}$$

donde $Q_i = V_i A_i$ es el *flujo volumétrico* o caudal que atraviesa la sección.

De nuevo, si se utilizan unidades consistentes, $Q = VA$ tendrá unidades de metros cúbicos por segundo (SI) o pies cúbicos por segundo (sistema británico). Si la sección transversal no es unidimensional, debemos integrar

$$Q_{\text{SC}} = \int_{\text{SC}} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA \tag{3.31}$$

La Ecuación (3.31) nos permite definir una *velocidad media* V_m que, multiplicada por el área de la sección, nos da el flujo volumétrico:

$$V_{\text{m}} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \int (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA \tag{3.32}$$

Esta velocidad se puede denominar *velocidad media volumétrica*. Si la densidad varía sobre la sección, podemos definir una densidad media de la misma forma:

$$\bar{\rho}_{\text{m}} = \frac{1}{A} \int \rho\, dA \tag{3.33}$$

www.elsolucionario.net

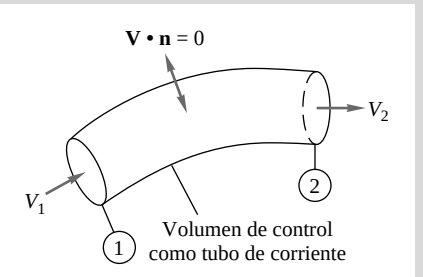
Pero el flujo másico contiene el producto de la densidad por la velocidad, y la media del producto $(\rho V)_{\text{m}}$ tendrá en general un valor diferente del producto de las medias:

$$(\overline{\rho V})_{\text{m}} = \frac{1}{A} \int \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA = \bar{\rho}_{\text{m}} V_{\text{m}} \tag{3.34}$$

Ilustraremos esto en el Ejemplo 3.4. A menudo podemos despreciar estas diferencias o, si fuera necesario, utilizamos un factor de corrección entre medias másicas y medias volumétricas.

EJEMPLO 3.3

Escriba la ecuación de conservación de la masa para el flujo estacionario por el interior de un tubo de corriente (flujo paralelo a la paredes en todo punto) con una entrada unidimensional en 1 y salida unidimensional en 2 (Figura E3.3).



E3.3

www.elsolucionario.net

Solución

Para el flujo estacionario aplicamos la Ecuación (3.24) con una salida y una entrada:

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 = \text{cte}$$

Así, en el flujo estacionario en un tubo de corriente, el gasto másico es constante a través de cualquier sección de dicho tubo. Si la densidad es constante, tenemos entonces

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = \text{cte} \quad \text{o} \quad V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1$$

En el flujo estacionario e incompresible en un tubo de corriente, el flujo volumétrico es constante a través de cualquier sección de dicho tubo y la velocidad aumenta cuando disminuye la sección. Esta relación fue obtenida por Leonardo da Vinci en 1500.

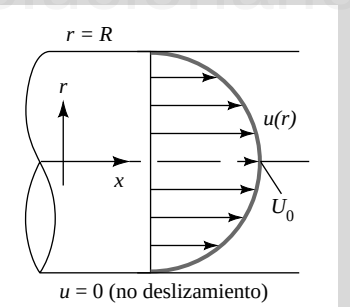
EJEMPLO 3.4

En el flujo estacionario viscoso por un tubo circular (Figura E3.4), el perfil de velocidad longitudinal viene dado aproximadamente por

$$u = U_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right]$$

de forma que u varía de cero en la pared ($r = R$), condición de no deslizamiento, hasta un máximo $u = U_0$ en el eje del tubo ($r = 0$). Cuando el flujo es muy viscoso (laminar), $n = \frac{1}{2}$, mientras que si es muy poco viscoso (turbulento), $n = \frac{1}{7}$. Calcule la velocidad media si la densidad es constante.

www.elsolucionario.net



E3.4

Solución

La velocidad media está definida en la Ecuación (3.32). En este caso, $\mathbf{V} = \mathbf{i}u$ y $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ y, por tanto, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = u$. Como le flujo es axilsimétrico, el diferencial de área corresponde a una corona circular $dA = 2\pi r\, dr$. La Ecuación (3.32) que da

$$V_m = \frac{1}{A}\int u\, dA = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R U_0\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right] 2\pi r\, dr$$

o

$$V_m = U_0 \frac{2}{(1+n)(2+n)} \qquad \textit{Resp.}$$

En la aproximación de flujo laminar, $n = \frac{1}{2}$ y $V_m = 0{,}53\, U_0$. (La teoría laminar exacta del Capítulo 6 da $V_m = 0{,}50\, U_0$). En flujo turbulento, $n = \frac{1}{7}$ y $V_m = 0{,}82\, U_0$. (No hay teoría exacta para la turbulencia, de modo que aceptamos esta

www.elsolucionario.net

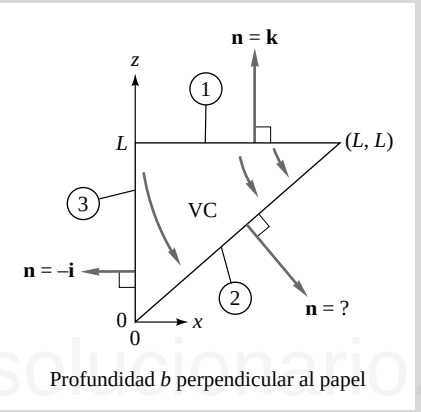
aproximación). El perfil de velocidad en régimen turbulento es más uniforme a través de la sección, y por ello la velocidad media queda sólo ligeramente por debajo del máximo.

EJEMPLO 3.5

Considere el campo de velocidades del Ejemplo 2.15 (con densidad constante)

$$u = \frac{V_0 x}{L} \quad v = 0 \quad w = \Phi\frac{V_0 z}{L}$$

similar al del Ejemplo 1.13. Utilice el volumen de control triangular que se muestra en la Figura E3.5, limitado por (0, 0), (*L*, *L*), y (0, *L*), con profundidad *b* en la dirección perpendicular al papel. Calcule el flujo volumétrico a través de las secciones 1, 2 y 3 y compruebe si se conserva la masa.



E3.5

Solución

- *Diagrama del sistema*. La Figura E3.5 muestra una entrada (sección 1), una salida (sección 2) y flujo nulo a través de 3.
- *Consideraciones*. Flujo incompresible. El flujo es estacionario porque el tiempo no aparece en (*u*, *v*, *w*).
- *Procedimiento*. Evaluamos el gasto volumétrico a través de cada sección mediante la Ecuación (3.31). El volumen de control es el prisma triangular de la Figura E3.5.
- *Solución*. En forma vectorial, el campo de velocidades tiene la forma $\mathbf{V} = \mathbf{i}u + \mathbf{k}w$, pues $v = 0$. Comenzamos con la sección 1, que es el plano $z = L$ con profundidad *b*. El vector normal unitario hacia fuera es $\mathbf{n}_1 = \mathbf{k}$, como se muestra en la figura. La velocidad normal es

$$(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})_1 = (\mathbf{i}u + \mathbf{k}w)_1 \cdot \mathbf{k} = w_1 = \Phi\frac{V_0 z}{K}\bigg|_{z=L} = \Phi V_0$$

El diferencial de área en la sección 1 es una banda de profundidad *b* y anchura *dx*: $dA = b\,dx$. Así, de la Ecuación (3.31), el flujo volumétrico a través de la sección 1 es:

$$Q_1 = \int_1 (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})_1 dA = \int_0^L (\Phi V_0) b\,dx = \Phi V_0 bL \qquad \textit{Resp.}\ (1)$$

- *Comentario sobre la sección* 1. El caudal es negativo, lo que indica flujo neto de entrada. Las dimensiones de (V_0bL) son {L/T}{L}{L} = {L^3/T}, correctas para el flujo volumétrico. A través de la sección 3, el plano $x = 0$ con

www.elsolucionario.net

profundidad b, la normal unitaria hacia fuera es $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{i}$, como se muestra en la figura. Pero la velocidad normal es

$$(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})_3 = (\mathbf{i}u + \mathbf{k}w)_3 \cdot(-\mathbf{i}) = -u_3 = -\left.\frac{V_0 x}{L}\right|_{x=0} = 0 \qquad \textit{Resp.}\ (3)$$

Como $V_n = 0$ en la sección 3, se deduce que $Q_3 = 0$.

- *Comentario sobre la sección* 3. Podríamos haber deducido de la Figura E3.5 que no hay flujo a través de 3.

Finalmente, la sección 2 es el plano $x = z$ con profundidad b. La normal unitaria hacia fuera va hacia la derecha ($\mathbf{i}$) y hacia abajo ($-\mathbf{k}$) pero debe tener módulo unidad, por lo que $\mathbf{n}_3 = (1/\sqrt{2})(\mathbf{i} - \mathbf{k})$. La componente normal de velocidad es

$$(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})_2 = (\mathbf{i}u + \mathbf{k}w)_2 \cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_2 - w_2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{V_0 x}{L} - \left(-\frac{V_0 z}{L}\right)\right]_{x=z} = \frac{\sqrt{2}V_0 x}{L} = \frac{\sqrt{2}V_0 z}{L}$$

El diferencial de área es $dA = b\,dx\sqrt{2}$ o $b\,dz\sqrt{2}$. Así, de la Ecuación (3.31), el flujo volumétrico a través de la sección 2 es:

$$Q_2 = \int_2 (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA = \int_0^L \frac{\sqrt{2}V_0 x}{L}(\sqrt{2}b\,dx) = +V_0 bL \qquad \textit{Resp.}\ (2)$$

- *Comentario sobre la sección* 2. El flujo es positivo, lo que indica flujo neto de salida, como muestra la figura. Podemos señalar que el flujo volumétrico a través de las caras triangulares anterior y posterior del volumen de control prismático es nulo porque $V_n = v = 0$ en estas superficies; en resumen, el flujo es *bidimensional*, y sólo se desarrolla en el plano (x, z).

El último requisito es comprobar la conservación de la masa. La suma de los tres flujos volumétricos es

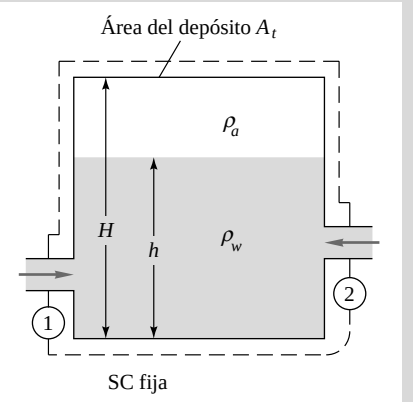
www.elsolucionario.net

$$\sum Q_i = Q_1 + Q_2 + Q_3 = -V_0 bL + V_0 bL + 0 = 0$$

- *Comentario*. En este flujo incompresible se conserva la masa. Éste es un caso bastante realista, que ya fue considerado en el Ejemplo 1.13.

EJEMPLO 3.6

El depósito de la Figura E3.6 se está llenando con agua a través de dos entradas bidimensionales. En la parte superior del depósito va quedando aire atrapado. La altura del agua es h. (*a*) Obtenga una expresión para la variación temporal de la altura del agua dh/dt. (*b*) Calcule dh/dt si $D_1 = 1$ in, $D_2 = 3$ in, $V_1 = 3$ ft/s, $V_2 = 2$ ft/s y $A_t = 2$ ft^2, suponiendo que el agua está a 20 °C.



E3.6

www.elsolucionario.net

Solución

Apartado (*a*)

El volumen de control que se sugiere encierra el depósito y corta las dos entradas. El flujo en su interior es no estacionario y tenemos que aplicar la Ecuación (3.22) con dos entradas y ninguna salida:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \rho\, dV\right) + \rho_1 A_1 V_1 + \rho_2 A_2 V_2 = 0 \tag{1}$$

Ahora bien, si A_t es el área transversal del depósito, el término no estacionario se puede calcular de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \rho\, dV\right) = \frac{d}{dt}(\rho_w A_t h) + \frac{d}{dt}[\rho_a A_t (H + h)] = \rho_w A_t \frac{dh}{dt} \tag{2}$$

El término con ρ_a desaparece porque representa el cambio de masa de aire y es cero, ya que el aire queda atrapado. Sustituyendo (2) en (1) hallamos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\rho_1 A_1 V_1 + \rho_2 A_2 V_2}{\rho_w A_t} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Para el agua, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_w$, y el resultado anterior se reduce a

$$\frac{dh}{dt} = \frac{A_1 V_1 + A_2 V_2}{A_t} = \frac{Q_1 + Q_2}{A_t} \tag{3}$$

Apartado (*b*)

Los dos flujos volumétricos que entran son

$$Q_1 = A_1 V_1 = \tfrac{1}{4}\pi(\tfrac{1}{12}\text{ ft})^2(3\text{ ft/s}) = 0{,}016\text{ ft}^3/\text{s}$$
$$Q_2 = A_2 V_2 = \tfrac{1}{4}\pi(\tfrac{3}{12}\text{ ft})^2(2\text{ ft/s}) = 0{,}098\text{ ft}^3/\text{s}$$

Por tanto, de la Ecuación (3),

$$\frac{dh}{dt} = \frac{(0{,}016 + 0{,}098)\text{ ft}^3/\text{s}}{2\text{ ft}^2} = 0{,}057\text{ ft/s} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

Sugerencia: Repita el problema con el depósito abierto por arriba.

El balance de masa con un volumen de control deformable ha sido mostrado en el Ejemplo 3.2.

Las ecuaciones de conservación de la masa, Ecuaciones (3.20) o (3.21), son fundamentales en todos los análisis de flujos y sólo afectan a la velocidad y a la densidad. Las direcciones de los vectores no influyen más que para determinar la velocidad normal en la superficie de control y saber si el flujo es *saliente* o *entrante*. Aunque un análisis determinado pueda referirse a fuerzas, momentos o energía, siempre se debe comprobar, como parte de este análisis, el balance de masas; si no se cumpliese, los resultados no serían realistas y probablemente estarían equivocados. En los ejemplos siguientes veremos cómo la conservación de la masa se comprueba constantemente mientras se están analizando otras propiedades fluidas.

www.elsolucionario.net

3.4. CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

En la segunda ley de Newton, Ecuación (3.2), la propiedad que se derivaba era la cantidad de movimiento $m\mathbf{V}$. Por tanto, la variable muda es $B = m\mathbf{V}$ y $\beta = d\mathbf{B}/dm = \mathbf{V}$, y la aplicación del teorema del transporte de Reynolds proporciona la ecuación de cantidad de movimiento para un volumen de control deformable:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{V})_{\text{sist}} = \sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}\left(\int_{\text{VC}} \mathbf{V}\rho\, d\mathcal{V}\right) + \int_{\text{SC}} \mathbf{V}\rho(\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n})\, dA \tag{3.35}$$

Debemos hacer especial énfasis en los siguientes puntos que conciernen a esta relación:

1. El término $\mathbf{V}$ es la velocidad del fluido respecto a un sistema de coordenadas *inercial* (sin aceleración). En otro caso, la ley de Newton debe ser modificada para incluir los términos de aceleración no inerciales (véase el final de esta sección)
2. El término $\sum \mathbf{F}$ es el *vector* suma de todas las fuerzas que actúan sobre el volumen de control material considerado como cuerpo libre; esto es, incluye todas las fuerzas de superficie ejercidas por todos los fluidos y sólidos cortados por la superficie de control más todas las fuerzas de volumen (gravitatorias y electromagnéticas) que actúan sobre las masas contenidas en el volumen de control.
3. La ecuación completa es una relación vectorial. Ambas integrales son vectores debido al término $\mathbf{V}$ de los integrandos. La ecuación tiene, pues, tres componentes. Si sólo queremos una de ellas, por ejemplo la x, la ecuación se reduce a

$$\sum F_x = \frac{d}{dt}\left(\int_{\text{VC}} u\rho\, d\mathcal{V}\right) + \int_{\text{SC}} u\rho(\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n})\, dA \tag{3.36}$$

y, de forma análoga, $\sum F_y$ y $\sum F_z$ sólo tendrían v y w, respectivamente. El fallo de no tener en cuenta el carácter vectorial de la ecuación de cantidad de movimiento (3.35) es probablemente la fuente de errores más común en el análisis de volúmenes de control.

Para un volumen de control fijo, la velocidad relativa $\mathbf{V}_r \equiv \mathbf{V}$, y la Ecuación (3.35) toma la forma

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}\left(\int_{\text{VC}} \mathbf{V}\rho\, d\mathcal{V}\right) + \int_{\text{SC}} \mathbf{V}\rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA \tag{3.37}$$

De nuevo recalcamos que ésta es una relación vectorial y que $\mathbf{V}$ debe de estar referida a un sistema inercial. La mayor parte de los análisis de cantidad de movimiento de este libro se refieren a la Ecuación (3.37).

Flujo unidimensional de cantidad de movimiento

Por analogía con el término de *flujo másico* de la Ecuación (3.28), la integral de superficie de la Ecuación (3.37) se denomina *flujo de cantidad de movimiento*. Si $\mathbf{M}$ es la cantidad de movimiento, entonces

$$\dot{\mathbf{M}}_{\text{SC}} = \int_{\text{sec}} \mathbf{V}\rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA \tag{3.38}$$

Debido al producto escalar, el resultado será negativo en las entradas de cantidad de movimiento y positivo en las salidas. Si la sección se comporta como unidimensional, $\mathbf{V}$ y ρ son uniformes y el resultado de la integración es

$$\dot{\mathbf{M}}_{\text{sec}i} = \mathbf{V}_i(\rho V_{ni} A_i) = \dot{m}_i \mathbf{V}_i \tag{3.39}$$

www.elsolucionario.net

en las saldas y $-\dot{m}_i\mathbf{V}_i$ en las entradas. Así, si el volumen de control tiene únicamente entradas y salidas unidimensionales, la Ecuación (3.37) se reduce a

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC}\mathbf{V}\rho\, d\mathcal{V}\right) + \Sigma(\dot{m}_i\mathbf{V}_i)_{sal} - \Sigma(\dot{m}_i\mathbf{V}_i)_{ent} \tag{3.40}$$

Ésta es una aproximación muy usada en ingeniería. Es crucial constatar que estamos tratando con sumas de vectores. La Ecuación (3.40) indica que el vector fuerza resultante sobre un volumen de control fijo es igual a la variación temporal de la cantidad de movimiento que hay dentro del volumen más el vector suma de los flujos de cantidad de movimiento en la salidas menos el vector suma en las entradas.

Resultante de las fuerzas de presión sobre una superficie de control cerrada

En términos generales, se puede decir que las fuerzas de superficie sobre un volumen de control se deben a (1) fuerzas que aparecen en el corte de cuerpos sólidos que penetran a través de la superficie de control, y (2) fuerzas debidas a presión y viscosidad en el fluido del contorno. El cálculo de las fuerzas de presión es relativamente sencillo, como muestra la Figura 3.7. Recuérdese del Capítulo 2 que la fuerza de presión sobre una superficie es perpendicular a ésta y dirigida *hacia ella*. Como estamos definiendo el vector normal unitario **n** *hacia el exterior*, escribiremos

$$\mathbf{F}_{pres} = \int_{SC} p(-\mathbf{n})\,dA \tag{3.41}$$

Si la presión tiene un valor uniforme p_a sobre toda la superficie, como en la Figura 3.7*a*, la resultante es nula:

www.elsolucionario.net

$$\mathbf{F}_{PU} = \int p_a(-\mathbf{n})\,dA = -p_a\int \mathbf{n}\,dA = 0 \tag{3.42}$$

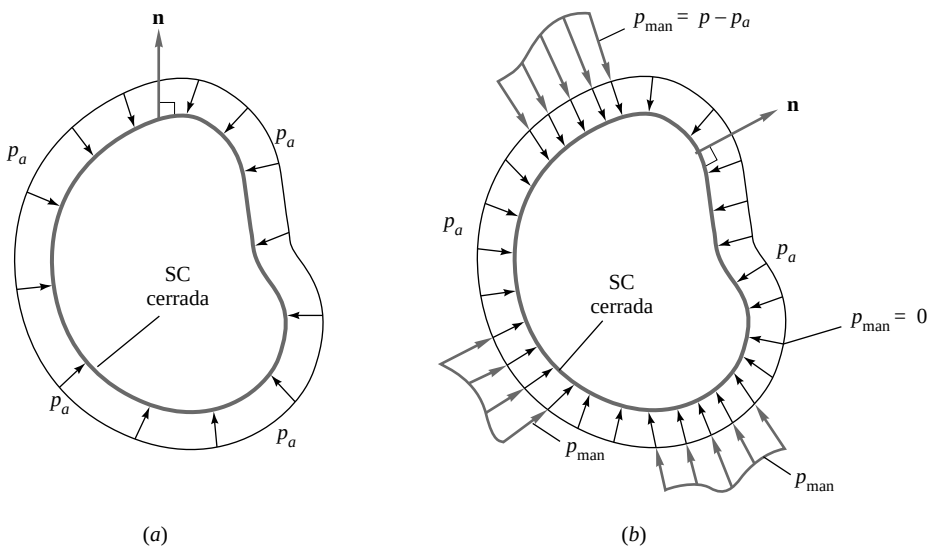


Figura 3.7. Cálculo de las fuerzas de presión sustrayendo una presión uniforme: (*a*) presión uniforme, $\mathbf{F} = -p_a \int \mathbf{n}\, dA \equiv 0$, (*b*) presión no uniforme, $\mathbf{F} = -\int(p - p_a)\,\mathbf{n}\, dA$.

www.elsolucionario.net

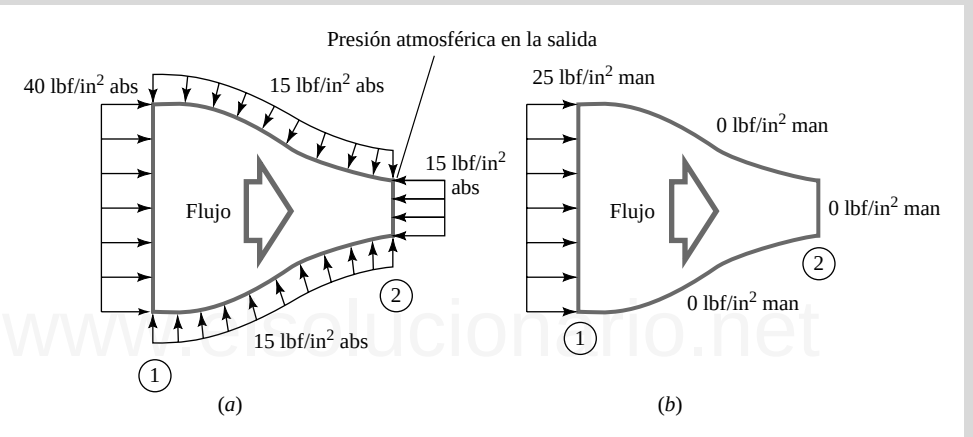
donde el subíndide PU indica presión uniforme. Este resultado es *independiente de la forma de la superficie*[8] siempre que ésta sea cerrada, y todos nuestros volúmenes de control lo son. Por ello, un problema aparentemente complicado en cuanto a fuerzas de presión, se puede simplificar restando una presión uniforme adecuada p_a y trabajando después con la presión manométrica resultante, como indica la Figura 3.7*b*. Así, la Ecuación (3.41) es equivalente a

$$\mathbf{F}_{\text{pres}} = \int_{SC} (p - p_a)(-\mathbf{n})\,dA = \int_{SC} p_{\text{man}}(-\mathbf{n})\,dA$$

Este truco puede ahorrar tiempo de cálculo.

EJEMPLO 3.7

Un volumen de control de una tobera tiene presiones absolutas de 40 lbf/in^2 en la sección 1 y de 15 lbf/in^2 en la sección 2 y en las paredes laterales exteriores, como indica la Figura E3.7*a*. Calcule la resultante de las fuerzas de presión si $D_1 = 3$ in y $D_2 = 1$ in.



E3.7

Solución

- *Diagrama del sistema*. El volumen de control está formado por el contorno de la tobera más las secciones (1) y (2). Aunque aquí se desprecian, también debería haber *esfuerzos* sobre la pared de la tobera en la sección 1. Las presiones que actúan en el volumen de control se presentan en la Figura E3.7*a*. La Figura E3.7*b* muestra las presiones después de que se hayan restado las 15 lbf/in^2 de la presión atmosférica en todas las superficies. En este caso sólo calculamos la fuerza neta.
- *Consideraciones*. Conocemos la presión, que se muestra en la figura, sobre todas las superficies del volumen de control.
- *Procedimiento*. Como hay tres superficies en las que $p = 15$ lbf/in^2, hay que restar esta cantidad en todas partes para que en dichas superficies la «presión manométrica» se reduzca a cero. Esto puede hacerse gracias a la Ecuación (3.42).
- *Resolución*. Con la distribución de presiones modificada, Figura E3.7*b*, sólo se necesitan los datos de la sección 1 para obtener la resultante de las fuerzas de presión:

$$\mathbf{F}_{\text{pres}} = p_{\text{man},1}(-\mathbf{n})_1 A_1 = \left[25\ \frac{\text{lbf}}{\text{in}^2}\right][-(-\mathbf{i})]\left[\frac{\pi}{4}(3\ \text{in})^2\right] = 177\mathbf{i}\ \text{lbf} \qquad \textit{Resp.}$$

[8] ¿Sabe demostrar esto? Es consecuencia del teorema de Gauss del análisis vectorial.

www.elsolucionario.net

- *Comentarios*. Este artificio de «sustracción uniforme», que es totalmente legal, simplifica notablemente el cálculo de las fuerzas de presión. *Nota*: hemos operado de forma informal al multiplicar la presión en libras-fuerza por pulgada cuadrada por el área en pulgadas cuadradas. Aunque se obtiene el resultado correcto en libras-fuerza, hubiera sido más formal haber transformado todos los datos a unidades inglesas. *Nota adicional*: además de la resultante de las fuerzas de presión $\mathbf{F}_{pres}$, en este flujo aparecen otras fuerzas, como las debidas a los esfuerzos de tensión en la pared de la tobera o al peso del fluido en el interior del volumen de control.

Condición de presión a la salida de un chorro

La Figura E3.7 ilustra una condición de contorno comúnmente utilizada para los problemas de salida de chorros. Cuando un fluido abandona el conducto que lo confina y sale a la «atmósfera» ambiente, su superficie libre queda expuesta a esta atmósfera. Por tanto, el propio chorro estará también a la presión atmosférica. Esta condición se usó también en la sección 2 de la Figura E3.7.

Sólo dos efectos pueden mantener una diferencia de presión entre la atmósfera y el chorro libre. El primero es la tensión superficial, Ecuación (1.31), que normalmente es despreciable. El segundo efecto se presenta en chorros *supersónicos*, que pueden estar separados de la atmósfera por ondas de expansión y compresión (Capítulo 9). Sin embargo, para la mayoría de las explicaciones pondremos como condición de salida la atmosférica.

EJEMPLO 3.8

Un volumen de control de un tubo de corriente en flujo estacionario tiene una entrada uniforme (ρ_1, A_1, V_1) y una salida uniforme (ρ_2, A_2, V_2), como muestra la Figura 3.8. Calcule la fuerza resultante sobre el volumen de control.

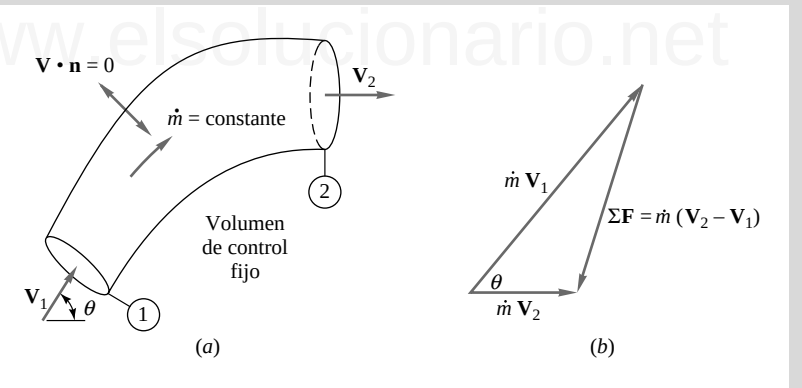


Figura 3.8. Fuerza resultante sobre un tubo de corriente unidimensional con flujo estacionario: (*a*) tubo de corriente con flujo estacionario, (*b*) diagrama vectorial para el cálculo de la resultante.

Solución

Aplicando la Ecuación (3.40) con una entrada y una salida:

$$\sum \mathbf{F} = \dot{m}_2\mathbf{V}_2 - \dot{m}_1\mathbf{V}_1 = (\rho_2 A_2 V_2)\mathbf{V}_2 - (\rho_1 A_1 V_1)\mathbf{V}_1$$

El término de la integral de volumen ha desaparecido por ser el flujo estacionario; por otra parte, de la ecuación de conservación de la masa del Ejemplo 3.3 vemos que

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} = \text{cte}$$

www.elsolucionario.net

Por tanto, el resultado toma la forma simple

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{m}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \qquad \textit{Resp.}$$

Se trata de una relación *vectorial*, esquematizada en la Figura 3.8*b*. El término $\Sigma \mathbf{F}$ representa la fuerza resultante que actúa sobre el volumen de control como consecuencia de todas las causas; es necesaria para compensar los cambios en la cantidad de movimiento por el giro y la deceleración del flujo a medida que circula por el volumen de control.

EJEMPLO 3.9

Un álabe fijo deflecta un chorro de agua de área A un ángulo θ sin cambiar la magnitud de su velocidad, como se muestra en la Figura 3.9*a*. El flujo es estacionario, la presión es p_a en todas partes y la fricción sobre el álabe es despreciable. (*a*) Calcule las componentes F_x y F_y de la fuerza aplicada al álabe. (*b*) Determine el módulo de la fuerza **F** y el ángulo ϕ que ésta forma con la horizontal. Dibuje el resultado en función de θ.

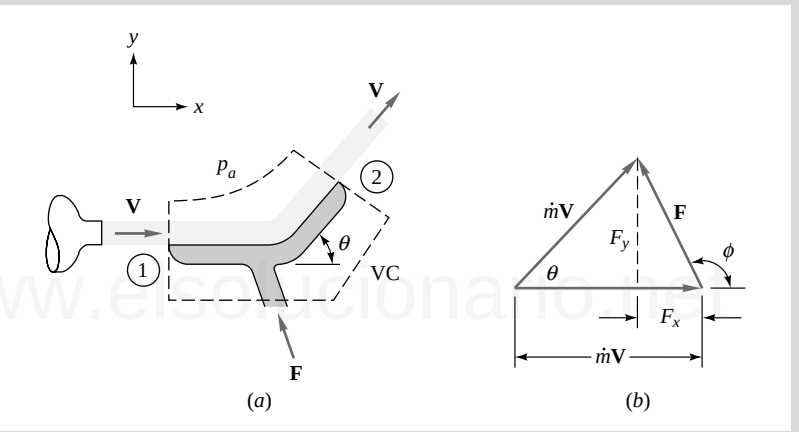


Figura 3.9. Fuerza resultante sobre un álabe deflector: (*a*) geometría del álabe y del chorro de agua deflectado, (*b*) diagrama vectorial de la resultante.

Solución

Apartado (*a*)

El volumen de control escogido en la Figura 3.9*a* corta a través de la entrada y la salida del chorro y a través del soporte del álabe, donde se muestra la fuerza **F**. Como no hay corte a través de la interfase álabe-chorro, la fricción entre ambos es una fuerza interna que se cancela en el balance de fuerzas. La fuerza de presión es nula en atmósfera uniforme. Despreciamos el peso del álabe y del fluido contenido en el volumen de control. En este caso, la Ecuación (3.40) se reduce a

$$\mathbf{F}_{\text{álabe}} = \dot{m}_2\mathbf{V}_2 - \dot{m}_1\mathbf{V}_1$$

Según se indica, $V_1 = V_2 = V$, y la conservación de la masa en el tubo de corriente hace que $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} = \rho AV$. El diagrama vectorial de la fuerza y de la variación de la cantidad de movimiento es un triángulo isósceles con lados $\dot{m}\mathbf{V}$ y base **F**, según se indica en la Figura 3.9*b*. Las componentes de la fuerza se pueden calcular fácilmente a partir de este diagrama:

$$F_x = \dot{m}V(\cos\theta - 1) \qquad F_y = \dot{m}V \operatorname{sen}\theta \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

donde $\dot{m}V = \rho AV^2$, que es el resultado pedido.

www.elsolucionario.net

Apartado (*b*)

El módulo de la fuerza se obtiene del apartado (*a*):

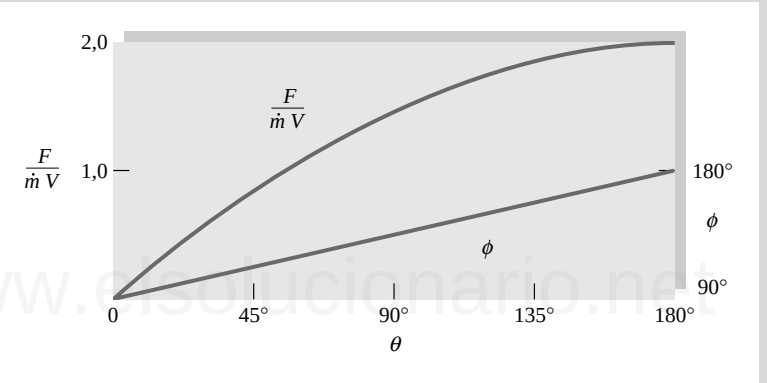
$$F = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2} = \dot{m}V[\text{sen}^2\ \theta + (\cos\theta - 1)^2]^{1/2} = 2\dot{m}V\,\text{sen}\frac{\theta}{2} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

De la geometría de la Figura 3.9*b*, tenemos

$$\phi = 180° - \text{tg}^{-1}\frac{F_y}{F_x} = 90° + \frac{\theta}{2} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

Estas operaciones aparecen dibujadas en función de θ en la Figura E3.9. Hay dos casos especiales de interés. Primero, el máximo de fuerza corresponde a θ = 180°, esto es, al giro total del chorro con regreso en dirección opuesta, con inversión total de la cantidad de movimiento. Esta fuerza vale $2\dot{m}V$ y actúa hacia la izquierda, esto es, ϕ = 180°. Segundo, con ángulos de deflexión muy pequeños (θ < 10°) obtenemos aproximadamente

$$F \cong \dot{m}V\theta \qquad \phi \cong 90°$$



E3.9

La fuerza es directamente proporcional al ángulo de deflexión y está dirigida perpendicularmente al chorro. Éste es el principio del álabe sustentador o perfil, que produce una pequeña deflexión de la corriente incidente y crea una fuerza de sustentación perpendicular al flujo.

EJEMPLO 3.10

Un chorro de agua de velocidad V_j incide perpendicularmente a una placa plana que se mueve hacia la derecha a velocidad V_c, como muestra la Figura 3.10*a*. Calcule la fuerza necesaria para mantener la placa en movimiento a velocidad constante si la densidad del chorro es 1000 kg/m^3, la sección del chorro es 3 cm^2 y V_j y V_c son 20 y 15 m/s, respectivamente. Desprecie el peso del chorro y de la placa y suponga que el chorro se divide en dos chorros iguales, uno hacia arriba y otro hacia abajo.

Solución

El volumen de control que se sugiere en la Figura 3.10*a* corta a través del soporte de la placa, para resaltar las fuerzas R_x y R_y pedidas. Este volumen de control se mueve a velocidad V_c y está, por tanto, fijo a la placa, como se indica en la Figura 3.10*b*. Debemos expresar la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento para la configuración estacionaria de la Figura 3.10*b*. Hay dos salidas y una entrada, y aplicando la Ecuación (3.30) tenemos:

$$\dot{m}_{\text{sal}} = \dot{m}_{\text{ent}}$$

o

$$\rho_1 A_1 V_1 + \rho_2 A_2 V_2 = \rho_j A_j (V_j - V_c) \qquad (1)$$

www.elsolucionario.net

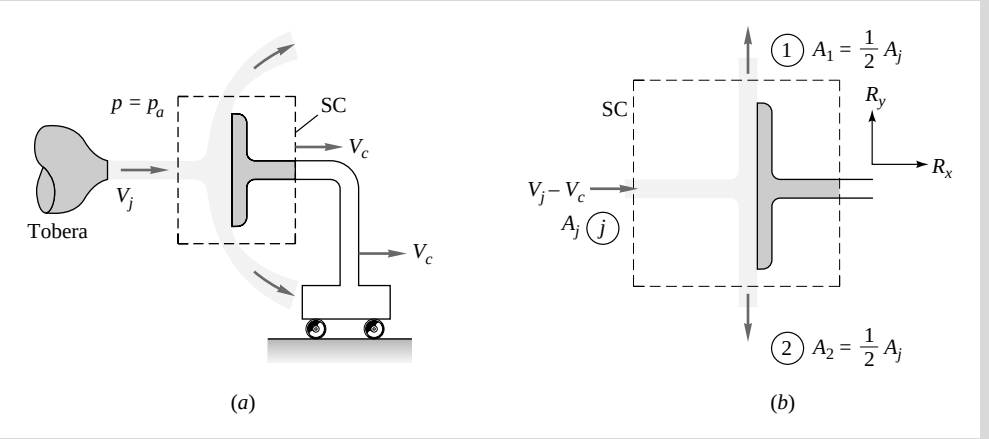


Figura 3.10. Fuerza sobre una placa que se mueve con velocidad constante: (*a*) chorro que incide perpendicularmente a la placa, (*b*) volumen de control fijo a la placa.

Suponemos que el agua es incompresible, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j$, y que $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}A_j$. Por tanto, la Ecuación (1) se reduce a

$$V_1 + V_2 = 2(V_j - V_c) \tag{2}$$

Estrictamente hablando, esto es todo lo que la conservación de la masa nos puede decir. Sin embargo, de la simetría de los chorros deflectados y por haber despreciado el peso del fluido, concluimos que las velocidades V_1 y V_2 deben ser iguales, luego (2) queda

$$V_1 = V_2 = V_j - V_c \tag{3}$$

www.elsolucionario.net

Esta igualdad también se puede predecir mediante la ecuación de Bernoulli de la Sección 3.7. Con los valores numéricos dados

$$V_1 = V_2 = 20 - 15 = 5 \text{ m/s}$$

Ahora podemos calcular R_x y R_y a partir de las dos componentes de la ecuación de cantidad de movimiento. La Ecuación (3.40) nos da

$$\Sigma F_x = R_x = \dot{m}_1 u_1 + \dot{m}_2 u_2 - \dot{m}_j u_j \tag{4}$$

donde hemos puesto, según la ecuación de continuidad, $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \frac{1}{2}\dot{m}_j = \frac{1}{2}\rho_j A_j (V_j - V_c)$. Introduciendo ahora la dirección del flujo en cada sección: $u_1 = u_2 = 0$, y $u_j = V_j - V_c = 5$ m/s. Entonces la Ecuación (4) quedará

$$R_x = -\dot{m}_j u_j = -[\rho_j A_j (V_j - V_c)](V_j - V_c) \tag{5}$$

Sustituyendo los valores numéricos dados, tenemos

$$R_x = -(1000 \text{ kg/m}^3)(0{,}0003 \text{ m}^2)(5 \text{ m/s})^2 = -7{,}5 \text{ (kg} \cdot \text{m)/s}^2 = -7{,}5 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Esta fuerza actúa hacia la *izquierda*; o sea, se necesita una fuerza que se oponga a la aceleración hacia la derecha que producirá el impacto continuo del chorro. La fuerza vertical es

$$F_y = R_y = \dot{m}_1 v_1 + \dot{m}_2 v_2 - \dot{m}_j v_j$$

Introduciendo las direcciones del flujo, de nuevo: $v_1 = V_1$, $v_2 = -V_2$, $v_j = 0$. Así,

$$R_y = \dot{m}_1 (V_1) + \dot{m}_2 (-V_2) = \tfrac{1}{2}\dot{m}_j (V_1 - V_2) \tag{6}$$

www.elsolucionario.net

Pero como vimos antes, $V_1 = V_2$ y, por tanto, $R_y = 0$, como era de esperar por la simetría de deflexión en el chorro.[9] Hay dos resultados interesantes más. Primero, la velocidad relativa en la sección 1 es 5 m/s hacia arriba, según la Ecuación (3). Si pasamos a movimiento absoluto, sumando la velocidad del volumen de control $V_c = 15$ m/s hacia la derecha, encontramos una velocidad absoluta $\mathbf{V}_1 = 15\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ m/s, esto es, 15,8 m/s a un ángulo de 18,4° hacia arriba, como se indica en la Figura 3.10*a*. Así, la velocidad absoluta del chorro varía después de haber incidido sobre la placa. Segundo, la fuerza R_x no cambia si suponemos que el chorro se deflecta radialmente en todas las direcciones sobre la placa, en lugar de ser hacia arriba y hacia abajo. Como la placa es perpendicular al eje *x*, el flujo de cantidad de movimiento a la salida según *x* seguirá siendo cero al rescribir la Ecuación (4) para esta configuración radial.

EJEMPLO 3.11

El ejemplo anterior consideraba el problema de un flujo que incide perpendicularmente a una placa. En la Figura 3.11, placa y chorro son paralelos. La corriente no es un chorro sino un río ancho, o una *corriente libre*, de velocidad uniforme $\mathbf{V} = U_0\mathbf{i}$. Se supone que la presión es uniforme y que, por tanto, no da resultante neta sobre la placa. Ésta no bloquea al flujo como en la Figura 3.10, de modo que el único efecto es el debido a la fricción, que se despreció en el ejemplo precedente. La condición de no deslizamiento en la pared obliga al fluido a tener velocidad nula en ésta, y estas partículas que se mueven lentamente van decelerando a sus vecinas, de modo que al final de la placa hay una capa de cortadura con flujo no uniforme retardado, una *capa límite*, de espesor $y = \delta$. Los esfuerzos viscosos sobre la pared se suman para dar una fuerza de resistencia sobre la placa. Estos efectos están ilustrados en la Figura 3.11. Ahora se trata de realizar un análisis integral que nos permita hallar la resistencia *D* en función de las propiedades del flujo ρ, U_0 y δ y de las dimensiones de la placa *L* y *b*.[10]

Solución

Como en la mayor parte de los casos prácticos, este problema requiere el uso de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento. Es esencial seleccionar adecuadamente el volumen de control, y aquí escogeremos la región de 0 a *h* a δ a *L* y vuelta al origen 0, que se muestra en la Figura 3.11. Si hubiésemos cortado horizontalmente a una altura $y = h$, habríamos cortado a través de la capa de cortadura y tendríamos esfuerzos desconocidos. En lugar de esto, seguimos la línea de corriente que pasa por $(x, y) = (0, h)$, justo por fuera de la capa de cortadura, a través de la cual además tampoco hay flujo másico. Las cuatro caras del volumen de control son:

1. De (0, 0) a (0, *h*): entrada unidimensional, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -U_0$.
2. De (0, *h*) a (*L*, δ): línea de corriente, sin cortadura, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \equiv 0$.
3. De (*L*, δ) a (*L*, 0): salida bidimensional, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = +u(y)$.
4. De (*L*, 0) a (0, 0): una línea de corriente justo por encima de la placa, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$, las fuerzas de fricción existentes dan una resistencia $-D\mathbf{i}$ que actúa en dirección paralela y sentido opuesto al flujo inicial.

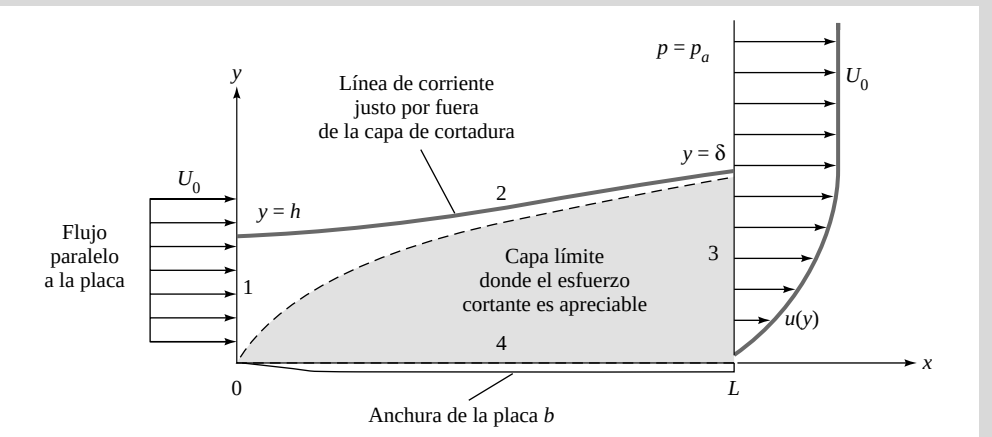


Figura 3.11. Análisis de la resistencia de fricción sobre una placa plana con ayuda de un volumen de control. El volumen de control está limitado por las secciones 1, 2, 3 y 4.

[9] La condición de simetría puede ser una poderosa herramienta si se utiliza adecuadamente. Intente aprender algo más sobre los usos y errores de las condiciones de simetría.

[10] El análisis general de estos problemas, denominado teoría de la *capa límite*, se presenta en la Sección 7.3.

www.elsolucionario.net

La presión es uniforme y, por tanto, no hay resultante de las fuerzas de presión. Como suponemos que el flujo es incompresible y estacionario, aplicamos la Ecuación (3.37) sin términos no estacionarios y flujo únicamente en las secciones 1 y 3:

$$\Sigma F_x = -D = \int_1 u(0,y)(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA + \int_3 u(L,y)(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA$$

$$= \int_0^h U_0(-U_0)b\,dy + \int_0^\delta u(L,y)[+u(L,y)]b\,dy$$

Calculando la primera integral y reagrupando tenemos

$$D = U_0^2 bh - b\int_0^\delta u^2 dy\,|_{x=L} \tag{1}$$

Esto podría considerarse la respuesta al problema, pero no es útil porque la altura h es desconocida. La podemos determinar en función de δ con la ecuación de continuidad, ya que el volumen de control forma un tubo de corriente

$$\int_{SC}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA = 0 = \int_0^h(-U_0)b\,dy + \int_0^\delta ub\,dy\,|_{x=L}$$

o

$$U_0 h = \int_0^\delta u\,dy\,|_{x=L} \tag{2}$$

que se obtiene suprimiendo b y ρ y calculando la primera integral. Introduciendo el valor de h en la Ecuación (1), tenemos:

$$D = b\int_0^\delta u(U_0 - u)dy\,|_{x=L} \qquad \textit{Resp.}\ (3)$$

www.elsolucionario.net

Este resultado fue obtenido por Theodore von Kármán en 1921.[11] Relaciona la resistencia de fricción sobre una cara de la placa con la integral del *defecto de cantidad de movimiento* $\rho u(U_0 - u)$ a través de la sección final de la placa. Como $U_0 - u$ tiende a cero al aumentar y, la integral tiene un valor finito. La Ecuación (3) es un ejemplo de aplicación de los *métodos integrales* para la capa límite, que se tratan en el Capítulo 7.

Factor de corrección del flujo de cantidad de movimiento

En el flujo en un conducto, la velocidad axial es generalmente no uniforme, como en el Ejemplo 3.4. En este caso, el cálculo simplificado del flujo de cantidad de movimiento $\int u\rho(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA = \dot{m}V = \rho AV^2$ tiene un ligero error y debería ser corregido para quedar $\beta\rho AV^2$, donde β es un factor de corrección adimensional, $\beta \geq 1$.

El factor β tiene en cuenta las variaciones de u^2 a través de la sección. Esto es, calculamos el flujo exacto y lo igualamos al flujo basado en la velocidad media en el conducto:

$$\int u^2 dA = \beta\dot{m}V_m = \beta\rho AV_m^2$$

o

$$\beta = \frac{1}{A}\int\left(\frac{u}{V_m}\right)^2 dA \tag{3.43a}$$

[11] La biografía de este gran profesor e ingeniero del siglo XX [2] es especialmente recomendable por su perspectiva histórica y científica.

www.elsolucionario.net

Los valores de β se pueden calcular, para perfiles de velocidades típicos, de forma similar al Ejemplo 3.4. Los resultados son:

Flujo laminar:
$$u = U_0 \left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right] \qquad \beta = \frac{4}{3} \tag{3.43b}$$

Flujo turbulento:
$$u \approx U_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/m} \qquad \frac{1}{9} \le m \le \frac{1}{5}$$

$$\beta = \frac{(1+m)^2(2+m)^2}{2(1+2m)(2+2m)} \tag{3.43c}$$

Los factores de corrección turbulentos tienen el siguiente rango de valores:

Flujo turbulento:

m	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
β	1,037	1,027	1,020	1,016	1,013

Estos factores de corrección son tan próximos a la unidad que normalmente no se incluyen. En ocasiones, la corrección laminar puede ser importante.

Como ilustración del uso de estos factores de corrección, la solución del Ejemplo 3.8, con velocidades no uniformes en las secciones 1 y 2, vendría dada por

$$\sum \mathbf{F} = \dot{m}(\beta_2 \mathbf{V}_2 - \beta_1 \mathbf{V}_1) \tag{3.43d}$$

Nótese que los parámetros básicos y el carácter vectorial del resultado no se alteran por esta corrección.

www.elsolucionario.net

Detalles de la ecuación de cantidad de movimiento

Los ejemplos anteriores dejan claro que la ecuación de cantidad de movimiento es más difícil de manejar que las ecuaciones escalares de conservación de la masa y la energía. Llegados a este punto, es conveniente recordar ciertos detalles:

- La ecuación de cantidad de movimiento es *vectorial*. Los términos de fuerzas y momentos tienen tres componentes. Un *esquema* de estos vectores es indispensable para realizar el análisis correctamente.
- Los términos de flujo de cantidad de movimiento, como $\int \mathbf{V}(\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n})dA$, involucran *dos* criterios de signo, por lo que es imprescindible manejarlos con cuidado. En primer lugar, la variable vectorial $\mathbf{V}$ tendrá un signo que dependerá de su dirección. En segundo lugar, el término de flujo másico ($\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$) tendrá un signo + o – dependiendo de que salga o entre. Por ejemplo, en la Figura 3.8, las componentes x de $\mathbf{V}_2$ y $\mathbf{V}_1$, u_2 y u_1, son positivas, es decir, actúan ambas hacia la derecha, mientras que el flujo másico en (2) es positivo (hacia fuera) y en (1) es negativo (hacia dentro).
- La *aproximación unidimensional*, Ecuación (3.40), es muy útil, porque las distribuciones de velocidad no uniformes requieren una integración muy laboriosa, como indica la Ecuación 3.11. De esta forma, el empleo de factores de corrección β del flujo de cantidad de movimiento son muy útiles para evitar estas integraciones, especialmente en el caso de flujos en conductos.
- Las fuerzas aplicadas $\sum \mathbf{F}$ actúan sobre *todos los elementos que estén en el volumen de control*, esto es, las superficies (presión y esfuerzos de cortadura), soportes sólidos que lo atraviesen y el peso de las masas de su interior. Los esfuerzos que actúan sobre las partes situadas en el interior del volumen de control se cancelan, por lo que deben ignorarse.
- Si el fluido descarga con velocidad subsónica a la atmósfera, la presión en la salida será la *atmosférica*.
- Donde sea posible, las superficies de entrada y salida se deben elegir *perpendiculares al flujo*, de forma que la presión sea la fuerza dominante y la velocidad normal sea igual a la velocidad total.

www.elsolucionario.net

Con todos estos detalles, queda claro que la aplicación correcta de la ecuación de cantidad de movimiento exige de una gran práctica.

Sistema de referencia no inercial[12]

Todos los ejemplos y deducciones anteriores presuponen que el sistema de coordenadas es inercial, o sea, que está en reposo o moviéndose a velocidad constante. En este caso, la derivada sustancial de la velocidad es igual a la aceleración absoluta del sistema, y la segunda ley de Newton es aplicable directamente en la forma dada por las Ecuaciones (3.2) y (3.35).

En muchos casos es conveniente utilizar un sistema de coordenadas *no inercial* o acelerado. Un sistema de coordenadas fijo a un cohete durante su despegue serviría de ejemplo. Un segundo ejemplo se presenta al analizar cualquier flujo sobre la superficie de la Tierra, la cual presenta aceleraciones respecto a estrellas fijas debido a su rotación. Los flujos atmosféricos y oceánicos experimentan la llamada *aceleración de Coriolis*, que se discute más adelante. Esta aceleración es muy pequeña, normalmente menor que 10^{-5} veces la aceleración de la gravedad, pero sus efectos acumulados sobre distancias de muchos kilómetros pueden ser dominantes en flujos geofísicos. Sin embargo, la aceleración de Coriolis es despreciable en problemas a pequeña escala, como el flujo en conductos o alrededor de perfiles.

Supongamos que el flujo tiene una velocidad $\mathbf{V}$ respecto a un sistema de referencia *xyz* no inercial, como muestra la Figura 3.12. En este caso $d\mathbf{V}/dt$ representa una aceleración no inercial que debe sumarse vectorialmente a la aceleración de arrastre $\mathbf{a}_{arr}$ para obtener la aceleración absoluta $\mathbf{a}_i$ respecto a un sistema de referencia inercial *XYZ*, como se representa en la Figura 3.12. Así,

$$\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{a}_{arr} \tag{3.44}$$

Como la ley de Newton es aplicable a la aceleración absoluta,

www.elsolucionario.net

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_i = m\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{a}_{arr}\right)$$

o

$$\Sigma \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{arr} = m\frac{d\mathbf{V}}{dt} \tag{3.45}$$

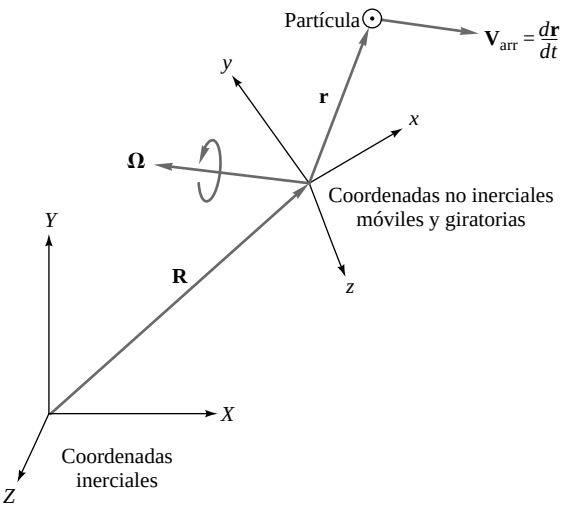


Figura 3.12. Sistemas de coordenadas inercial y no inercial.

[12] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

Así, la aplicación de la ley de Newton en un sistema de coordenadas *xyz* no inercial es equivalente a añadir una «fuerza» $-m\mathbf{a}_{arr}$ que tiene en cuenta los efectos no inerciales. En el caso más general, esquematizado en la Figura 3.12, el término $\mathbf{a}_{arr}$ contiene cuatro partes, tres de las cuales muestran el efecto de la velocidad angular $\mathbf{\Omega}(t)$ en las coordenadas no inerciales. Observando la Figura 3.12, vemos que el desplazamiento absoluto de una partícula es

$$\mathbf{S}_i = \boldsymbol{r} + \mathbf{R} \tag{3.46}$$

Derivando obtenemos la velocidad absoluta:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V} + \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \tag{3.47}$$

Una segunda derivación proporciona la aceleración absoluta:

$$\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \tag{3.48}$$

Comparando con la ecuación (3.44), vemos que los últimos cuatro términos de la derecha representan la aceleración de arrastre adicional. Estos términos pueden ser descritos así:

1. $d^2\mathbf{R}/dt^2$ es la aceleración del sistema de coordenadas *xyz* no inercial.
2. $(d\mathbf{\Omega}/dt) \times \mathbf{r}$ es el efecto de la aceleración angular.
3. $2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}$ es la aceleración de Coriolis.
4. $\Omega \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})$ es la aceleración centrípeta, dirigida desde la partícula, perpendicular al eje de rotación, de magnitud $\Omega^2 L$, donde L es la distancia perpendicular a dicho eje.[13]

www.elsolucionario.net

La Ecuación (3.45) sólo difiere de la Ecuación (3.2) en las fuerzas de inercia añadidas en el primer miembro. Por ello, la ecuación de cantidad de movimiento para un volumen de control, respecto a un sistema de coordenadas no inercial, se obtiene añadiendo simplemente los términos de inercia; esto es, integrando el efecto de la aceleración de arrastre sobre cada elemento diferencial de masa del volumen de control:

$$\int \mathbf{F}\,\Phi\,\mathbf{a}_{arr}\,dm = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \mathbf{V}\,d\forall\right) + \int_{SC} \mathbf{V}(\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n})\,dA \tag{3.49}$$

donde

$$\mathbf{a}_{arr} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})$$

Ésta es la forma no inercial equivalente a la inercial dada por la Ecuación (3.35). Para analizar estos problemas, debe conocerse el desplazamiento en el origen **R** y la velocidad angular Ω del sistema de coordenadas no inercial.

Si el volumen de control no es deformable, la Ecuación (3.49) se reduce a

$$\int \mathbf{F}\,\Phi\,\mathbf{a}_{arr}\,dm = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \mathbf{V}\,d\forall\right) + \int_{SC} \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\,dA \tag{3.50}$$

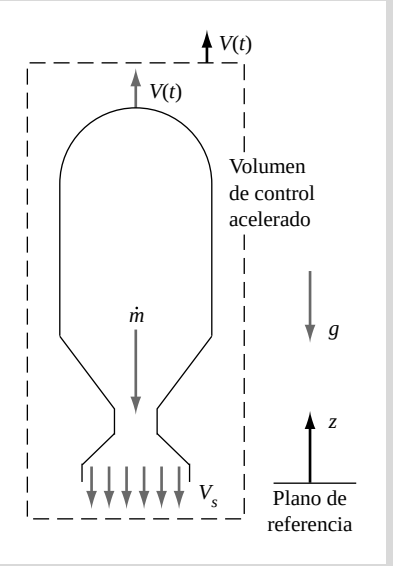
En otras palabras, el segundo término es el mismo de la Ecuación (3.37).

[13] Una discusión completa de estos términos no inerciales puede encontrarse, por ejemplo, en la Referencia [4], págs. 49-51.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 3.12

Un ejemplo clásico de un volumen de control acelerado es el caso de un cohete moviéndose en trayectoria rectilínea, como en la Figura E3.12. Se considera que la masa inicial del cohete es M_0 y se supone un caudal uniforme de masa de escape $\dot{m}$ a una velocidad V_s relativa al cohete. Si el flujo dentro del motor cohete es estacionario y se desprecia la resistencia del aire, deduzca la ecuación diferencial de la velocidad vertical del cohete $V(t)$ e intégrela empleando la condición inicial $V = 0$ en $t = 0$.



E3.12

www.elsolucionario.net

Solución

Elegimos un volumen de control adecuado, que encierre al cohete, corte al chorro de salida y se acelere hacia arriba a la velocidad del cohete $V(t)$, como el de la Figura E3.12. La ecuación de cantidad de movimiento (3.49) queda

$$\Sigma F_z = \int a_{arr}\,dm = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} w\,d\dot{m}\right) + (\dot{m}w)_s$$

o

$$-mg - m\frac{dV}{dt} = 0 + \dot{m}(-V_s) \quad \text{con} \quad m = m(t) = M_0 - \dot{m}t$$

El término $a_{arr} = dV/dt$ del cohete. La integral del volumen de control se anula porque las condiciones del flujo en el motor cohete son estacionarias. Separando variables e integrando con $V = 0$ en $t = 0$, se obtiene:

$$\int_0^V dV = \dot{m}V_s \int_0^t \frac{dt}{M_0 - \dot{m}t} - g\int_0^t dt \quad \text{o} \quad V(t) = -V_s \ln\left|1 - \frac{\dot{m}t}{M_0}\right| - gt \qquad \textit{Resp.}$$

Ésta es la fórmula aproximada clásica para la dinámica de un cohete. El primer término es positivo y, si la masa de combustible quemado es una fracción grande del total de la masa inicial, la velocidad final del cohete puede superar V_s.

www.elsolucionario.net

3.5. TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO[14]

El análisis de volúmenes de control también se puede aplicar a la ecuación del momento cinético, Ecuación (3.3), haciendo que la variable muda **B** sea el vector momento cinético **H**. Sin embargo, como el sistema que consideramos aquí es un grupo de partículas fluidas no rígidas con velocidad variable, el concepto de momento de inercia másico no es de ninguna ayuda y tenemos que integrar sobre cada masa elemental *dm* para obtener el momento cinético instantáneo. Si *O* es el punto con respecto al cual queremos conocer los momentos, el momento cinético será

$$\mathbf{H}_o = \int_{\text{sist}} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) dm \tag{3.51}$$

donde **r** es el vector posición de la masa *dm* respecto a *O* y **V** la velocidad de esa masa elemental. El momento cinético por unidad de masa es, pues,

$$\frac{d\mathbf{H}_o}{dm} = \mathbf{r} \times \mathbf{V}$$

El teorema del transporte de Reynolds (3.16) nos dice que

$$\left.\frac{d\mathbf{H}_o}{dt}\right|_{\text{sist}} = \frac{d}{dt}\left[\int_{\text{VC}} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho d\mathcal{V}\right] + \int_{\text{SC}} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho (\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n}) dA \tag{3.52}$$

para el caso general de un volumen de control deformable. Por la conservación del momento cinético (3.3) su ritmo de variación debe ser igual a la suma de los momentos respecto al punto *O* de todas las fuerzas aplicadas al volumen de control

www.elsolucionario.net

$$\frac{d\mathbf{H}_o}{dt} = \sum \mathbf{M}_o = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_O$$

Obsérvese que el momento total es igual a la suma de momentos de todas las fuerzas aplicadas con respecto al punto *O*. Recuérdese, sin embargo, que esta ley, como la de Newton (3.2), supone que la velocidad **V** de la partícula es relativa a un sistema de coordenadas *inercial*. Si no es así, se debe incluir el momento producido por los términos de la aceleración de arrastre de la Ecuación (3.49) respecto al punto *O*:

$$\sum \mathbf{M}_o = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_O + \int_{\text{VC}} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}_{\text{arr}}) dm \tag{3.53}$$

donde los cuatro términos que constituyen $\mathbf{a}_{\text{arr}}$ son los dados por la Ecuación (3.49). Así, el caso más general del teorema del momento cinético para un volumen de control deformable y un sistema de coordenadas no inercial se obtiene combinando las Ecuaciones (3.52) y (3.53):

$$\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_O + \int_{\text{VC}} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}_{\text{arr}}) dm = \frac{d}{dt}\left[\int_{\text{VC}} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho d\mathcal{V}\right] + \int_{\text{SC}} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho (\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n}) dA \tag{3.54}$$

Para un volumen de control no deformable, se reduce a

$$\boxed{\sum \mathbf{M}_o = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{\text{VC}} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho d\mathcal{V}\right] + \int_{\text{SC}} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA} \tag{3.55}$$

[14] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

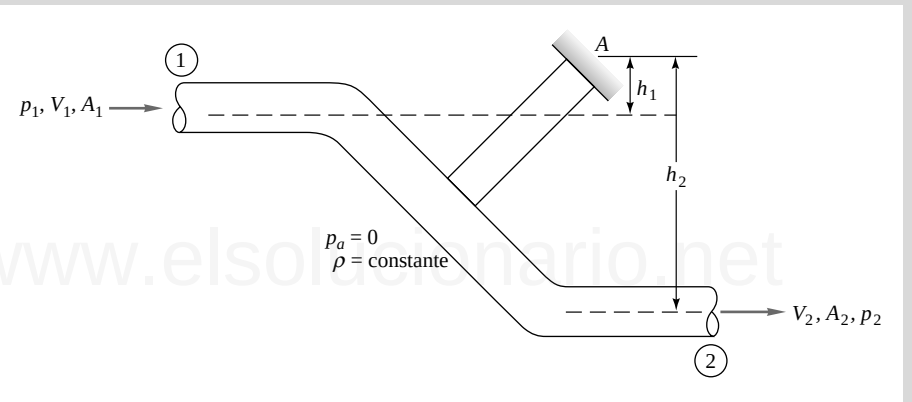
Además, si sólo hay entradas y salidas unidimensionales, los términos de flujo del momento cinético quedan en la forma

$$\int_{SC}(\mathbf{r}\times\mathbf{V})\rho(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA = \sum(\mathbf{r}\times\mathbf{V})_{sal}\dot{m}_{sal} - \sum(\mathbf{r}\times\mathbf{V})_{ent}\dot{m}_{ent} \tag{3.56}$$

Aunque en este momento del libro el teorema del momento cinético puede ser considerado como un tema secundario, tiene aplicaciones directas a muchos problemas de flujos en los que aparecen momentos. Un caso particularmente importante corresponde al análisis de aparatos con flujos giratorios, denominados habitualmente *turbomáquinas* (Capítulo 11).

EJEMPLO 3.13

La Figura E3.13*a* muestra dos codos de un conducto sujetos al punto *A* y conectados al resto de la instalación mediante acoplamientos flexibles en 1 y 2. El fluido es incompresible y la presión ambiente p_a es nula. (*a*) Calcule el par *T* ejercido sobre el soporte en *A*, en función de las propiedades del flujo en las secciones 1 y 2 y las distancias h_1 y h_2. (*b*) Calcule este par cuando $D_1 = D_2 = 3$ in, $p_1 = 100$ lbf/in^2 de presión manométrica, $p_2 = 80$ lbf/in^2 manométrica, $V_1 = 40$ ft/s, $h_1 = 2$ in, $h_2 = 10$ in y $\rho = 1{,}94$ slugs/ft^3.



E3.13a

Solución

Apartado (*a*)

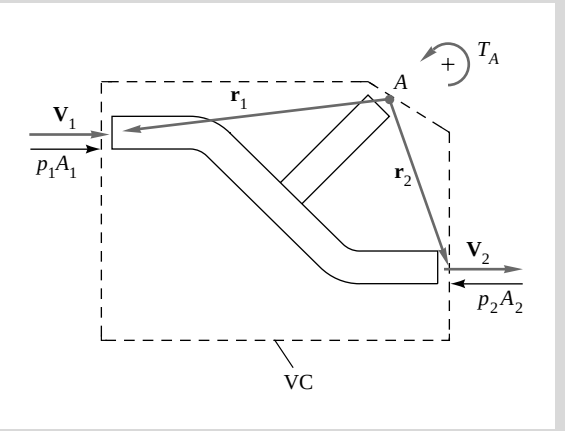
El volumen de control elegido en la Figura E3.13*b* corta a través de las secciones 1 y 2 y del soporte en *A*, donde se ejerce el par T_A pedido. Al tratarse de acoplamientos flexibles no hay par en las secciones 1 y 2, de modo que en los cortes correspondientes no hay momentos. En los términos de momento cinético $\mathbf{r}\times\mathbf{V}$, $\mathbf{r}$ debe tomarse con origen en *A*. Nótese que ambas fuerzas de presión p_1A_1 y p_2A_2 dan momento con respecto a *A*. La Ecuación (3.55) con flujos unidimensionales queda

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{M}_A &= \mathbf{T}_A + \mathbf{r}_1\times(-p_1A_1\mathbf{n}_1) + \mathbf{r}_2\times(p_2A_2\mathbf{n}_2)\\ &= (\mathbf{r}_2\times\mathbf{V}_2)(+\dot{m}_{sal}) + (\mathbf{r}_1\times\mathbf{V}_1)(-\dot{m}_{ent})\end{aligned} \tag{1}$$

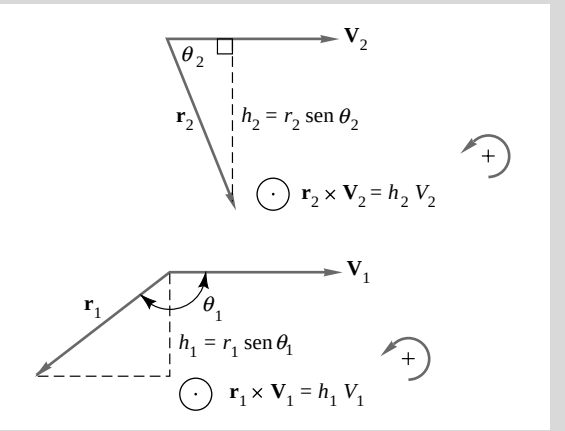
La Figura E3.13*c* muestra que todos los productos vectoriales están relacionados con r_1 sen $\theta_1 = h_1$ o r_2 sen $\theta_2 = h_2$, que son las distancias perpendiculares a los ejes del conducto en 1 y 2 desde *A*. Recuérdese que, a partir de la ecuación de continuidad, se obtiene que $\dot{m}_{ent} = \dot{m}_{sal}$. Contando como positivos los momentos en sentido contrario a las agujas del reloj, la Ecuación (1) queda

$$T_A + p_1A_1h_1 - p_2A_2h_2 = \dot{m}(h_2V_2 - h_1V_1) \tag{2}$$

www.elsolucionario.net



E3.13b



E3.13c

Reagrupando, el par pedido es

$$T_A = h_2(p_2A_2 + \dot{m}V_2) \Phi h_1(p_1A_1 + \dot{m}V_1) \qquad \textit{Resp.}\ (a)\ (3)$$

en sentido contrario a las agujas del reloj. Las presiones p_1 y p_2 son manométricas. Nótese que este resultado es independiente de la forma de los codos y sólo depende de las propiedades en las secciones 1 y 2 y de las distancias h_1 y h_2.[15]

Apartado (*b*)

Para el ejemplo numérico, convierta las unidades al sistema británico:

www.elsolucionario.net

$$D_1 = D_2 = 3 \text{ in} = 0{,}25 \text{ ft} \qquad p_1 = 100\frac{\text{lbf}}{\text{in}^2} = 14.400\frac{\text{lbf}}{\text{ft}^2} \qquad p_2 = 80\frac{\text{lbf}}{\text{in}^2} = 11.520\frac{\text{lbf}}{\text{ft}^2}$$

$$h_1 = 2 \text{ in} = \frac{2}{12}\text{ft} \qquad h_2 = 10\,\text{in} = \frac{10}{12}\text{ft} \qquad \Leftarrow 1{,}94\frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}$$

El área de la entrada y la salida es la misma, $A_1 = A_2 = (\Theta/4)(0{,}25 \text{ ft})^2 = 0{,}0491 \text{ ft}^2$. Como la densidad es constante, por continuidad tenemos que $\rho A_1V_1 = \rho A_2V_2$, es decir, $V_1 = V_2 = 40$ ft/s. El caudal es

$$\dot{m} = \Leftarrow A_1V_1 = \text{™}1{,}94\frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}\Big|(0{,}0491 \text{ ft}^2)\text{™}40\frac{\text{ft}}{\text{s}}\Big| = 3{,}81\frac{\text{slug}}{\text{s}}$$

- *Evaluación del momento*. Los datos se pueden sustituir en la Ecuación (3):

$$T_A = \text{™}\frac{10}{12}\text{ft}\Big|\otimes\text{™}11.520\frac{\text{lbf}}{\text{ft}^2}\Big|(0{,}0491 \text{ ft}^2) + \text{™}3{,}81\frac{\text{slug}}{\text{s}}\Big|\text{™}40\frac{\text{ft}}{\text{s}}\Big|\cdot$$
$$\Phi\text{™}\frac{2}{12}\text{ft}\Big|\otimes\text{™}14.400\frac{\text{lbf}}{\text{ft}^2}\Big|(0{,}0491 \text{ ft}^2) + \text{™}3{,}81\frac{\text{slug}}{\text{s}}\Big|\text{™}40\frac{\text{ft}}{\text{s}}\Big|\cdot$$
$$= 598 \text{ ft} \cdot \text{lbf} - 143 \text{ ft} \cdot \text{lbf} = 455 \text{ ft} \cdot \text{lbf en sentido antihorario} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

- *Comentarios*. El uso de las unidades del sistema británico es crucial cuando se combinan términos no semejantes, como cuando se multiplican presiones por áreas o caudales por velocidades, para obtener términos que finalmente se suman para obtener la solución numérica.

[15] Indirectamente, la forma curva del conducto probablemente afecte al cambio de presión de p_1 a p_2.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 3.14

La Figura 3.13 muestra el esquema de una bomba centrífuga. El fluido entra axialmente y pasa a través de unos álabes que giran a velocidad angular ω. La velocidad del fluido cambia de V_1 a V_2 y la presión de p_1 a p_2. (*a*) Calcule el par T_O que hay que aplicar a los álabes para producir este flujo. (*b*) La potencia ideal suministrada a la bomba sería $P = \omega T_o$. Para ilustrar este caso numéricamente, suponga que $r_1 = 0{,}2$ m, $r_2 = 0{,}5$ m y $b = 0{,}15$ m. Sabiendo que la bomba gira a 600 rpm y suministra un caudal de 2,5 m^3/s con una densidad de 1000 kg/m^3, calcule el par y la potencia ideales correspondientes.

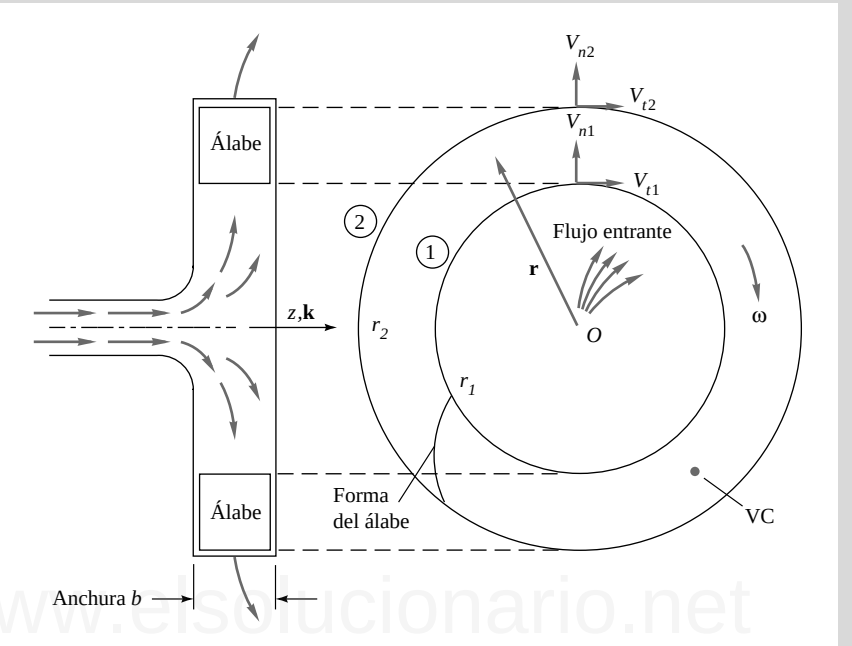


Figura 3.13. Esquema simplificado de una bomba centrífuga.

Solución

Apartado (*a*)

El volumen de control elegido es la región anular entre las secciones 1 y 2 en la que el flujo pasa entre los álabes (véase Figura 3.13). El flujo es estacionario e incompresible. La contribución de la presión al momento con respecto al eje *O* es nula porque las presiones en 1 y 2 actúan radialmente hacia *O*. La Ecuación (3.55) queda

$$\sum \mathbf{M}_o = \mathbf{T}_o = (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{V}_2)\dot{m}_{sal} \Phi(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{V}_1)\dot{m}_{ent} \tag{1}$$

donde la ecuación de continuidad nos dice que

$$\dot{m}_{ent} = \rho V_{n1} 2\pi r_1 b = \dot{m}_{sal} = \rho V_{n2} 2\pi r_2 b = \rho Q$$

El producto vectorial $\mathbf{r} \times \mathbf{V}$ es en el sentido de las agujas del reloj con respecto a *O* en ambas secciones:

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{V}_2 = r_2 V_{t2} \text{ sen } 90° \mathbf{k} = r_2 V_{t2}\mathbf{k} \qquad \text{en sentido horario}$$
$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{V}_1 = r_1 V_{t1}\mathbf{k} \qquad \text{en sentido horario}$$

La Ecuación (1) se convierte así en la fórmula pedida para el momento:

$$T_o = \rho Q(r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1})\mathbf{k} \qquad \text{en sentido horario} \qquad \textit{Resp.}\ (a)\ (2a)$$

www.elsolucionario.net

Esta relación se denomina *ecuación de Euler de la turbina*. En una bomba idealizada las velocidades tangenciales en la entrada y la salida se igualarían a las velocidades de giro del álabe $V_{t1} = \omega r_1$ y $V_{t2} = \omega r_2$. El par aplicado queda entonces

$$T_o = \rho Q \omega (r_2^2 - r_1^2) \qquad \text{en sentido horario} \tag{2b}$$

Apartado (*b*)

Convertimos ω en $600(2\pi/60) = 62{,}8$ rad/s. En estos cálculos no intervienen las velocidades normales, que se pueden obtener del caudal

$$V_{n1} = \frac{Q}{2\pi r_1 b} = \frac{2{,}5 \text{ m}^3/\text{s}}{2\pi(0{,}2 \text{ m})(0{,}15 \text{ m})} = 13{,}3 \text{ m/s}$$

$$V_{n2} = \frac{Q}{2\pi r_2 b} = \frac{2{,}5}{2\pi(0{,}5)(0{,}15)} = 5{,}3 \text{ m/s}$$

Para una entrada y una salida idealizadas, las velocidades tangenciales igualan a las respectivas velocidades del álabe

$$V_{t1} = \omega r_1 = (62{,}8 \text{ rad/s})(0{,}2 \text{ m}) = 12{,}6 \text{ m/s}$$
$$V_{t2} = \omega r_2 = 62{,}8(0{,}5) = 31{,}4 \text{ m/s}$$

Según la Ecuación (2*a*), el par pedido es

$$T_o = (1000 \text{ kg/m}^3)(2{,}5 \text{ m}^3/\text{s})[(0{,}5 \text{ m})(31{,}4 \text{ m/s}) - 0{,}2 \text{ m})(12{,}6 \text{ m/s})]$$
$$= 33.000 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2)/\text{s}^2 = 33.000 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

La potencia ideal requerida es

$$P = \omega T_o = (62{,}8 \text{ rad/s})(33.000 \text{ N} \cdot \text{m}) = 2.070.000 \text{ (N} \cdot \text{m)/s}$$
$$= 2{,}07 \text{ MW (2780 hp)} \qquad \textit{Resp.}$$

En la práctica, las velocidades tangenciales son considerablemente menores que las del extremo del álabe y la potencia de diseño de esta bomba puede ser incluso menor que 1 MW.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 3.15

La Figura 3.14 muestra el brazo de un aspersor visto desde arriba. El brazo gira a velocidad angular constante ω alrededor de *O*. El flujo volumétrico que entra en el brazo en *O* es *Q*, y el fluido es incompresible. Hay un par resistente en *O*, debido a la fricción de los cojinetes, de valor $-T_o\mathbf{k}$. Calcule la velocidad de giro ω en función de la geometría y de las propiedades del flujo.

Solución

La velocidad de entrada es $V_0\mathbf{k}$, donde $V_0 = Q/A_{\text{cond}}$. La Ecuación (3.55) sólo es aplicable al volumen de control de la Figura 3.14 si **V** es la velocidad absoluta con respecto a un sistema de referencia inercial. Por tanto, la velocidad de salida en la sección 2 es

$$\mathbf{V}_2 = V_0\mathbf{i} - R\omega\mathbf{i}$$

La Ecuación (3.55) indica en este caso, para un flujo estacionario,

$$\sum \mathbf{M}_o = \Sigma T_o\mathbf{k} = (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{V}_2)\dot{m}_{\text{sal}} \; \Sigma(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{V}_1)\dot{m}_{\text{ent}} \tag{1}$$

www.elsolucionario.net

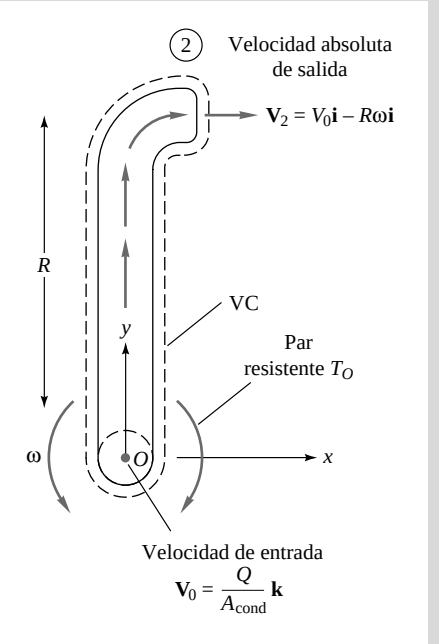


Figura 3.14. Vista en planta de un aspersor giratorio de un solo brazo.

donde, por continuidad, $\dot{m}_{ent} = \dot{m}_{sal} = \rho Q$. Los productos vectoriales con respecto a O son

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{V}_2 = R\mathbf{j} \times (V_0 - R\omega)\mathbf{i} = (R^2\omega - RV_0)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{V}_1 = 0\mathbf{j} \times V_0\mathbf{k} = 0$$

www.elsolucionario.net

La Ecuación (1) queda entonces

$$\Phi T_o\mathbf{k} = \rho Q(R^2\varnothing\Phi RV_0)\mathbf{k}$$
$$\varnothing = \frac{V_0}{R}\Phi\frac{T_o}{\rho QR^2} \qquad \textit{Resp.}$$

El resultado puede parecer sorprendente: incluso si el par resistente T_O es despreciable, la velocidad de giro está limitada a V_0/R, impuesta por la velocidad de entrada y la longitud del brazo.

3.6. ECUACIÓN DE LA ENERGÍA[16]

Obtendremos una cuarta y última ecuación aplicando el teorema del transporte de Reynolds (3.12) a la primera ley de la Termodinámica, Ecuación (3.5). En este caso, la variable muda B es ahora la energía E y la energía por unidad de masa es $\beta = dE/dm = e$. La Ecuación (3.5) se puede escribir para un volumen de control en la forma siguiente:[17]

$$\frac{dQ}{dt}\Phi\frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} e\rho d\mathcal{V}\right) + \int_{SC} e\rho(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})dA \tag{3.57}$$

[16] Incluso si el lector no tiene conocimientos profundos de termodinámica, debería leer esta sección a título informativo.

[17] La ecuación de la energía para un volumen de control deformable es muy compleja y no la discutiremos aquí. Para más detalles, consúltense las Referencias 4 y 5.

www.elsolucionario.net

Recordemos que Q positivo significa calor comunicado al sistema y que W positivo significa trabajo realizado por el sistema.

La energía del sistema e por unidad de masa puede ser de varios tipos:

$$e = e_{\text{interna}} + e_{\text{cinética}} + e_{\text{potencial}} + e_{\text{otras}}$$

donde e_{otras} se refiere a cambios de composición química, reacciones nucleares y efectos electrostáticos y magnéticos. Aquí despreciaremos este término y consideraremos sólo los tres primeros, como vimos en la Ecuación (1.9), con z definida «hacia arriba»:

$$e = \hat{u} + \tfrac{1}{2}V^2 + gz \tag{3.58}$$

Los términos de calor y trabajo podrían ser analizados en detalle. En un libro sobre transferencia de calor, dQ/dT se dividiría en efectos de conducción, convección y radiación, y se escribirían capítulos enteros para cada uno de ellos (véase, por ejemplo, Referencia 3). Aquí se dejará el término de esta forma y sólo se analizará en algún caso particular.

Utilizando por conveniencia el punto encima para indicar derivada temporal, dividimos el término de trabajo en tres partes:

$$\dot{W} = \dot{W}_{\text{motor}} + \dot{W}_{\text{pres}} + \dot{W}_{\text{esfuerzos viscosos}} = \dot{W}_s + \dot{W}_p + \dot{W}_v$$

El trabajo de las fuerzas gravitatorias ya ha sido incluido como energía potencial en la Ecuación (3.58). Otros tipos de trabajo, como el de las fuerzas electromagnéticas, se excluyen en este análisis.

El trabajo de partes móviles, que llamaremos motor, muestra la porción de trabajo realizada por una máquina (álabe de una bomba, álabe de un ventilador, pistón, etc.) cuyo eje atraviesa la superficie de control hacia el interior del volumen de control. No haremos más comentarios sobre este término $\dot{W}_s$, dejando para el Capítulo 11 el estudio de las actuaciones de turbomáquinas.

El trabajo de las fuerzas de presión, $\dot{W}_p$, sólo se produce en la superficie; en el interior del volumen de control aparecen fuerzas iguales y opuestas cuyos trabajos se anulan. El trabajo de las fuerzas de presión sobre un elemento de área dA es igual a la fuerza elemental por la componente normal de la velocidad hacia el volumen de control:

$$d\dot{W}_p = -(p\, dA)V_{n,\,\text{ent}} = -p(-\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\, dA$$

El trabajo total, por unidad de tiempo, es la integral sobre la superficie de control:

$$\dot{W}_p = \int_{SC} p(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})dA \tag{3.59}$$

Una advertencia: si parte de la superficie de control es superficie de una máquina, el trabajo de las fuerzas de presión correspondiente lo incorporaremos al término de las *partes móviles* $\dot{W}_s$ y no a $\dot{W}_p$, dejando este último para representar los efectos del flujo.

Finalmente, el trabajo de deformación debido a los esfuerzos viscosos sólo cuenta en la superficie (ya que el de los esfuerzos del interior se cancela), y consiste en el producto de cada esfuerzo viscoso (uno normal y dos tangenciales) por la respectiva componente de la velocidad:

$$d\dot{W}_v = \Phi \Downarrow \Delta\mathbf{V}\, dA$$

o

$$\dot{W}_v = \Phi \int_{SC} \Downarrow \Delta\mathbf{V}\, dA \tag{3.60}$$

donde τ es el vector esfuerzo sobre el elemento de área dA. Este término puede ser nulo o despreciable en ciertos tipos particulares de superficies de control:

Superficie sólida. En aquellas partes de la superficie de control que sean paredes sólidas fijas, $\mathbf{V} = 0$ por la condición de no deslizamiento. Por tanto, $\dot{W}_v = 0$ idénticamente.

Superficie de una máquina. En este caso, el esfuerzo viscoso es una contribución de la máquina y por ello lo incluimos en el término $\dot{W}_s$.

www.elsolucionario.net

Entrada o salida. En una entrada o salida, el flujo es aproximadamente normal al elemento de área dA. Por ello, la única contribución procede del esfuerzo viscoso normal $\tau_{nn} V_n \, dA$. Como los esfuerzos viscosos normales son muy pequeños, salvo raras excepciones como, por ejemplo, en el interior de una onda de choque, es habitual despreciar el trabajo de los esfuerzos viscosos en las entradas y salidas del volumen de control.

Superficie de corriente. Si la superficie de control es una superficie de corriente, como la curva sobre la capa límite de la Figura 3.11, los términos viscosos pueden ser calculados y retenidos sobre la superficie de corriente si son apreciables. En el caso particular de la Figura 3.11, la línea de corriente pasa justo por el exterior de la capa límite y el término viscoso es despreciable.

El resultado global de todas la discusión anterior indica que el término de trabajo de la Ecuación (3.57) consiste esencialmente de

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \int_{SC} p(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA - \int_{SC} (\tau \cdot \mathbf{V})_{sc} \, dA \tag{3.61}$$

donde el subíndice «SC» indica superficie de corriente. Al introducir (3.61) y (3.58) en (3.57), vemos que el término de trabajo de las fuerzas de presión puede incorporarse a los términos de flujo de energía, ya que ambos incluyen integrales de superficie con el factor $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$. La ecuación de la energía para un volumen de control queda entonces:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \frac{E}{Dt}\left(\int_{VC} e \, d\mathcal{V}\right) + \int_{SC} \left(e + \frac{p}{\rho}\right)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \tag{3.62}$$

Tomando e de (3.58) vemos que en la integral de superficie aparece la entalpía $\hat{h} = \hat{u} + p/\rho$. La forma final de la ecuación de la energía para un volumen de control es, pues,

$$\boxed{\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \frac{E}{Dt}\left[\int_{VC} \left(\hat{u} + \tfrac{1}{2}V^2 + gz\right) d\mathcal{V}\right] + \int_{SC} \left(\hat{h} + \tfrac{1}{2}V^2 + gz\right)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA} \tag{3.63}$$

Como se mencionó anteriormente, el término $\dot{W}_v$ raras veces es importante.

Flujos de energía unidimensionales

Si el volumen de control tiene una serie de salidas y entradas unidimensionales, como en la Figura 3.6, la integral de superficie que aparece en (3.63) se reduce a la suma de los flujos de salida menos los flujos de entrada:

$$\int_{SC} (\hat{h} + \tfrac{1}{2}V^2 + gz)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA =$$
$$= \sum (\hat{h} + \tfrac{1}{2}V^2 + gz)_{sal} \dot{m}_{sal} - \sum (\hat{h} + \tfrac{1}{2}V^2 + gz)_{ent} \dot{m}_{ent} \tag{3.64}$$

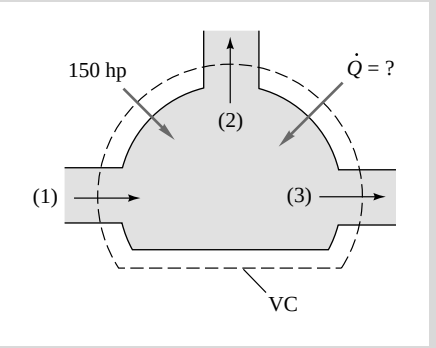
donde los valores de $\hat{h}$, $\frac{1}{2}V^2$ y gz se toman como los valores medios en cada sección.

EJEMPLO 3.16

Una máquina (Figura E3.16) toma aire en régimen estacionario por la sección 1 y lo descarga por las secciones 2 y 3. Las propiedades en cada sección son las siguientes:

www.elsolucionario.net

Sección	A, ft^2	Q, ft^3/s	T, °F	p, lbf/in^2 abs	z, ft
1	0,4	100	70	20	1,0
2	1,0	40	100	30	4,0
3	0,25	50	200	?	1,5



E3.16

La máquina comunica al aire una potencia de 150 hp. Calcule la presión p_3 en lbf/in^2 y el calor transferido $\dot{Q}$ en Btu/s. Suponga que el aire es un gas perfecto con R = 1716 y c_p = 6003 ft · lbf/(slug · °R).

Solución

- *Diagrama del sistema*. La Figura E3.16 muestra la entrada 1 (flujo negativo) y las salidas 2 y 3 (flujos positivos).
- *Consideraciones*. Flujo estacionario, entradas y salidas unidimensionales, gas ideal y trabajo de los esfuerzos viscosos despreciable. El flujo *no* es incompresible. Nótese que $Q_1 \times Q_2 + Q_3$ ya que las densidades son diferentes.
- *Procedimiento*. Evaluamos las velocidades, densidades y entalpías y sustituimos en la Ecuación (3.63). Usamos unidades del sistema británico para todas las propiedades, incluyendo las presiones. Con Q_i dado, evaluamos $V_i = Q_i/A_i$:

$$V_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{100\ \text{ft}^3/\text{s}}{0,4\ \text{ft}^2} = 250\frac{\text{ft}}{\text{s}} \quad V_2 = \frac{40\ \text{ft}^3/\text{s}}{1,0\ \text{ft}^2} = 40\frac{\text{ft}}{\text{s}} \quad V_3 = \frac{50\ \text{ft}^3/\text{s}}{0,25\ \text{ft}^2} = 200\frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

Las densidades en las secciones 1 y 2 se obtienen de las ecuaciones de un gas ideal:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{(20 \times 144)\ \text{lbf/ft}^2}{[1716\ \text{ft lbf/(slug °R)}][(70 + 460)\text{°R}]} = 0,00317\frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}$$

$$\rho_2 = \frac{(30 \times 144)}{(1716)(100 + 460)} = 0,00450\frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}$$

Sin embargo, p_3 es desconocido, por lo que para calcular ρ_3 empleamos la ecuación de continuidad para un flujo estacionario:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \quad \text{o} \quad \rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 + \rho_3 Q_3 \tag{1}$$

$$0,00317\frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}\left|-100\frac{\text{ft}^3}{\text{s}}\right| = 0,00450(40) + \rho_3(50) \quad \text{resolviendo} \quad \rho_3 = 0,00274\frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}$$

Una vez conocido ρ_3, podemos calcular p_3 a partir de la ecuación de los gases ideales:

$$p_3 = \rho_3 RT_3 = 0,00274\frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}\left|1716\frac{\text{ft lbf}}{\text{slug °R}}\right|(200 + 460\text{°R}) = 3100\frac{\text{lbf}}{\text{ft}^2} = 21,5\frac{\text{lbf}}{\text{in}^2} \quad \textit{Resp.}$$

www.elsolucionario.net

- *Resolución final*. En un gas ideal es posible aproximar la entalpía como $h_i = c_p T_i$. El trabajo motor es *negativo* (dentro del volumen de control) y el trabajo de los esfuerzos viscosos es despreciable:

$$\dot{W}_v \approx 0 \qquad \dot{W}_s = (-150 \text{ hp})\left[550 \frac{\text{ft} \cdot \text{lbf}}{\text{s} \cdot \text{hp}}\right] = -82.500 \frac{\text{ft} \cdot \text{lbf}}{\text{s}} \text{ (trabajo } \textit{sobre} \text{ el sistema)}$$

Para un flujo estacionario, la integral de volumen de la Ecuación (3.63) se anula y la ecuación de la energía pasa a ser

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = -\dot{m}_1\left(c_p T_1 + \tfrac{1}{2}V_1^2 + gz_1\right) + \dot{m}_2\left(c_p T_2 + \tfrac{1}{2}V_2^2 + gz_2\right) + \dot{m}_3\left(c_p T_3 + \tfrac{1}{2}V_3^2 + gz_3\right) \tag{2}$$

Usando los cálculos de continuidad realizados en la Ecuación (1) anterior, obtenemos que los gastos másicos son

$$\dot{m}_1 = \rho_1 Q_1 = (0{,}00317)(100) = 0{,}317 \frac{\text{slug}}{\text{s}} \qquad \dot{m}_2 = \rho_2 Q_2 = 0{,}180 \frac{\text{slug}}{\text{s}}$$

$$\dot{m}_3 = \rho_3 Q_3 = 0{,}317 \frac{\text{slug}}{\text{s}}$$

Es instructivo separar los términos de flujo en la ecuación de la energía (2) para su análisis:

$$\text{Flujo de entalpía} = c_p(-\dot{m}_1 T_1 + \dot{m}_2 T_2 + \dot{m}_3 T_3)$$
$$= (6003)[(-0{,}317)(530) + (0{,}180)(560) + (0{,}137)(660)]$$
$$= -1.009.000 + 605.000 + 543.000 = +139.000 \text{ ft} \cdot \text{lbf/s}$$

$$\text{Flujo de energía cinética} = \tfrac{1}{2}(-\dot{m}_1 V_1^2 + \dot{m}_2 V_2^2 + \dot{m}_3 V_3^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}[-0{,}317(250)^2 + (0{,}180)(40)^2 + (0{,}137)(200)^2]$$
$$= -9900 + 140 + 2740 = -7000 \text{ ft} \cdot \text{lbf/s}$$

$$\text{Flujo de energía potencial} = g(-\dot{m}_1 z_1 + \dot{m}_2 z_2 + \dot{m}_3 z_3)$$
$$= (32{,}2)[-0{,}317(1{,}0) + 0{,}180(4{,}0) + 0{,}137(1{,}5)]$$
$$= -10 + 23 + 7 = +20 \text{ ft} - \text{lbf/s}$$

La Ecuación (2) se puede evaluar ahora para evaluar la transferencia de calor:

$$\dot{Q} - (-82.500) = 139.000 - 7.000 + 20$$

o
$$\dot{Q} = -49.520 \frac{\text{ft} \cdot \text{lbf}}{\text{s}}\left[\frac{1 \text{ Btu}}{778{,}2 \text{ ft} \cdot \text{lbf}}\right] = +64 \frac{\text{Btu}}{\text{s}} \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios*. La transferencia de calor es positiva, es decir, hacia el interior del volumen de control. Como vemos, y esto es típico de los gases, el flujo de energía potencial es despreciable, el flujo de energía cinética es pequeño salvo que las velocidades sean muy altas (es decir, en régimen subsónico alto o supersónico), y el flujo de entalpía resulta dominante.

Ecuación de la energía de un flujo estacionario

En un flujo estacionario con una entrada y una salida, supuestas ambas unidimensionales, la Ecuación (3.63) se reduce a una relación muy usada en ingeniería. Sea 1 la sección de entrada y 2 la de salida. Tendremos

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \dot{m}_1\left(\hat{h}_1 + \tfrac{1}{2}V_1^2 + gz_1\right) + \dot{m}_2\left(\hat{h}_2 + \tfrac{1}{2}V_2^2 + gz_2\right) \tag{3.65}$$

www.elsolucionario.net

Pero como por la ecuación de continuidad $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_3$, reagrupando (3.65) queda:

$$\hat{h}_1 + \tfrac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = (\hat{h}_2 + \tfrac{1}{2}V_2^2 + gz_2) + q + w_s + w_v \tag{3.66}$$

donde $q = \dot{Q}/\dot{m} = dQ/dm$ es el calor comunicado al fluido por unidad de masa. Análogamente, $w_s = \dot{W}_s/\dot{m} = dW_s/dm$ y $w_v = \dot{W}_v/\dot{m} = dW_v/dm$. La Ecuación (3.66) es una forma general de *ecuación de energía para flujo estacionario*, que indica que la *entalpía de remanso* $H_1 = (\hat{h} + \frac{1}{2}V^2 + gz)_1$ difiere de H_2 sólo si hay transferencia de calor o trabajo de esfuerzos viscosos o partes móviles entre la secciones 1 y 2. Recuérdese que q es positivo si se comunica calor al fluido y w_s y w_v son positivos cuando el fluido realiza un trabajo sobre su entorno.

Cada término de la Ecuación (3.66) tiene dimensiones de energía por unidad de masa, o velocidad al cuadrado, que es la forma comúnmente utilizada por los ingenieros mecánicos. Si dividimos todo por g, cada término se convierte en una longitud, denominada carga o altura, que es la forma utilizada por los ingenieros civiles. El símbolo tradicional para la carga es h, que no debe confundirse con la entalpía. Para evitar confusiones, usaremos la energía interna al escribir la ecuación en forma de cargas:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\hat{u}_1}{g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\hat{u}_2}{g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_2 + h_q + h_s + h_v \tag{3.67}$$

donde $h_q = q/g$, $h_s = w_s/g$ y $h_v = w_v/g$ son las variaciones de carga debidas a transferencia de calor, trabajo de partes móviles y esfuerzos viscosos, respectivamente. El término $p/\rho g$ se denomina *carga o altura de presión* y el término $V^2/2g$ se denomina *carga o altura de velocidad*.

Fricción y trabajo motor en flujos a baja velocidad

Una aplicación común de la ecuación de la energía para flujo estacionario es el flujo en conductos o tuberías a baja velocidad (incompresible). El sistema de tuberías también puede incluir una bomba o una turbina. Las paredes del conducto y de la máquina son sólidas, de modo que el trabajo de los esfuerzos viscosos es nulo. Así, la Ecuación (3.67) se puede rescribir como

$$\left[\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1\right] = \left[\frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right] + \frac{\hat{u}_2 + \hat{u}_1 + q}{g} \tag{3.68}$$

Todos los términos de esta ecuación tienen unidades de longitud, o *carga*. Los términos entre paréntesis son los valores aguas arriba (1) y aguas abajo (2) de la *carga disponible* útil del flujo o *carga total*, denominada h_0. El último término de la derecha es la diferencia $(h_{01} - h_{02})$, que puede incluir el aumento de carga de la bomba, la extracción de carga de la turbina y la pérdida de carga por fricción h_f, valores siempre *positivos*. Así, en un flujo incompresible con una entrada y una salida, se puede escribir

$$\left[\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z\right]_{\text{ent}} = \left[\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z\right]_{\text{sal}} + h_{\text{fricción}} + h_{\text{bomba}} + h_{\text{turbina}} \tag{3.69}$$

La mayor parte de los problemas sobre flujos internos se resolverán con ayuda de la Ecuación (3.69). Los términos h son todos positivos, es decir, la pérdida de carga por fricción es siempre positiva en flujos reales (viscosos), una bomba añade energía (incrementa el segundo miembro) y una turbina extrae energía del flujo. Si se incluyen h_b o h_t, la bomba o turbina debe estar *entre* los puntos 1 y 2. En los Capítulos 5 y 6 desarrollaremos los métodos que permiten relacionar las pérdidas h_f en función de los parámetros del flujo en conductos, válvulas, adaptadores y otros accesorios.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 3.17

Se bombea gasolina a 20 °C a través de un conducto de 12 cm de diámetro y 10 km de longitud, con un caudal de 75 m^3/h (330 gal/min). La entrada es alimentada por una bomba a una presión de 24 atm. La salida está a la presión atmosférica estándar y 150 m más alta. Estime la pérdida de carga por fricción h_f y compárela con la carga de velocidad del flujo $V^2/(2g)$. (Estos números son bastante realistas para flujos a través de conductos.)

Solución

- *Valores de las propiedades*. De la Tabla A.3, para gasolina a 20 °C, $\rho = 680$ kg/m³ o $\rho g = (680)(9{,}81) = 6670$ N/m³.
- *Consideraciones*. Flujo estacionario, sin trabajo motor, por lo que $h_b = h_t = 0$. Si $z_1 = 0$, entonces $z_2 = 150$ m.
- *Procedimiento*. Calculamos la velocidad y la carga de velocidad. A continuación evaluamos la pérdida de carga por fricción utilizando la Ecuación (3.69) y comparamos.
- *Resolución*. Como el diámetro del conducto es constante, la velocidad media es la misma en todo el conducto:

$$V_{ent} = V_{sal} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{(\Theta/4)D^2} = \frac{(75\ m^3/h)(3600\ s/h)}{(\Theta 4)(0{,}12\ m)^2} \Xi 1{,}84 \frac{m}{s}$$

$$\text{Carga de velocidad} = \frac{V^2}{2g} = \frac{(1{,}84\ m/s)^2}{2(9{,}81\ m/s^2)} \Xi 0{,}173\ m$$

Sustituimos en la Ecuación (3.69) y despejamos la pérdida de carga por fricción. Utilizamos pascales para las presiones y observamos que las cargas de velocidad se cancelan por tratarse de un conducto de sección constante.

$$\frac{p_{ent}}{\cancel{\rho g}} + \frac{V_{ent}^2}{2g} + z_{ent} = \frac{p_{sal}}{\cancel{\rho g}} + \frac{V_{sal}^2}{2g} + z_{sal} + h_f$$

$$\frac{(24)(101.350\ N/m^2)}{6670\ N/m^3} + 0{,}173\ m + 0\ m = \frac{101.350\ N/m^2}{6670\ N/m^3} + 0{,}173\ m + 150\ m + h_f$$

o $$h_f = 364{,}7 \Phi 15{,}2 \Phi 150 \Xi 199\ m \qquad \textit{Resp.}$$

La carga de fricción es mayor que la carga debida a la diferencia de alturas Δz. La bomba debe trabajar para compensar ambos efectos, de ahí la alta presión a la entrada. La relación entre la carga de velocidad y la de fricción es

$$\frac{h_f}{V^2/(2g)} \Xi \frac{199\ m}{0{,}173\ m} \Xi 1150 \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios*. Esta relación tan grande es típica de conductos largos. (Obsérvese que no hemos hecho un uso directo de la longitud del conducto, cuyo efecto aparece oculto en h_f). En el Capítulo 6 podremos abordar este problema de forma más directa: dado un caudal, un fluido y un tamaño del conducto, ¿qué presión se requiere a la entrada? Nuestras correlaciones para h_f nos permitirán estimar $p_{ent} \Xi 24$ atm, como se ha indicado aquí.

EJEMPLO 3.18

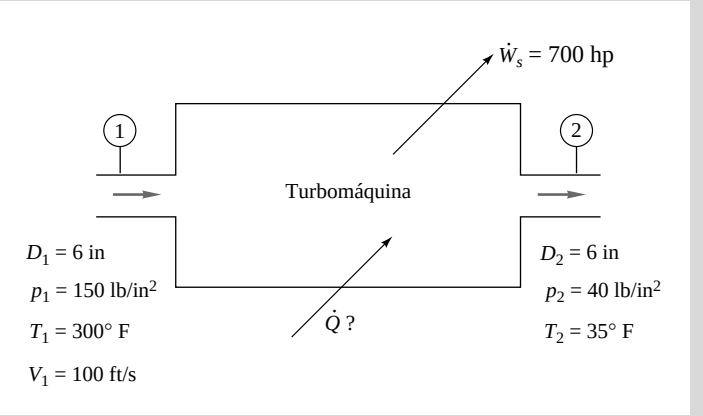
El flujo estacionario de aire [$R = 1716$, $c_p = 6003$ ft · lbf/(slug · °R)] de la Figura E3.18 pasa a través de una turbina que produce 700 hp. Para las condiciones de entrada y salida mostradas en la figura, estime (*a*) la velocidad de salida V_2 y (*b*) el calor transferido Q en Btu/h.

Solución

Apartado (*a*)

Las densidades en las secciones de entrada y de salida se pueden calcular utilizando la ley de los gases perfectos:

www.elsolucionario.net



E3.18

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{150(144)}{1716(460+300)} = 0{,}0166 \text{ slug/ft}^3$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \frac{40(144)}{1716(460+35)} = 0{,}00679 \text{ slug/ft}^3$$

El gasto másico está determinado por las condiciones en la entrada

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = (0{,}0166)\frac{\pi}{4}\left(\frac{6}{12}\right)^2(100) = 0{,}325 \text{ slug/s}$$

Una vez conocido el gasto másico, es posible determinar las condiciones en la salida:

$$\dot{m} = 0{,}325 = \rho_2 A_2 V_2 = (0{,}00679)\frac{\pi}{4}\left(\frac{6}{12}\right)^2 V_2$$

o

$$V_2 = 244 \text{ ft/s} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Apartado (*b*)

La ecuación de la energía para flujo estacionario (3.65) se aplica con $\dot{W}v = 0$, $z_1 = z_2$ y $\hat{h} = c_pT$:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \dot{m}(c_pT_2 + \tfrac{1}{2}V_2^2 - c_pT_1 - \tfrac{1}{2}V_1^2)$$

Convertimos el trabajo de la turbina a pies por libra-fuerza por segundo con el factor de conversión 1 hp = 550 ft · lbf/s. El trabajo de la turbina W_s es positivo:

$$\dot{Q} - 700(550) = 0{,}325[6003(495) + \tfrac{1}{2}(244)^2 - 6003(760) - \tfrac{1}{2}(100)^2]$$
$$= -510.000 \text{ ft} \cdot \text{lbf/s}$$

o

$$\dot{Q} = -125.000 \text{ ft} \cdot \text{lbf/s}$$

Convertimos este valor a unidades inglesas de la siguiente forma:

$$\dot{Q} = (-125.000 \text{ ft} \cdot \text{lbf/s})\frac{3600 \text{ s/h}}{778{,}2 \text{ ft} \cdot \text{lbf/Btu}}$$
$$= -578.000 \text{ Btu/s} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

El signo negativo indica que la transferencia de calor es una *pérdida* del volumen de control.

www.elsolucionario.net

Factor de corrección de la energía cinética

A menudo, el flujo que entra y sale del volumen de control no es estrictamente unidimensional. En particular, la velocidad puede variar a través de la sección, como se muestra en la Figura E3.4. En este caso, el término de flujo de energía cinética de la Ecuación (3.64) debe ser modificado con un factor de corrección adicional α, de modo que la integral sea proporcional al cuadrado de la velocidad media

$$\int_{\text{sección}} (\tfrac{1}{2}V^2)(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA = \alpha(\tfrac{1}{2}V_m^2)\dot{m}$$

donde

$$V_m^2 = \frac{1}{A}\int u\,dA \quad \text{en flujo incompresible}$$

Si la densidad es también variable, el cálculo de la integral resulta bastante complicado; esta complicación no será tratada en este texto. Si u es la velocidad normal a la sección, la primera de las ecuaciones anteriores queda, para flujo incompresible,

$$\tfrac{1}{2}\int u^3\,dA = \tfrac{1}{2}\alpha V_m^2 A$$

o

$$\alpha = \frac{1}{A}\int\left(\frac{u}{V_m}\right)^3 dA \tag{3.70}$$

El término α es el factor de corrección de la energía cinética, que tiene un valor de 2,0 aproximadamente para el flujo laminar completamente desarrollado en un conducto y de 1,04 a 1,11 para el flujo turbulento. La ecuación de la energía en régimen estacionario e incompresible (3.69), incluyendo bombas, turbinas y pérdidas, se podría generalizar a

www.elsolucionario.net

$$\left(\frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha}{2g}V^2 + z\right)_{\text{ent}} = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha}{2g}V^2 + z\right)_{\text{sal}} + h_{\text{turbina}} - h_{\text{bomba}} + h_{\text{fricción}} \tag{3.71}$$

donde los términos de carga del segundo miembro (h_t, h_b, h_f) son todos positivos. Todos los términos aditivos de la Ecuación (3.71) tienen dimensiones de longitud {L}. En problemas relacionados con el flujo turbulento en un conducto, se suele suponer $\alpha \approx 1{,}0$. Para calcular valores numéricos podemos usar las siguientes aproximaciones, que discutiremos en el Capítulo 6:

Flujo laminar:

$$u = U_0\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

de donde

$$V_m = 0{,}5U_0$$

y

$$\alpha = 2{,}0 \tag{3.72}$$

Flujo turbulento:

$$u \approx U_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)^m \qquad m \approx \frac{1}{7}$$

de donde, según el Ejemplo 3.4,

$$V_m = \frac{2U_0}{(1+m)(2+m)}$$

www.elsolucionario.net

Sustituyendo en la Ecuación (3.70) tenemos

$$\alpha = \frac{(1+m)^3(2+m)^3}{4(1+3m)(2+3m)} \tag{3.73}$$

que proporciona los siguientes valores numéricos:

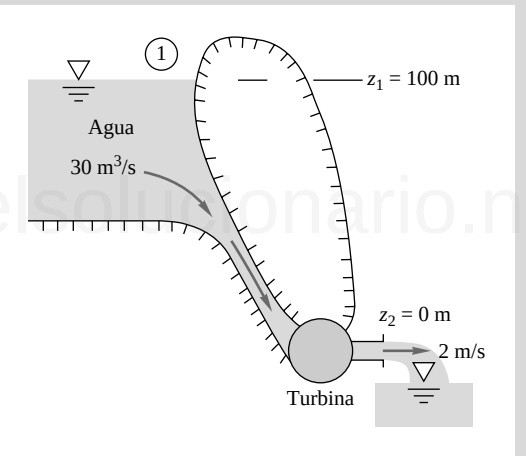
Flujo turbulento:

m	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
α	1,106	1,077	1,058	1,046	1,037

Estos valores son prácticamente iguales a la unidad y, normalmente, se desprecian en los análisis elementales. Sin embargo, α nunca debe despreciarse en un flujo laminar.

EJEMPLO 3.19

La central hidroeléctrica de la Figura E3.19 toma 30 m³/s de agua a través de su turbina y la descarga a V_2 = 2 m/s a la atmósfera. La pérdida de carga en el conducto de alimentación y la turbina es h_f = 20 m. Suponiendo que se trata de un flujo turbulento, con $\alpha \approx 1{,}06$, calcule la potencia extraída por la turbina en MW.



E3.19

Solución

Despreciamos el trabajo de los esfuerzos viscosos y la transferencia de calor. Tomamos la sección 1 en la superficie del embalse (Figura E3.19), donde $V_1 \approx 0$, $p_1 = p_{atm}$ y z_1 = 100 m. La Sección 2 está en la salida de la turbina. La ecuación de la energía para flujo estacionario escrita en términos de cargas, Ecuación (3.71), toma la forma

$$\frac{p_1}{\cancel{\rho g}} + \frac{\cancel{\alpha_1} V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\cancel{\rho g}} + \frac{\cancel{\alpha_2} V_2^2}{2g} + z_2 + h_t + h_f$$

$$\frac{p_a}{\cancel{\rho g}} + \frac{1{,}06(0)^2}{2(9{,}81)} + 100\ \text{m} = \frac{p_a}{\cancel{\rho g}} + \frac{1{,}06(2{,}0\ \text{m/s})^2}{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)} + 0\ \text{m} + h_t + 20\ \text{m}$$

Los términos de presión se cancelan y es posible obtener la carga de la turbina (que es positiva):

$$h_t = 100 - 20 - 0{,}2 \approx 79{,}8\ \text{m}$$

www.elsolucionario.net

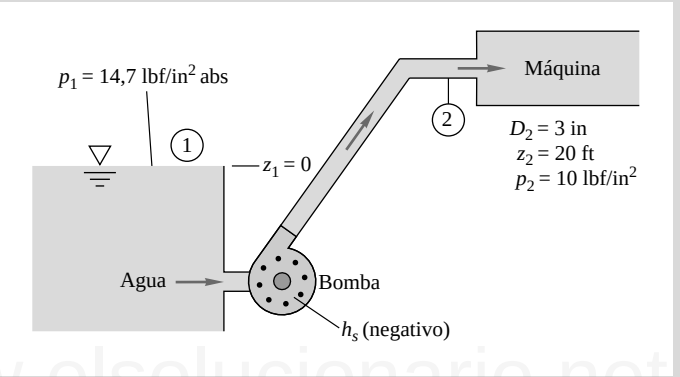
La turbina extrae aproximadamente el 79,8 por 100 de la carga disponible en la presa, 100 m. La potencia total extraída puede evaluarse a partir del gasto másico de agua:

$$P = \dot{m} w_s = (\rho Q)(g h_s) = (998 \text{ kg/m}^3)(30 \text{ m}^3/\text{s})(9{,}81 \text{ m/s}^2)(79{,}8 \text{ m})$$
$$= 23{,}4 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3 = 23{,}4 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m/s} = 23{,}4 \text{ MW} \qquad \textit{Resp.}$$

La turbina mueve un generador eléctrico con unas pérdidas en la transmisión y generación de aproximadamente el 15 por 100, de forma que la potencia neta generada por esta central hidroeléctrica es de unos 20 MW.

EJEMPLO 3.20

La bomba de la Figura E3.20 suministra 1,5 ft³/s de agua (62,4 lbf/ft³) a una máquina, sección 2, que está situada a 20 ft por encima del nivel del depósito. Las pérdidas entre 1 y 2 vienen dadas por $h_f = KV_2^2/(2g)$, donde $K = 7{,}5$ es el coeficiente de pérdidas adimensional (véase Sección 6.7). Si $\alpha = 1{,}07$, calcule la potencia requerida por la bomba si el rendimiento es del 80 por 100.



E3.20

Solución

- *Diagrama del sistema*. La Figura E3.20 muestra la disposición de las secciones 1 y 2.
- *Consideraciones*. Flujo estacionario, trabajo viscoso despreciable, depósito muy grande ($V_1 = 0$).
- *Procedimiento*. Obtenemos primero la velocidad en la salida V_2 y después aplicamos la ecuación de la energía para flujo estacionario.
- *Resolución*. Usamos unidades inglesas, $p_1 = 14{,}7(144) = 2117$ lbf/ft² y $p_2 = 10(144) = 1440$ lbf/ft². Calculamos V_2 a partir de los datos del caudal y el diámetro del conducto:

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{1{,}5 \text{ ft}^3/\text{s}}{(\pi/4)(3/12 \text{ ft})^2} = 30{,}6 \text{ ft/s}$$

La ecuación de la energía en régimen estacionario (3.71), con una bomba (sin turbina) con $z_1 = 0$ y $V_1 = 0$, es

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + z_2 + h_b + h_f, \qquad h_f = K\frac{V_2^2}{2g}$$

o

$$h_b = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + z_2 + (\alpha_2 + K)\frac{V_2^2}{2g}$$

- *Comentario*. La bomba debe compensar cuatro efectos diferentes: el salto de presiones, el cambio de elevación, la energía cinética del chorro de salida y las pérdidas por fricción.
- *Solución final*. Para los datos conocidos, podemos obtener la carga necesaria de la bomba:

$$h_b = \frac{(1440 - 2117) \text{ lbf/ft}^2}{62{,}4 \text{ lbf/ft}^3} + 20 + (1{,}07 + 7{,}5)\frac{(30{,}6 \text{ ft/s})^2}{2(32{,}2 \text{ ft/s}^2)} = -11 + 20 + 124 = 133 \text{ ft}$$

www.elsolucionario.net

Conocido el aumento de carga de la bomba, la potencia necesaria se calcula de una forma similar al caso de la turbina del Ejemplo 3.19:

$$P_{\text{bomba}} = \dot{m} w_s = \rho g Q h_b = 62{,}4 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3} \left| 1{,}5 \frac{\text{ft}^3}{\text{s}} \right| (133 \text{ ft})$$

$$= 12.450 \frac{\text{ft lbf}}{\text{s}} = \frac{12.450 \text{ ft lbf/s}}{550 \text{ ft lbf/(s hp)}} = 22{,}6 \text{ hp}$$

Si la bomba tiene un rendimiento del 80 por 100, debemos dividir por este rendimiento para encontrar la potencia requerida:

$$P_{\text{entrada}} = \frac{P_{\text{bomba}}}{\text{rendimiento}} = \frac{22{,}6 \text{ hp}}{0{,}80} = 28{,}3 \text{ hp} \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentario*. El uso del factor de corrección de la energía cinética α da lugar, en este caso, a diferencias de alrededor de un 1 por 100 en el resultado. El parámetro dominante son las pérdidas por fricción, no el chorro de salida.

3.7. FLUJO SIN FRICCIÓN: LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

El estudio del flujo sin fricción a través de un tubo de corriente infinitesimal, como muestra la Figura 3.15*a*, proporciona una relación muy utilizada entre la presión, la velocidad y la altura, que se denomina *ecuación de Bernoulli*. Esta ecuación, muy relacionada con la ecuación de la energía para flujo estacionario, fue formulada de forma muy vaga (en palabras) en un libro de texto de Daniel Bernoulli en 1738, aunque la deducción completa se debe a Leonhard Euler, en 1755. Aunque la ecuación de Bernoulli es muy famosa y tiene numerosas aplicaciones, debemos ser muy cuidadosos y tener siempre en cuenta sus restricciones, ya que todos los fluidos son viscosos y, por tanto, todos los flujos tienen algún efecto de la fricción. Para emplear correctamente la ecuación de Bernoulli hay que limitar su aplicación a regiones del flujo en las que la fricción sea despreciable. En esta sección (y, con más detalle, en el Capítulo 8) se determinarán las condiciones adecuadas para el uso de la ecuación de Bernoulli.

En la Figura 3.15 se representa un volumen de control que coincide con un tubo de corriente infinitesimal de área variable $A(s)$ y longitud ds, donde s representa la dirección de la línea de corriente. Las propiedades (ρ, V, p) pueden variar con s y con el tiempo pero se consideran uniformes sobre la sección transversal A, que consideraremos suficientemente pequeña. El tubo de corriente está inclinado un ángulo arbitrario θ, de forma que la variación de altura entre las secciones es $dz = ds$ sen θ. La figura muestra una fricción inevitable en las paredes del tubo de corriente que aquí estamos despreciando, lo que constituye una hipótesis muy restrictiva.

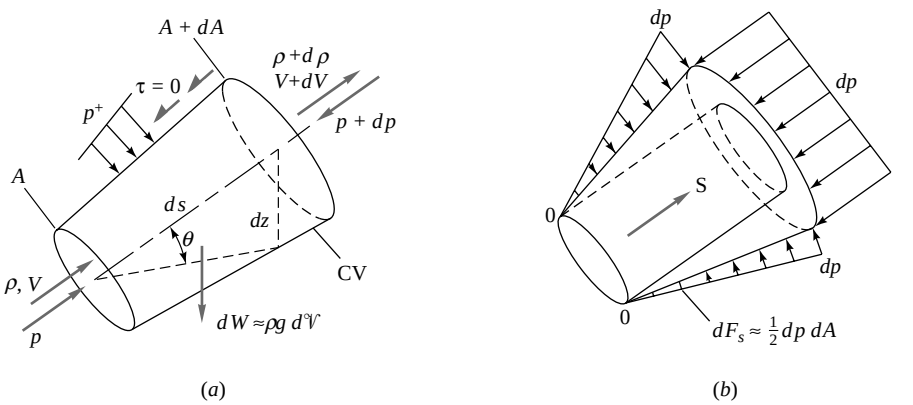


Figura 3.15. Ecuación de Bernoulli para flujos sin fricción a lo largo de una línea de corriente: (*a*) fuerzas y flujos; (*b*) resultante de las fuerzas de presión después de restar una presión p uniforme.

www.elsolucionario.net

La conservación de la masa, Ecuación (3.20), para este volumen de control infinitesimal queda

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{VC} \rho\, d\forall\right) + \dot{m}_{sal} - \dot{m}_{ent} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} d\forall + d\dot{m}$$

donde $\dot{m} = \rho AV$ y $d\forall = A\, ds$. Así, la forma deseada de la conservación de la masa es

$$d\dot{m} = d(\rho AV) = \frac{\partial \rho}{\partial t} A\, ds \tag{3.74}$$

Una relación que no exige hacer la hipótesis de flujo sin fricción.

Si escribimos ahora la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, Ecuación (3.37), en la dirección de la corriente:

$$\sum dF_s = \frac{d}{dt}\left(\int_{VC} V \rho\, d\forall\right) + (\dot{m}V)_{sal} - (\dot{m}V)_{ent} \quad \text{o} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}(\rho V) A\, ds + d(\dot{m}V)$$

donde $V_s = V$ idénticamente porque s es en la dirección de las líneas de corriente. Si despreciamos los esfuerzos tangenciales en las paredes (flujo sin fricción), los términos de fuerza se deben sólo a la presión y la gravedad. La fuerza de gravedad en la dirección de la corriente es la componente del peso del fluido contenido en el volumen de control:

$$dF_{s,\,grav} = -dW \text{ sen } \theta = -\rho g A\, ds \text{ sen } \theta = -\rho g A\, dz$$

La fuerza de presión es más fácil de visualizar en la Figura 3.15*b* si restamos primero una presión uniforme p en todas las superficies; recordemos de la Figura 3.7 que en este caso la fuerza neta no cambia. La fuerza resultante de la presión sobre las paredes cónicas del tubo de corriente tiene una componente en la dirección de la corriente que es idéntica a la que se obtendría si la presión actuase no sobre el área A, sino sobre la corona circular dA, que representa el aumento de área. La fuerza resultante de presión es, por tanto,

$$dF_{s,\,pres} = \tfrac{1}{2}\, dp\, dA - dp(A + dA) \quad \text{o} \quad -A\, dp$$

donde se han retenido términos de primer orden. Sustituyendo estos dos términos de la fuerza en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\sum dF_s = \rho g A\, dz - A\, dp = \frac{\partial \rho}{\partial t}(\rho V) A\, ds + d(\dot{m}V)$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} VA\, ds + \frac{\partial V}{\partial t} \rho A\, ds + \dot{m}\, dV + V\, d\dot{m}$$

El primer y último términos del lado derecho se cancelan como consecuencia de la ecuación de la continuidad [Ecuación (3.74)]. Dividiendo el resto por ρA y reordenando, se obtiene la ecuación final:

$$\frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{dp}{\rho} + V\, dV + g\, dz = 0 \tag{3.75}$$

Esta expresión es la ecuación de Bernoulli para *flujo no estacionario sin fricción a lo largo de una línea de corriente*.[18] Es una ecuación diferencial que puede ser integrada entre dos puntos 1 y 2 a lo largo de la línea de corriente:

$$\boxed{\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + g(z_2 - z_1) = 0} \tag{3.76}$$

[18] También llamada ecuación de Euler-Bernoulli (*N. del T.*).

www.elsolucionario.net

Flujo estacionario e incompresible

Para evaluar las dos integrales restantes hay que estimar los efectos no estacionarios $\partial V/\partial t$ y la variación de la densidad con la presión. Por el momento sólo consideramos el caso estacionario ($\partial V/\partial t = 0$) e incompresible (densidad constante), en cuyo caso la Ecuación (3.76) queda

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + g(z_2 - z_1) = 0$$

o

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 = \text{cte} \tag{3.77}$$

Ésta es la ecuación de Bernoulli para un flujo estacionario incompresible y sin fricción a lo largo de una línea de corriente.

Relación entre la ecuación de Bernoulli y la ecuación de la energía en flujo estacionario

La Ecuación (3.77) es una forma muy extendida de la ecuación de Bernoulli para el flujo estacionario incompresible y sin fricción a lo largo de una línea de corriente. Claramente, esta ecuación está relacionada con la ecuación de la energía en régimen estacionario, Ecuación (3.66), que también corresponde al flujo en un tubo de corriente (con una entrada y una salida). Dicha ecuación se puede escribir en la forma:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2} + gz_2 + (\hat{u}_2 - \hat{u}_1 - q) + w_s + w_v \tag{3.78}$$

www.elsolucionario.net

Esta relación es mucho más general que la ecuación de Bernoulli, ya que permite tener en cuenta (1) la fricción, (2) la transferencia de calor, (3) el trabajo motor y (4) el trabajo viscoso (otro efecto de la fricción).

Si comparamos la ecuación de Bernoulli (3.77) con la ecuación de la energía (3.78) podemos ver que la primera contiene aún más restricciones de las que aparenta a primera vista. La lista completa de consideraciones que hay que tener en cuenta en la Ecuación (3.77) es:

1. *Flujo estacionario*: una suposición muy común, aplicable a muchos flujos.
2. *Flujo incompresible*: aceptable si el número de Mach del flujo es inferior a 0,3.
3. *Flujo sin fricción*: muy restrictivo, las paredes sólidas introducen efectos de fricción.
4. *Flujo a lo largo de una línea de corriente*: líneas de corriente distintas pueden tener diferentes «constantes de Bernoulli» $w_0 = p/\rho + V^2/2 + gz$, dependiendo de las condiciones del flujo.
5. *Sin trabajo motor entre 1 y 2*: sin bombas o turbinas en la línea de corriente.
6. *Sin transferencia de calor entre 1 y 2*: ni adición ni extracción.

De ahí nuestra advertencia: hay que ser precavido con el uso incorrecto de la ecuación de Bernoulli. Sólo un número limitado de flujos cumple las seis condiciones anteriores. La obtención de la ecuación de Bernoulli a partir de la cantidad de movimiento o «fuerza mecánica» ni siquiera revela las condiciones 5 y 6, que son limitaciones termodinámicas. La razón básica de las restricciones 5 y 6 es que en fluidos reales los intercambios de calor y trabajo están ligados a efectos de fricción, lo que invalida la hipótesis de flujo sin fricción.

La Figura 3.16 ilustra algunas limitaciones prácticas del uso de la ecuación de Bernoulli en la forma (3.77). En el ensayo en túnel de la Figura 3.16*a* la Ecuación de Bernoulli sólo es válida en el núcleo del flujo del túnel, pero no en las capas límite de sus paredes ni en las capas límites o la estela del modelo, que son regiones donde el efecto de la fricción es muy importante.

En la Figura 3.16*b*, la ecuación de Bernoulli es válida aguas arriba y aguas abajo de la hélice, pero con una constante $w_0 = p/\rho + V^2/2 + gz$ distinta debido al trabajo aportado al fluido por la hélice. La ecuación de Bernoulli no es válida cerca de las palas de la hélice ni en los torbellinos helicoidales, no mostrados en la fi-

www.elsolucionario.net

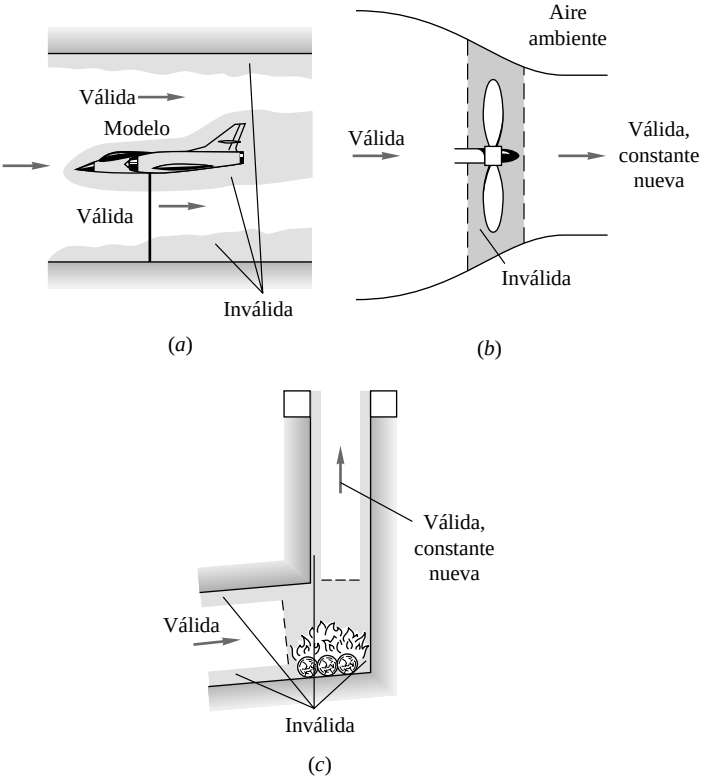


Figura 3.16. Ilustración de las zonas de validez o no validez de la ecuación de Bernoulli: (*a*) modelo en un túnel aerodinámico, (*b*) hélice, (*c*) chimenea.

www.elsolucionario.net

gura (véase Figura 1.12*a*), que se desprenden del borde de las palas. Además, las constantes de Bernoulli son mayores en el flujo que «atraviesa» el disco de la hélice que en el ambiente debido a la energía cinética del flujo en la estela.

En la Figura 3.16*c*, la Ecuación (3.77) es válida antes y después del fuego de la chimenea, pero con constantes diferentes debido a la adición de calor. La ecuación de Bernoulli no es válida en el propio fuego ni en las capas límite de la chimenea.

Lo adecuado es aplicar la Ecuación (3.77) sólo cuando se cumplen las seis restricciones: flujo estacionario incompresible a lo largo de una línea de corriente, sin pérdidas por fricción, sin adición de calor y sin trabajo motor entre las secciones 1 y 2.

Líneas de nivel de energía y de altura motriz

Una interpretación visual muy útil de la ecuación de Bernoulli se obtiene representando dos líneas del flujo. La *línea de nivel de energía* (LNE), también conocida como *línea de cargas o alturas totales*, muestra la altura de la constante de Bernoulli $h_0 = z + p/\rho g + V^2/(2g)$. En un flujo sin fricción y sin aplicación de calor o trabajo, la LNE es una línea de nivel constante, Ecuación (3.77). La *línea de altura motriz* (LAM), también conocida como *línea de cargas o alturas piezométricas*, indica el nivel correspondiente a la altura geométrica más la de presión $z + p/\rho g$, esto es, la LNE menos la altura de velocidad $V^2/(2g)$. La LAM es la altura a la que subiría el líquido en un tubo piezométrico (véase Problema 2.11) incorporado al flujo. En el flujo en un canal abierto, la LAM es la superficie libre del agua.

La Figura 3.17 muestra las líneas LNE y LAM para un flujo sin fricción en un conducto. Los tubos piezométricos de las secciones 1 y 2 miden la carga de la presión estática $z + p/\rho g$ y, por tanto, la LAM. Los tubos pitot de presión de remanso miden la altura total $z + p/\rho g + V^2/(2g)$, que corresponde a la LNE. En este caso particular, la LNE es constante y la LAM asciende debido a una disminución de la velocidad.

En condiciones más generales de flujo, la LNE disminuiría lentamente como consecuencia de las pérdidas por fricción y descendería bruscamente por pérdidas localizadas (una válvula u obstrucción) o debi-

www.elsolucionario.net

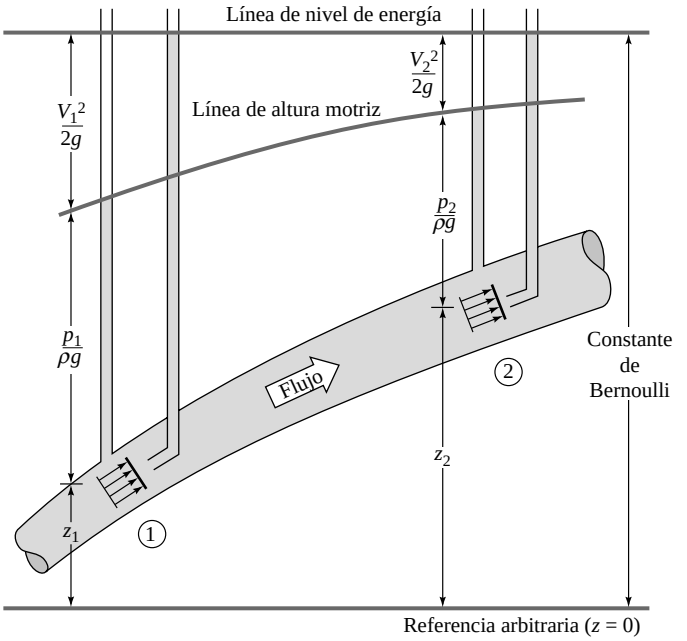


Figura 3.17. Línea de nivel de energía y línea de altura motriz para flujo sin fricción en un conducto.

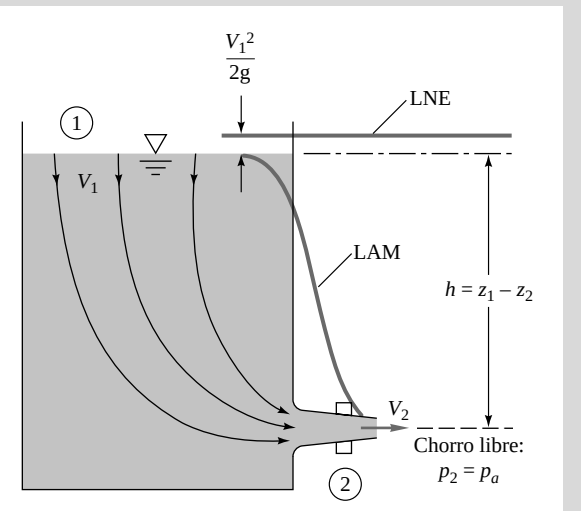
do a la extracción de trabajo (en una turbina). La LNE sólo puede ascender si se comunica trabajo (como en una bomba o hélice). La LAM sigue el comportamiento de la LNE respecto a pérdidas y trabajo motor y asciende o desciende al disminuir o aumentar la velocidad, respectivamente.

Como se ha mencionado anteriormente, para los cálculos con la ecuación de Bernoulli no se necesitan factores de conversión si se utilizan unidades del SI o del sistema británico consistentes, como se mostrará en los siguientes ejemplos.

En todos los problemas de tipo Bernoulli de este libro tomaremos el punto 1 aguas arriba y el 2 aguas abajo.

EJEMPLO 3.21

Obtenga una relación entre la velocidad de descarga V_2 y la altura de la superficie libre h de la Figura E3.21. Suponga flujo estacionario sin fricción.



E3.21

www.elsolucionario.net

Solución

Como se mencionó, tomaremos el punto 1 aguas arriba y el punto 2 aguas abajo. En general, tomaremos 1 y 2 donde tengamos o deseemos más información. Aquí tomaremos 1 en la superficie libre del depósito, donde la altura y la presión son conocidas, y el punto 2 en la salida de la tobera, donde también son conocidas la presión y la altura. Las dos incógnitas son V_1 y V_2.

La conservación de la masa es vital en este tipo de análisis. Si A_1 es la sección transversal del depósito y A_2 la de la tobera de salida, y tenemos un flujo aproximadamente unidimensional con densidad constante, la Ecuación (3.30) nos dice que

$$A_1V_1 = A_2V_2 \tag{1}$$

La ecuación de Bernoulli (3.77) da

$$\frac{p_1}{\Leftarrow} + \tfrac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\Leftarrow} + \tfrac{1}{2}V_2^2 + gz_2$$

Pero como en ambas secciones 1 y 2 la presión es la atmosférica $p_1 = p_2 = p_a$, los términos de presión se cancelan, quedando

$$V_2^2 - V_1^2 = 2g(z_1 - z_2) = 2gh \tag{2}$$

Eliminando V_1 entre las Ecuaciones (1) y (2), obtenemos el resultado deseado:

$$V_2^2 = \frac{2gh}{1 \Phi A_2^2 / A_1^2} \qquad \textit{Resp.}\ (3)$$

Generalmente, el área de la tobera A_2 es mucho menor que el área del depósito A_1, de modo que el cociente $(A_2/A_1)^2$ es doblemente despreciable, y podemos utilizar esta aproximación fiable para la velocidad de salida:

$$V_2 \Xi (2gh)^{1/2} \qquad \textit{Resp.}\ (4)$$

Esta fórmula, descubierta por Evangelista Torricelli en 1644, indica que la velocidad de descarga es igual a la velocidad que alcanzaría una partícula cayendo libremente, sin fricción, de 1 a 2. En otras palabras, la energía potencial de la superficie libre se convierte íntegramente en energía cinética del chorro, lo cual es consistente con haber despreciado la fricción y con el hecho de que las fuerzas de presión no realizan trabajo. Nótese que la Ecuación (4) es independiente de la densidad del fluido, característica de los flujos producidos por la gravedad.

Fuera de las capas límite de las paredes, todas las líneas que van de 1 a 2 se comportan de la misma forma, y podemos suponer que la constante de Bernoulli h_0 es la misma para todo el flujo central. Sin embargo, es probable que el flujo en la salida sea no uniforme, no unidimensional, de modo que la velocidad media es sólo aproximadamente igual al resultado de Torricelli. El ingeniero debe ajustar la fórmula incluyendo un *coeficiente de descarga* c_d adimensional:

$$(V_2)_{\text{m}} = \frac{Q}{A_2} = c_d(2gh)^{1/2} \tag{5}$$

Como se verá en la Sección 6.12, el coeficiente de descarga de una tobera varía de 0,6 a 1,0, en función de las condiciones (adimensionales) del flujo y de la geometría de la misma.

Antes de seguir con más ejemplos, hagamos notar que la ecuación de Bernoulli (3.77) *no* necesita un análisis de volúmenes de control, sino simplemente seleccionar los puntos 1 y 2 a lo largo de una línea de corriente. El volumen de control fue utilizado para obtener una ecuación diferencial (3.75), cuya forma integrada (3.77) es válida a lo largo de líneas de corriente para flujo sin fricción ni adición de calor o trabajo, y por ello no se necesita ningún volumen de control.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 3.22

Utilice el resultado de Bernoulli del Ejemplo 3.21 para analizar, mediante la aproximación de flujo ideal *casi estacionario*, el tiempo Δt requerido para que el nivel inicial del depósito h_0 se reduzca a la mitad.

Solución

- *Diagrama del sistema*. El sistema, un depósito que descarga a través de un pequeño orificio, se muestra en la Figura E3.21.
- *Consideraciones*. Flujo sin fricción, unidimensional, incompresible, con coeficiente de descarga $c_d \approx 1{,}0$. El término «casi estacionario» implica que se pueden emplear las fórmulas de un flujo estacionario aunque los parámetros varíen con el tiempo y que el término integral no estacionario $\int(\partial V/\partial t)\,ds$ es despreciable.
- *Procedimiento*. Relacionamos el caudal de salida Q con el descenso del nivel del depósito. Podemos suponer que la fórmula de Torricelli para la velocidad de salida del Ejemplo 3.21 es válida durante toda la descarga. Como el flujo es incompresible, la ecuación de la continuidad establece que Q es igual en ambas secciones, es decir, $A_1V_1 = A_2V_2$:

$$V_2(t) = \sqrt{2gh(t)} \quad \text{o} \quad Q(t) = A_2V_2(t) = A_2\sqrt{2gh(t)} = A_1V_1(t)$$

- *Resolución*. Nótese que la velocidad de la superficie libre es igual a la variación temporal del nivel del depósito h:

$$V_1 = \frac{dh}{dt} \quad \text{o} \quad A_1V_1 = -A_1\frac{dh}{dt} = A_2\sqrt{2gh}$$

Separando las variables (h, t) e integrando del nivel inicial del agua hasta la mitad de dicho nivel:

$$\int_{h_0}^{h_0/2} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g}\int_0^{\Delta t} dt \quad \text{o} \quad 2\left(\sqrt{h_0/2} - \sqrt{h_0}\right) = -\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g}\,\Delta t$$

Despejando Δt y simplificando, obtenemos el resultado deseado:

$$\Delta t = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\frac{A_1}{A_2}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios*. Se puede comprobar que el segundo miembro tiene dimensiones de tiempo {T}. La predicción tiene sentido, es decir, el tiempo de descarga debe aumentar con la superficie del depósito y con la altura inicial y debe disminuir con el área del orificio de salida y con la aceleración de la gravedad. *Nota*: si repetimos los pasos anteriores incluyendo el coeficiente de descarga experimental, Ecuación (5) del Ejemplo 3.21, encontraremos un Δt_{real} más realista igual al resultado ideal dividido por c_d.

EJEMPLO 3.23

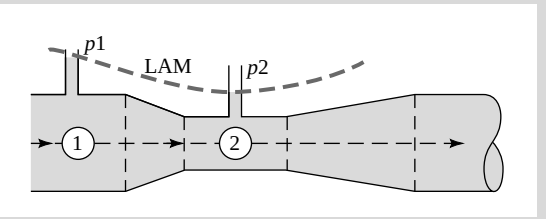
Un estrechamiento en un conducto produce un aumento de la velocidad y una disminución de presión en la garganta. La disminución de presión da una medida del caudal o flujo volumétrico en el conducto. El sistema de la Figura E3.23, que presenta variaciones suaves, se denomina *tubo venturi*. Halle una expresión que relacione el flujo másico con la disminución de presión.

Solución

Supongamos aplicable la ecuación de Bernoulli en el centro del conducto:

$$\frac{p_1}{\rho} + \tfrac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \tfrac{1}{2}V_2^2 + gz_2$$

www.elsolucionario.net



E3.23

Si el tubo es horizontal, $z_1 = z_2$ y podemos despejar V_2:

$$V_2^2 - V_1^2 = \frac{2\Delta p}{\rho} \qquad \Delta p = p_1 - p_2 \tag{1}$$

La ecuación de continuidad nos permite relacionar las velocidades

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

o

$$V_1 = \beta^2 V_2 \qquad \beta = \frac{D_2}{D_1} \tag{2}$$

Combinando (1) y (2) obtenemos la fórmula para la velocidad en la garganta:

$$V_2 = \left[\frac{2\Delta p}{\rho(1 - \beta^4)}\right]^{1/2} \tag{3}$$

El flujo másico viene dado por

$$\dot{m} = \rho A_2 V_2 = A_2 \left[\frac{2\rho \Delta p}{1 - \beta^4}\right]^{1/2} \tag{4}$$

Éste es el flujo másico ideal sin fricción. En la práctica, $\dot{m}_{real} = c_d \dot{m}_{ideal}$, donde interviene el coeficiente de descarga c_d.

EJEMPLO 3.24

Una manguera de 10 cm de diámetro tiene una tobera de 3 cm por donde se descargan 1,5 m³/min. Suponiendo flujo sin fricción, halle la fuerza F_B que se ejerce sobre los tornillos que sujetan la tobera a la manguera.

Solución

Utilizamos las ecuaciones de Bernoulli y continuidad para hallar el valor de p_1 aguas arriba de la tobera y, entonces, mediante la ecuación de la cantidad de movimiento aplicada a un volumen de control, calculamos la fuerza según se muestra en la Figura E3.24.

El flujo entre 1 y 2 es un estrechamiento semejante al efecto venturi del Ejemplo 3.23, cuya expresión (1) daba

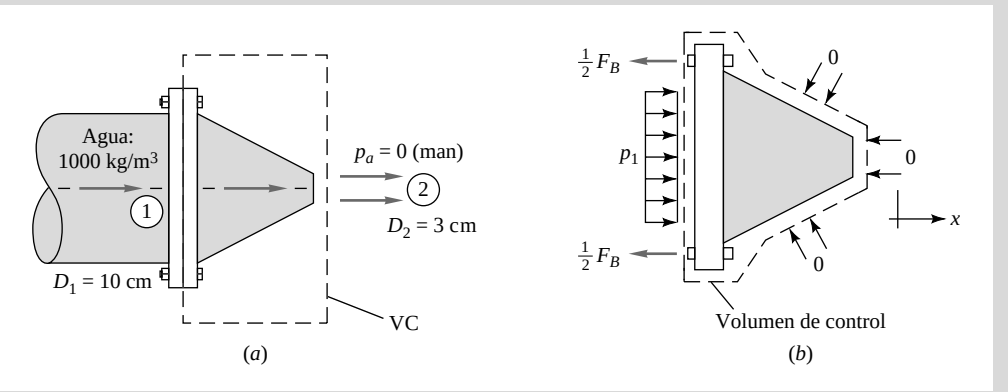
$$p_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) \tag{1}$$

Las velocidades se determinan a partir del caudal Q = 1,5 m³/min o 0,025 m³/s:

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0{,}025 \text{ m}^3/\text{s}}{(\pi/4)(0{,}03 \text{ m})^2} = 35{,}4 \text{ m/s}$$

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0{,}025 \text{ m}^3/\text{s}}{(\pi/4)(0{,}1 \text{ m})^2} = 3{,}2 \text{ m/s}$$

www.elsolucionario.net



E3.24

Pondremos $p_2 = p_a = 0$ de presión manométrica. La expresión (1) queda

$$p_1 = \tfrac{1}{2}(1000\ \text{kg/m}^3)[(35,4^2 - 3,2^2)\text{m}^2/\text{s}^2]$$
$$= 620.000\ \text{kg/(m} \cdot \text{s}^2) = 620.000\ \text{Pa manométrica}$$

El equilibrio de fuerzas en el volumen de control se muestra en la Figura E3.24*b*:

$$\Sigma F_x = -F_B + p_1 A_1$$

donde la presión manométrica nula sobre todas las caras no da resultante. El flujo de cantidad de movimiento en dirección x es $+\dot{m}V_2$ en la salida y $-\dot{m}V_1$ en la entrada. La relación (3.40) para un flujo estacionario nos proporciona

$$-F_B + p_1 A_1 = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

o

$$F_B = p_1 A_1 - \dot{m}(V_2 - V_1) \tag{2}$$

Sustituyendo con los valores numéricos dados tenemos

$$\dot{m} = \rho Q = (1000\ \text{kg/m}^3)(0,025\ \text{m}^3/\text{s}) = 25\ \text{kg/s}$$
$$A_1 = \frac{\pi}{4} D_1^2 = \frac{\pi}{4}(0,1\ \text{m})^2 = 0,00785\ \text{m}^2$$
$$F_B = (620.000\ \text{N/m}^2)(0,00785\ \text{m}^2) - (25\ \text{kg/s})[(35,4 - 3,2)\text{m/s}$$
$$= 4872\ \text{N} - 805\ (\text{kg} \cdot \text{m})/\text{s}^2 = 4067\ \text{N}\ (915\ \text{lbf}) \qquad \textit{Resp.}$$

Nótese de los ejemplos anteriores que la solución de cualquier problema con la ecuación de Bernoulli casi siempre requiere considerar la ecuación de continuidad para poder completar el análisis. La única excepción es cuando se conoce completamente la distribución de velocidades por medio de un análisis previo, lo cual significa que la ecuación de continuidad ya se ha utilizado para obtener esa información. Puntualizando, la ecuación de continuidad es siempre esencial en el análisis de los flujos.

Resumen

En este capítulo se han analizado las cuatro ecuaciones básicas de la Mecánica de Fluidos: conservación de la (1) masa, (2) cantidad de movimiento, (3) momento cinético y (4) energía. Las ecuaciones se formularon «a gran escala», es decir, aplicándolas a regiones completas del flujo. De este modo, un análisis típico incluye una aproximación del campo fluido en el interior de la región y proporciona resultados cuantitativos

www.elsolucionario.net

algo burdos pero siempre instructivos. Sin embargo, las ecuaciones básicas aplicadas a volúmenes de control son rigurosas y correctas y darán resultados exactos si se conoce bien el campo fluido.

Hay dos aspectos principales en el análisis de volúmenes de control. El primero es la selección de un volumen de control adecuado, ingenioso y manejable. La experiencia es insustituible, aunque se pueden inferir las siguientes directrices: el volumen de control debería cortar por donde se pide la información. También debería cortar por donde se dispone de la máxima información. Si se utiliza la ecuación de cantidad de movimiento *no* debe estar limitado por paredes fijas a menos que sea absolutamente necesario, ya que esto haría aparecer esfuerzos, fuerzas y momentos desconocidos que dificultarían o imposibilitarían la obtención de la solución. Finalmente, se debe intentar trabajar en un sistema de referencia en el cual el flujo sea estacionario o casi estacionario, ya que la formulación correspondiente es mucho más sencilla.

El segundo aspecto a destacar es cómo puede reducirse el problema real a otro que se pueda abordar con el análisis de volúmenes de control. Los 24 ejemplos de este capítulo sólo dan una introducción para buscar las aproximaciones apropiadas. Es necesario resolver muchos más ejemplos para llegar a tener la experiencia suficiente para saber simplificar un problema sin pasarse. Mientras tanto, es bueno que el principiante trabaje con la forma general de las ecuaciones y haga las simplificaciones que le permitan llegar al resultado. Al comenzar con la forma general, uno puede plantearse las siguientes cuestiones:

1. ¿Es el volumen de control indeformable o no acelerado?
2. ¿Es el flujo estacionario? ¿Podemos emplear un sistema de referencia estacionario?
3. ¿Se puede despreciar la fricción?
4. ¿Es incompresible el fluido? En caso contrario, ¿se puede aplicar la ecuación de los gases perfectos?
5. ¿Son despreciables las fuerzas gravitatorias y otras fuerzas volumétricas?
6. ¿Hay transferencia de calor, trabajo de partes móviles o trabajo de esfuerzos viscosos?
7. Las entradas y salidas, ¿son aproximadamente unidimensionales?
8. ¿Es importante en el análisis la presión atmosférica? ¿En algún punto de la superficie de control la distribucion de presiónes es hidrostática?
9. ¿Las condiciones en el depósito cambian lo suficientemente despacio como para suponer que la velocidad en él y su derivada temporal son despreciables?

De esta forma, aceptando o rechazando simplificaciones básicas como éstas, se puede, por ejemplo, distinguir cuándo es aplicable la ecuación de Bernoulli y cuándo no.

Problemas

La mayoría de los problemas propuestos aquí son bastante sencillos. Los más difíciles, o de final abierto, se indican con un asterisco. Para resolver los problemas señalados con un icono EES (por ejemplo, el Problema P3.5) se recomienda el uso del Resolvedor de Ecuaciones de Ingeniería (EES, *Engineering Equation Solver*), mientras que los problemas señalados con un disquete pueden requerir el uso de un ordenador. Los problemas estándar de final de capítulo P3.1 al P3.185 (ordenados por temas en la lista de abajo) están seguidos por los problemas conceptuales C3.1 a C3.7, los problemas del examen de fundamentos de ingeniería (FE, *Fundamentals of Engineering*) FE3.1 a FE3.10, los problemas extensos PE3.1 a PE3.5 y el Proyecto de Diseño D3.1.

Distribución de los problemas

Sección	Tema	Problemas
3.1	Leyes básicas de la física; flujo volumétrico	P3-1-P3.7
3.2	El teorema del transporte de Reynolds	P3.8-P3.11
3.3	Conservación de la masa	P3.12-P.38
3.4	La ecuación de la cantidad de movimiento	P3.39-P3.109
3.5	El teorema del momento cinético	P3.110-P3.125
3.6	La ecuación de la energía	P3.126-P3.146
3.7	La ecuación de Bernoulli	P3.147-P3.185

P3.1 Discuta la segunda ley de Newton (conservación de la cantidad de movimiento) en estas tres formas:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad \sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V})$$

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}\left(\int_{\text{sistema}} \mathbf{V}\,\rho\, d\forall\right)$$

¿Son las tres igualmente válidas? ¿Son equivalentes? ¿Es alguna de ellas mejor para la mecánica de fluidos que para la mecánica de sólidos?

P3.2 Considere la conservación del momento cinético en la forma

$$\sum \mathbf{M}_O = \frac{d}{dt}\left[\int_{\text{sistema}} (\mathbf{r}\times\mathbf{V})\,\rho\, d\forall\right]$$

¿Qué representa **r** en esta relación? ¿Es válida esta relación tanto para la mecánica de sólidos como para la mecánica de fluidos? ¿Está relacionada con la ecuación de *cantidad de movimiento* (Problema P3.1)? ¿De qué forma?

www.elsolucionario.net

P3.3 Para el flujo estacionario en un conducto largo a bajo número de Reynolds (laminar) (véase Problema P1.12), la velocidad longitudinal está dada por $u = C(R^2 - r^2)$, donde R es el radio del conducto y $r \leq R$. Integre $u(r)$ y obtenga el caudal Q que fluye a través del conducto.

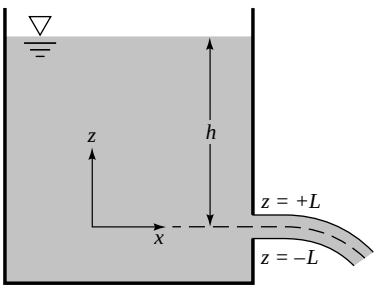
P3.4 Discuta si los siguientes flujos son estacionarios o no estacionarios: (*a*) flujo cerca de un automóvil que se mueve a 55 mi/h, (*b*) flujo del viento alrededor de un depósito de agua, (*c*) flujo en un conducto aguas abajo de una válvula que se abre a un ritmo uniforme, (*d*) flujo sobre el aliviadero de una presa y (*e*) flujo en el océano por debajo de un tren de ondas superficiales que se propagan de modo uniforme. Explique si estas cuestiones parecen ambiguas.

***P3.5** Una teoría propuesta por S. I. Pai en 1953 da los siguientes valores de la velocidad $u(r)$ para el flujo de aire turbulento (a gran número de Reynolds) en un conducto de 4 cm de diámetro:

r, cm	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
u, m/s	6,00	5,97	5,88	5,72	5,51	5,23	4,89	4,43	0,00

Comente estos datos comparándolos con los del flujo laminar del Problema P3.3. Estime, con la mayor precisión posible, el caudal Q a través del tubo en metros cúbicos por segundo.

P3.6 Cuando un chorro de líquido escapa por el orificio de un depósito impulsado sólo por la fuerza de la gravedad, como el de la Figura P3.6, la distribución de velocidad en la salida se puede aproximar por $u \approx \sqrt{2g(h - z)}$, donde h es la profundidad a la que se encuentra el centro del chorro. Cerca del orificio, el chorro es horizontal, bidimensional y de espesor $2L$, como se muestra en la figura. Obtenga una expresión general para el caudal total Q que sale por el orificio y simplifique el resultado en el límite $L \ll h$.

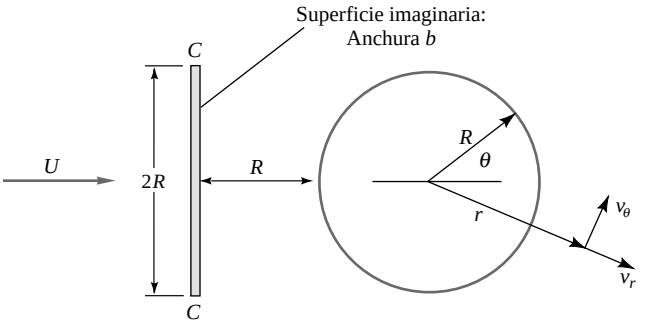


P3.6

P3.7 Considere el flujo de una corriente uniforme U contra un cilindro circular de radio R como el de la Figura P3.7. En el Capítulo 8 se desarrolla una teoría aproximada para la distribución de velocidades cerca del cilindro, en coordenadas polares, para $r \geq R$:

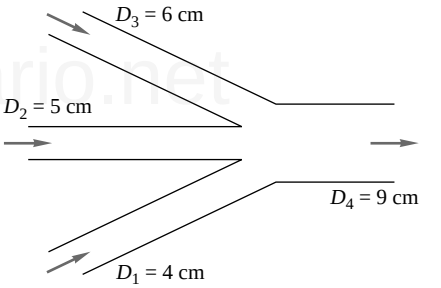
$$v_r = U\cos\theta\left[1 - \frac{R^2}{r^2}\right] \qquad v_\theta = -U\,\mathrm{sen}\,\theta\left[1 + \frac{R^2}{r^2}\right]$$

donde las correspondientes direcciones positivas de las velocidades radial (v_r) y circunferencial (v_θ) se muestran en la Figura P3.7. Calcule el caudal Q que pasa a través de la superficie (imaginaria) CC de la figura. (*Comentario*: si CC estuviera localizada aguas arriba del cilindro el caudal sería $Q = 2URb$).



P3.7

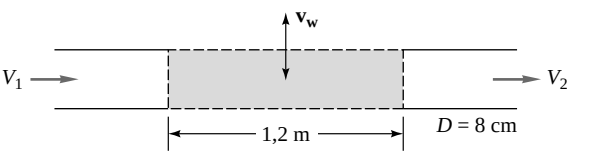
P3.8 En la Figura P3.8 tres conductos descargan agua a 20 °C de forma estacionaria a un gran conducto de salida. La velocidad $V_2 = 5$ m/s y el caudal de salida $Q_4 = 120$ m³/h. Calcule (*a*) V_1, (*b*) V_3 y (*c*) V_4 si se sabe que, al aumentar Q_3 en un 20 por 100, Q_4 se incrementa en un 10 por 100.



P3.8

P3.9 En un laboratorio se dispone de un depósito que contiene agua salada de salinidad S y densidad ρ. El agua entra en el depósito a las condiciones (S_1, ρ_1, A_1, V_1) y se mezcla inmediatamente con el agua que ya está en él. El agua sale del depósito con una velocidad V_2 a través de un orificio de sección A_2. Si la sal es una propiedad «que se conserva» (ni se crea ni se destruye), use el teorema del transporte de Reynolds para encontrar una expresión para la velocidad de variación de la masa de sal M_{sal} del depósito.

P3.10 En la Figura P3.10 se presenta agua fluyendo a través de un conducto de 8 cm de diámetro que entra en una



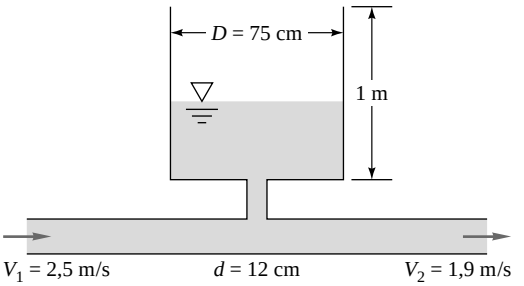
P3.10

www.elsolucionario.net

sección porosa. Esta sección permite una velocidad radial uniforme v_w a través de las superficies de la pared durante una longitud de 1,2 m. Si la velocidad media en la entrada V_1 es 12 m/s, determine la velocidad en la salida V_2 si (*a*) v_w = 15 cm/s hacia fuera del conducto o (*b*) v_w = 10 cm/s hacia dentro del conducto. (*c*) ¿Cuál es el valor de v_w que hace que V_2 = 9 m/s?

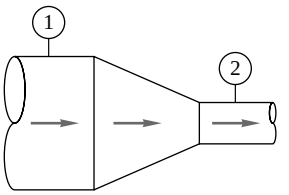
P3.11 Una habitación contiene polvo con una concentración uniforme $C = \rho_{polvo}/\rho$. La habitación se quiere limpiar introduciendo aire fresco con velocidad V_i a través de un conducto de área A_i sobre una pared y extrayendo el aire de la habitación a una velocidad V_o a través de otro conducto de área A_o sobre la pared opuesta. Obtenga una expresión para la velocidad instantánea de cambio de la masa de polvo de la habitación.

P3.12 El flujo de la Figura P3.12 llena el depósito cilíndrico que se muestra. En el instante t = 0, la profundidad del agua del depósito es de 30 cm. Estime el tiempo requerido para llenar el resto del depósito.



P3.12

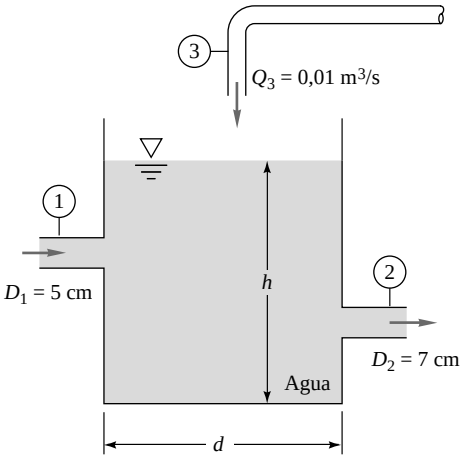
P3.13 En la Figura P3.13 se presenta un flujo estacionario de 40 kg/s de agua a 20 °C a través de una tobera. Si D_1 = 18 cm y D_2 = 5 cm, calcule la velocidad media en metros por segundo en (*a*) la sección 1 y (*b*) la sección 2.



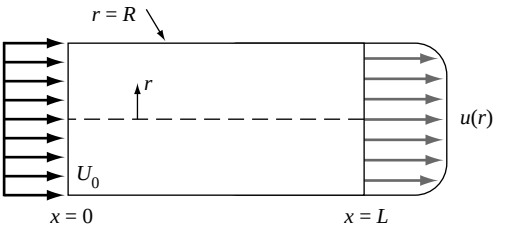
P3.13

P3.14 El depósito abierto de la Figura P3.14 contiene agua a 20 °C y se está rellenando a través de la sección 1. Suponiendo flujo incompresible, obtenga una expresión analítica para el cambio de nivel del agua dh/dt en función de los flujos volumétricos (Q_1, Q_2, Q_3) y el diámetro del depósito d. Hecho esto, si el nivel del agua h es constante, determine la velocidad de salida V_2 dados los datos V_1 = 3 m/s y Q_3 = 0,01 m³/s.

P3.15 En la Figura P3.15 se presenta agua, considerada incompresible, fluyendo de forma estacionaria en un conducto de sección circular. La velocidad en la entrada es constante, $u = U_0$, y la velocidad en la salida se aproxima por la de un flujo turbulento, $u = u_{máx}(1 - r/R)^{1/7}$. Determine la relación $U_0/u_{máx}$ de este flujo.



P3.14

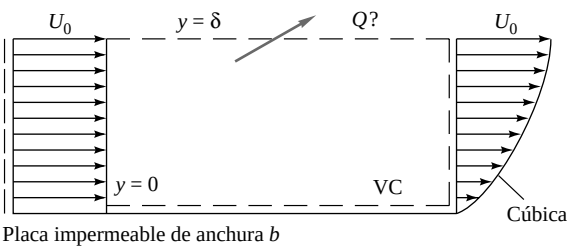


P3.15

P3.16 Un fluido incompresible pasa sobre una placa plana impermeable como se muestra en la Figura P3.16, entrando con un perfil de velocidades uniforme $u = U_0$ y saliendo con un perfil polinómico

$$u \Xi U_0 \left[\frac{3\Omega\Phi\Omega^3}{2} \right] \quad \text{donde} \quad \Omega = \frac{y}{\delta}$$

Calcule el caudal que atraviesa la superficie superior del volumen de control.



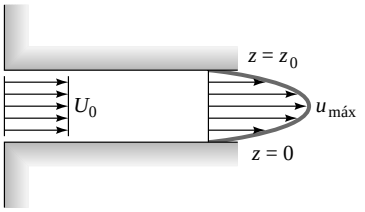
Placa impermeable de anchura *b*

P3.16

P3.17 El flujo compresible y estacionario entre dos placas paralelas de la Figura P3.17 es uniforme, $u = U_0$ = 8 cm/s, mientras que aguas abajo el flujo pasa a tener el perfil laminar parabólico $u = az(z_0 - z)$, donde a es constante. Si z_0 = 4 cm y el fluido es aceite SAE 30 a 20 °C, ¿cuál es el valor de $u_{máx}$ en cm/s?

P3.18 Un fluido incompresible se mueve de forma estacionaria a través del conducto de sección rectangular de la

www.elsolucionario.net

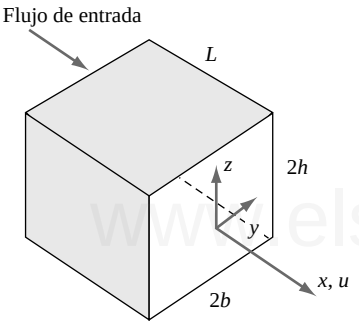


P3.17

Figura P3.18. El perfil de velocidades está dado aproximadamente por

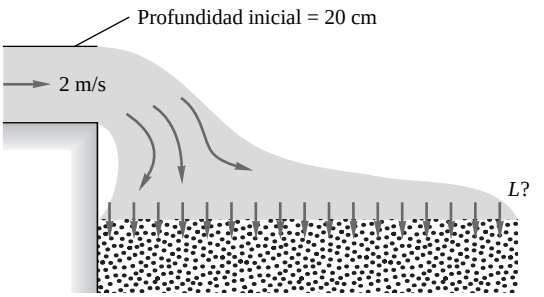
$$u \Phi u_{máx} \left[1 \Phi \frac{y^2}{b^2}\right] \left[1 \Phi \frac{z^2}{h^2}\right]$$

(*a*) ¿Satisface este perfil las condiciones de contorno correspondientes a un fluido viscoso? (*b*) Encuentre una expresión analítica para el caudal en la salida. (*c*) Si el gasto en la entrada es de 300 ft^3/min, estime $u_{máx}$ en metros por segundo para $b = h = 10$ cm.



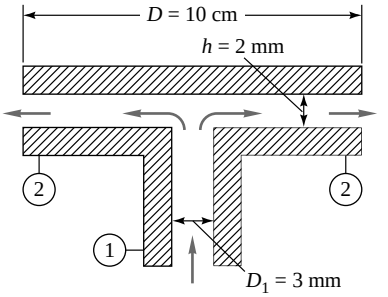
P3.18

P3.19 El agua de una tormenta fluye hasta caer sobre un lecho poroso que absorbe el agua a una velocidad vertical uniforme de 8 mm/s, como se muestra en la Figura P3.19. El sistema tiene una anchura de 5 m. Determine la longitud *L* del lecho que se requiere para absorber completamente el agua de la tormenta.



P3.19

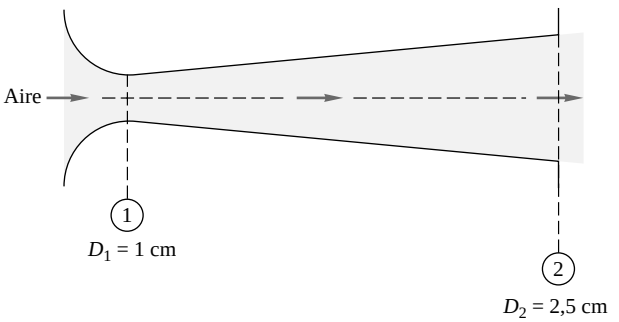
P3.20 En la Figura P3.20 se presenta un flujo de aceite (S = 0,89) que entra a través de la sección 1 con un flujo de peso de 250 N/h para lubricar un cojinete de empuje. El aceite fluye radialmente de forma estacionaria hacia el estrecho hueco que hay entre las dos placas. Calcule (*a*) el caudal de salida en mililitros por segundo y (*b*) la velocidad media de salida en centímetros por segundo.



P3.20

P3.21 Un deshumidificador toma aire saturado (100 por 100 de humedad relativa) a 30 °C y 1 atm, a través de una toma de 8 cm de diámetro y con una velocidad media de 3 m/s. Después de que parte del vapor de agua se condense y se extraiga del fondo, el aire sale aproximadamente a 30 °C, 1 atm, y 50 por 100 de humedad relativa. Si se opera en forma estacionaria, estime la cantidad de agua que se extraerá en kilogramos por hora. (Este problema es una idealización de un deshumidificador real.)

P3.22 La tobera convergente-divergente de la Figura P3.22 expande y acelera aire seco hasta hacerle alcanzar velocidades supersónicas en la salida, donde $p_2 = 8$ kPa y $T_2 = 240$ K. En la garganta, $p_1 = 284$ kPa, $T_1 = 665$ K y $V_1 = 517$ m/s. Suponiendo flujo estacionario y compresible de un gas ideal, estime (*a*) el gasto másico en kilogramos por hora, (*b*) la velocidad V_2 y (*c*) el número de Mach Ma_2.



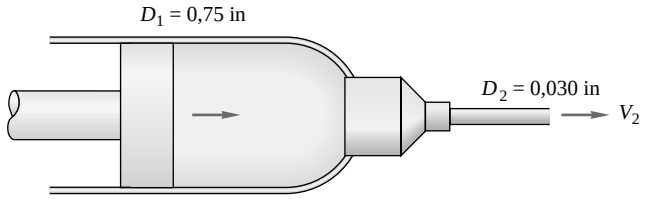
P3.22

P3.23 La aguja hipodérmica de la Figura P3.23 contiene suero (S = 1,05). Si se tiene que inyectar este suero de forma estacionaria a 6 cm^3/s, ¿a qué velocidad en pulgadas por segundo debe avanzarse el émbolo (*a*) si se desprecian las pérdidas en la aguja y (*b*) si hay una pérdida del 10 por 100 en el flujo en la aguja?

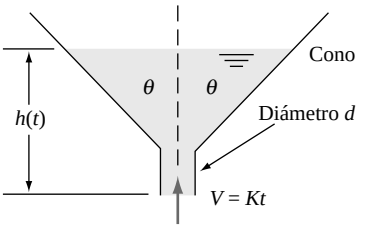
***P3.24** En el cono de la Figura P3.24 está entrando agua con una velocidad media que aumenta linealmente con el tiempo $V = Kt$. Si *d* es muy pequeño, obtenga una fórmula analítica para la altura de agua $h(t)$ con las con-

www.elsolucionario.net

diciones iniciales $h = 0$ en $t = 0$. Suponga flujo incompresible.

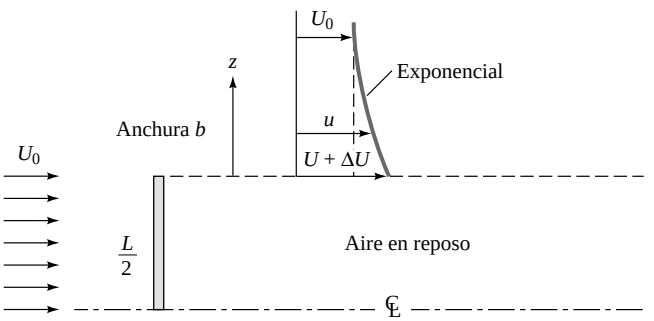


P3.23



P3.24

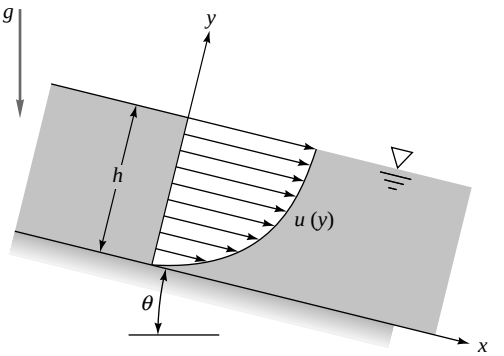
P3.25 Según se discutirá en los Capítulos 7 y 8, el flujo de una corriente uniforme U_0 perpendicular a una placa plana crea tras ella una *estela* de baja velocidad. En la Figura P3.25 se presenta un modelo simple en el que, por simetría, sólo aparece la mitad del flujo. El perfil de velocidades tras la placa se idealiza como una zona «muerta» (con velocidad casi nula) más una zona con velocidad superior a la incidente que decae verticalmente según al ley $u \Xi U_0 + \Delta U\, e^{-z/L}$, donde L es la altura de la placa y $z = 0$ es la parte superior de la estela. Determine ΔU en función de la velocidad de la corriente U_0.



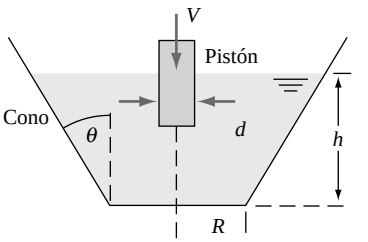
P3.25

P3.26 En la Figura P3.26 una fina capa de líquido se desplaza sobre un plano inclinado con un perfil de velocidades laminar $u \Xi U_0(2y/h - y^2/h^2)$, donde U_0 es la velocidad de la superficie. Si el plano tiene una anchura b perpendicular al papel, determine el caudal de la capa de líquido. Suponga que h = 0,5 in y que el caudal por cada pie de anchura del canal es 1,25 gal/min. Estime U_0 en pies por segundo.

***P3.27** El cono truncado de la Figura P3.27 contiene un líquido incompresible con una altura h. Un pistón sólido de diámetro d penetra en la superficie con una velocidad V. Obtenga una expresión analítica para la velocidad de aumento de la altura de la superficie del líquido dh/dt

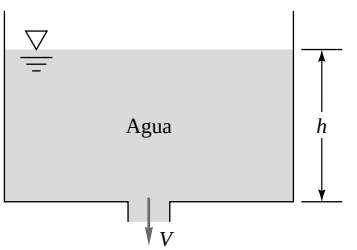


P3.26



P3.27

P3.28 De acuerdo con el teorema de Torricelli, la velocidad de un fluido que descarga por el orificio de un depósito es $V \Xi (2gh)^{1/2}$, donde h es la altura de agua sobre el orificio, como se muestra en la Figura P3.28. Si el orificio tiene una sección A_o y el depósito es cilíndrico con una sección transversal de área $A_b \gg A_o$, obtenga una fórmula para el tiempo que el depósito tardará en vaciarse completamente si la altura inicial de agua es h_o.



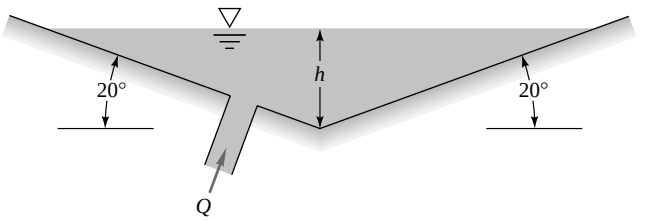
P3.28

P3.29 En la teoría elemental de flujos compresibles (Capítulo 9), el aire comprimido de un depósito saldrá por un orificio con un gasto másico $\dot{m} \Xi C\rho$, donde ρ es la densidad del aire en el depósito y C es una constante. Si ρ_0 es la densidad inicial en un depósito de volumen $\mathcal{V}$, obtenga una fórmula para el cambio de densidad $\rho(t)$ cuando se abre el orificio. Aplique esta fórmula al siguiente caso: un depósito esférico de 50 cm de diámetro, con una presión inicial de 300 kPa y una temperatura de 100 °C, y un orificio cuyo gasto volumétrico

www.elsolucionario.net

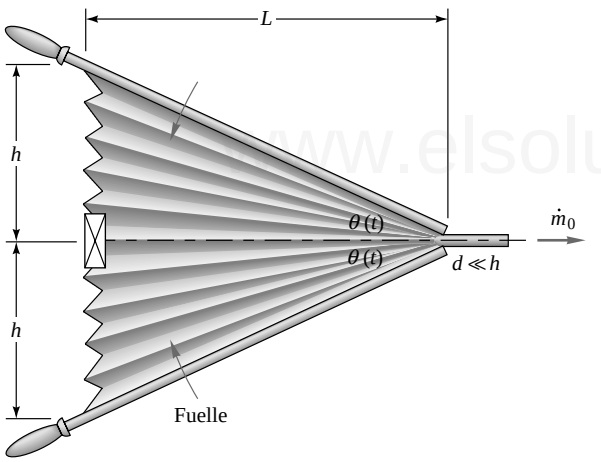
inicial de salida es de 0,01 kg/s. Determine el tiempo requerido para que la densidad del depósito se reduzca al 50 por 100.

***P3.30** El depósito en forma de V de la Figura P3.30 tiene una anchura b y se llena mediante un conducto con caudal Q. Obtenga una expresión para (*a*) la velocidad de cambio de altura dh/dt y (*b*) el tiempo que se requiere para que la superficie pase de h_1 a h_2.



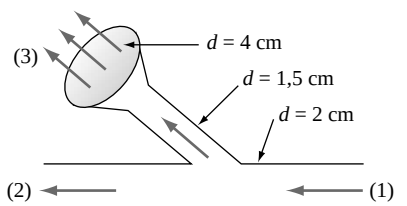
P3.30

P3.31 Un fuelle se puede modelar como un volumen deformable con forma de cuña como el de la Figura P3.31. La válvula de la izquierda está cerrada mientras se cierra el fuelle. Si la anchura del sistema es b, obtenga una expresión para el flujo másico $\dot{m}_0$ como función del ángulo $\theta(t)$.



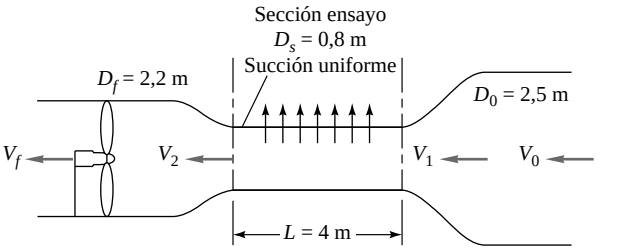
P3.31

P3.32 En el conjunto de tuberías de la Figura P3.32 fluye agua a 20 °C de forma estacionaria, entrando por la sección 1 a 20 gal/min. La velocidad media en la sección 2 es 2,5 m/s. Parte del flujo se desvía a una ducha que contiene 100 orificios de 1 mm de diámetro cada uno. Suponiendo que el flujo en la ducha es uniforme, estime la velocidad de salida en los chorros de la ducha.



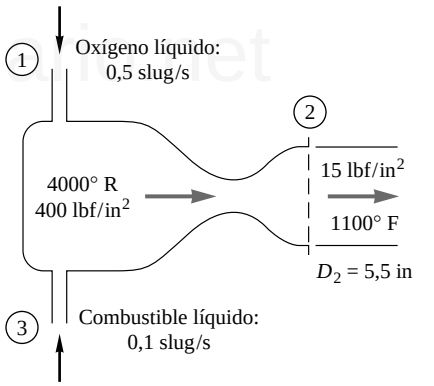
P3.32

P3.33 En algunos túneles de viento, la sección de ensayos está perforada para succionar el fluido y reducir el espesor de la capa límite viscosa. La pared de la sección de ensayos de la Figura P3.33 contiene 1200 orificios de 5 mm de diámetro por metro cuadrado de pared. La velocidad de succión por cada orificio es V_s = 8 m/s, y la velocidad de entrada a la sección de ensayos es V_1 = 35 m/s. Suponiendo un flujo de aire estacionario e incompresible a 20 °C, calcule (*a*) V_0, (*b*) V_2 y (*c*) V, en metros por segundo.



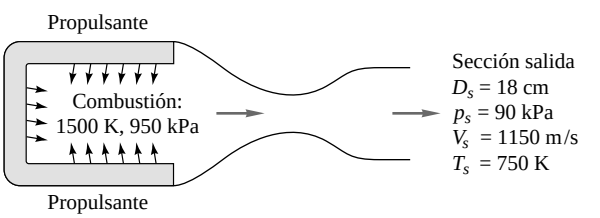
P3.33

P3.34 El motor cohete de la Figura P3.34 opera en régimen estacionario. Los productos de la combustión salen por la tobera comportándose aproximadamente como un gas perfecto con un peso molecular de 28. Para las condiciones antes dadas, calcule V_2 en pies por segundo.



P3.34

P3.35 En contraste con el motor cohete de combustible líquido de la Figura P3.34, el motor cohete de combustible sólido de la Figura P3.35 es autónomo y no tiene conductos de entrada. Usando un análisis de volúmenes de control, calcule, para las condiciones de la Figura P3.35, el ritmo al que disminuye la masa de pro-

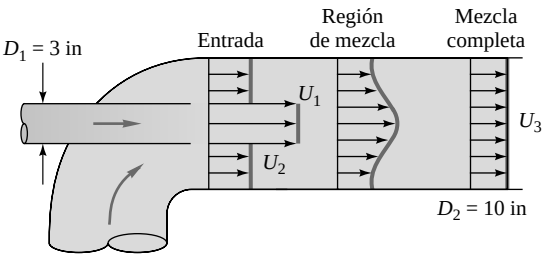


P3.35

www.elsolucionario.net

pulsante suponiendo que el gas de la salida tiene un peso molecular de 28.

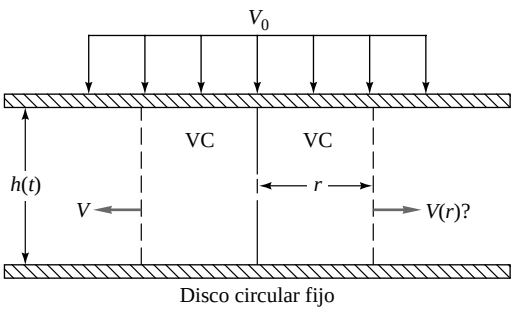
P3.36 La bomba de chorro de la Figura P3.36 inyecta agua a U_1 = 40 m/s a través de un conducto de 3 in y arrastra a un flujo de agua que tiene una velocidad U_2 = 3 m/s en la región anular alrededor del chorro. Los dos flujos se mezclan completamente aguas abajo, donde la velocidad U_3 es aproximadamente constante. Calcule U_3 en metros por segundo en un flujo estacionario e incompresible.



P3.36

P3.37 Un cilindro sólido de acero de 4,5 cm de diámetro y 12 cm de longitud, con una masa de 1500 g, cae de forma concéntrica por un conducto vertical de 5 cm de diámetro que contiene aceite (S = 0,89). Suponiendo que el aceite es incompresible, estime la velocidad media del aceite en el hueco anular entre el cilindro y el conducto (*a*) relativa al conducto y (*b*) relativa al cilindro.

P3.38 El fluido incompresible de la Figura P3.38 está siendo aplastado entre dos grandes discos circulares por el movimiento uniforme con velocidad V_0 del disco superior. Suponiendo que el flujo de escape es radial y unidimensional, use el volumen de control mostrado para obtener una expresión para $V(r)$.

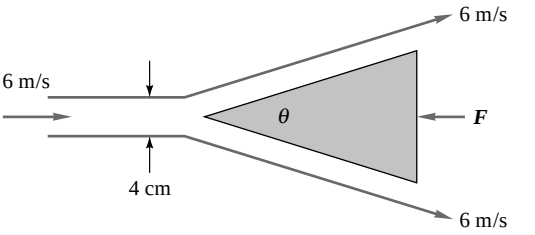


P3.38

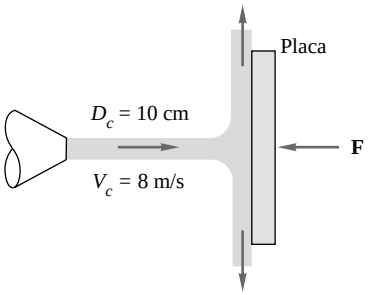
P3.39 Una cuña divide una capa de agua a 20 °C según se muestra en la Figura P3.39. Tanto la cuña como la capa de agua son muy anchas. Si la fuerza requerida para mantener la cuña quieta es F = 124 N por metro de anchura, ¿cuál es el ángulo θ de la cuña?

P3.40 El chorro de agua de la Figura P3.40 incide perpendicularmente sobre una placa plana. Despreciando los efectos de la gravedad y la fricción, calcule la fuerza F en newtons que se requiere para mantener quieta la placa.

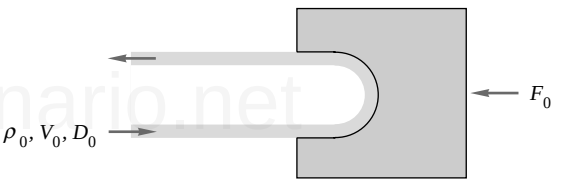
P3.41 El álabe de la Figura P3.41 hace que el chorro de agua dé la vuelta completamente. Obtenga una expresión para la máxima velocidad en el chorro V_0 si la máxima fuerza admisible es F_0.



P3.39

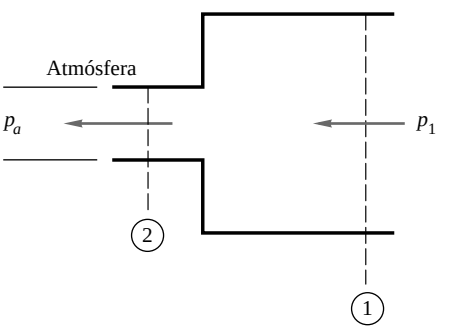


P3.40



P3.41

P3.42 Un líquido de densidad ρ fluye a través de la contracción de la Figura P3.42 y sale después a la atmósfera. Suponiendo condiciones uniformes (p_1, V_1, D_1) en la sección 1 y (p_2, V_2, D_2) en la sección 2, encuentre una expresión para la fuerza F que el fluido ejerce en la contracción.

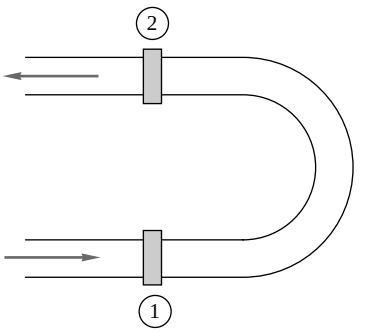


P3.42

P3.43 En la Figura P3.43 se presenta el flujo de agua a 20 °C a través de un conducto de 5 cm de diámetro que tiene una curva de 180°. La longitud total del conducto entre las bridas 1 y 2 es de 75 cm. El flujo de peso es de

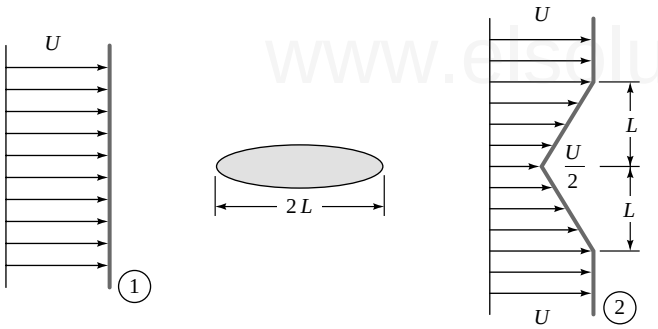
www.elsolucionario.net

230 N/s con p_1 = 165 kPa y p_2 = 134 kPa. Despreciando el peso del conducto, determine la fuerza total que deben soportar las bridas en este flujo.



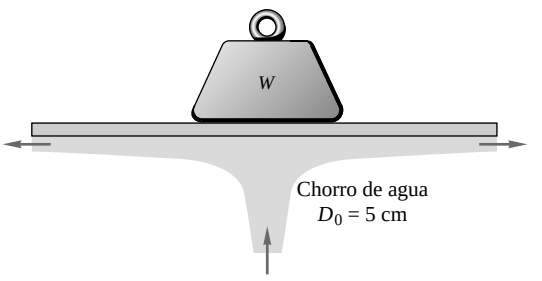
P3.43

***P3.44** Cuando una corriente uniforme se mueve alrededor de un cilindro grueso, se crea una amplia estela de baja velocidad que se puede idealizar con un perfil en V como el de la Figura P3.44. Las presiones p_1 y p_2 son aproximadamente iguales. Si el flujo es bidimensional e incompresible, con una anchura b, obtenga una expresión para la fuerza de resistencia F del cilindro. Reescriba el resultado en la forma de un *coeficiente de resistencia* adimensional basado en la longitud del cuerpo $C_D = F/(\rho U^2 bL)$.



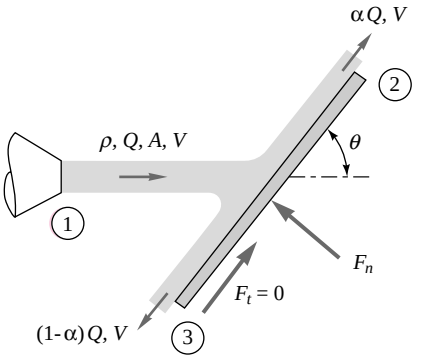
P3.44

P3.45 En la Figura P3.45, un peso sobre una plataforma son soportados por un chorro de agua estacionario. Si el peso total soportado es de 700 N, ¿cuál es la velocidad del chorro?



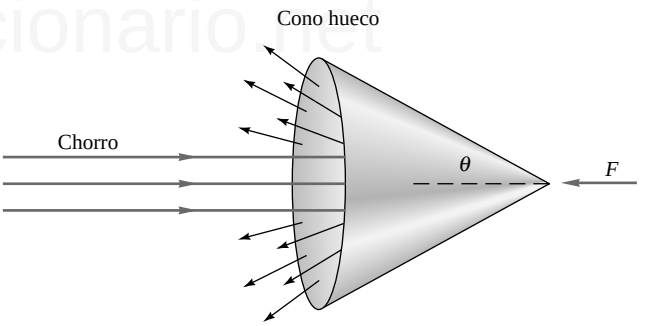
P3.45

P3.46 Cuando un chorro incide sobre una placa inclinada, como la de la Figura P3.46, se parte en dos chorros 2 y 3 de igual velocidad $V = V_{ch}$ pero con caudales diferentes: αQ en 2 y $(1 - \alpha)Q$ en la sección 3, siendo α la fracción correspondiente. El motivo es que, en un flujo sin fricción, el fluido no puede ejercer fuerza tangencial F_t sobre la placa. La condición $F_t = 0$ nos permite obtener α. Realice este análisis y obtenga α como función del ángulo de la placa θ. ¿Por qué la respuesta no depende de las propiedades del flujo?



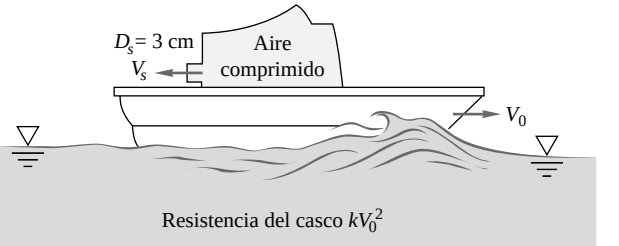
P3.46

P3.47 El chorro líquido de diámetro D_i y velocidad V_i incide sobre el cono hueco en reposo de la Figura P3.47, que lo deflecta hacia atrás como una capa cónica con igual velocidad. Determine el ángulo θ para el que la fuerza sobre el cono sea $F = \frac{3}{2}\rho A_i V_i^2$.



P3.47

P3.48 El pequeño barco de la Figura 3.48 es impulsado a velocidad V_0 por un chorro de aire comprimido que sale de un orificio de 3 cm de diámetro a una velocidad de V_s = 343 m/s. Las condiciones de salida del chorro son p_s = 1 atm y T_s = 30 °C. La resistencia del aire se

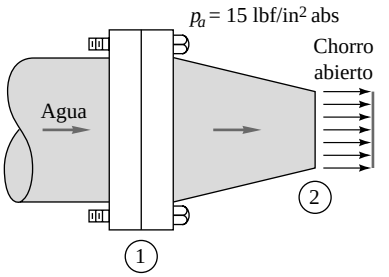


P3.48

www.elsolucionario.net

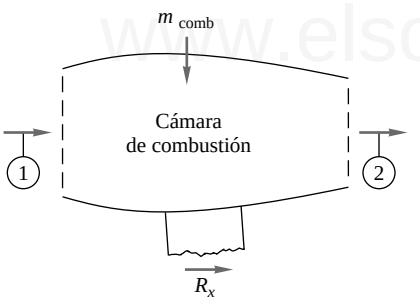
considera despreciable y la resistencia del casco es kV_0^2, donde $k \Xi 19\ \text{N} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$. Estime la velocidad del barco V_0 en metros por segundo.

P3.49 La tobera horizontal de la Figura P3.49 tiene $D_1 = 12$ in y $D_2 = 6$ in, con una presión en la entrada $p_1 = 38$ lbf/in^2 absoluta y $V_2 = 56$ ft/s. Con agua a 20 °C, calcule la fuerza horizontal que proporcionan los tornillos de la brida de sujeción para mantener fija la tobera.



P3.49

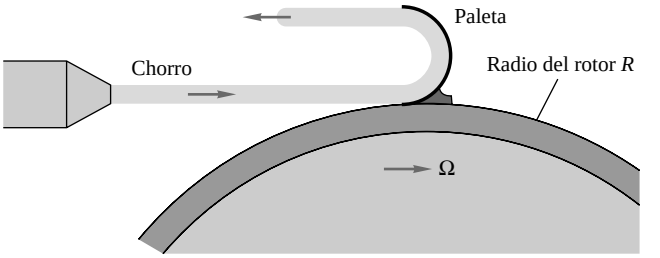
P3.50 El motor a reacción de un banco de ensayos representado en la Figura P3.50 toma aire a 20 °C y 1 atm por la sección 1, donde $A_1 = 0{,}5\ \text{m}^2$ y $V_1 = 250$ m/s. La relación aire combustible es 1:30. El aire abandona la sección 2 a la presión atmosférica y una temperatura superior, donde $V_2 = 900$ m/s y $A_2 = 0{,}4\ \text{m}^2$. Calcule la reacción horizontal R_x en el banco que se requiere para mantener fijo el motor.



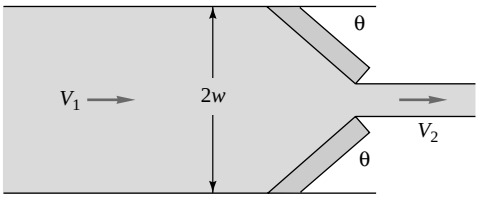
P3.50

P3.51 Un chorro líquido de velocidad V_c y área A_c incide sobre la paleta de 180° del rotor de una turbina que gira a velocidad Ω, como se muestra en la Figura P3.51. Obtenga una expresión para la potencia P producida por la turbina en ese instante como función de los parámetros del sistema. ¿A qué velocidad angular se produce la máxima potencia? ¿Cómo cambiaría el análisis en el caso de disponer de muchas paletas en la turbina, de forma que el chorro siempre incidiera sobre una de ellas?

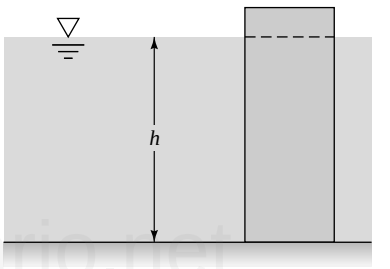
P3.52 La puerta vertical de un canal de agua está parcialmente abierta, como se muestra en la Figura P3.52. Suponiendo que no hay cambio en el nivel de agua y una distribución de presión hidrostática, obtenga una expresión para la fuerza horizontal F_x sobre una de las mitades de la compuerta como función de (ρ, h, w, θ, V_1). Aplique este resultado al caso de agua a 20 °C, $V_1 = 0{,}8$ m/s, $h = 2$ m, $w = 1{,}5$ m y $\theta = 50°$.



P3.51



Vista en planta



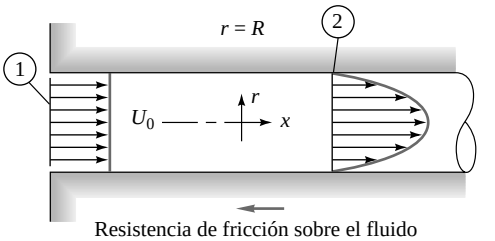
Vista de perfil

P3.52

P3.53 Se considera el flujo incompresible a la entrada de un conducto circular de la Figura P3.53. El flujo en la entrada es uniforme $u_1 = U_0$. El flujo en la sección 2 es el flujo completamente desarrollado en un conducto. Determine la fuerza de resistencia F sobre la pared en función de (p_1, p_2, ρ, U_0, R) si el flujo en la sección 2 es

(*a*) Laminar: $u_2 = u_{\text{máx}}\left[1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right]$

(*b*) Turbulento: $u_2 \Xi u_{\text{máx}}\left[1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right]^{1/7}$

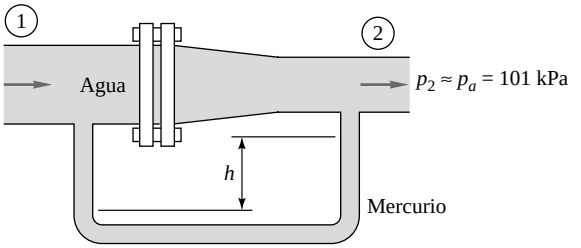


Resistencia de fricción sobre el fluido

P3.53

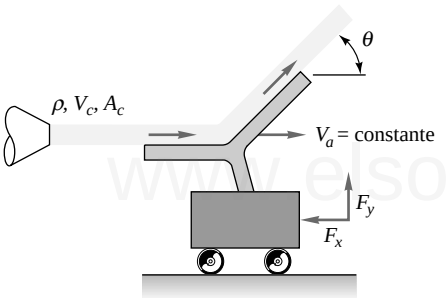
www.elsolucionario.net

P3.54 El flujo en el conducto de sección variable de la Figura P3.54 tiene $D_1 = 8$ cm, $D_2 = 5$ cm y $p_2 = 1$ atm. Todos los fluidos se encuentran a 20 °C. Si $V_1 = 5$ m/s y la lectura del manómetro es $h = 58$ cm, estime la fuerza total que resisten las bridas.



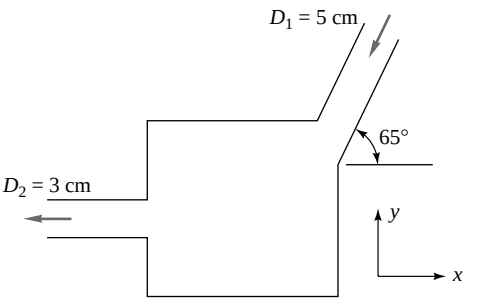
P3.54

P3.55 El chorro de la Figura P3.55 incide sobre un álabe que se mueve hacia la derecha con velocidad constante V_a sobre un carro sin fricción. Calcule (*a*) la fuerza F_x que se requiere para sujetar el álabe al carro y (*b*) la potencia P que se le proporciona al carro. Determine también la velocidad del carro para la que (*c*) la fuerza F_x es máxima y (*d*) la potencia P es máxima.



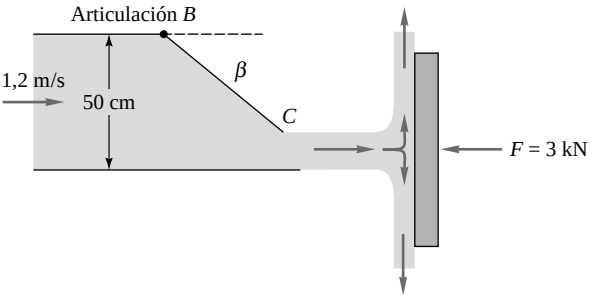
P3.55

P3.56 El agua de la Figura P3.56 fluye de forma estacionaria a 20 °C a través de la caja representada, entrando por la sección (1) a 2 m/s. Calcule (*a*) la fuerza horizontal y (*b*) vertical que se requieren para mantener quieta la caja.



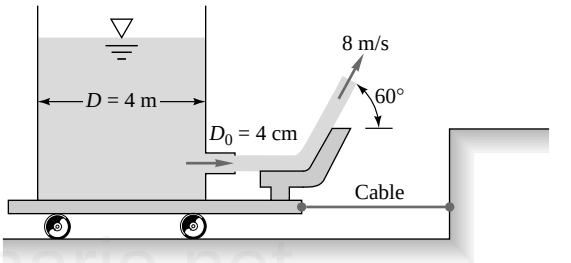
P3.56

P3.57 En la Figura P3.57 se representa agua moviéndose a través de un conducto de 50 cm de alto y 1 m de acho. La compuerta *BC* cierra completamente el conducto cuando $\beta = 90°$. Suponiendo flujo unidimensional, ¿cuál es el ángulo β que hará que la fuerza del chorro de salida sobre la placa sea de 3 kN?



P3.57

P3.58 El depósito de agua de la P3.58 está colocado sobre un carro sin fricción y alimenta un chorro de 4 cm de diámetro con una velocidad de 8 m/s que se deflecta 60° por medio de un álabe. Calcule la tensión en el cable.

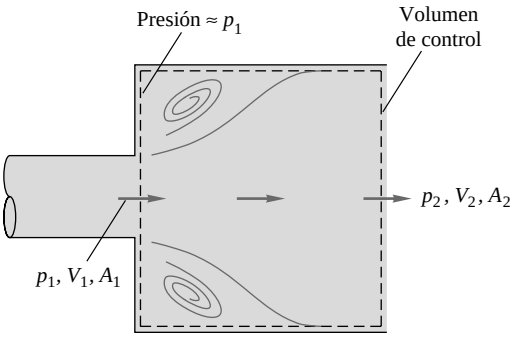


P3.58

P3.59 Cuando el flujo en un conducto se expande súbitamente de A_1 a A_2, como se indica en la Figura P3.59, aparecen torbellinos de baja velocidad y baja fricción en las esquinas y el flujo se expande de forma gradual hasta A_2 aguas abajo. Empleando el volumen de control sugerido para flujo estacionario y suponiendo que $p \approx p_1$ en la esquina anular, como se muestra, demuestre que la presión aguas abajo está dada por

$$p_2 = p_1 + \rho V_1^2 \frac{A_1}{A_2}\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)$$

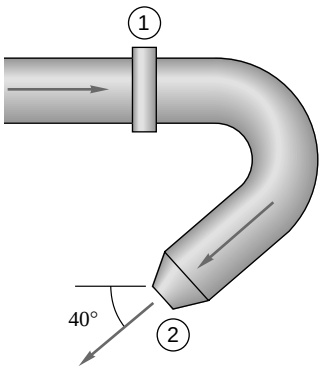
Desprecie la fricción en la pared.



P3.59

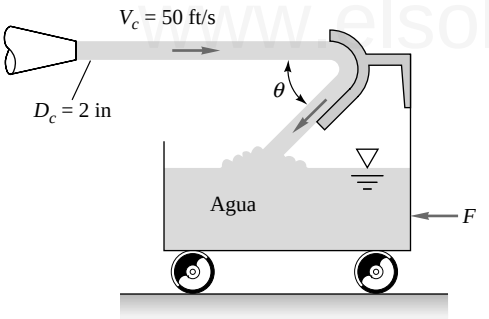
www.elsolucionario.net

P3.60 Por el codo de la Figura P3.60 fluye agua a 20 °C que se descarga a la atmósfera. El diámetro del conducto es $D_1 = 10$ cm, mientras que $D_2 = 3$ cm. Cuando el flujo de peso es de 150 N/s, la presión $p_1 = 2{,}3$ atm (manométrica), y despreciando el peso del agua y del codo, estime la fuerza sobre los tornillos de la abrazadera de la sección 1.



P3.60

P3.61 Un chorro de agua a 20 °C incide sobre un álabe subido a un depósito dotado con ruedas sin fricción, como se muestra en la Figura P3.61. El chorro gira y cae en el depósito sin derramarse. Si $\theta = 30°$, calcule la fuerza horizontal F necesaria para que el depósito permanezca en reposo.

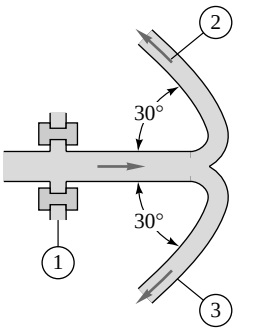


P3.61

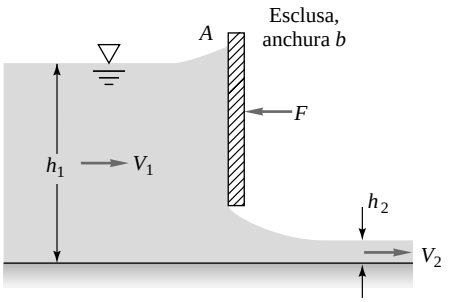
P3.62 En la Figura P3.62 se presenta cómo agua a 20 °C sale a la atmósfera al nivel del mar a través de dos conductos. Las áreas de los conductos son $A_1 = 0{,}02$ m^2 y $A_2 = A_3 = 0{,}008$ m^2. Si $p_1 = 135$ kPa (absoluta) y el caudal es $Q_2 = Q_3 = 275$ m^3/h, calcule la fuerza sobre los tornillos de la abrazadera de la sección 1.

***P3.63** La esclusa de la Figura P3.63 puede controlar y medir el flujo en un canal abierto. En las secciones 1 y 2 el flujo es uniforme y la presión es la hidrostática. La anchura del canal es b perpendicular al papel. Despreciando la fricción con el fondo, obtenga una expresión para la fuerza F necesaria para mantener la puerta. ¿Para qué valor de h_2/h_1 es mayor la fuerza? En el caso de velocidad muy baja $V_1^2 \ll gh_1$, ¿para qué valor de h_2/h_1 la fuerza será la mitad de la máxima?

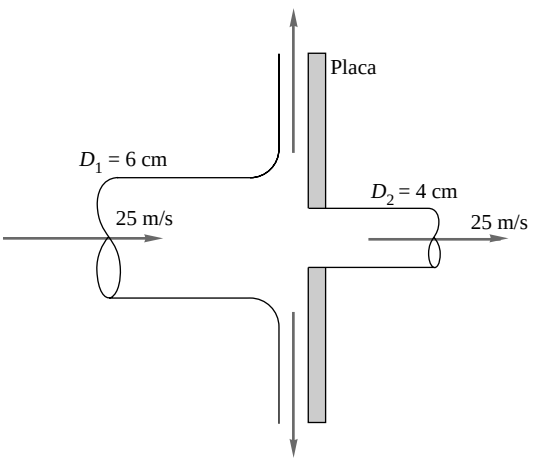
P3.64 El chorro de agua a 20 °C de 6 cm de diámetro de la Figura P3.64 incide sobre una placa que contiene un orificio de 4 cm de diámetro. Parte del chorro pasa a través del orificio y parte se deflecta. Determine la fuerza horizontal requerida para mantener la placa.



P3.62



P3.63

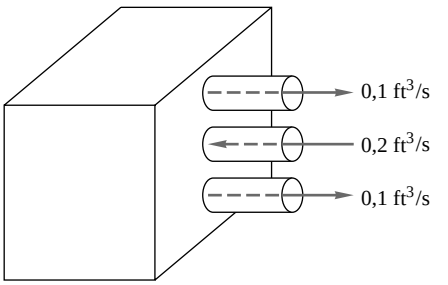


P3.64

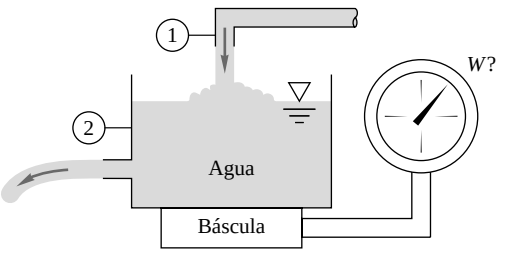
P3.65 La caja de la Figura P3.65 tiene tres orificios de 0,5 in en su lado derecho. Los caudales de agua a 20 °C que se muestran son estacionarios, pero los detalles del interior son desconocidos. Calcule la fuerza, de existir, que el flujo de agua causa sobre la caja.

P3.66 El depósito de la Figura P3.66 pesa 500 N vacío y contiene 600 l de agua a 20 °C. Los conductos 1 y 2 tienen un diámetro de 6 cm y un caudal de 300 m^3/h cada uno. ¿Cuál sería la lectura de W en newtons?

www.elsolucionario.net

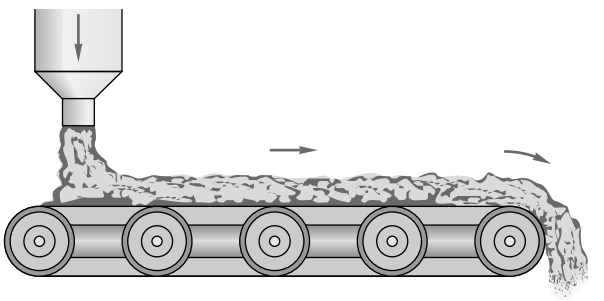


P3.65



P3.66

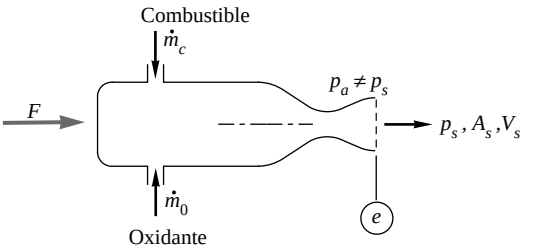
P3.67 Una tolva está descargando grava, a un ritmo de 650 N/s, sobre una cinta transportadora en movimiento, como se muestra en la Figura P3.67. La grava se descarga al final de la cinta. Las ruedas de propulsión de la cinta tienen un diámetro de 80 cm y giran en sentido horario a 150 rpm. Estime la potencia requerida por esta cinta despreciando la fricción del sistema y la resistencia del aire.



P3.67

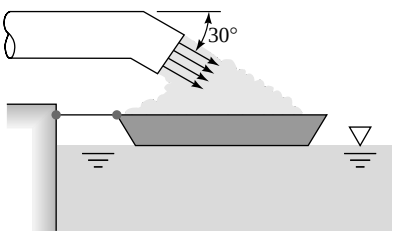
P3.68 El motor cohete de la Figura P3.68 tiene una salida supersónica, por lo que la presión en la salida p_s no tiene por qué ser p_a. Demostrar que la fuerza requerida para mantener el cohete en su banco de ensayos es $F = \rho_s A_s V_s^2 + A_s(p_s - p_a)$. ¿Es esta fuerza F lo que denominamos empuje del cohete?

P3.69 Una placa rectangular uniforme de 40 cm de longitud y 30 cm de anchura está sujeta en el aire mediante una bisagra que la soporta en su parte superior (los 30 cm de anchura). La placa es golpeada en su centro por un chorro de agua horizontal de 3 cm de diámetro con una velocidad de 8 m/s. Si la placa tiene una masa de 16 kg, estime el ángulo al que la placa queda en equilibrio con respecto a la vertical.



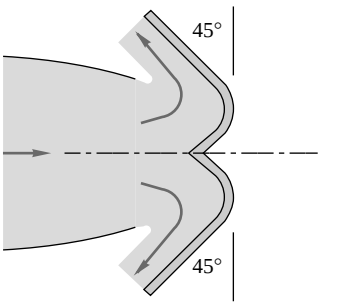
P3.68

P3.70 La draga de la Figura P3.70 está cargando arena (S = 2,6) sobre una barcaza. La arena sale del conducto de la draga a 4 ft/s con un flujo de peso de 850 lbf/s. Estime la tensión que este proceso de carga produce en la amarra.



P3.70

P3.71 Suponga que en el motor a reacción del Problema P3.50 se coloca un deflector como el de la Figura P3.71. ¿Cuál será ahora la reacción R_x sobre el banco? ¿Es esta reacción suficiente para servir de fuerza de frenada durante el aterrizaje de un avión?

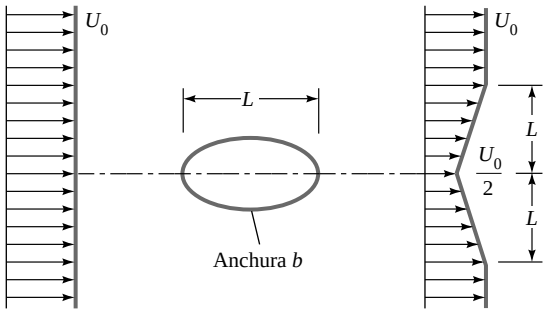


P3.71

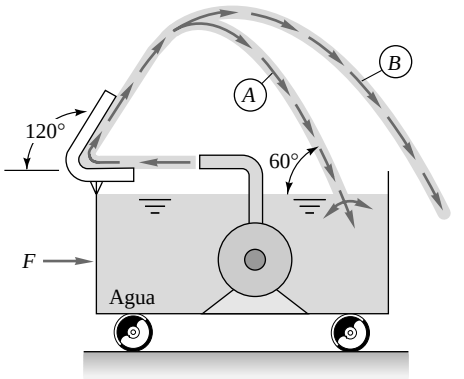
***P3.72** El cilindro elíptico de la Figura P3.72 crea una estela ideal aguas abajo de la corriente uniforme. La presión en las secciones de aguas arriba y abajo es aproximadamente igual y se trata de agua a 20 °C. Si $U_0 = 4$ m/s y $L = 80$ cm, estime la fuerza de resistencia por unidad de anchura que se ejerce sobre el cilindro. Calcule también el coeficiente de resistencia adimensional $C_D = 2F/(\rho U_0^2 bL)$.

P3.73 Una bomba en un depósito de agua a 20 °C dirige el chorro a 45 ft/s y 200 gal/min contra un álabe, como en la Figura P3.73. Calcule la fuerza F necesaria para mantener el carro estacionario si el chorro sigue (*a*) la senda *A* o (*b*) la senda *B*. El depósito contiene 550 gal de agua en ese instante.

www.elsolucionario.net

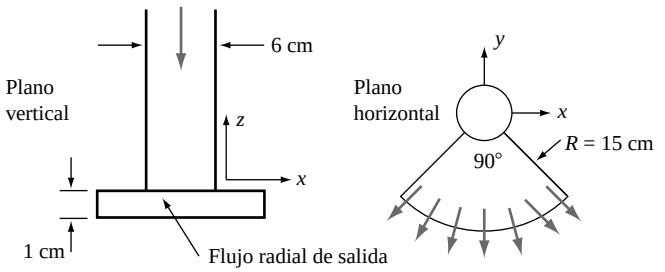


P3.72



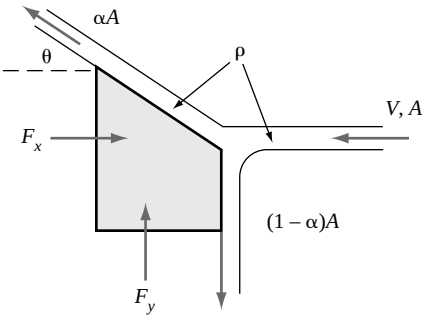
P3.73

P3.74 En la Figura P3.74 se representa un conducto de 6 cm de diámetro por el que fluye agua a 20 °C con un caudal de 300 gal/min. El flujo gira en la horizontal y sale radialmente por un conducto en forma de segmento circular 90° y 1 cm de espesor. Estime las fuerzas (F_x, F_y, F_z) requeridas para soportar los cambios de cantidad de movimiento del fluido, si se considera que el flujo radial es estacionario y uniforme.



P3.74

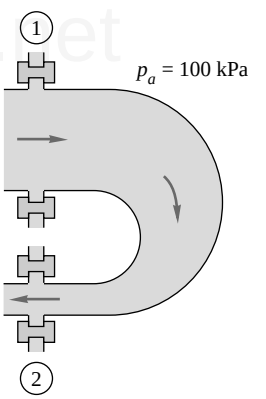
***P3.75** Un chorro de líquido de densidad ρ y área A incide sobre un bloque y se parte en dos chorros, como se muestra en la Figura P3.75. Suponga que los tres chorros tienen la misma velocidad V. El chorro superior sale con un ángulo θ y un área αA. El chorro inferior gira 90° hacia abajo. Despreciando el peso del fluido, (*a*) obtenga una expresión para las fuerzas (F_x, F_y) necesarias para retener el bloque. (*b*) Demuestre que $F_y = 0$ sólo si α B 0,5. (*c*) Encuentre los valores de α y θ para los cuales F_x y F_y son nulos.



P3.75

P3.76 Una capa de agua bidimensional de 10 cm de espesor que se mueve a 7 m/s incide sobre una pared fija, inclinada 20° con respecto a la dirección del chorro. Suponiendo que se trata de un flujo sin fricción, encuentre (*a*) la fuerza normal sobre la pared por metro de anchura, y encuentre el espesor de las capas de agua desviadas (*b*) aguas arriba y (*c*) aguas abajo de la pared.

P3.77 En la Figura P3.77 se presenta un conducto curvo de sección variable por el que circula de forma estacionaria agua a 20 °C. Sabiendo que las condiciones son p_1 = 350 kPa, D_1 = 25 cm, V_1 = 2,2 m/s, p_2 = 120 kPa y D_2 = 8 cm, y despreciando el peso del conducto y del agua, estime la fuerza total que deben resistir los tornillos de la abrazadera.

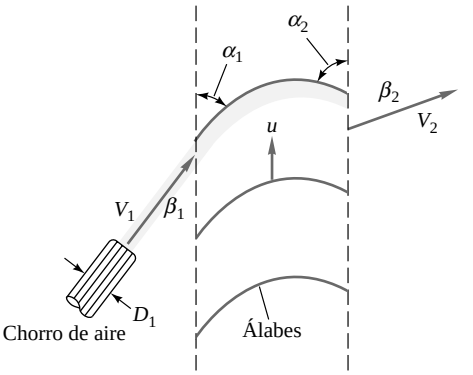


P3.77

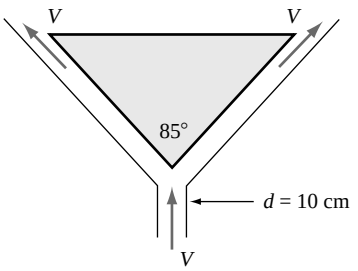
P3.78 Un chorro de diámetro D_1 entra en la cascada de álabes móviles con una velocidad absoluta V_1 y un ángulo β_1, abandonándola a una velocidad absoluta V_2 y un ángulo β_2, tal y como se muestra en la Figura P3.78. Los álabes se mueven con velocidad u. Obtenga una fórmula para la potencia P producida por los álabes en función de los parámetros anteriores.

P3.79 En la Figura P3.79 se muestra el flujo de aire a 20 °C y 1 atm incidiendo sobre un rotámetro cónico de 85° con un gasto másico de 0,3 kg/s. Este chorro es capaz de soportar un cuerpo cónico mediante un flujo estacionario anular alrededor del cono, como se muestra en la figura. La velocidad del aire en la parte superior del cono es igual a la velocidad de entrada. Estime el peso del cuerpo en newtons.

www.elsolucionario.net

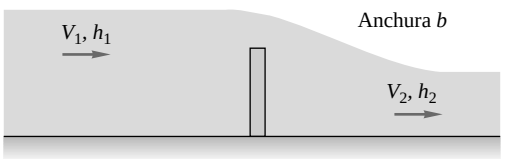


P3.78



P3.79

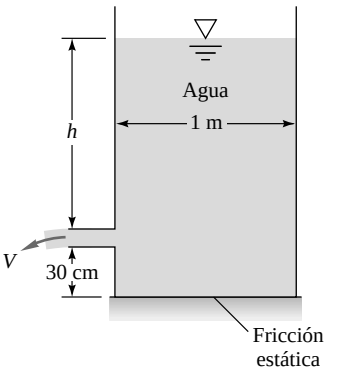
P3.80 Un río de anchura b y profundidad h_1 pasa sobre el obstáculo sumergido o «presa anegada» de la Figura P3.80, emergiendo en unas nuevas condiciones de flujo (V_2, h_2). Desprecie la presión atmosférica y suponga que la presión del agua es la correspondiente presión hidrostática en las secciones 1 y 2. Obtenga una expresión para la fuerza ejercida sobre el obstáculo en función de V_1, h_1, h_2, b, ρ y g. Desprecie la fricción del agua sobre el fondo del río.



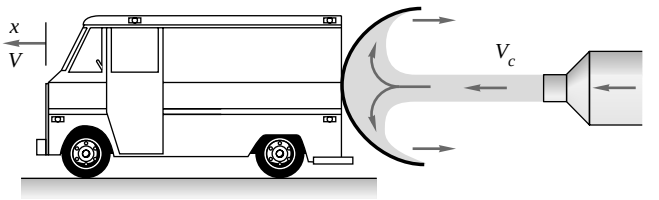
P3.80

P3.81 La idealización de Torricelli del flujo por un orificio en la cara de un depósito es $V = \sqrt{2gh}$, según se muestra en la Figura P3.81. El depósito cilíndrico pesa 150 N vacío y contiene agua a 20 °C. El fondo del depósito está sobre hielo muy liso (coeficiente estático de fricción $\zeta \approx 0{,}01$). El diámetro del orificio es de 9 cm. ¿Para qué profundidad de agua h el depósito comienza a desplazarse a la derecha?

***P3.82** El modelo de coche de la Figura P3.82 pesa 17 N y es acelerado desde el reposo por un chorro de agua de 1 cm de diámetro que se mueve a 75 m/s. Despreciando la resistencia del aire y el rozamiento de las ruedas, estime la velocidad del coche cuando se ha desplazado 1 m.



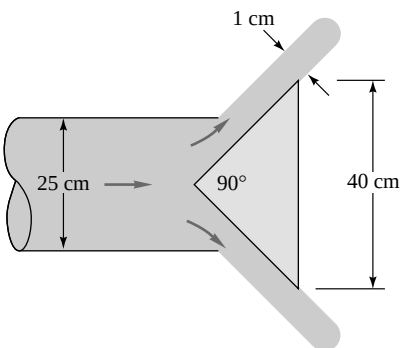
P3.81



P3.82

P3.83 Por un conducto de 5 cm de diámetro está circulando gasolina a 20 °C con V_1 = 12 m/s, cuando encuentra una sección 1 m de longitud con succión radial uniforme. Al final de esta región de succión, la velocidad media ha caído hasta V_2 = 10 m/s. Si p_1 = 120 kPa, estime p_2 si las pérdidas de fricción en la pared son despreciables.

P3.84 Por un conducto de 25 cm de diámetro está circulando aire a 20 °C y 1 atm con 15 m/s. La salida es interrumpida por un cono de 90°, como muestra la figura P3.84. Estime la fuerza del aire sobre el cono.

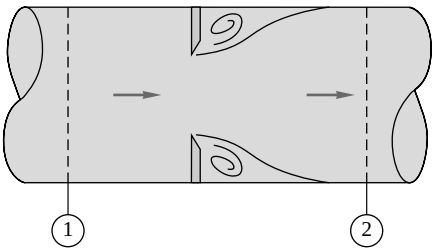


P3.84

P3.85 Los orificios de la placa de la Figura P3.85 producen una gran caída de presión en el flujo de agua a 20 °C con 500 gal/min, un diámetro del conducto D = 10 cm y del orificio d = 6 cm, $p_1 - p_2 \approx 145$ kPa. Si la fricción en la pared es despreciable, estime la fuerza del agua sobre la placa perforada.

P3.86 Añada los siguientes datos en el flujo de la bomba de agua del Problema P3.36: $p_1 = p_2 = 25$ lbf/in^2 y la distancia entre las secciones 1 y 3 es de 80 in. Si el es-

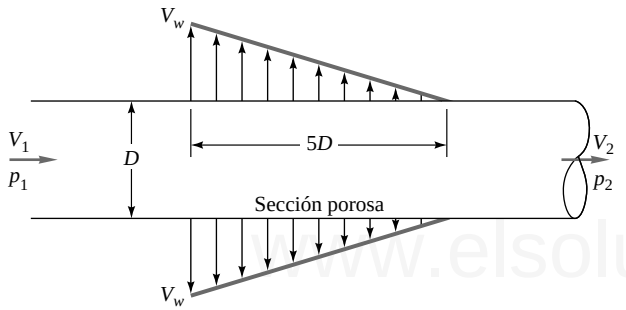
www.elsolucionario.net



P3.85

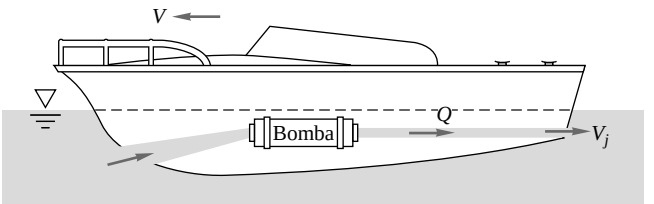
fuerzo medio de cortadura sobre la pared entre las secciones 1 y 3 es de 7 lbf/ft^2, estime la presión p_3. ¿Por qué es mayor que la p_1?

P3.87 La Figura P3.87 simula el movimiento en un *colector* en el que se extrae flujo a través de una sección porosa o perforada de la pared. Suponga un flujo incompresible, con fricción en la pared despreciable y con una pequeña succión $V_w \ll V_1$. Si se conocen (p_1, V_1, V_w, ρ, D), obtenga expresiones para (*a*) V_2 y (*b*) p_2.



P3.87

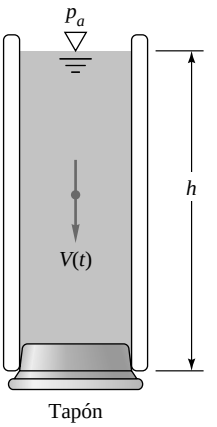
P3.88 El barco de la Figura P3.88 está propulsado mediante el chorro impulsado por una bomba que produce un caudal Q y evacua agua por la popa del barco a una velocidad V_c. Si la fuerza de resistencia del barco es $F = kV^2$, donde k es una constante, obtenga una fórmula para la velocidad estacionaria de avance del barco V.



P3.88

P3.89 Considere la Figura P3.36 como un problema general para el análisis de una bomba de eyección. Si todas las condiciones (p, ρ, V) son conocidas en las secciones 1 y 2 y si la fricción en la pared es despreciable, obtenga fórmulas para estimar (*a*) V_3 y (*b*) p_3.

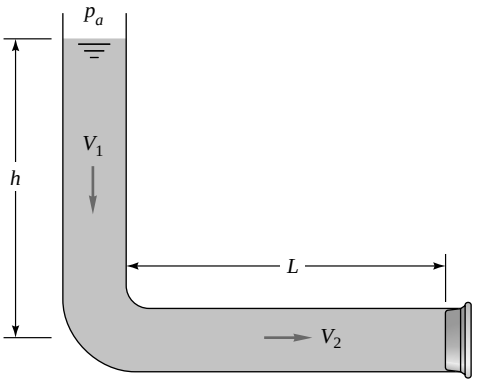
P3.90 Como se muestra en la Figura P3.90, una columna de líquido de altura h está confinada mediante un tapón en un tubo vertical de sección transversal A. En $t = 0$ se quita bruscamente el tapón, exponiendo el fondo del tubo a la presión atmosférica. Usando el análisis de volúmenes de control de la masa y la cantidad de movimiento, obtenga la ecuación diferencial del movimiento de descarga $V(t)$ del líquido. Suponga flujo incompresible, unidimensional y sin fricción.



P3.90

P3.91 Extienda el Problema P3.90 para incluir un esfuerzo medio de resistencia sobre la pared con la forma lineal (laminar) $\tau \Xi cV$, donde c es una constante. Obtenga la ecuación diferencial para dV/dt y resuélvala para $V(t)$ suponiendo, por simplicidad, que el área de la pared permanece constante.

***P3.92** Una versión más complicada del Problema P3.90 es el tubo acodado de la Figura P3.92, con una sección transversal de área A y diámetro $D \ll h, L$. Suponiendo flujo incompresible y despreciando la fricción, obtenga una ecuación diferencial para dV/dt cuando se abre el tapón. *Consejo*: combine dos volúmenes de control, uno para cada rama del tubo.



P3.92

P3.93 Extienda el Problema P3.92 para incluir un esfuerzo de resistencia medio lineal (laminar) de la forma $\tau \Xi cV$, donde c es una constante. Obtenga una ecuación diferencial para dV/dt y resuélvala para $V(t)$, suponiendo por simplicidad que el área de la pared permanece constante.

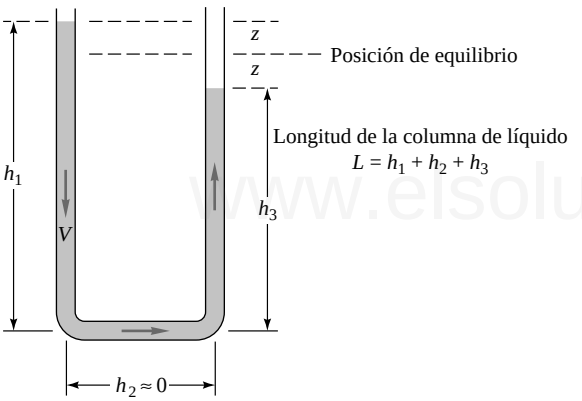
P3.94 Obtenga una solución numérica del Problema P3.93 con aceite SAE 30 a 20 °C. Tome h = 20 cm,

www.elsolucionario.net

L = 15 cm y D = 4 mm. Use la aproximación de esfuerzo laminar de la Sección 6.4: $\tau \Xi 8\mu V/D$, donde μ es la viscosidad del fluido. Tenga en cuenta la disminución del área mojada de la pared. Obtenga el tiempo requerido para vaciar (*a*) la rama vertical y (*b*) la rama horizontal.

P3.95 Obtenga una solución numérica del Problema P3.93 con aceite a 20 °C. Tome h = 20 cm, L = 15 cm y D = 4 mm. Con mercurio el flujo será turbulento, por lo que los esfuerzos en la pared se pueden estimar como en la Sección 6.6: $\tau \Xi 0{,}005\rho V^2$, donde ρ es la densidad del fluido. Tenga en cuenta la disminución del área mojada de la pared. Obtenga el tiempo requerido para vaciar (*a*) la rama vertical y (*b*) la rama horizontal. Compare con la solución si fricción.

P3.96 Extienda el Problema P3.90 al caso del movimiento de líquido en un tubo en U sin fricción cuya columna líquida se desplaza una altura Z para después soltarse, como se representa en la Figura P3.96. Desprecie la rama horizontal y combinar un análisis con volúmenes de control para las ramas derecha e izquierda para obtener una ecuación diferencial para la velocidad $V(t)$ de la columna de líquido.



P3.96

***P3.97** Extienda el Problema P3.96 para incluir un esfuerzo de resistencia medio lineal (laminar) de la forma $\tau \Xi 8\mu V/D$, donde μ es la viscosidad del fluido. Obtenga la ecuación diferencial para dV/dt y resuélvala para obtener $V(t)$, suponiendo un desplazamiento inicial $z = z_0$, $V = 0$ en $t = 0$. El resultado debe ser una oscilación amortiguada que tienda a $z = 0$.

***P3.98** Considere una extensión del Ejemplo 3.10 en la que la placa y su carro (véase Figura 3.10*a*) no estén amarrados horizontalmente y la fricción en las ruedas sea nula. Obtenga (*a*) la ecuación del movimiento de la velocidad del carro $V_c(t)$ y (*b*) una expresión para el tiempo requerido por el carro para acelerar del reposo al 90 por 100 de la velocidad del chorro (suponiendo que el chorro sigue incidiendo sobre la placa de forma horizontal). (*c*) Calcule valores numéricos para el apartado (*b*) empleando las condiciones del Ejemplo 3.10 y una masa del carro de 2 kg.

P3.99 Considere que el cohete de la Figura E3.12 comienza a z = 0, con una velocidad de salida y flujo de masa constantes y que sube verticalmente con resistencia nula. (*a*) Demuestre que, mientras se siga quemando combustible, la altura vertical $S(t)$ alcanzada está dada por

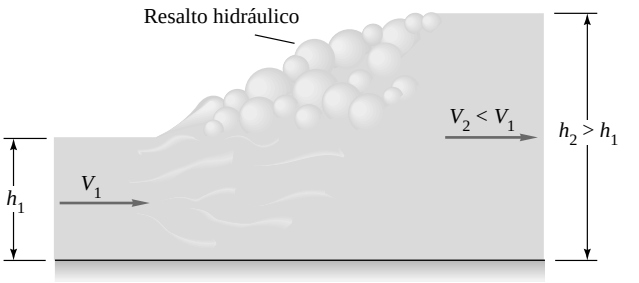
$$S = \frac{V_s M_o}{\dot{m}}[\mathfrak{N}\ln\mathfrak{N}\Phi\mathfrak{N}+1], \text{ donde } \mathfrak{N}=1-\frac{\dot{m}t}{M_o}$$

(*b*) Aplique esta expresión al caso en el que V_s = 1500 m/s y M_o = 1000 kg para encontrar la altura alcanzada después de 30 segundos, cuando la masa final del cohete es de 400 kg.

P3.100 Suponga que el cohete de combustible sólido del Problema P3.35 se instala en un misil de 70 cm de diámetro y 4 m de longitud. El sistema pesa 1800 N, que incluyen 700 N de propulsante. Desprecie la resistencia del aire. Si el misil se dispara verticalmente al nivel del mar desde el reposo, estime (*a*) su velocidad y altura cuando se ha consumido todo el combustible y (*b*) la máxima altura que alcanzará.

P3.101 Modifique el Problema P3.100 para tener en cuenta la resistencia del misil $F \Xi C\rho D^2V^2$, donde $C \Xi 0{,}02$, ρ es la densidad del aire, D es el diámetro del misil y V es la velocidad del misil. Resuelva numéricamente para (*a*) la velocidad y la altura a la que se consume el combustible y (*b*) la máxima altura alcanzada.

P3.102 Al igual que se observa en el fregadero de una cocina cuando cae sobre él el agua del grifo, un canal de agua a gran velocidad (V_1, h_1) puede «saltar» a una condición de baja velocidad y baja energía (V_2, h_2) como se observa en la Figura P3.102. La presión en las secciones 1 y 2 es aproximadamente la hidrostática y la fricción en la pared es despreciable. Use las relaciones de continuidad y cantidad de movimiento para obtener h_2 y V_2 en función de (h_1, V_1).



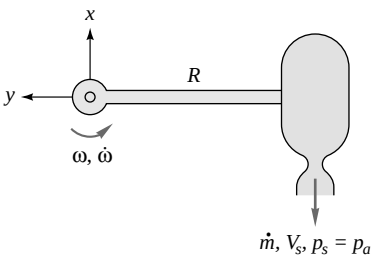
P3.102

***P3.103** Suponga que el cohete de combustible sólido del Problema P3.35 se monta sobre un carro de 1000 kg para propulsarlo sobre una larga pendiente de 15°. El motor cohete pesa 900 N, lo que incluye 500 N de propulsante. Si el carro está en reposo cuando el motor cohete se inicia y se desprecian la resistencia del aire y la fricción de las ruedas, estime la máxima distancia que el carro podrá viajar por la colina.

P3.104 Un cohete está sujeto a una barra horizontal articulada en el origen, como se muestra en la Figura P3.104. Su masa inicial es M_0, y las propiedades en la salida son $\dot{m}$

www.elsolucionario.net

y V_s relativa al cohete. Obtenga la ecuación diferencial para el movimiento del cohete y resuélvala para la velocidad angular $\omega(t)$ de la barra. Desprecie el efecto de la gravedad, la resistencia del aire y la masa de la barra.

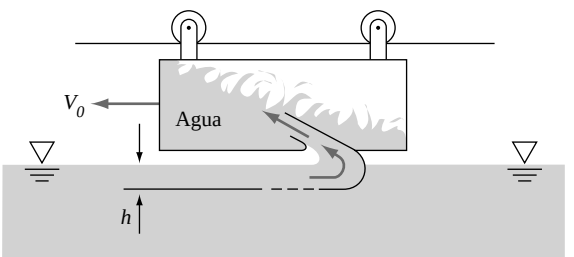


P3.104

P3.105 Extienda el Problema P3.104 al caso en el que el cohete tiene una fuerza de resistencia del aire lineal $F = cV$, donde c es una constante. Suponga que el cohete no se apaga, resuelva para $\omega(t)$ y encuentre la velocidad angular *terminal*, es decir, la condición final para la que la aceleración angular es nula. Aplique el resultado al caso $M_0 = 6$ kg, $R = 3$ m, $\dot{m} = 0{,}05$ kg/s, $V_s = 1100$ m/s y $c = 0{,}075$ N · s/m para encontrar la velocidad angular tras 12 s de combustión.

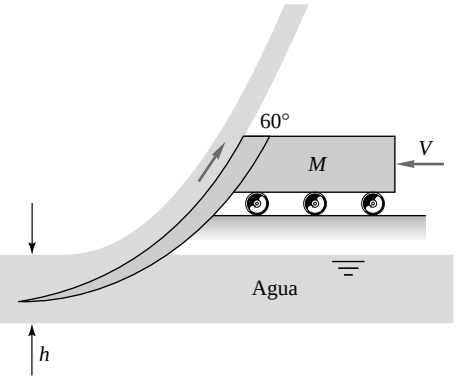
P3.106 Extienda el Problema P3.104 al caso en el que el cohete tiene una fuerza de resistencia del aire cuadrática $F = kV^2$, donde k es una constante. Suponga que el cohete no se apaga, resuelva para $\omega(t)$ y encuentre la velocidad angular *terminal*, es decir, la condición final para la que la aceleración angular es nula. Aplique el resultado al caso $M_0 = 6$ kg, $R = 3$ m, $\dot{m} = 0{,}05$ kg/s, $V_s = 1100$ m/s y $k = 0{,}0011$ N · s/m para encontrar la velocidad angular tras 12 s de combustión.

P3.107 El carro de la Figura P3.107 se desplaza con una velocidad constante $V_0 = 12$ m/s y toma agua con una pala de 8 cm de ancho que entra $h = 2{,}5$ cm en un estanque. Desprecie la resistencia del aire y la fricción de las ruedas. Estime la fuerza requerida para mantener el carro en movimiento.



P3.107

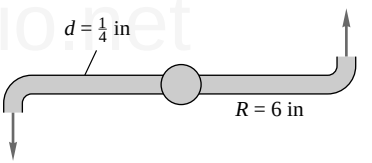
***P3.108** El trineo de la Figura P3.108 está propulsado por un cohete, tiene una masa M y se decelera mediante una pala de anchura b perpendicular al papel, que se sumerge en el agua hasta una profundidad h, creando un chorro hacia arriba con un ángulo de 60°. El empuje del cohete es T hacia la izquierda. Si la velocidad inicial es V_0 y se desprecian la resistencia del aire y la fricción de las ruedas, obtenga una expresión para la velocidad del trineo $V(t)$ cuando (a) $T = 0$ y (b) $T \times 0$.



P3.108

P3.109 Aplique el Problema P3.108 al siguiente caso: $M_{total} = 900$ kg, $b = 60$ cm, $h = 2$ cm y $V_0 = 120$ m/s, con el cohete del Problema P3.35 en funcionamiento. Estime V tras 3 s.

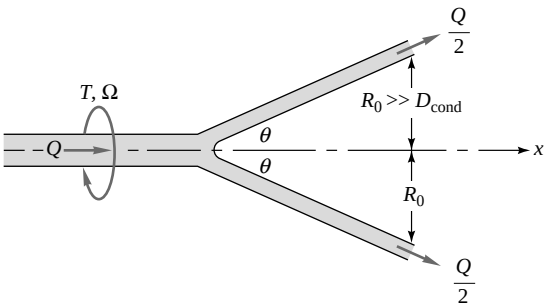
P3.110 El aspersor de la Figura P3.110 tiene un caudal de agua de 4,0 gal/min introducida verticalmente por su centro. Estime (a) el momento resistente que se requiere para evitar que los brazos giren y (b) la velocidad de rotación en revoluciones por minuto si no hay momento de retención.



P3.110

P3.111 Encuentre el momento que se produce en la abrazadera 1 del Problema P3.60 si el punto de salida 2 está 1,2 m por debajo del centro de la abrazadera.

P3.112 La unión en «Y» de la Figura P3.112 divide el flujo del conducto en dos de igual caudal $Q/2$, que salen, como se muestra, a una distancia R_0 del eje. Desprecie la gravedad y la fricción. Obtenga una expresión para el momento T respecto al eje x requerido para mantener el sistema girando con velocidad angular Ω.

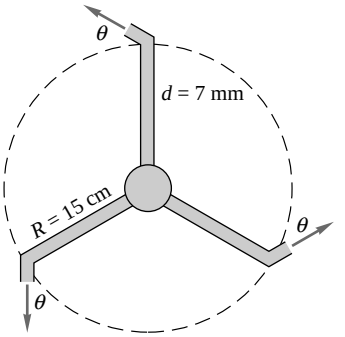


P3.112

www.elsolucionario.net

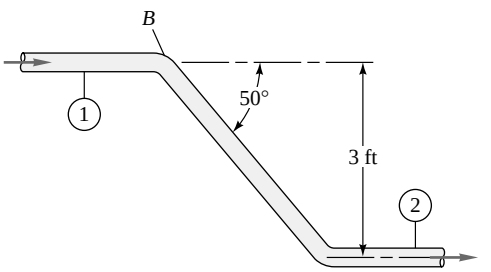
P3.113 Modifique el Ejemplo 3.14 de forma que el brazo comienza en reposo y acelera hasta su velocidad angular final. El momento de inercia del brazo alrededor de O es I_O. Despreciando la resistencia del aire, encuentre $d\omega/dt$ e intégrela para determinar la velocidad angular $\omega(t)$, suponiendo que $\omega = 0$ en $t = 0$.

P3.114 El aspersor de la Figura P3.114 recibe agua a 20 °C a través de su centro a 2,7 m^3/h. Si la fricción del cuello es despreciable, ¿cuál es la velocidad de rotación estacionaria en revoluciones por minuto para (*a*) $\theta = 0°$ y (*b*) $\theta = 40°$?



P3.114

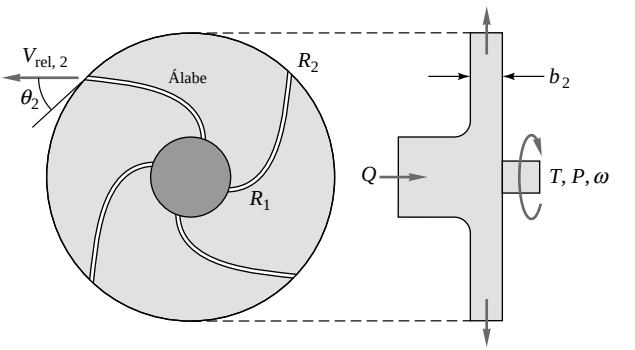
P3.115 Por el conducto doblemente acodado de 0,75 in de diámetro de la Figura P3.115 circula agua a 20 °C con un caudal de 30 gal/min. Las presiones son $p_1 = 30$ lbf/in^2 y $p_2 = 24$ lbf/in^2. Calcule el momento T en el punto B necesario para mantener el conducto sin rotación.



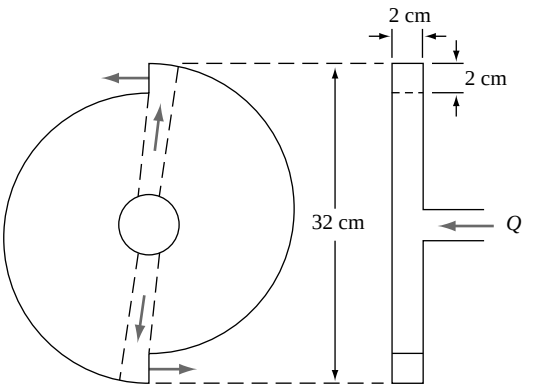
P3.115

P3.116 La bomba centrífuga de la Figura P3.116 tiene un caudal Q que abandona el rotor con un ángulo θ_2 relativo a los álabes, según se muestra. El fluido entra axialmente en la sección 1. Suponiendo un flujo incompresible y una velocidad angular Ω del rotor, obtenga una expresión para la potencia P requerida para moverlo.

P3.117 Una turbomáquina simple está construida mediante un disco con dos conductos internos que salen tangencialmente a través de dos orificios cuadrados, como se muestra en la Figura P3.117. Un flujo de agua a 20 °C entra perpendicularmente por el centro del disco, según se representa. El disco debe mover a 250 rpm un pequeño dispositivo mediante un par de 1,5 N · m. ¿Cuál es el gasto másico de agua necesario en kilos por segundo?



P3.116



P3.117

P3.118 Invierta el flujo de la Figura P3.116 de forma que el sistema funcione como una *turbina* de flujo radial. Suponiendo que el flujo que sale por la sección 1 no tiene velocidad tangencial, obtenga una expresión para la potencia P extraída por la turbina.

P3.119 Revise la cascada de álabes de turbina del Problema P3.78 y obtenga una fórmula para la potencia producida P usando el teorema del *momento cinético* de la Ecuación (3.55).

P3.120 El rotor de una bomba centrífuga proporciona 4000 gal/min de agua a 20 °C con una velocidad de rotación del eje de 1750 rpm. Desprecie las pérdidas. Si $r_1 = 6$ in, $r_2 = 14$ in, $b_1 = b_2 = 1{,}75$ in, $V_{t1} = 10$ ft/s y $V_{t2} = 110$ ft/s, calcule las velocidades absolutas (*a*) V_1, (*b*) V_2 y (*c*) la potencia requerida. (*d*) Compare con la potencia ideal requerida.

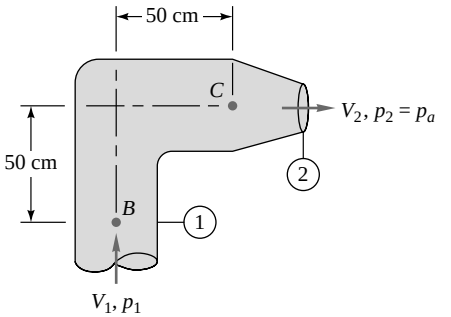
P3.121 El tubo acodado de la Figura P3.121 tiene $D_1 = 27$ cm y $D_2 = 13$ cm. Por él circulan 4000 gal/min de agua a 20 °C con $p_1 = 194$ kPa (manométrica). Calcule el momento requerido en el punto B para mantener el tubo quieto.

***P3.122** Extienda el Problema P3.46 al cálculo del centro de presiones L de la fuerza normal F_n, según se representa en la Figura P3.122. (En el centro de presiones no se requiere momento para mantener la placa estacionaria). Desprecie la fricción. Exprese los resultados en función del espesor de la capa h_1 y del ángulo θ entre la placa y el chorro incidente 1.

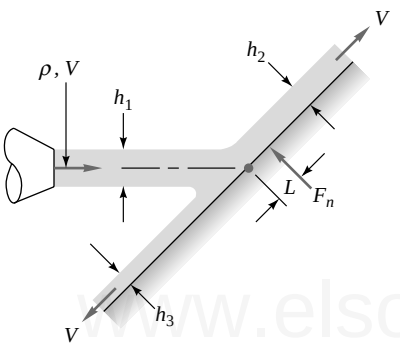
P3.123 La turbina de agua de la Figura P3.123 está siendo impulsada a 200 rpm por un chorro de agua a 20 °C

www.elsolucionario.net

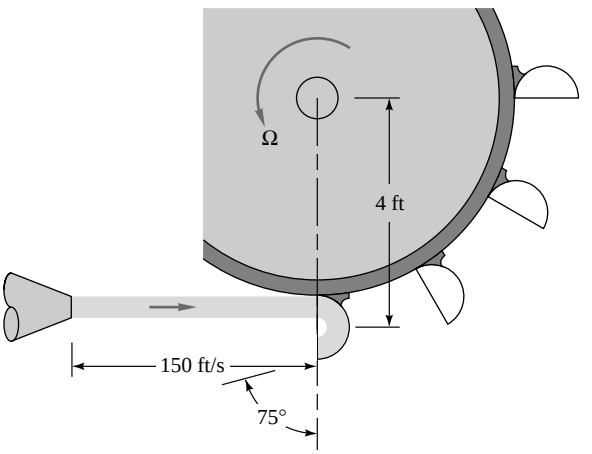
con 150 ft/s. El diámetro del chorro es 2,5 in. Suponiendo que no hay pérdidas, ¿cuál es la potencia producida por la turbina? ¿A qué velocidad Ω en revoluciones por minuto se producirá potencia máxima? Suponga que hay muchas paletas en la turbina.



P3.121

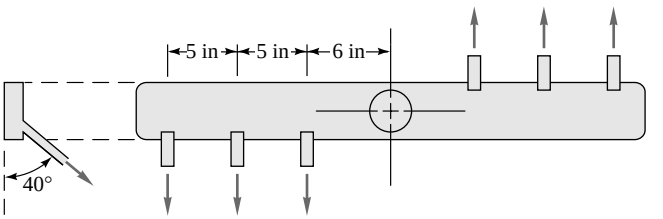


P3.122



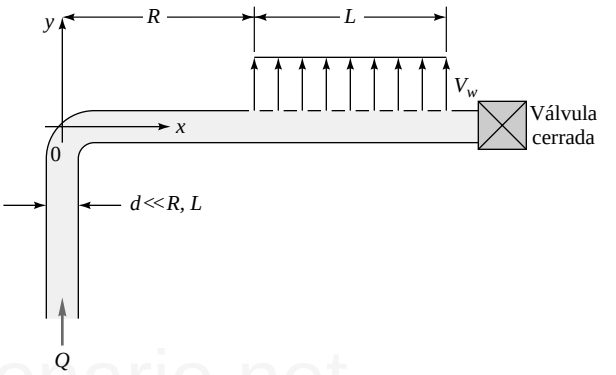
P3.123

P3.124 El brazo rotatorio de un lavavajillas proporciona agua a 60 °C a seis boquillas, como en la Figura P3.124. El caudal total es de 3,0 gal/min. Cada boquilla tiene un diámetro de 3/16 in. Si el flujo es igual en todas las boquillas y se desprecia la fricción, estime la velocidad de rotación estacionaria en revoluciones por minuto.



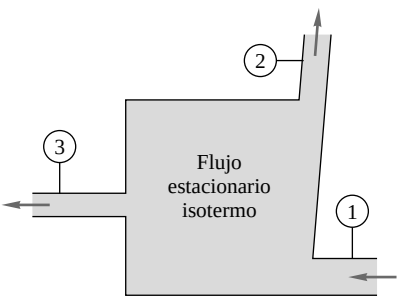
P3.124

***P3.125** Un líquido de densidad ρ fluye por un codo de 90° como se muestra en la Figura P3.125 y sale verticalmente a través de una sección uniformemente porosa de longitud L. Despreciando el peso de líquido y conducto, obtenga una expresión del par M con respecto al punto O que se requiere para mantener el conducto estacionario.



P3.125

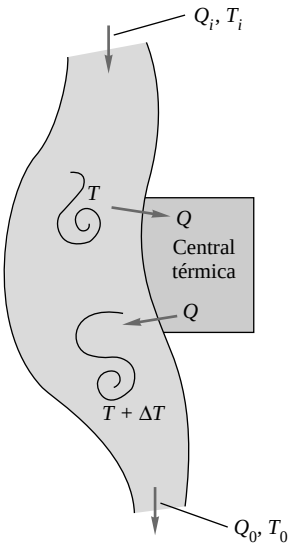
P3.126 A través del dispositivo de la Figura P3.126 fluye agua a 20 °C. Los efectos de transferencia de calor, gravedad y temperatura son despreciables. Son conocidos D_1 = 9 cm, Q_1 = 220 m³/h, p_1 = 150 kPa, D_2 = 7 cm, Q_2 = 100 m³/h, p_2 = 225 kPa, D_3 = 4 cm y p_3 = 265 kPa. Calcule el trabajo motor realizado por este dispositivo y su dirección.



P3.126

P3.127 Una central térmica situada en un río, según se muestra en la Figura P3.127, debe eliminar 55 MW de calor a la corriente. Las condiciones aguas arriba del río son Q_e = 2,5 m³/s y T_e = 18 °C. El río tiene 45 m de ancho y 2,7 m de profundidad. Si se desprecian las pérdidas de calor a la atmósfera y al terreno, estime las condiciones del río aguas abajo de la central (Q_0, T_0).

www.elsolucionario.net

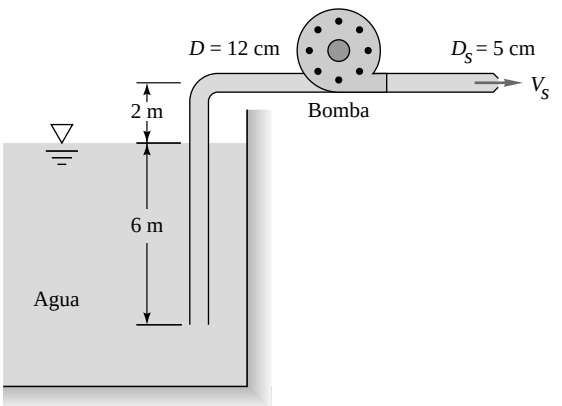


P3.127

P3.128 Si para las condiciones del Problema P3.127, la planta de potencia no puede calentar el agua a más de 12 °C, ¿cuál será el caudal mínimo Q en metros cúbicos por segundo a través del cambiador de calor? ¿Cómo afectará el valor de Q a las condiciones aguas abajo (Q_0, T_0)?

P3.129 La cascada de Multnomah en el barranco del río Columbia tiene una caída de 543 ft. Estime el cambio de temperatura en el agua en °F causada por la caída, empleando la ecuación de la energía de un flujo estacionario.

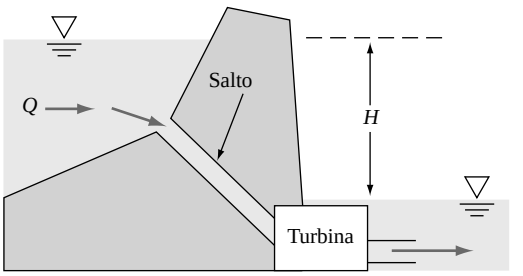
P3.130 Cuando la bomba de la Figura P3.130 proporciona 220 m³/h de agua a 20 °C desde el depósito, la pérdida total de carga por fricción es de 5 m. El flujo se descarga a la atmósfera a través de una tobera. Estime la potencia en kilovatios que la bomba proporciona al agua.



P3.130

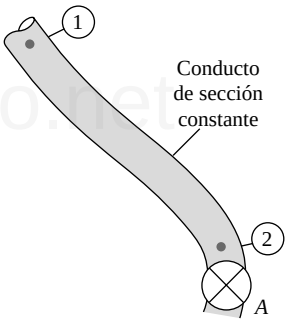
P3.131 Cuando la bomba de la Figura P3.130 proporciona una potencia de 25 kW al agua, la pérdida de carga por fricción es de 4 m. Estime (*a*) la velocidad de salida V_s y (*b*) el caudal Q.

P3.132 Considere una turbina que extrae energía del salto hidráulico de la presa de la Figura P3.132. Para un flujo turbulento en un conducto (Capítulo 6) la pérdida de carga por fricción es de aproximadamente $h_f = CQ^2$, donde la constante C depende de las dimensiones del salto y de las propiedades del agua. Demuestre que, para una geometría dada y un caudal Q variable, la máxima potencia que puede producir la turbina es $P_{máx} = 2\rho gHQ/3$ y ocurre cuando el caudal es $Q = \sqrt{(H/(3C))}$.



P3.132

P3.133 El conducto de la Figura P3.133 está lleno de agua a 20 °C. Cuando la válvula A está cerrada, $p_1 - p_2 = 75$ kPa. Cuando la válvula está abierta y el agua fluye a 500 m³/h, $p_1 - p_2 = 160$ kPa. En ese caso, ¿cuál es la pérdida por fricción entre 1 y 2, expresada en metros?



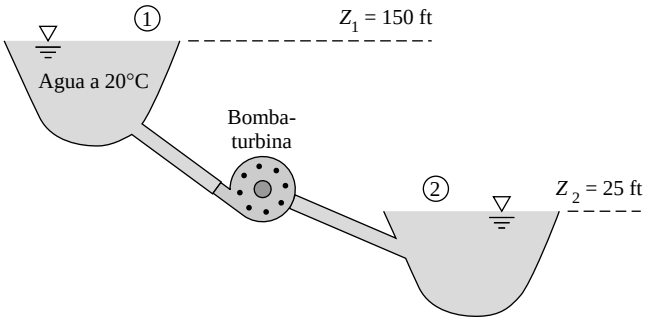
P3.133

P3.134 Un conducto de 36 in de diámetro transporta aceite (S = 0,89) con un caudal de 1 millón de barriles al día (bbl/día) (1 bbl = 42 galones U.S.). La pérdida de carga por fricción es de 13 ft/1000 ft de conducto. Se planea colocar una estación de bombeo cada 10 millas. Estime la potencia que cada bomba debe proporcionar al aceite.

P3.135 El sistema *bomba-turbina* de la Figura P3.135 admite agua del depósito superior para proporcionar energía a la ciudad. Por la noche bombea agua del depósito inferior al superior para reestablecer la situación anterior. Para un caudal de diseño de 15.000 gal/min en cada dirección, la pérdida de carga por fricción es de 17 ft. Estime la potencia en kilovatios (*a*) extraída por la turbina y (*b*) requerida por la bomba.

P3.136 A través de un conducto de 8 cm de diámetro se transporta agua a 20 °C de un depósito a otro. La superficie del depósito inferior está a una altura $z_2 = 80$ m. Las pérdidas por fricción están representadas por la fórmula $h_{pérd} \Xi 17{,}5(V^2/2g)$, donde V es la velocidad me-

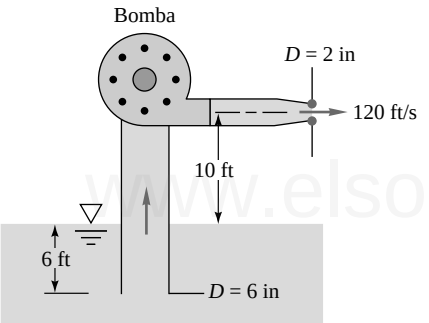
www.elsolucionario.net



P3.135

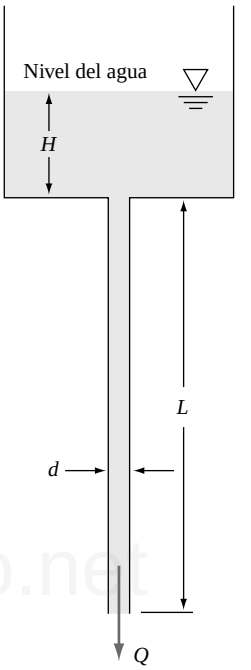
dia en el conducto. Si el caudal estacionario en el conducto es de 500 galones por minuto, estime la altura a la que se encuentra la superficie del depósito superior.

P3.137 Una bomba de bomberos saca agua del mar (S = 1,025) mediante un tubo sumergido y la descarga a través de una tobera, según se representa en la Figura P3.137. La pérdida total de carga es de 6,5 ft. Si el rendimiento de la bomba es del 75 por 100, ¿a qué potencia se requiere que funcione la bomba?



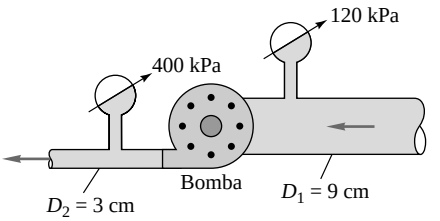
P3.137

***P3.138** Los estudiantes del laboratorio de la Universidad de Penn utilizan un dispositivo muy simple para medir la viscosidad del agua como función de la temperatura. El viscosímetro, representado en la Figura P3.138, está formado por un depósito, un tubo capilar vertical largo, un cilindro graduado, un termómetro y un cronómetro. Debido al pequeño diámetro del tubo el flujo en su interior permanece laminar, y debido a su gran longitud las pérdidas en la entrada son despreciables. Como se demostrará en el Capítulo 6, la pérdida de carga debido al flujo laminar en un conducto está dada por $h_{f,\,\text{laminar}} = (32\mu LV)/(\rho g d^2)$, donde V es la velocidad media a través del conducto. (*a*) En un experimento dado se conocen el diámetro d, la longitud L y la altura del nivel de agua H, y el caudal Q se mide mediante el cronómetro y el cilindro graduado. La temperatura del agua también se está midiendo. La densidad del agua a esa temperatura se obtiene pesando el volumen de agua conocido. Escriba una expresión para la viscosidad del agua como función de esas variables. (*b*) Los datos tomados de un experimento real son: T = 16,5 °C, ρ = 998,7 kg/m^3, d = 0,041 in, Q = 0,310 mL/s, L = 36,1 in y H = 0,153 m. Basándose en estos datos experimentales, calcule la viscosidad del agua en kilos por metro y segundo. (*c*) Compare el resultado experimental con los valores publicados para μ a esa temperatura y calcule el porcentaje de error. (*d*) Calcule el porcentaje de error en el cálculo de μ que ocurriría si un estudiante olvidara incluir el factor de corrección por el flujo de energía cinética en el apartado (*b*) (compare los resultados con y sin factor de corrección). Explique la importancia (o su carencia) del factor de corrección por el flujo de energía cinética en un problema como este.



P3.138

P3.139 La bomba horizontal de la Figura P3.139 descarga agua a 20 °C con 57 m^3/h. Despreciando las pérdidas, ¿qué potencia en kilovatios proporciona la bomba al agua?



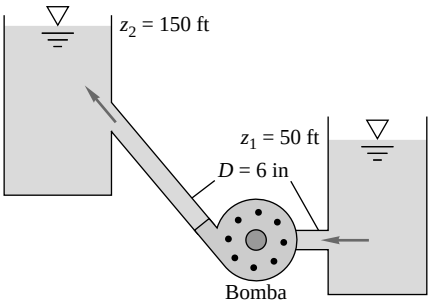
P3.139

P3.140 Una corriente de vapor entra en una turbina horizontal a una presión absoluta de 350 lbf/in^2, 580 °C y 12 ft/s y descarga a 110 ft/s y 25 °C en condiciones saturadas. El gasto másico es de 2,5 lbm/s y las pérdidas de calor 7 Btu/lb. Si la pérdida de carga se considera despreciable, ¿qué potencia proporciona la turbina?

P3.141 Desde el depósito inferior de la Figura P3.141 se bombea agua a 20 °C al depósito superior, con un caudal de 1500 gal/min. Las pérdidas en el conducto por fricción son aproximadamente $h_f \cong 27V^2/(2g)$, donde V es

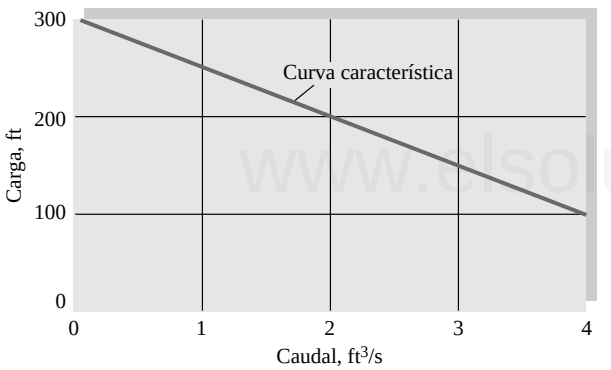
www.elsolucionario.net

la velocidad media en el conducto. Si el rendimiento de la bomba es del 75 por 100, ¿qué potencia se necesita para moverla?



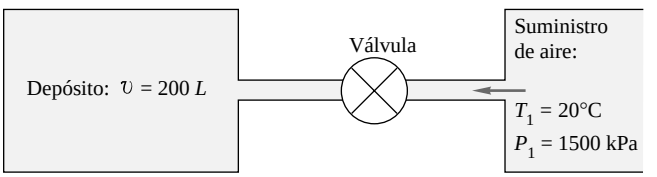
P3.141

P3.142 Una bomba típica tiene una carga que, para una velocidad de rotación dada, varía con el caudal, dando una curva característica como la de la Figura P3.142. Suponiendo que el rendimiento de la bomba es del 75 por 100 y que se emplea en el sistema del Problema 3.141, estime (*a*) el caudal en galones por minuto y (*b*) la potencia necesaria para mover la bomba.



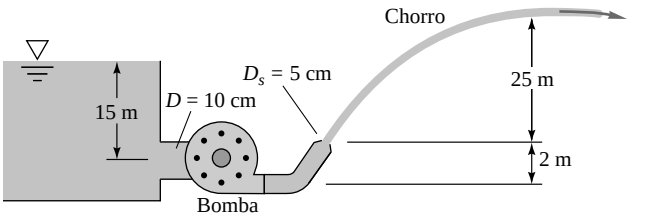
P3.142

P3.143 El depósito aislado de la Figura P3.143 tiene que llenarse mediante el suministro de aire a alta presión. Las condiciones iniciales del depósito son T = 20 °C y p = 200 kPa. Cuando la válvula está abierta, el gasto másico inicial en el depósito es de 0,013 kg/s. Suponiendo un gas ideal, estime el ritmo inicial de caída de la temperatura del aire del depósito.



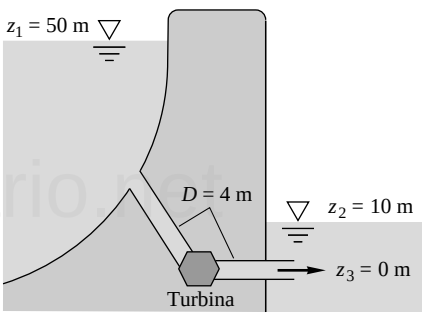
P3.143

P3.144 La bomba de la Figura P3.144 crea un chorro de agua a 20 °C orientado de forma que viaje la máxima distancia horizontal posible. La pérdida de carga en el sistema por fricción es de 6,5 m. El chorro se puede aproximar por la trayectoria de las partículas sin fricción. ¿Qué potencia debe proporcionar la bomba?



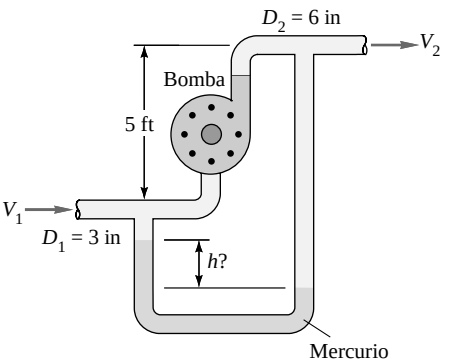
P3.144

P3.145 La turbina de la Figura P3.145 utiliza el flujo del río canalizado bajo la presa, según se muestra. Las pérdidas del sistema por fricción son $h_f = 3{,}5V^2/(2g)$, donde V es la velocidad media en el conducto de entrada. ¿Para qué caudal en metros cúbicos por segundo se extraerá una potencia de 25 MW? ¿Cuál de las *dos* soluciones tiene un mejor «rendimiento de conversión»?



P3.145

P3.146 La bomba de la Figura P3.146 mueve queroseno a 20 °C a 2,3 ft³/s. La pérdida de carga entre 1 y 2 es de 8 ft y la bomba proporciona al flujo 8 hp de potencia. ¿Cuál sería la lectura h del manómetro en pies?



P3.146

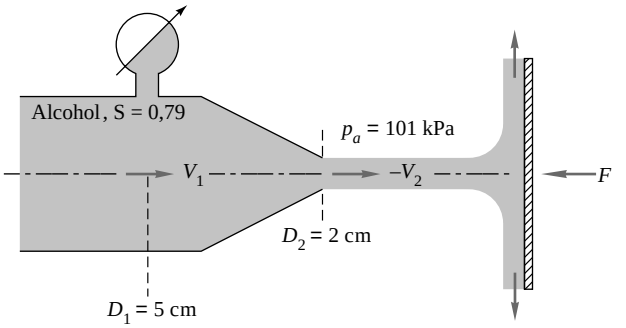
P3.147 Repita el Problema P3.49 suponiendo que p_1 es desconocida y empleando la ecuación de Bernoulli sin pérdidas. Calcule la nueva fuerza en los tornillos con esta

www.elsolucionario.net

hipótesis. ¿Cuál es la pérdida de carga entre 1 y 2 con los datos del Problema P3.49?

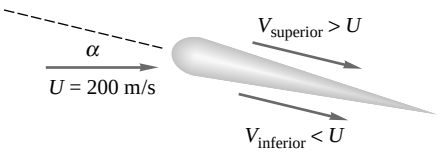
P3.148 Analice de nuevo el Problema P3.54 para estimar la lectura h del manómetro si se considera válida la ecuación de Bernoulli sin pérdidas. Para la lectura $h \Xi 58$ cm del Problema P3.54, ¿cuál es la pérdida de carga entre las secciones 1 y 2?

P3.149 Un chorro de alcohol incide sobre la placa vertical de la Figura P3.149. Se necesita una fuerza $F \Xi 425$ N para mantener la placa estacionaria. Suponiendo que no hay pérdidas en la tobera, estime (*a*) el flujo másico de alcohol y (*b*) la presión absoluta en la sección 1.



P3.149

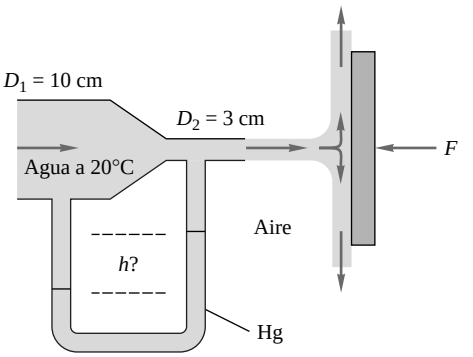
P3.150 Un perfil en ángulo de ataque α, como el de la Figura P3.150, produce sustentación por efecto Bernoulli, ya que la superficie inferior reduce la velocidad del flujo (alta presión) y la superior la aumenta (baja presión). Si el perfil tiene una longitud de 1,5 m y una anchura de 18 m perpendicular al papel y el aire ambiente corresponde a una atmósfera estándar a 5000 m, estime la sustentación total si las velocidades medias en las superficies superior e inferior son 215 m/s y 185 m/s, respectivamente. Desprecie el efecto de la gravedad. *Nota*: en este caso el ángulo α es aproximadamente de 3°.



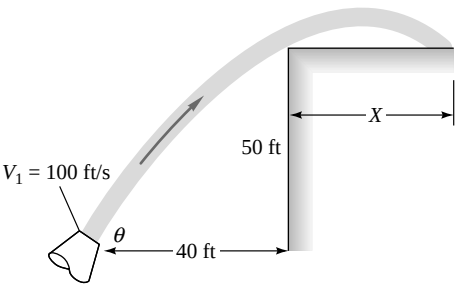
P3.150

P3.151 En la Figura P3.151 se presenta el flujo de aire a través de una tobera circular por la que sale en forma de chorro para incidir sobre una placa. La fuerza necesaria para mantener quieta la placa es de 70 N. Suponiendo un flujo estacionario, unidimensional y sin fricción, estime (*a*) las velocidades en las secciones (1) y (2) y (*b*) la lectura h del manómetro de mercurio.

P3.152 El chorro libre de líquido de la Figura P3.152 está a una presión ambiente constante y tiene unas pérdidas muy pequeñas, por lo que la ecuación de Bernoulli $z + V^2/(2g)$ es constante a lo largo del chorro. Para la boquilla de la figura calcule los valores (*a*) máximo y (*b*) mínimo de θ para los que el chorro de agua salvará la esquina del edificio. ¿En qué caso la velocidad del chorro será mayor cuando impacta sobre el tejado del edificio?

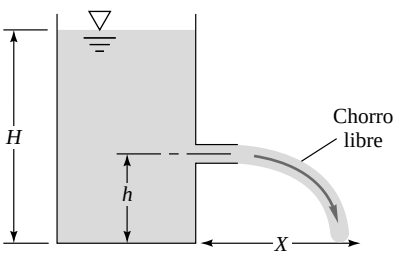


P3.151



P3.152

P3.153 Use la ecuación de Bernoulli para obtener una fórmula de la distancia X a la que el chorro del depósito de la Figura P3.153 llega al suelo, como función de h y H. ¿Para qué cociente h/H es máximo X? Esquematice las tres trayectorias correspondientes a h/H = 0,4, 0,5 y 0,6.

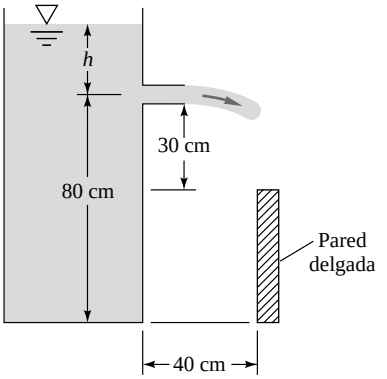


P3.153

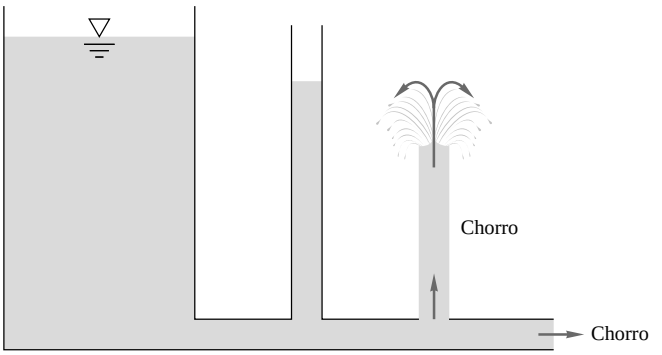
P3.154 La boquilla de salida de la Figura P3.154 es horizontal. Si las pérdidas son despreciables, ¿cuál debe ser el nivel de agua h en centímetros para el que el chorro salve la pared?

P3.155 El tratado de hidrodinámica de Bernoulli, de 1738, contiene muchos esquemas excelentes de flujos relacionados con su relación sin fricción. Uno de ellos, representado en la Figura P3.155, parece físicamente erróneo. ¿Podría explicar dónde puede estar el error?

www.elsolucionario.net



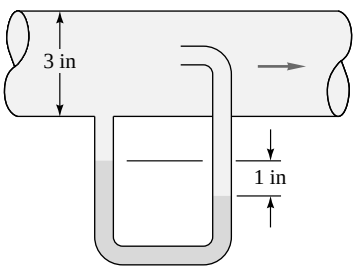
P3.154



P3.155

P3.156 Un ultraligero vuela a 75 mi/h en atmósfera estándar al nivel del mar. Un transductor de presión diferencial conectado entre el morro y un lado del ultraligero mide 950 Pa. Estime (*a*) la presión absoluta en el morro y (*b*) la velocidad del aire en las proximidades del lateral del ultraligero.

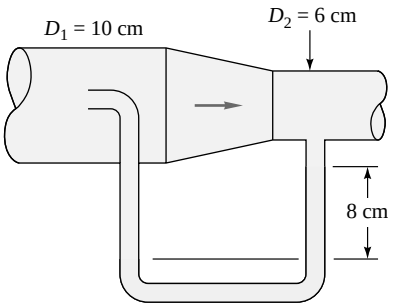
P3.157 El fluido de trabajo del manómetro de la Figura P3.157 es mercurio. Estime el gasto volumétrico en el tubo si el fluido que circula por él es (*a*) gasolina y (*b*) nitrógeno, a 20 °C y 1 atm.



P3.157

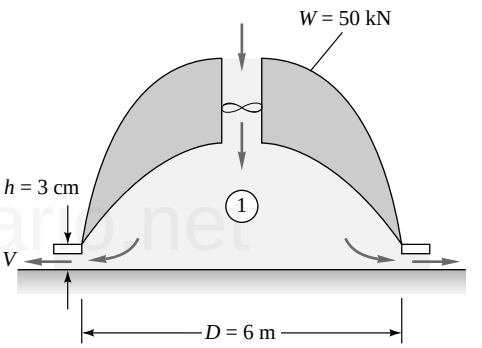
P3.158 El fluido de la Figura P3.158 es CO_2 a 20 °C. Desprecie las pérdidas. Si p_1 = 170 kPa y el fluido del manómetro es aceite rojo Meriam (S = 0,827), estime (*a*) p_2 y (*b*) el caudal de gas en metros cúbicos por hora.

P3.159 Nuestra manguera de 0,625 in de diámetro es demasiado corta y su boquilla de salida de 0,375 in de diámetro se encuentra a 125 ft de distancia del jardín. Si se desprecian las pérdidas, ¿cuál es la mínima presión manométrica necesaria dentro de la manguera para alcanzar el jardín?



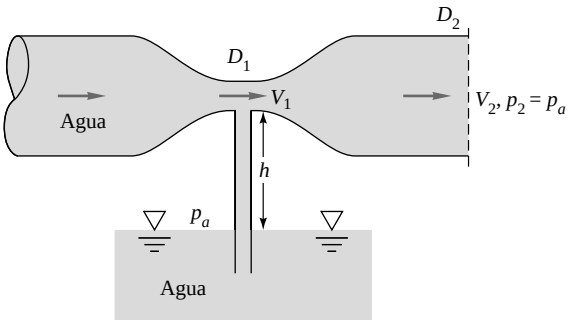
P3.158

P3.160 El hovercraft de la Figura P3.160 toma aire estándar al nivel del mar a través de un ventilador y lo descarga a gran velocidad a través de unos faldones anulares que dejan un hueco de 3 cm con el suelo. Si el peso del vehículo es de 50 kN, estime (*a*) el caudal de aire requerido y (*b*) la potencia del ventilador en kilovatios.



P3.160

P3.161 El estrechamiento de un conducto, denominado *venturi*, produce baja presión en la garganta, lo que le permite aspirar fluido de un depósito, como se muestra en la Figura P3.161. Mediante la ecuación de Bernoulli, obtenga una expresión para la mínima velocidad V_1 necesaria para llevar el fluido a la garganta.



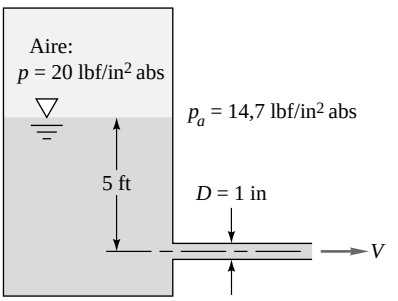
P3.161

P3.162 Supongamos que usted está diseñando una mesa de hockey sobre aire. La mesa tiene unas dimensiones de

www.elsolucionario.net

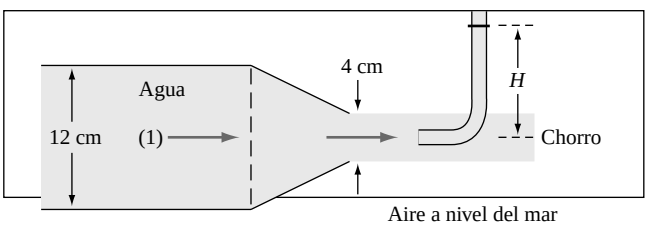
$3{,}0 \times 6{,}0$ ft y orificios de 1/16 in de diámetro equiespaciados 1 in, con un número total de 2592. Se estima que la velocidad necesaria en los chorros es de 50 ft/s. Hay que dimensionar el ventilador necesario para cumplir con los requisitos antes mencionados. Estime el caudal (en ft^3/min) y el salto de presiones (en lb/in^2) que debe proporcionar el ventilador. *Consejo*: suponga que el aire está en reposo en un gran volumen debajo de la mesa y desprecie las pérdidas por rozamiento.

P3.163 El líquido de la Figura P3.163 es keroseno a 20 °C. Estime el caudal del depósito en el caso de que (*a*) no haya pérdidas y (*b*) la pérdidas en el conducto sean $h_f \Xi 4{,}5V^2/(2g)$.



P3.163

P3.164 En la Figura P3.164 se representa un chorro de agua a 20 °C que descarga en aire al nivel del mar a través de una tobera, incidiendo sobre un tubo de remanso. Si la presión en el centro de la sección 1 es de 110 kPa y las pérdidas son despreciables, estime (*a*) el flujo másico en kg/s y (*b*) la altura *H* del fluido en el tubo de remanso.



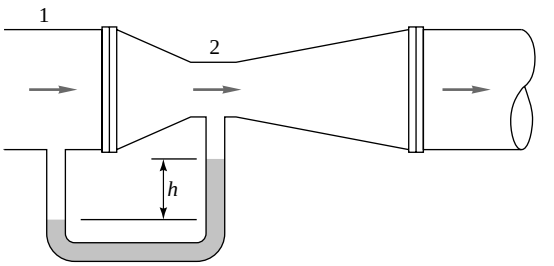
P3.164

P3.165 El *venturi calibrado* de la Figura P3.165 es un estrechamiento diseñado cuidadosamente de forma que su diferencia de presiones es una medida del caudal en el conducto. Empleando la ecuación de Bernoulli para un flujo estacionario incompresible sin pérdidas, demuestre que el caudal *Q* está relacionado con la altura manométrica *h* a través de

$$Q = \frac{A_2}{\sqrt{1 \Phi (D_2/D_1)^4}} \sqrt{\frac{2gh(\Leftarrow_M \Phi \Leftrightarrow)}{\Leftarrow}}$$

donde ρ_M es la densidad del fluido del manómetro.

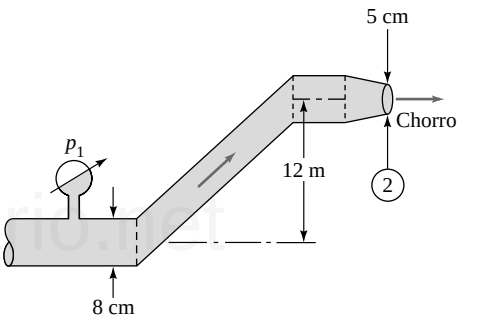
P3.166 Un túnel de viento de circuito abierto toma aire estándar a nivel del mar y lo acelera a través de una contracción en una sección de ensayos de 1 m por 1 m. Un



P3.165

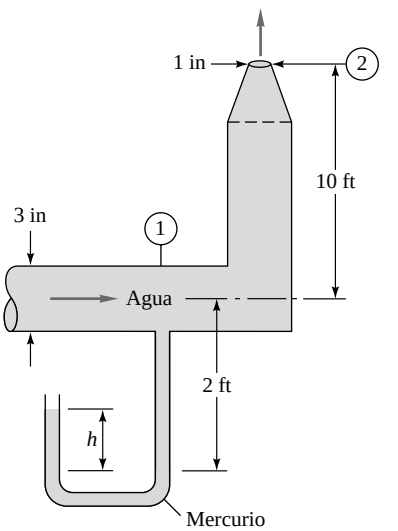
transductor diferencial instalado en la pared de la sección de ensayos mide una diferencia de presiones entre el interior y el exterior de la pared de 45 mm de agua. Estime (*a*) la velocidad en la sección de ensayos en millas por hora y (*b*) la presión absoluta en el morro de un pequeño modelo montado en la sección de ensayos.

P3.167 El fluido de la Figura P3.167 es gasolina a 20 °C que fluye con un caudal de peso de 120 N/s. Suponiendo que no hay pérdidas, estime la presión manométrica en la sección 1.



P3.167

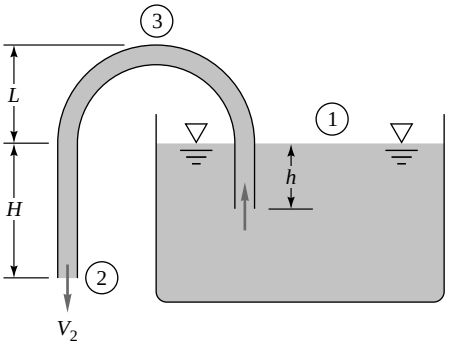
P3.168 Los dos fluidos de la Figura P3.168 están a 20 °C. Si $V_1 = 1{,}7$ ft/s y se desprecian las pérdidas, ¿cuál debería ser la altura *h* en ft?



P3.168

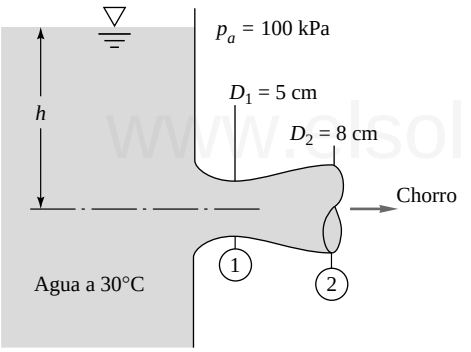
www.elsolucionario.net

P3.169 El *sifón* de la Figura P3.169 funciona continuamente mientras haya fluido en el depósito, una vez se le ha proporcionado la succión suficiente. Empleando la ecuación de Bernoulli sin pérdidas, demuestre que (*a*) la velocidad de salida V_2 sólo depende de la gravedad y la altura H y (*b*) la presión mínima (de vacío) se produce en el punto 3 y depende de la distancia $L + H$.



P3.169

P3.170 Si se desprecian las pérdidas en el flujo de la Figura P3.170, ¿cuál es el nivel del agua h en el que la garganta de la tobera comenzará a cavitar?

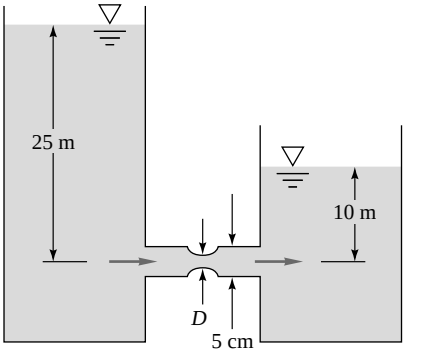


P3.170

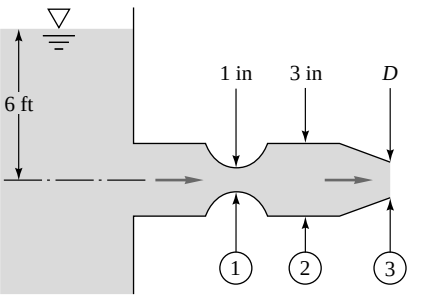
***P3.171** Estime el caudal de agua a 40 °C que existe en el conducto de la Figura P3.171, suponiendo que no existen pérdidas. Explique entonces dónde está el error en la hipótesis anterior. Si el caudal real es $Q = 40$ m³/h, calcule (*a*) la pérdida de carga en pies y (*b*) el diámetro del estrechamiento D para el que se produce cavitación, suponiendo que a cada lado de la garganta se producen pérdidas de carga iguales y que las pérdidas en el estrechamiento son despreciables.

P3.172 El flujo de agua a 35 °C de la Figura P3.172 descarga en atmósfera estándar a nivel del mar. Si se desprecian las pérdidas, ¿cuál es el diámetro D para el que comenzará a producirse la cavitación? Para evitar esta cavitación, ¿se debería incrementar o disminuir D con respecto a este valor crítico?

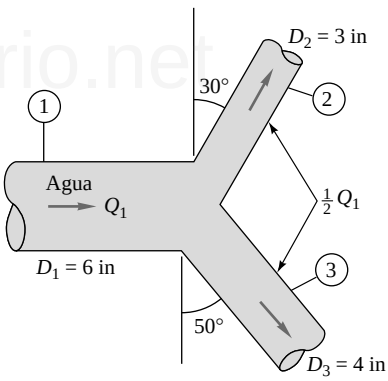
P3.173 La «Y» horizontal de la Figura P3.173 divide el flujo de agua a 20 °C en dos caudales iguales. Si $Q_1 = 5$ ft³/s, $p_1 = 25$ lbf/in² (manométrica) y se desprecian las pérdidas, estime (*a*) p_2, (*b*) p_3 y (*c*) y el vector fuerza necesario para sujetar la Y.



P3.171

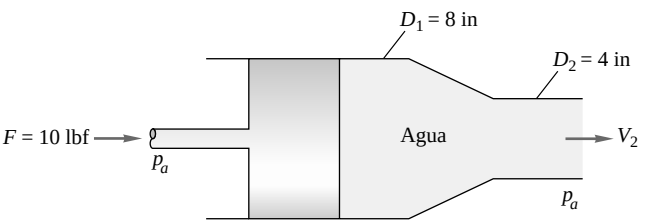


P3.172



P3.173

P3.174 El pistón de la Figura P3.174 impulsa agua a 20 °C. Si se desprecian las pérdidas, estime la velocidad en la salida V_2 en pies por segundo. Si D_2 es un estrechamiento posterior, ¿cuál es el máximo valor posible para V_2?

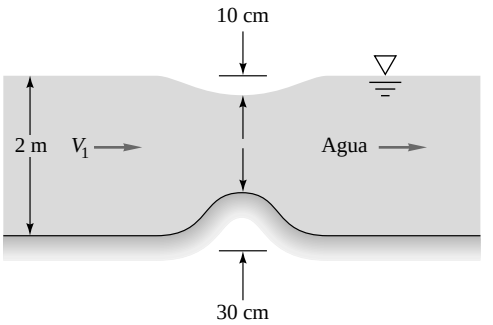


P3.174

P3.175 Si la velocidad del flujo en un canal no es muy grande, un obstáculo en su fondo produce una disminución Δh

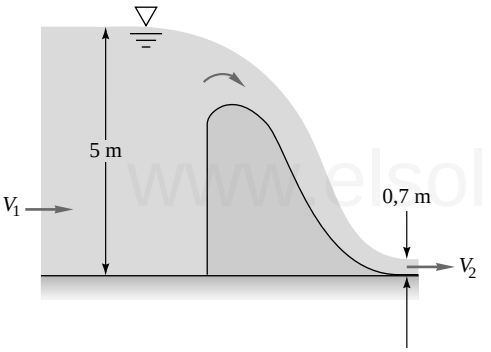
www.elsolucionario.net

del nivel del agua. En la Figura P3.175 se presenta un caso en el que Δh = 10 cm cuando el obstáculo tiene una altura de 30 cm. ¿Cuál es el caudal Q_1 por unidad de anchura del canal? ¿Es, en general, Δh proporcional a Q_1?



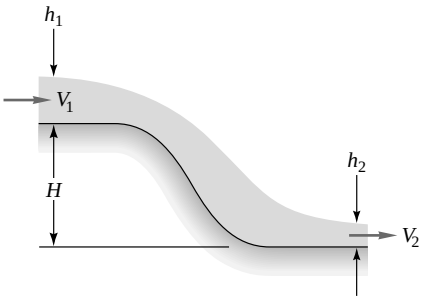
P3.175

P3.176 El flujo del aliviadero de la Figura P3.176 se asume uniforme e hidrostático entre las secciones 1 y 2. Si se desprecian las pérdidas, calcule (*a*) V_2 y (*b*) la fuerza del agua sobre el rebosadero por unidad de anchura.



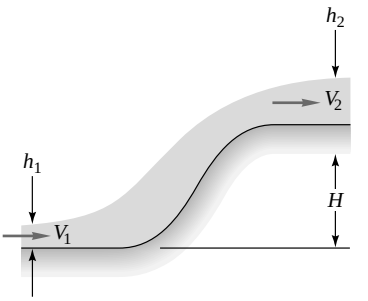
P3.176

P3.177 Las características del flujo del canal de la Figura P3.177 son: h_1 = 1,5 m, H = 4 m y V_1 = 3 m/s. Despreciando las pérdidas y suponiendo un flujo uniforme entre las secciones 1 y 2, calcule la profundidad h_2 aguas abajo y demuestre que son posibles *dos* soluciones realistas.



P3.177

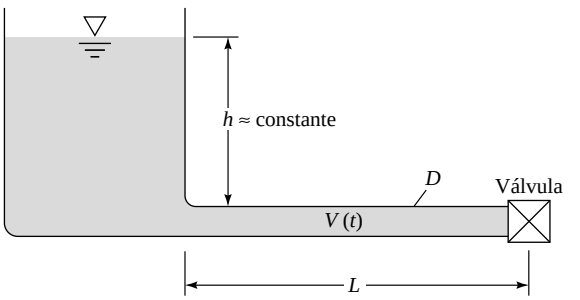
P3.178 Las características del flujo del canal de la Figura P3.178 son: h_1 = 0,45 ft, H = 2,2 ft y V_1 = 16 ft/s. Despreciando las pérdidas y suponiendo un flujo uniforme entre las secciones 1 y 2, calcule la profundidad h_2 aguas abajo y demuestre que son posibles *dos* soluciones realistas.



P3.178

***P3.179** Un depósito cilíndrico de diámetro D contiene líquido hasta una altura inicial h_0. En el instante t = 0 se quita de su fondo un pequeño tapón de diámetro d. Obtenga, empleando la ecuación de Bernoulli sin pérdidas, (*a*) una ecuación diferencial para la altura de la superficie libre $h(t)$ durante la descarga y (*b*) una expresión para el tiempo t_0 necesario para vaciar el depósito.

***P3.180** El depósito de la Figura P3.180 contiene un fluido incompresible que se encuentra en reposo cuando su válvula se abre a la atmósfera. Suponiendo que $h \approx$ constante (velocidades y aceleraciones despreciables en el depósito), use la ecuación de Bernoulli sin rozamiento para obtener y resolver una ecuación diferencial para $V(t)$ en el conducto.



P3.180

***P3.181** Modifique el Problema P3.180 suponiendo que la parte superior del depósito está cerrada y se encuentra a una presión manométrica constante p_0. Repita el análisis para encontrar $V(t)$ en el conducto.

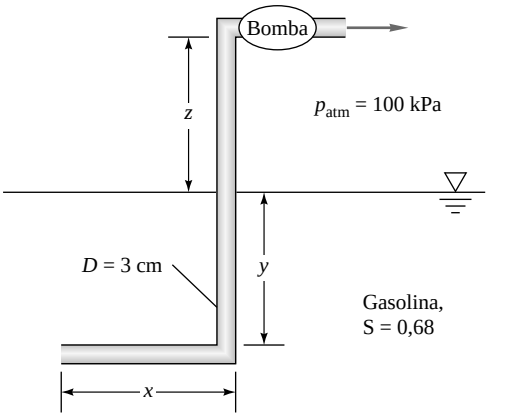
P3.182 La forma incompresible de la ecuación de Bernoulli (3.77) sólo es precisa cuando el número de Mach es inferior a 0,3. A velocidades superiores se deben tener en cuenta las variaciones de densidad. La hipótesis más común para fluidos compresibles es considerar el *flujo isentrópico de un gas ideal*, o $p = C\rho^{\gamma}$, donde $\gamma = c_p/c_v$. Sustituya esta relación en la Ecuación (3.75), intégrela y elimine la constante C. Compare los resultados compresibles con la Ecuación (3.77) y coméntelos.

www.elsolucionario.net

P3.183 La bomba de la Figura P3.183 extrae gasolina a 20 °C de un depósito. Se pueden producir problemas en la bomba si el líquido llega a vaporizarse (cavita) antes de entrar en ella. (*a*) Despreciando las pérdidas y suponiendo un caudal de 65 gal/min, encuentre las limitaciones en (*x*, *y*, *z*) para evitar la cavitación. (*b*) ¿Qué otras limitaciones podrían ser importantes si se incluyen las pérdidas por fricción?

P3.184 En el sistema del Problema P3.183 la bomba proporciona 65 gal/min a la atmósfera a través de un conducto de 3 cm de diámetro sin cavitación cuando $x = 3$ m, $y = 2{,}5$ m y $z = 2$ m. Si la pérdida de carga por fricción es $h_{pérd} \cong 3{,}7(V^2/2g)$, donde V es la velocidad media en el conducto, estime la potencia necesaria para mover la bomba.

P3.185 Un flujo de agua a 20 °C se mueve por un conducto cónico vertical a 163 m³/h. El diámetro de la entrada es de 12 cm y se reduce linealmente en 3 mm por cada 2 m de elevación. Si se considera un flujo sin rozamiento y la presión en la entrada es de 400 kPa, ¿a qué altura la presión del fluido será de 100 kPa?



P3.183

Problemas conceptuales

C3.1 Obtenga una forma de volumen de control para la *segunda* ley de la termodinámica. Sugiera algunos usos prácticos de esta relación en el análisis de flujos reales.

C3.2 Se desea estimar el caudal Q en un conducto midiendo la velocidad axial $u(r)$ en ciertos puntos. Por motivos de coste sólo se puede realizar medidas en *tres* puntos. ¿Cuál es la mejor distribución radial de estos puntos?

C3.3 Se considera el flujo de agua por gravedad a través de un conducto corto que conecta dos depósitos cuyas superficies tienen una diferencia de altura Δz. ¿Por qué la ecuación de Bernoulli incompresible produce resultados absurdos al calcular el caudal en el conducto? ¿Tiene esta paradoja algo que ver con que el conducto es corto? ¿Desaparece la paradoja si se redondean la entrada y la salida del conducto?

C3.4 Use la ecuación de la energía para flujo estacionario para analizar el flujo de agua a través de un grifo cuya presión de suministro es p_0. ¿Qué mecanismo físico hace que el flujo varíe desde cero a un máximo al abrir la válvula del grifo?

C3.5 Se considera un conducto de desagüe parcialmente lleno de agua, inclinado un ángulo θ. Antoine Chézy determinó en 1768 que la velocidad media del flujo en un canal de este tipo debería ser $V \cong C\sqrt{R \operatorname{tg} \theta}$, donde R es el radio del conducto y C es una constante. ¿Cómo se relaciona esta famosa fórmula con la ecuación de la energía para flujo estacionario aplicada a una longitud L de este canal?

C3.6 Coloque una pelota de tenis de mesa en un embudo y conecte la parte estrecha del embudo a un ventilador. Probablemente no sea capaz de soplar la pelota fuera del embudo. Explique cuál es la razón.

C3.7 ¿Cómo trabaja un *sifón*? ¿Hay limitaciones, tales como lo alto o bajo que se puede extraer agua de un depósito mediante un sifón? ¿Hasta cuándo es posible emplear un tubo flexible para llevar agua de un depósito hasta un punto situado a 100 ft de distancia?

Problemas del examen de fundamentos de ingeniería

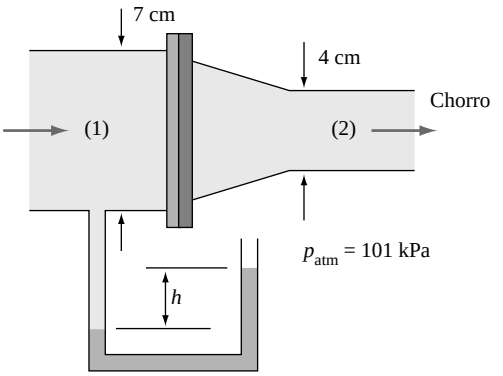
FE3.1 En la Figura FE3.1 se presenta una tobera por la que sale agua a una presión atmosférica de 101 kPa. Si el caudal es de 160 gal/min, ¿cuál es la velocidad media en la sección 1?
(*a*) 2,6 m/s, (*b*) 0,81 m/s, (*c*) 93 m/s, (*d*) 23 m/s, (*e*) 1,62 m/s

FE3.2 En la Figura FE3.1 se presenta una tobera por la que sale agua a una presión atmosférica de 101 kPa. Si el caudal es de 160 gal/min y se desprecia la fricción, ¿cuál es la presión manométrica en la sección 1?
(*a*) 1,4 kPa, (*b*) 32 kPa, (*c*) 43 kPa, (*d*) 29 kPa, (*e*) 123 kPa

FE3.3 En la Figura FE3.1 se presenta una tobera por la que sale agua a una presión atmosférica de 101 kPa. Si la velocidad en la salida es $V_2 = 8$ m/s y se desprecia la fricción, ¿cuál es la fuerza axial que se necesita para mantener la tobera unida al conducto 1?
(*a*) 11 N, (*b*) 56 N, (*c*) 83 N, (*d*) 123 N, (*e*) 110 N

FE3.4 En la Figura FE3.1 se presenta una tobera por la que sale agua a una presión atmosférica de 101 kPa. Si el

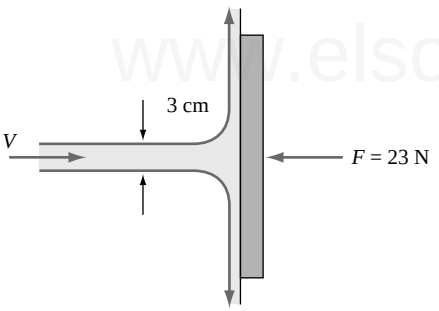
www.elsolucionario.net



FE3.1

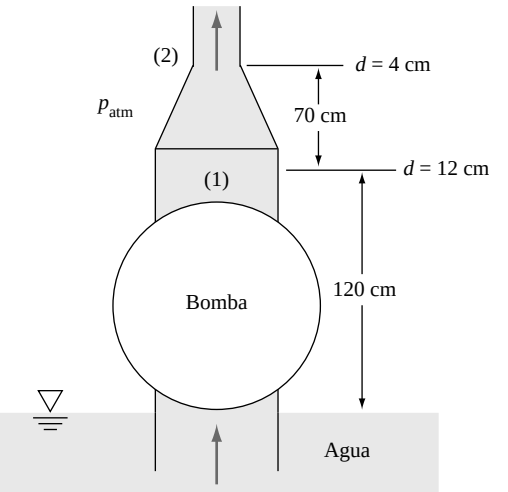
fluido del manómetro tiene una densidad relativa de 1,6 y h = 66 cm, despreciando la fricción, ¿cuál es la velocidad media en la sección 2?
(*a*) 4,55 m/s, (*b*) 2,4 m/s, (*c*) 2,95 m/s, (*d*) 5,55 m/s, (*e*) 3,4 m/s

FE3.5 Un chorro de agua de 3 cm de diámetro incide perpendicularmente sobre una placa, como se muestra en la Figura FE3.5. Si la fuerza requerida para mantener la placa es de 23 N, ¿cuál es la velocidad del chorro?
(*a*) 2,85 m/s, (*b*) 5,7 m/s, (*c*) 8,1 m/s, (*d*) 4,0 m/s, (*e*) 23 m/s



FE3.5

FE3.6 Una bomba de bomberos proporciona agua a una tobera vertical con una relación de diámetros de 3:1, como se muestra en la Figura FE3.6. Si se desprecia la fricción y el caudal es de 500 gal/min, ¿qué altura alcanzará el chorro de agua?
(*a*) 2,0 m, (*b*) 9,8 m, (*c*) 32 m, (*d*) 64 m, (*e*) 98 m



FE3.6

FE3.7 Una bomba de bomberos proporciona agua a una tobera vertical con una relación de diámetros de 3:1, como se muestra en la Figura FE3.6. Si se desprecia la fricción y la bomba aumenta la presión de la sección 1 hasta 51 kPa (manométrica), ¿cuál será el caudal resultante?
(*a*) 187 gal/min, (*b*) 199 gal/min, (*c*) 214 gal/min, (*d*) 359 gal/min, (*e*) 141 gal/min

FE3.8 Una bomba de bomberos proporciona agua a una tobera vertical con una relación de diámetros de 3:1, como se muestra en la Figura FE3.6. Si se desprecia la fricción en el conducto y la tobera, y la bomba proporciona una carga de 12,3 ft al flujo, ¿cuál será el caudal en la salida?
(*a*) 85 gal/min, (*b*) 120 gal/min, (*c*) 154 gal/min, (*d*) 217 gal/min, (*e*) 285 gal/min

FE3.9 Por el interior de un conducto liso de 6 cm de diámetro circula agua que entra en un venturi con un diámetro en la garganta de 3 cm. La presión aguas arriba es de 120 kPa. Si se produce cavitación en la garganta cuando el caudal es de 155 gal/min, ¿cuál es la presión de vapor del fluido, suponiendo flujo sin fricción?
(*a*) 6 kPa, (*b*) 12 kPa, (*c*) 24 kPa, (*d*) 31 kPa, (*e*) 52 kPa

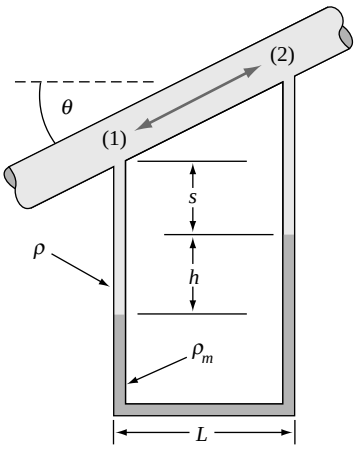
FE3.10 Por el interior de un conducto liso de 6 cm de diámetro circula agua que entra en un venturi con un diámetro en la garganta de 4 cm. La presión aguas arriba es de 120 kPa. Si la presión en la garganta es de 50 kPa, ¿cuál es el caudal, suponiendo flujo sin fricción?
(*a*) 7,5 gal/min, (*b*) 236 gal/min, (*c*) 263 gal/min, (*d*) 745 gal/min, (*e*) 1053 gal/min

Problemas extensos

PE3.1 En un proceso industrial determinado, por el interior del conducto inclinado de la Figura PE3.1 circula aceite de densidad ρ. Un manómetro de tubo en U, con un fluido de densidad ρ_m, mide la diferencia de presiones entre los puntos 1 y 2, como se muestra en la figura. El flujo en el conducto es estacionario, de forma que los fluidos en el manómetro son estacionarios. (*a*) Encuentre una expresión analítica para $p_1 - p_2$ en función de los parámetros del sistema. (*b*) Discutir qué condiciones de h son necesarias para que no exista

www.elsolucionario.net

flujo en el conducto. (*c*) ¿Qué condiciones para que exista flujo *hacia arriba*, de 1 a 2? (*d*) ¿Qué condiciones para que exista flujo *hacia abajo*, de 2 a 1?

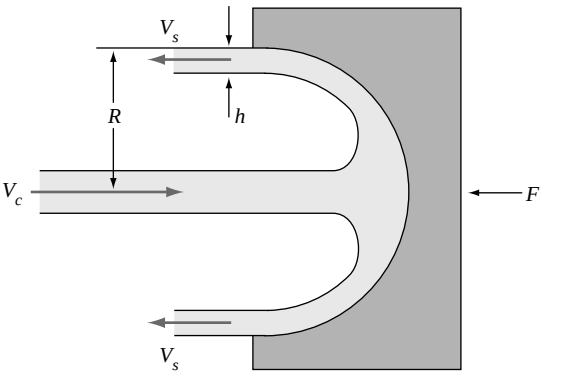


PE3.1

PE3.2 Un depósito rígido de volumen $\mathcal{V}$ = 1,0 m³ está inicialmente lleno de aire a 20 °C y p_0 = 100 kPa. En el instante t = 0, una bomba de vacío se conecta para sacar el aire a un caudal constante de Q = 80 L/min (con independencia de la presión). Suponga que el gas es ideal y el proceso isotermo. (*a*) Obtenga una ecuación diferencial para este flujo. (*b*) Resuelva esta ecuación en t como función de ($\mathcal{V}$, Q, p, p_0). (*c*) Calcule el tiempo en minutos necesario para que se reduzca la presión del depósito hasta p = 20 kPa. *Consejo*: la respuesta debe de estar entre 15 y 25 min.

PE3.3 Suponiendo que el mismo chorro estacionario de agua del Problema P3.40 (velocidad del chorro 8 m/s y diámetro del chorro 10 cm) incide en una cavidad como la de la Figura PE3.3. El agua gira 180° y sale, como consecuencia de la fricción, a una velocidad inferior V_s = 4 m/s. (Mirando desde la izquierda, el chorro de salida tiene forma de anillo circular de radio R y espesor h, que fluye hacia la izquierda). La cavidad tiene un radio de curvatura de 25 cm. Determine (*a*) el espesor h del chorro de salida y (*b*) la fuerza F requerida para mantener quieta la cavidad. (*c*) Comparar el apartado (*b*) con el Problema 3.40, donde F Ξ 500 N, y dar una explicación física de por qué ha cambiado F.

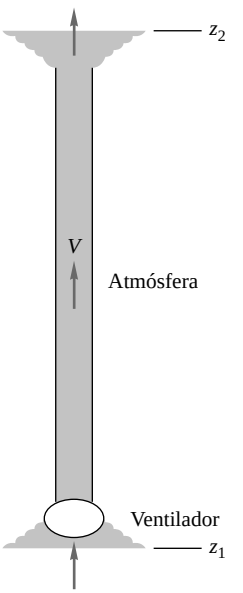
PE3.4 El flujo de aire que se da bajo un disco de hockey sobre aire es muy complejo, especialmente porque los chorros de aire de la mesa inciden sobre el disco en puntos no simétricos. Una aproximación razonable es que en cualquier instante la presión manométrica en la base del disco es la media entre cero (la presión atmosférica) y la presión de remanso de los chorros. (La presión de remanso se define como $p_0 = \frac{1}{2}\rho V^2_{chor}$.)



PE3.3

(*a*) Encuentre la velocidad del chorro V_{chor} que se requiere para mantener en el aire un disco con un peso W y diámetro d. Dé la respuesta en función de W, d y la densidad del aire ρ. (*b*) Estime la velocidad requerida del chorro en pies por segundo cuando W = 0,05 lbf y d = 2,5 in.

PE3.5 Despreciar la fricción a veces da lugar a resultados erróneos. Se pide que analice y discuta el ejemplo de la Figura PE3.5. Un ventilador sopla aire en un conducto desde la sección 1 a la sección 2, como se muestra en la figura. Suponga que la densidad del aire ρ es constante. Despreciando las pérdidas por fricción, encuentre una relación entre la carga requerida por el ventilador h_p y el caudal y el cambio de altura. Explique el resultado.



PE3.5

Problemas de diseño

D3.1 Generalicemos los problemas P3.141 y P3.142, en los que se usó la curva característica de una bomba para determinar el caudal entre dos depósitos. La bomba particular de la Figura P3.142 pertenece a una familia de bombas de geometría semejante, cuyas actuaciones adimensionales son:

www.elsolucionario.net

Carga:

$$\forall \Xi 6{,}04\,\Phi 161 \Re \qquad \forall = \frac{gh_b}{n^2 D_b^2} \quad \text{y} \quad \Re = \frac{Q}{nD_b^3}$$

Rendimiento:

$$\Omega \Xi 70 \Re \Phi 91.500 \Re^3 \qquad \Omega = \frac{\text{potencia al agua}}{\text{potencia de entrada}}$$

donde h_b es el aumento de carga de la bomba (ft), n es la velocidad de rotación del eje (rev/s) y D_b es el diámetro del rotor (ft). El rango de validez es $0 < \zeta < 0{,}027$. La bomba de la Figura P3.142 tenía $D_b = 2$ ft de diámetro y giraba a $n = 20$ rev/s (1200 rpm). La solución del Problema P3.142, $Q \Xi 2{,}57$ ft^3/s y $h_b \Xi 172$ ft, corresponde a $\phi \Xi 3{,}46$, $\zeta \Xi 0{,}016$, $h \Xi 0{,}75$ (o 70 por 100) y la potencia del agua = $\rho g Q h_b \Xi 27.500$ ft · lbf/s (50 hp). Compruebe estos valores antes de iniciar el proyecto.

Repita el Problema P3.142 para seleccionar una bomba de *bajo coste* que gire a una velocidad superior a 600 rpm y proporcione más de 1,0 ft^3/s de agua. Suponga que el coste de la bomba es linealmente proporcional a la potencia de entrada requerida. Comente cualquier limitación de los resultados obtenidos.

Referencias

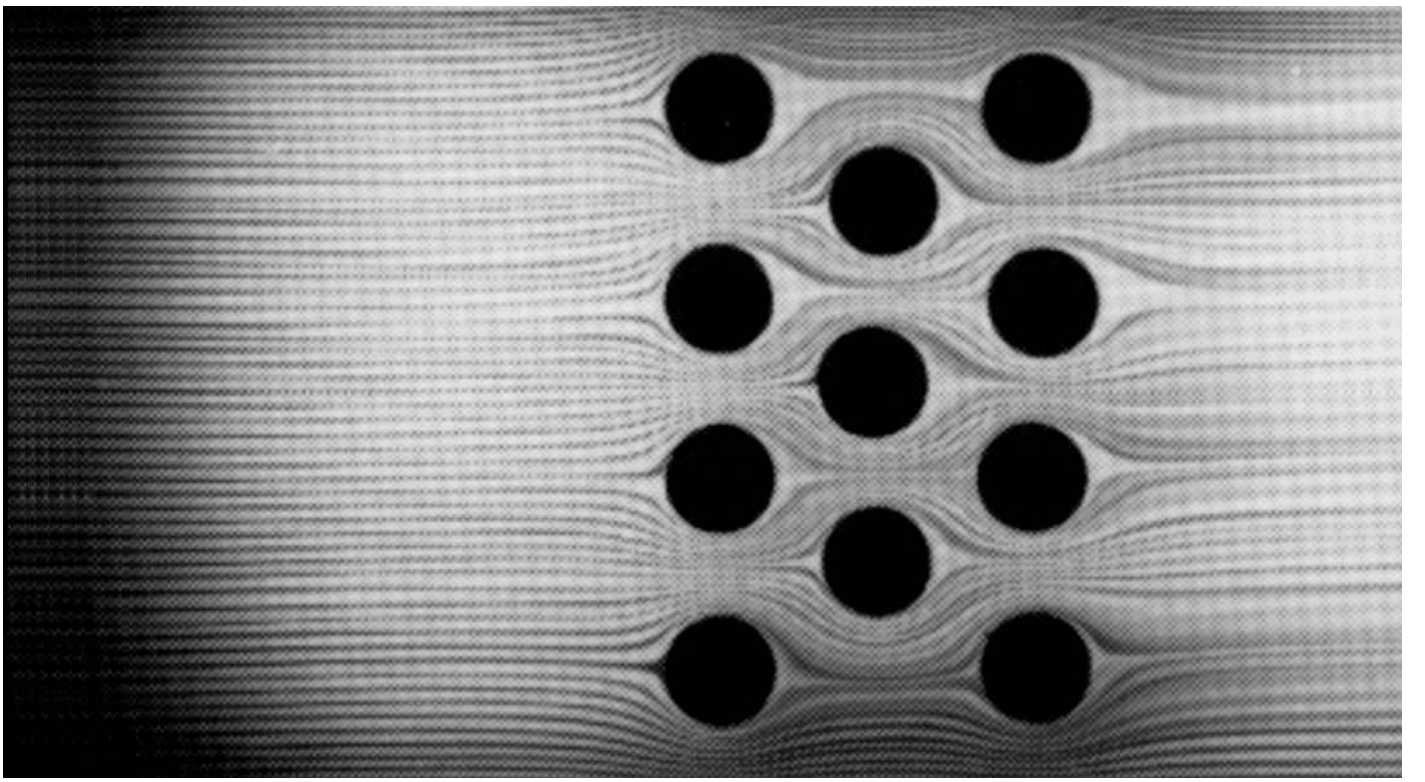
1. D. T. Greenwood y W. M. Greenfield, *Principles of Dynamics*, 2.ª ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1987.
2. T. von Kármán, *The Wind and Beyond*, Little Brown, Boston, 1967.
3. J. P. Holman, *Heat Transfer*, 8.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1997.
4. A. G. Hansen, *Fluid Mechanics*, Wiley, Nueva York, 1967.
5. M. C. Potter, D. C. Wiggert y M. Hondzo, *Mechanics of Fluids*, Brooks/Cole, Chicago, 2001.
6. R. E. Sonntag, C. Borgnakke y G. J. Van Wylen, *Fundamentals of Thermodynamics*, 5.ª ed., John Wiley, Nueva York, 1997.
7. Y. A. Cengel y M. A. Boles, *Thermodynamics: An Engineering Approach*, 4.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2001.
8. J. D. Anderson, *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*, McGraw-Hill, Nueva York, 1995.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Flujo potencial no viscoso a través de una distribución bidimensional de cilindros. Los aspectos matemáticos de la teoría potencial, presentados en este capítulo, son bellos y fáciles de tratar, pero sus resultados pueden no ser realistas en presencia de paredes sólidas. La Figura 8.13*b* muestra el aspecto real (viscoso) del flujo. (*Cortesía de TQ Education and Training Ltd.*)

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Capítulo 4
Relaciones diferenciales para una partícula fluida

Motivación. Cuando analizamos el movimiento de los fluidos podemos seguir dos caminos distintos: (1) buscar una estimación de los efectos globales (flujo másico, fuerza aplicada, intercambio de energía) sobre una región *finita* o volumen de control, o (2) analizar punto a punto los detalles del campo fluido analizando una región *infinitesimal* del flujo. El primer enfoque, de tipo global, se trató en el Capítulo 3.

Este capítulo trata de la segunda de las técnicas para analizar el movimiento de los fluidos: el análisis a pequeña escala, o *diferencial*. Esto es, aplicamos las cuatro leyes de conservación básicas a un volumen de control infinitesimal o, alternativamente, a un sistema fluido infinitesimal. En ambos casos se obtienen las *ecuaciones diferenciales* básicas del movimiento de un fluido. También se desarrollan las *condiciones de contorno* apropiadas.

En su forma más básica, estas ecuaciones diferenciales del movimiento son bastante difíciles de resolver, y se conoce muy poco sobre sus propiedades matemáticas generales. Sin embargo, se pueden mostrar ciertos aspectos que tienen un gran valor educativo. En primer lugar, como se muestra en el Capítulo 5, las ecuaciones (aunque no se resuelvan) revelan los parámetros adimensionales básicos que gobiernan el movimiento de los fluidos. En segundo lugar, como se muestra en el Capítulo 6, se pueden encontrar un gran número de soluciones útiles si se hacen dos hipótesis simplificatorias: (1) flujo estacionario y (2) flujo incompresible. Una tercera simplificación bastante más drástica, la de flujo no viscoso, hace que sea válida la ecuación de Bernoulli y proporciona una gran variedad de soluciones ideales, o de *fluido perfecto*, posibles. Estos flujos idealizados se tratan en el Capítulo 8; se debe ser cuidadoso e indagar si estas soluciones son de hecho realistas cuando se comparan con el movimiento real del fluido. Finalmente, a pesar de su gran dificultad las ecuaciones diferenciales generales se pueden resolver hoy en día mediante la técnica aproximada del *análisis numérico*, donde las derivadas se sustituyen por relaciones algebraicas entre un número finito de puntos del campo fluido que pueden resolverse posteriormente mediante un ordenador. La Referencia 1 es un ejemplo de un libro de texto dedicado íntegramente al análisis numérico del movimiento de los fluidos.

4.1. EL CAMPO DE ACELERACIONES DE UN FLUIDO

En la Sección 1.5 establecimos la forma vectorial cartesiana de un campo de velocidades función de la posición y del tiempo:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}u(x, y, z, t) + \mathbf{j}v(x, y, z, t) + \mathbf{k}w(x, y, z, t) \tag{1.4}$$

Ésta es la variable más importante de la Mecánica de Fluidos. Conocer el campo de velocidades es a menudo equivalente a *resolver* el problema. Nuestras coordenadas están fijas en el espacio y observamos cómo pasa el fluido: como si hubiéramos tallado un conjunto de líneas de coordenadas sobre la ventana de cristal de un túnel de viento. Éste es el método descriptivo *euleriano*, que es distinto al método lagrangiano, en el cual se sigue el movimiento de las partículas individuales.

www.elsolucionario.net

La aceleración **a** también es fundamental en Mecánica de Fluidos, ya que aparece al aplicar la segunda ley de Newton a un sistema fluido infinitesimal. Por tanto, necesitamos calcular la derivada total del vector velocidad con respecto al tiempo:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{i}\frac{du}{dt} + \mathbf{j}\frac{dv}{dt} + \mathbf{k}\frac{dw}{dt}$$

Como cada componente escalar (u, v, w) es una función de las cuatro variables (x, y, z, t), utilizamos la regla de la cadena para obtener la derivada temporal de cada escalar. Por ejemplo,

$$\frac{du(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Pero, por definición, dx/dt es la componente u de la velocidad local, y $dy/dt = v$ y $dz/dt = w$. Así pues, la derivada total de u se puede escribir en la siguiente forma compacta:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)u \tag{4.1}$$

Y sustituyendo u por v o w se obtienen expresiones similares para dv/dt o dw/dt. Sumando estas expresiones para formar un vector, obtenemos la aceleración total:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}}_{\text{Local}} + \underbrace{u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}}_{\text{Convectiva}} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} \tag{4.2}$$

www.elsolucionario.net

El término $\partial\mathbf{V}/\partial t$ se denomina *aceleración local* y se anula cuando el flujo es estacionario, esto es, independiente del tiempo. Los tres términos entre paréntesis forman la *aceleración convectiva*, que aparece cuando la partícula se mueve a través de regiones donde la velocidad varía, como en una tobera o un difusor. En flujos nominalmente «estacionarios» el fluido puede sufrir grandes aceleraciones a consecuencia de los términos convectivos.

Obsérvese el uso que hacemos del producto escalar entre **V** y el operador gradiente ∇:

$$u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{V}\cdot\nabla \quad \text{donde} \quad \nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

El concepto de la derivada total temporal —a veces llamada *derivada sustancial* o *material*— puede aplicarse a cualquier variable, como por ejemplo la presión:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)p \tag{4.3}$$

Siempre que aparecen efectos convectivos en las leyes básicas de conservación de la masa, cantidad de movimiento o energía, las ecuaciones diferenciales básicas se vuelven no lineales, lo que origina dificultades matemáticas que las hacen más complicadas que en los flujos que no sufren cambios convectivos.

Recalcamos que esta derivada temporal total sigue a una partícula con una identidad fija, lo cual es conveniente para expresar las leyes de la mecánica en la descripción euleriana. El operador d/dt se suele denominar *derivada sustancial* o material y a menudo se le asigna el símbolo especial D/Dt como recordatorio de que tiene cuatro términos y sigue a una partícula determinada.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 4.1

Dado el campo vectorial de velocidades euleriano

$$\mathbf{V} = 3t\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + ty^2\mathbf{k}$$

determine la aceleración total de una partícula.

Solución

- *Consideraciones.* Conocemos las componentes no estacionarias de la velocidad, $u = 3t$, $v = xz$ y $w = ty^2$.
- *Procedimiento.* Calculamos todas las derivadas necesarias con respecto a (x, y, z, t), las sustituimos en el vector de aceleración total, Ecuación (4.2), y agrupamos términos.
- *Paso 1.* Primero obtenemos la aceleración local $\partial\mathbf{V}/\partial t$:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{j}\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{k}\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial t}(3t) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial t}(xz) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial t}(ty^2) = 3\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$$

- *Paso 2.* De forma similar, los términos de la aceleración convectiva de la Ecuación (4.2) son

$$u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = (3t)\frac{\partial}{\partial x}(3t\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + ty^2\mathbf{k}) = (3t)(0\mathbf{i} + z\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = 3tx\,\mathbf{j}$$

$$v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} = (xz)\frac{\partial}{\partial y}(3t\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + ty^2\mathbf{k}) = (xz)(0\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 2ty\mathbf{k}) = 2txyz\,\mathbf{k}$$

$$w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} = (ty^2)\frac{\partial}{\partial z}(3t\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + ty^2\mathbf{k}) = (ty^2)(0\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = txy^2\,\mathbf{j}$$

- *Paso 3.* Agrupando todos los términos obtenemos la derivada «total» o «sustancial»:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = (3\mathbf{i} + y^2\mathbf{k}) + 3tx\mathbf{j} + 2txyz\mathbf{k} + txy^2\mathbf{j}$$

$$= 3\mathbf{i} + (3tx + txy^2)\mathbf{j} + (y^2 + 2txyz)\mathbf{k} \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios.* Suponiendo que la expresión dada para $\mathbf{V}$ es válida en todas partes, el vector aceleración total $d\mathbf{V}/dt$ es aplicable a todos los puntos e instantes del campo fluido.

4.2. LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CONSERVACIÓN DE LA MASA

Todas las ecuaciones diferenciales básicas pueden deducirse considerando un volumen de control elemental o un sistema elemental. Elegiremos aquí un volumen de control infinitesimal fijo (dx, dy, dz) como el de la Figura 4.1, y utilizaremos las relaciones básicas para volúmenes de control del Capítulo 3. El flujo a través de cada cara del elemento es aproximadamente unidimensional y la relación de conservación de la masa apropiada es aquí

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\forall + \sum_i (\rho A_i V_i)_{sal} + \sum_i (\rho A_i V_i)_{ent} = 0 \tag{3.22}$$

El elemento es tan pequeño que la integral de volumen se reduce al término diferencial:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\forall \approx \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz$$

www.elsolucionario.net

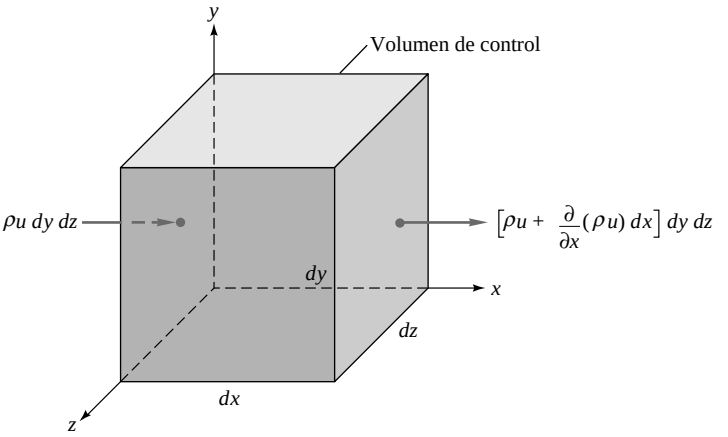


Figura 4.1. Volumen de control infinitesimal fijo en coordenadas cartesianas mostrando los flujos másicos de entrada y salida en las caras perpendiculares al eje *x*.

Los términos del flujo másico aparecen en las seis caras, tres de entrada y tres de salida. Hacemos uso del concepto de continuo del Capítulo 1, donde todas las propiedades fluidas se consideran descritas por funciones que varían uniformemente con el tiempo y la posición, tal como $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Por tanto, si T es la temperatura en la cara izquierda del elemento de la Figura 4.1, la cara derecha tendrá una temperatura ligeramente diferente $T + (\partial T/\partial x)dx$. Para la conservación de la masa, si ρu es dato en la cara izquierda, el valor de este producto en la cara derecha es $\rho u + (\partial \rho u/\partial x)dx$.

La Figura 4.1 muestra únicamente los flujos en las caras izquierda y derecha. Los flujos en las caras perpendiculares a los ejes *y* (inferior y superior) y *z* (anterior y posterior) se han omitido para más claridad en el dibujo. Haremos un listado de estos seis flujos como sigue:

www.elsolucionario.net

Caras	Flujo másico de entrada	Flujo másico de salida
x	$\rho u\, dy\, dz$	$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\, dx\right] dy\, dz$
y	$\rho v\, dx\, dz$	$\left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\, dy\right] dx\, dz$
z	$\rho w\, dx\, dy$	$\left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\, dz\right] dx\, dy$

Introduciendo estos términos en la Ecuación (3.22) tenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx\, dy\, dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx\, dy\, dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dx\, dy\, dz + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dx\, dy\, dz = 0$$

La diferencial de volumen desaparece de todos los términos, quedando una ecuación diferencial pura que relaciona las derivadas parciales de la densidad y la velocidad:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0} \tag{4.4}$$

Éste es el resultado deseado: la conservación de la masa para un volumen de control infinitesimal. A menudo se le llama *ecuación de la continuidad* porque no requiere más suposición que la de continuidad de las

www.elsolucionario.net

funciones que dan la densidad y la velocidad. Esto es, el flujo puede ser estacionario o no estacionario, viscoso o no viscoso, compresible o incompresible.[1] Sin embargo, la ecuación no admite la presencia de singularidades como fuentes o sumideros dentro del elemento.

El operador gradiente

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

nos permite reescribir la ecuación de la continuidad en una forma compacta, aunque esto no ayuda mucho a encontrar la solución. Los últimos tres términos de la Ecuación (4.4) son equivalentes a la divergencia del vector $\rho\mathbf{V}$,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \equiv \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \tag{4.5}$$

de modo que la forma compacta de la ecuación de la continuidad es

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \tag{4.6}$$

En esta forma vectorial la ecuación sigue siendo muy general y puede utilizarse directamente en otros sistemas de referencia distintos del cartesiano.

Coordenadas cilíndricas

www.elsolucionario.net

La alternativa más común al sistema cartesiano es el sistema de *coordenadas cilíndricas*, esquematizado en la Figura 4.2. Un punto arbitrario P está definido por la distancia z a lo largo del eje, la distancia radial r desde el eje y el ángulo θ de rotación alrededor del eje. Las tres componentes ortogonales independientes de la velocidad son la componente axial v_z, la componente radial v_r y la componente circunferencial v_θ, que es positiva en el sentido contrario al giro de las agujas del reloj, esto es, en la dirección de las θ crecientes. En general, todas las componentes de la velocidad, así como la presión y la densidad y otras propiedades fluidas, son funciones continuas de r, θ, z y t.

La divergencia de cualquier función vectorial $\mathbf{A}(r, \theta, z, t)$ se obtiene aplicando la transformación de coordenadas

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \qquad \theta = \text{tg}^{-1}\frac{y}{x} \qquad z = z \tag{4.7}$$

y el resultado lo daremos aquí sin demostración[2]:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z) \tag{4.8}$$

La ecuación de la continuidad (4.6) en coordenadas cilíndricas es entonces

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \tag{4.9}$$

---

[1] Un caso en el que la Ecuación (4.4) podría necesitar de un cuidado especial es en el *flujo con dos fases*, donde la densidad es discontinua entre las fases. Para más detalles sobre este caso véase, por ejemplo, la Referencia 2.

[2] Véase, por ejemplo, la Referencia 3, pág. 783.

www.elsolucionario.net

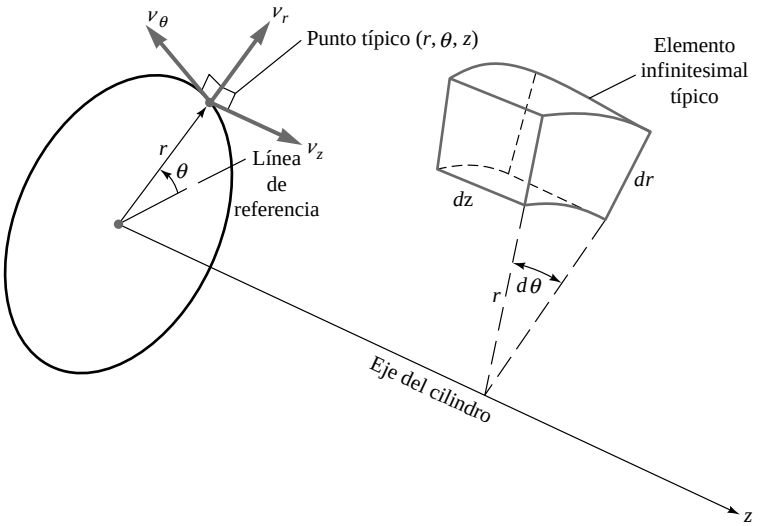


Figura 4.2. Esquema para la definición del sistema de coordenadas cilíndricas.

Hay otros sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales, especialmente las *coordenadas esféricas*, que ocasionalmente se utilizan en problemas de Mecánica de Fluidos. No utilizaremos aquí estos sistemas, excepto en el Problema P4.12.

Existen otras formas de obtener la ecuación de la continuidad (4.6) que son interesantes e instructivas. Un ejemplo es el uso del teorema de la divergencia. Pregunte a su profesor acerca de estas formas alternativas.

Flujo compresible estacionario

www.elsolucionario.net

Si el flujo es estacionario, E/E$t \equiv 0$ y todas las propiedades son sólo funciones de la posición. La Ecuación (4.6) se reduce a

Cartesianas:
$$\frac{E}{Ex}(\Leftarrow u) + \frac{E}{Ey}(\Leftarrow v) + \frac{E}{Ez}(\Leftarrow w) = 0$$

Cilíndricas:
$$\frac{1}{r}\frac{E}{Er}(r \Leftarrow v_r) + \frac{1}{r}\frac{E}{E\theta}(\Leftarrow v_\theta) + \frac{E}{Ez}(\Leftarrow v_z) = 0 \tag{4.10}$$

Puesto que la densidad y la velocidad son ambas variables, la ecuación es todavía no lineal y bastante complicada, pero se han encontrado un cierto número de soluciones en casos especiales.

Flujo incompresible

Un caso especial que da lugar a una gran simplificación es el flujo incompresible, donde las variaciones de densidad son despreciables. Entonces Eρ/E$t \equiv 0$, independientemente de que el flujo sea estacionario o no, y la densidad puede sacarse fuera de la divergencia en la Ecuación (4.6). El resultado,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{4.11}$$

es válido para flujo incompresible estacionario y no estacionario. Su forma en los dos sistemas de coordenadas es

Cartesianas:
$$\frac{Eu}{Ex} + \frac{Ev}{Ey} + \frac{Ew}{Ez} = 0 \tag{4.12a}$$

www.elsolucionario.net

Cilíndricas:
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(v_z)=0 \tag{4.12b}$$

Éstas son ecuaciones diferenciales *lineales* y, como se discute en los Capítulos 6 a 8, se conocen una gran cantidad de soluciones. Puesto que ningún autor o instructor puede resistirse a una gran variedad de soluciones, se invierte mucho tiempo estudiando los flujos incompresibles. Afortunadamente, esto es precisamente lo que debe hacerse, porque muchos flujos prácticos de la ingeniería son aproximadamente incompresibles, siendo la excepción principal los flujos de gases a altas velocidades, tratados en el Capítulo 9.

¿Cuándo puede considerarse un flujo aproximadamente incompresible? Deduciremos un criterio elegante realizando aproximaciones sencillas para estimar las variaciones de la densidad. En esencia, deseamos sacar la densidad fuera de la divergencia en la Ecuación (4.6) y aproximar un término típico, como

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \approx \bar{\rho}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{4.13}$$

Esto es equivalente a la desigualdad

$$\left|u\frac{\partial \rho}{\partial x}\right| \ll \left|\bar{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}\right|$$

o
$$\left|\frac{\partial \rho}{\partial x}\right| \ll \left|\bar{\rho}\frac{\partial V}{\partial x}\right| \tag{4.14}$$

Como vimos en la Ecuación (1.38), las variaciones de presión son aproximadamente proporcionales a las variaciones de densidad y al cuadrado de la velocidad del sonido a del fluido:

$$\delta p \approx a^2 \delta\rho \tag{4.15}$$

www.elsolucionario.net

Por otra parte, si las variaciones de altura son despreciables, los incrementos de presión se estiman relacionándolos con los de velocidad por la ecuación de Bernoulli (3.75) para fluidos incompresibles:

$$\delta p \approx -\rho V \delta V \tag{4.16}$$

Combinando las Ecuaciones (4.14) a (4.16), obtenemos un criterio explícito para flujo incompresible:

$$\frac{V^2}{a^2} = \mathrm{Ma}^2 \ll 1 \tag{4.17}$$

donde Ma = V/a es el *número adimensional de Mach* del flujo. ¿Cómo debe ser de pequeño? El límite comúnmente aceptado es

$$\mathrm{Ma} < 0{,}3 \tag{4.18}$$

Para aire en condiciones estándar, un flujo puede considerarse incompresible si la velocidad es menor que unos 100 m/s (330 ft/s). Esto comprende una gran variedad de flujos de aire: movimiento de automóviles y trenes, aviones ligeros, despegue y aterrizaje de aviones de gran velocidad, la mayoría de los flujos en tuberías y en turbomaquinaria a moderadas velocidades de giro. Además, está claro que la casi totalidad de los flujos de líquidos son incompresibles, puesto que las velocidades del flujo son pequeñas y la velocidad del sonido muy grande.[3]

[3] Un caso excepcional se da en los flujos geofísicos, donde los cambios de densidad están impuestos térmica o mecánicamente más que por las condiciones del flujo propiamente dichas. Un ejemplo son las capas de agua dulce entre agua salada o de aire caliente entre aire frío en la atmósfera. En estos casos decimos que el fluido está *estratificado*, y debemos tener en cuenta las variaciones verticales de densidad en la Ecuación (4.6) aunque las velocidades sean pequeñas.

www.elsolucionario.net

Antes de intentar analizar la ecuación de la continuidad, obtendremos las ecuaciones de la cantidad de movimiento y la energía, de modo que podamos analizarlas como un conjunto. En algunos casos se puede utilizar el concepto de *función de corriente*, con lo que se asegura que la ecuación de la continuidad se satisface automáticamente, tal como veremos en la Sección 4.7.

Conviene hacer una última observación: la ecuación de la continuidad es indispensable y debe satisfacerse siempre en todo análisis racional de la estructura de un flujo. Cualquier «solución» de las ecuaciones de la cantidad de movimiento o la energía se verá reducida a cenizas ante cualquier análisis crítico si no satisface también la ecuación de la continuidad.

EJEMPLO 4.2

¿Bajo qué condiciones representa el campo de velocidades

$$\mathbf{V} = (a_1x + b_1y + c_1z)\,\mathbf{i} + (a_2x + b_2y + c_2z)\,\mathbf{j} + (a_3x + b_3y + c_3z)\,\mathbf{k}$$

con a_1, b_1, etc. = cte, un flujo incompresible que conserva la masa?

Solución

Recordando que $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$, vemos que $u = (a_1x + b_1y + c_1z)$, etc. Sustituyendo en la Ecuación (4.12*a*) para un flujo incompresible, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}(a_1x + b_1y + c_1z) + \frac{\partial}{\partial y}(a_2x + b_2y + c_2z) + \frac{\partial}{\partial z}(a_3x + b_3y + c_3z) = 0$$

o

$$a_1 + b_2 + c_3 = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

Al menos dos de las constantes a_2, b_2 y c_3 deben tener signos opuestos. La ecuación de la continuidad no impone restricciones acerca de las constantes b_1, c_1, a_2, c_2, a_3 y b_3, que no contribuyen al aumento o disminución del volumen de un elemento diferencial.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 4.3

Un campo de velocidades incompresible está dado por

$$u = a\,(x^2 - y^2) \qquad v \text{ desconocida} \qquad w = b$$

donde a y b son constantes. ¿Cuál debe ser la forma de la componente v de la velocidad?

Solución

Aplicando de nuevo la Ecuación (4.12*a*):

$$\frac{\partial}{\partial x}(ax^2 - ay^2) + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z} = 0$$

o

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2ax \tag{1}$$

que se puede integrar fácilmente con respecto a y para dar:

$$v\,(x, y, z, t) = -2axy + f(x, z, t) \qquad \textit{Resp.}$$

Ésta es la única forma posible de v que satisface la ecuación de la continuidad para un fluido incompresible. La función de integración f es totalmente arbitraria, puesto que desaparece cuando se deriva v con respecto a y.[4]

[4] Es un flujo muy realista que simula la corriente en un rincón de 60°; véanse los Ejemplos 4.7 y 4.9.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 4.4

Un rotor centrífugo de 40 cm de diámetro se utiliza para bombear hidrógeno a 15 °C y a una presión de 1 atm. Estime la máxima velocidad angular de giro del rotor permisible para evitar efectos de compresibilidad en la punta de los álabes.

Solución

- *Consideraciones.* La máxima velocidad del fluido es aproximadamente igual a la velocidad del extremo del álabe:

$$V_{máx} \approx \Omega r_{máx} \qquad \text{donde} \qquad r_{máx} = D/2 = 0{,}20 \text{ m}$$

- *Procedimiento*. Calcularemos la velocidad del sonido del hidrógeno y nos aseguraremos de que $V_{máx}$ es mucho menor.
- *Valores de las propiedades*. De la Tabla A.4 para el hidrógeno, $R = 4124 \text{ m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})$ y $\gamma = 1{,}41$. De la Ecuación (1.39) a 15 °C = 288 K obtenemos la velocidad del sonido:

$$a_{H_2} = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{1{,}41[4124 \text{ m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})](288 \text{ K})} \approx 1294 \text{ m/s}$$

- *Paso final*. De acuerdo con la Ecuación (4.18), la compresibilidad es despreciable si:

$$V = \text{K} r_{máx} \text{ A } 0{,}3a \qquad \text{o} \qquad \text{K}(0{,}2 \text{ m}) \text{ A } 0{,}3(1294 \text{ m/s})$$

$$\text{Proporciona} \quad \text{K A } 1940 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 18.500 \text{ rpm} \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios*. Ésta es una velocidad angular bastante alta debido a que la velocidad del sonido del hidrógeno, un gas ligero, es casi cuatro veces mayor que la del aire. Un rotor moviéndose a esta velocidad en aire podría generar ondas de choque en el extremo de los álabes.

4.3. LA ECUACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN FORMA DIFERENCIAL

Habiendo hecho el análisis una vez en la Sección 4.2 para la conservación de la masa, podemos hacerlo más rápido esta vez. Utilizamos el mismo volumen de control elemental de la Figura 4.1, para el cual la forma apropiada de la ecuación de la cantidad de movimiento es

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{VC} \mathbf{V}\rho \, d\forall\right) + \sum (\dot{m}_i \mathbf{V}_i)_{sal} - \sum (\dot{m}_i \mathbf{V}_i)_{ent} \tag{3.40}$$

De nuevo el elemento es tan pequeño que la integral de volumen se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{V}\rho \, d\forall) \approx \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) dx \, dy \, dz \tag{4.19}$$

Aparecen flujos de cantidad de movimiento en las seis caras, tres de entrada y tres de salida. Refiriéndonos otra vez a la Figura 4.1, podemos hacer una tabla con los flujos de cantidad de movimiento de forma análoga a la utilizada para obtener el flujo másico neto:

www.elsolucionario.net

Caras	Flujo de cantidad de movimiento de entrada	Flujo de cantidad de movimiento de salida
x	$\rho u\mathbf{V}\,dy\,dz$	$\left[\rho u\mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\mathbf{V})\,dx\right]dy\,dz$
y	$\rho v\mathbf{V}\,dx\,dz$	$\left[\rho v\mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\mathbf{V})\,dy\right]dx\,dz$
z	$\rho w\mathbf{V}\,dx\,dy$	$\left[\rho w\mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\mathbf{V})\,dz\right]dx\,dy$

Introduciendo estos términos y la Ecuación (4.19) en la Ecuación (3.40) obtenemos esta expresión:

$$\sum \mathbf{F} = dx\,dy\,dz\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\mathbf{V})\right] \tag{4.20}$$

Obsérvese que se trata de una relación vectorial. Se puede simplificar si dividimos el término entre corchetes como sigue:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\mathbf{V})\\ &= \mathbf{V}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V})\right] + \rho\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z}\right]\end{aligned} \tag{4.21}$$

www.elsolucionario.net

El término entre corchetes del segundo miembro es idénticamente nulo según la ecuación de la continuidad (4.6). El término entre paréntesis del segundo miembro es, según la Ecuación (4.2), la aceleración total de la partícula que ocupa en ese instante el volumen de control:

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \tag{4.2}$$

Por tanto, hemos reducido la Ecuación (4.20) a

$$\sum \mathbf{F} = \rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}dx\,dy\,dz \tag{4.22}$$

Sería bueno detenerse ahora y reflexionar sobre lo que acabamos de hacer. ¿Cuál es la relación entre las Ecuaciones (4.22) y (3.40) para un volumen de control infinitesimal? ¿Podríamos haber *empezado* el análisis con la Ecuación (4.22)?

La Ecuación (4.22) indica que la fuerza neta sobre el volumen de control debe ser infinitesimal y proporcional al volumen elemental. Estas fuerzas son de dos tipos: fuerzas *volumétricas* y fuerzas de *superficie*. Las fuerzas volumétricas se deben a campos externos (gravitatorios, magnéticos, eléctricos) que actúan sobre toda la masa del volumen elemental. Las únicas fuerzas volumétricas que consideraremos en este libro son las gravitatorias[5]. La fuerza de gravedad sobre una masa diferencial $\rho\,dx\,dy\,dz$ dentro del volumen de control es

$$d\mathbf{F}_{\text{grav}} = \rho\mathbf{g}\,dx\,dy\,dz \tag{4.23}$$

[5] Las fuerzas volumétricas proporcionales a la masa, como las fuerzas gravitatorias o de inercia, se denominan también fuerzas *másicas (N. del T.).*

www.elsolucionario.net

donde en general **g** puede tener una orientación arbitraria con respecto al sistema de coordenadas. En muchas aplicaciones, en especial en la ecuación de Bernoulli, tomaremos z «hacia arriba» y $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$.

Las fuerzas de superficie se deben a los esfuerzos en las caras de la superficie de control. Estos esfuerzos, como se discutió en el Capítulo 2, son suma de la presión hidrostática y de los esfuerzos viscosos τ_{ij} que aparecen en el movimiento con gradientes de velocidad:

$$\Pi_{ij} = \begin{vmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -p + \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p + \tau_{zz} \end{vmatrix} \tag{4.24}$$

La notación de los subíndices para los esfuerzos se da en la Figura 4.3. A diferencia de la velocidad **V**, que es un *vector* de tres componentes, los esfuerzos σ_{ij} y τ_{ij} y las velocidades de deformación ε_{ij} son *tensores* de nueve componentes y requieren de dos subíndices para definir cada componente. En las Referencias 6, 11 o 13 se puede profundizar en el *análisis tensorial*.

No son estos esfuerzos, sino sus *gradientes* o diferencias, los que causan una fuerza neta sobre la superficie total del volumen de control infinitesimal. Esto se ve en la Figura 4.4, donde sólo se muestra, para más claridad en el dibujo, el esfuerzo en la dirección del eje x. Por ejemplo, la fuerza hacia la izquierda σ_{xx} $dy\ dz$ en la cara izquierda queda equilibrada parcialmente por la fuerza hacia la derecha σ_{xx} $dy\ dz$ en la cara derecha, quedando sólo la fuerza neta hacia la derecha $(\partial\sigma_{xx}/\partial x)\ dx\ dy\ dz$ en la cara derecha. Lo mismo sucede en las otras cuatro caras, de modo que la fuerza neta de superficie en la dirección x está dada por

$$dF_{x,\text{sup}} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\Pi_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Pi_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\Pi_{zx})\right] dx\,dy\,dz \tag{4.25}$$

Se ve que esta fuerza es proporcional al volumen elemental. Obsérvese que los esfuerzos se han tomado de la *fila superior* de la matriz de la Ecuación (4.24). Dividiendo esta fila en presión y esfuerzos viscosos, podemos rescribir la Ecuación (4.25) como

$$\frac{dF_x}{d\mathcal{V}} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) \tag{4.26}$$

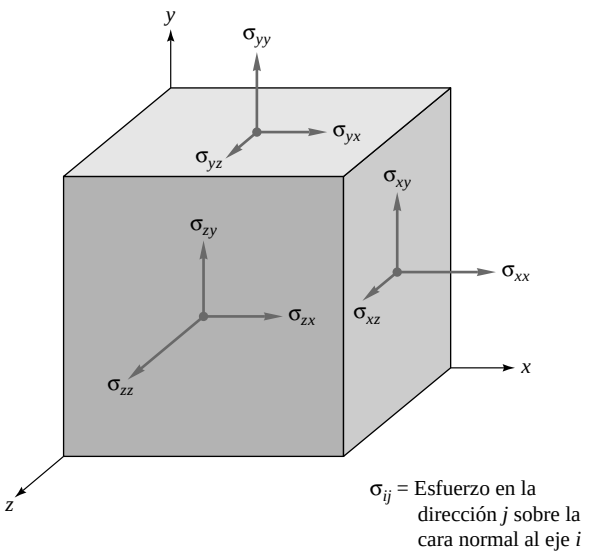


Figura 4.3. Notación para los esfuerzos.

www.elsolucionario.net

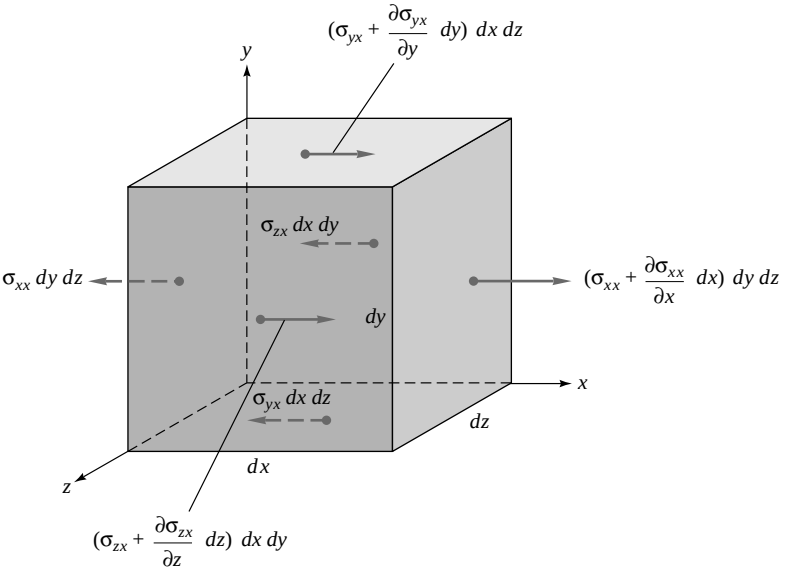


Figura 4.4. Volumen de control infinitesimal fijo en coordenadas cartesianas mostrando sólo la componente *x* de las fuerzas de superficie.

donde $d\mathcal{V} = dx\, dy\, dz$. Del mismo modo podemos obtener las fuerzas por unidad de volumen sobre las superficies del volumen de control en las direcciones *y* y *z*:

$$\frac{dF_y}{d\mathcal{V}} = \Phi\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy})$$
$$\frac{dF_z}{d\mathcal{V}} = \Phi\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz}) \tag{4.27}$$

www.elsolucionario.net

Ahora podemos multiplicar las Ecuaciones (4.26) y (4.27) por **i**, **j** y **k**, respectivamente, y sumarlas para obtener una expresión vectorial para la fuerza neta de superficie:

$$\left.\frac{d\mathbf{F}}{d\mathcal{V}}\right|_{\text{sup}} = \Phi\nabla p + \left.\frac{d\mathbf{F}}{d\mathcal{V}}\right|_{\text{viscosa}} \tag{4.28}$$

donde la fuerza viscosa tiene un total de nueve términos:

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\mathbf{F}}{d\mathcal{V}}\right|_{\text{viscosa}} &= \mathbf{i}\left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] \\ &+ \mathbf{j}\left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right] \\ &+ \mathbf{k}\left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right]\end{aligned} \tag{4.29}$$

Como cada uno de los términos entre paréntesis que aparecen en (4.29) representa la divergencia de un vector cuyas componentes son los esfuerzos que actúan sobre las caras *x*, *y* y *z*, respectivamente, la Ecuación (4.29) se puede escribir en forma de divergencia:

$$\left.\frac{d\mathbf{F}}{d\mathcal{V}}\right|_{\text{viscosa}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij} \tag{4.30}$$

www.elsolucionario.net

donde
$$\tau_{ij} = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{vmatrix} \tag{4.31}$$

es el tensor de esfuerzos viscosos que actúa sobre el elemento. Por tanto, la fuerza neta de superficie es la suma del vector *gradiente de presión* y de la divergencia del tensor de esfuerzos viscosos. Sustituyendo en la Ecuación (4.22) y utilizando la Ecuación (4.23), tenemos la ecuación de la cantidad de movimiento en forma diferencial:

$$\rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij} = \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} \tag{4.32}$$

donde
$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \tag{4.33}$$

También podemos expresar la Ecuación (4.32) en palabras:

Fuerza gravitatoria por unidad de volumen + fuerza de presión por unidad de volumen + fuerza viscosa por unidad de volumen = densidad × aceleración (4.34)

La Ecuación (4.32) es tan breve y compacta que su inherente complejidad es casi invisible. Es una ecuación *vectorial*, cada una de cuyas componentes tiene nueve términos. Escribamos las tres componentes en forma explícita para ilustrar las dificultades matemáticas inherentes a la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned}
\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\
\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Ésta es la ecuación diferencial de la cantidad de movimiento en toda su extensión. Es válida para cualquier fluido con cualquier movimiento, estando caracterizado cada fluido por unos términos de esfuerzos viscosos particulares. Obsérvese que los tres últimos términos «convectivos» del segundo miembro de las ecuaciones (4.35) son no lineales, lo que complica el análisis matemático.

Flujo no viscoso: ecuación de Euler

La Ecuación (4.35) no estará lista para su uso mientras no escribamos los esfuerzos viscosos en función de las componentes de la velocidad. La hipótesis más sencilla es la de flujo no viscoso, $\tau_{ij} = 0$, para el cual la Ecuación (4.32) se reduce a

$$\rho \mathbf{g} - \nabla p = \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} \tag{4.36}$$

Ésta es la *ecuación de Euler* para flujos no viscosos. En la Sección 4.9 se muestra que la ecuación de Euler puede integrarse a lo largo de las líneas de corriente para obtener la ecuación de Bernoulli (3.75) o (3.77).

www.elsolucionario.net

En el Capítulo 8 se da el análisis completo de los flujos no viscosos, utilizando la ecuación de la continuidad y la de Bernoulli.

Fluido newtoniano: ecuaciones de Navier-Stokes

Para un fluido newtoniano los esfuerzos viscosos son, como se discutió en la Sección 1.7, proporcionales a la velocidad de deformación y al coeficiente de viscosidad. Para flujos incompresibles, la generalización de la Ecuación (1.23) al caso tridimensional es[6]

$$\begin{gathered}
\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\
\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\
\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right]
\end{gathered} \tag{4.37}$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad. La sustitución en la Ecuación (4.35) proporciona la ecuación diferencial de la cantidad de movimiento para un fluido newtoniano con densidad y viscosidad constantes:

$$\begin{gathered}
\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \rho \frac{du}{dt} \\
\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] = \rho \frac{dv}{dt} \\
\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] = \rho \frac{dw}{dt}
\end{gathered} \tag{4.38}$$

Éstas son las *ecuaciones de Navier-Stokes* para flujos incompresibles, llamadas así en honor C. L. M. H. Navier (1785-1836) y Sir George G. Stokes (1819-1903), que fueron los primeros en deducirlas. Son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales de segundo orden, y resultan bastante impresionantes. Sorprendentemente se han encontrado soluciones a una gran variedad de flujos viscosos de interés, algunas de las cuales se discuten en la Sección 4.11 y en el Capítulo 6 (véanse también las Referencias 4 y 5). Para flujos compresibles, véase la Ecuación (2.29) de la Referencia 5.

Las Ecuaciones (4.38) tienen cuatro incógnitas: p, u, v y w. Deben combinarse con la ecuación de la continuidad para flujos incompresibles [Ecuaciones (4.12)] para tener la cuarta ecuación para las cuatro incógnitas. Discutiremos esto de nuevo en la Sección 4.6, donde se presentan las condiciones de contorno apropiadas para estas ecuaciones.

Aunque sólo se conoce un número limitado de soluciones analíticas de las ecuaciones de Navier-Stokes, estas ecuaciones se pueden discretizar en mallas finas para simular el comportamiento de los fluidos usando un ordenador [1]. El campo de la *Mecánica de Fluidos Computacional* (CFD, *Computational Fluid Dynamics*) está madurando rápidamente, y existen numerosas herramientas de software comerciales. Hoy en día es posible obtener resultados CFD aproximados, pero realistas, de una gran variedad de flujos viscosos bidimensionales y tridimensionales complejos.

[6] Cuando la compresibilidad es importante, aparecen términos adicionales proporcionales a la velocidad de dilatación cúbica unitaria y a un *segundo* coeficiente de viscosidad; para más detalles véanse las Referencias 4 y 5.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 4.5

Tome el campo de velocidades del Ejemplo 4.3, con $b = 0$ por conveniencia

$$u = a(x^2 - y^2) \qquad v = -2axy \qquad w = 0$$

y determine bajo qué condiciones es una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes (4.38). Suponga que se dan dichas condiciones y determine la distribución de presiones resultante cuando z se mide «hacia arriba» ($g_x = 0$, $g_y = 0$, $g_z = -g$).

Solución

- *Consideraciones*. Densidad y viscosidad constantes, flujo estacionario (u y v independientes del tiempo).
- *Procedimiento*. Sustituimos las componentes conocidas (u, v, w) en las Ecuaciones (4.38) y despejamos los gradientes de presiones. Si se puede encontrar una distribución de presiones $p(x, y, z)$ única, la solución es exacta.
- *Paso 1*. Sustituimos (u, v, w) en las Ecuaciones (4.38):

$$\rho(0) - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu(2a + 2a + 0) = \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2a^2\rho(x^3 + xy^2)$$

$$\rho(0) - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu(0 + 0 + 0) = \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 2a^2\rho(x^2y + y^3)$$

$$\rho(-g) - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu(0 + 0 + 0) = \rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0$$

Reordenando y despejando los tres gradientes de presiones:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -2a^2\rho(x^3 + xy^2) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -2a^2\rho(x^2y + y^3) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{1}$$

- *Comentario 1*. El gradiente de presiones vertical es *hidrostático*. [¿Se podría haber predicho esto teniendo en cuenta que $w = 0$ en las Ecuaciones (4.38)?] No obstante, la presión en el plano xy depende de la velocidad.
- *Paso 2*. Para comprobar si los gradientes de presiones en las direcciones x e y de la Ecuación (1) son compatibles entre sí, calculamos la derivada cruzada ($\partial^2 p/\partial x\,\partial y$); esto es, derivamos cada una de las ecuaciones con respecto a la otra coordenada:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}[-2a^2\rho(x^3 + xy^2)] = -4a^2\rho xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}[-2a^2\rho(x^2y + y^3)] = -4a^2\rho xy$$

- *Comentario 2.* Al ser iguales las derivadas cruzadas, el campo de velocidades dado es efectivamente una solución *exacta* de las ecuaciones de Navier-Stokes.
- *Paso 3*. Para determinar la presión, integramos las Ecuaciones (1), agrupamos y comparamos. Empezamos con $\partial p/\partial x$. ¡Debemos proceder con cuidado! Integramos *parcialmente* con respecto a x, manteniendo y y z constantes:

$$p = \int \frac{\partial p}{\partial x}dx\,|_{y,z} = \int -2a^2\rho(x^3 + xy^2)dx\,|_{y,z} = -2a^2\rho\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2}\right) + f_1(y,z) \tag{2}$$

Obsérvese que la «constante» de integración f_1 es una *función* de las variables que no fueron integradas. Ahora derivamos la Ecuación (2) con respecto a y y comparamos con la expresión para $\partial p/\partial y$ obtenida de la Ecuación (1):

www.elsolucionario.net

$$\frac{\partial p}{\partial y}\Big|_{(2)} = \rho a^2 x^2 y + \frac{df_1}{dy} = \frac{\partial p}{\partial y}\Big|_{(1)} = \rho a^2 (x^2 y + y^3)$$

Comparando: $\dfrac{df_1}{dy} = \rho a^2 y^3$ o $f_1 = \int \dfrac{df_1}{dy} dy\Big|_z = \rho a^2 \dfrac{y^4}{4} + f_2(z)$

Agrupando términos: $p = \rho a^2 \left[\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2 y^2}{2} + \dfrac{y^4}{4} \right] + f_2(z)$ (3)

Esta vez la «constante» de integración f_2 es una función únicamente de z (la variable no integrada). Ahora derivamos la Ecuación (3) con respecto a z y comparamos con la expresión para $\partial p/\partial z$ obtenida de la Ecuación (1):

$$\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{(3)} = \frac{df_2}{dz} = \frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{(1)} = -\rho g \quad \text{o} \quad f_2 = -\rho g z + C \tag{4}$$

donde C es una constante. Esto completa nuestras tres integraciones. Combinando las Ecuaciones (3) y (4) se obtiene la expresión completa para la distribución de presiones:

$$p(x, y, z) = -\rho g z - \tfrac{1}{2} a^2 \rho (x^4 + y^4 + 2x^2 y^2) + C \qquad \textit{Resp.} \tag{5}$$

Ésta es la solución buscada. ¿La reconoce? No, a menos que volvamos al principio y calculemos el cuadrado de la velocidad:

$$u^2 + v^2 + w^2 = V^2 = a^2 (x^4 + y^4 + 2x^2 y^2) \tag{6}$$

Comparando con la Ecuación (5), la distribución de presiones puede rescribirse como

$$p + \tfrac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z = C \tag{7}$$

www.elsolucionario.net

- *Comentario*. Ésta es la ecuación de Bernoulli (3.77). Esto no es accidental, porque la distribución de velocidades dada en este problema pertenece a una familia de flujos que son solución de las ecuaciones de Navier-Stokes y que satisfacen la ecuación de Bernoulli en todo el campo fluido incompresible. Son los llamados *flujos irrotacionales*, para los cuales rot $\mathbf{V} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} \equiv 0$. Este tema se trata de nuevo en la Sección 4.9.

4.4. LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL MOMENTO CINÉTICO

Iremos rápidamente en la deducción de la ecuación diferencial del momento cinético, ya que se utilizan las mismas ideas que para las ecuaciones de la continuidad y la cantidad de movimiento. La ecuación del momento cinético en forma integral para un volumen de control fijo es

$$\Sigma \mathbf{M}_o = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\mathrm{VC}} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho \, d\mathcal{V} \right] + \int_{\mathrm{SC}} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA \tag{3.55}$$

Nos referiremos a un eje O que es paralelo al eje z y que pasa por el centro de masas del volumen de control infinitesimal, como se muestra en la Figura 4.5. Sea θ el ángulo de giro alrededor de O del fluido contenido en el volumen de control. Los únicos esfuerzos que dan momento alrededor de O son los esfuerzos de cortadura τ_{xy} y τ_{yx}. Podemos evaluar los momentos y los términos del momento cinético alrededor de O. La obtención necesita numerosas transformaciones algebraicas; sólo daremos aquí el resultado final:

$$\left[\tau_{xy} - \tau_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy}) dx - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}) dy \right] dx \, dy \, dz$$

$$= \frac{1}{12} \rho (dx \, dy \, dz)(dx^2 + dy^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} \tag{4.39}$$

www.elsolucionario.net

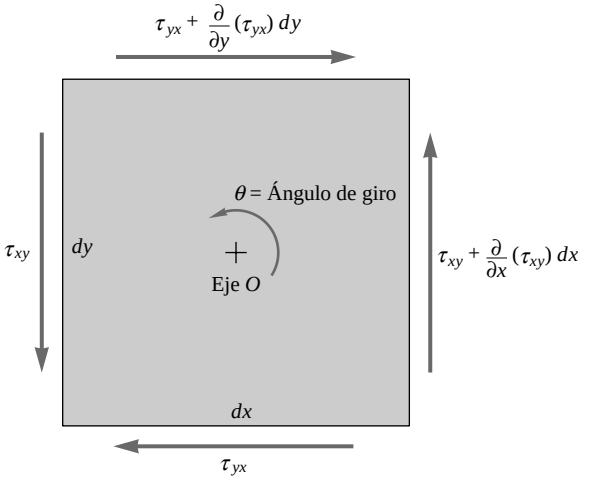


Figura 4.5. Volumen de control infinitesimal fijo en coordenadas cartesianas mostrando los esfuerzos de cortadura que pueden producir una aceleración angular alrededor del eje *O*.

Considerando que la aceleración angular $d^2\theta/dt^2$ no es infinita, podemos despreciar todos los términos diferenciales de orden superior, lo que nos proporciona el interesante resultado:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{4.40}$$

De haber sumado los momentos alrededor de ejes paralelos a *y* o *x*, hubiéramos obtenido resultados totalmente análogos:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} \tag{4.41}$$

www.elsolucionario.net

No existe ecuación diferencial del momento cinético. La aplicación de la ecuación integral a un volumen de control infinitesimal proporciona el resultado, bien conocido por los estudiantes de resistencia de materiales, de que los esfuerzos de cortadura son simétricos: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Éste es el único resultado de esta sección.[7] No hay ninguna ecuación que recordar, lo que deja espacio en su cerebro para la próxima, la ecuación diferencial de la energía.

4.5. LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA ENERGÍA[8]

Estamos ya tan acostumbrados a este tipo de ecuaciones que podemos obtener la ecuación de la energía de forma muy rápida. La forma integral apropiada para el volumen de control fijo de la Figura 4.1 es

$$\dot{Q} - \dot{W}_m - \dot{W}_v = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{VC} e\,\rho\,d\forall\right) + \int_{SC}\left(e + \frac{p}{\rho}\right)\rho(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,dA \tag{3.63}$$

donde $\dot{W}_m = 0$ ya que no hay trabajo motor sobre el volumen de control por no haber partes móviles dentro de un volumen infinitesimal fijo. Por analogía con la Ecuación (4.20), y por el tamaño tan pequeño del elemento, el segundo miembro toma la forma

$$\dot{Q} - \dot{W}_v = \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u e) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v e) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w e)\right] dx\,dy\,dz \tag{4.42}$$

---

[7] Estamos despreciando la posibilidad de un *par* finito aplicado al elemento debido a un campo exterior de fuerzas muy intenso. Véase, por ejemplo, la Referencia 6, pág. 217.

[8] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

donde $\zeta = e + p/\rho$. Cuando utilizamos la ecuación de la continuidad de forma análoga a la Ecuación (4.21), la Ecuación (4.22) se reduce a

$$\dot{Q} - \dot{W}_v = \frac{de}{dt} + \mathbf{V}\cdot\nabla p + p\nabla\cdot\mathbf{V}\,dx\,dy\,dz \tag{4.43}$$

Para evaluar $\dot{Q}$ despreciamos la radiación y consideramos sólo la conducción de calor a través de las caras del elemento. Como se vio en el Capítulo 1, el flujo de calor por conducción sigue la ley de Fourier

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \tag{1.29a}$$

donde k es el coeficiente de conductividad térmica del fluido. La Figura 4.6 muestra el flujo de calor que atraviesa las caras perpendiculares al eje x. Los flujos de calor a través de las caras perpendiculares a los ejes y y z se han omitido para más claridad en el dibujo. Los seis flujos de calor son:

Caras	Flujo de calor de entrada	Flujo de calor de salida
x	$q_x\,dy\,dz$	$\left[q_x + \frac{\partial}{\partial x}(q_x)dx\right]dy\,dz$
y	$q_y\,dx\,dz$	$\left[q_y + \frac{\partial}{\partial y}(q_y)dy\right]dx\,dz$
z	$q_z\,dx\,dy$	$\left[q_z + \frac{\partial}{\partial z}(q_z)dz\right]dx\,dy$

www.elsolucionario.net

Sumando los términos de entrada y restando los términos de salida obtenemos el flujo neto de calor añadido al elemento:

$$\dot{Q} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(q_y) + \frac{\partial}{\partial z}(q_z)\right]dx\,dy\,dz = -\nabla\cdot\mathbf{q}\,dx\,dy\,dz \tag{4.44}$$

Como era de esperar, el flujo de calor es proporcional al volumen elemental. Introduciendo la ley de Fourier dada por la Ecuación (1.29), tenemos

$$\dot{Q} = \nabla\cdot(k\nabla T)\,dx\,dy\,dz \tag{4.45}$$

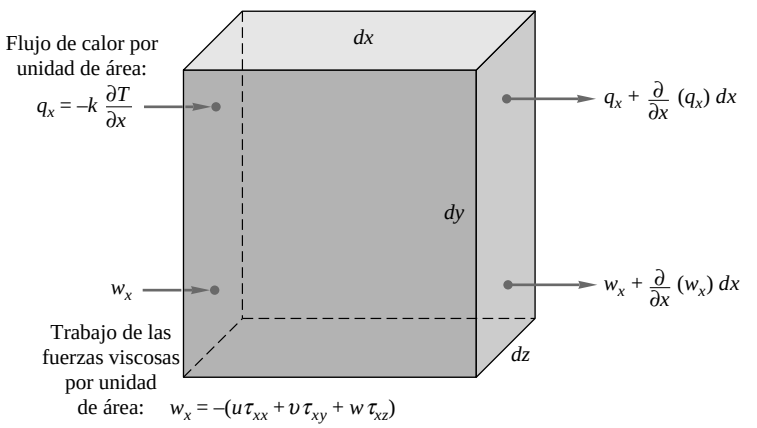


Figura 4.6. Volumen de control infinitesimal fijo en coordenadas cartesianas mostrando los términos del flujo de calor y el trabajo de los esfuerzos viscosos por unidad de tiempo en la dirección del eje x.

www.elsolucionario.net

El trabajo por unidad de tiempo debido a los esfuerzos viscosos es igual al producto de la componente del esfuerzo por la componente de la velocidad correspondiente y por el área de la cara del elemento. La Figura 4.6 muestra que el trabajo por unidad de tiempo en la cara izquierda, perpendicular al eje x, es

$$\dot{W}_{v,\mathrm{CI}} = w_x\, dy\, dz \qquad \text{donde} \qquad w_x = -(u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) \tag{4.46}$$

(donde el subíndice CI significa cara izquierda) mientras que se obtiene un trabajo ligeramente diferente en la cara derecha debido al gradiente de w_x. Estos flujos de energía se pueden tabular del mismo modo que los flujos de calor en la tabla anterior, sustituyendo q_x por w_x, etc. Después de restar los términos de salida de los de entrada, la potencia debida a la viscosidad viene dada por

$$\begin{aligned}\dot{W}_v &= \Phi\Big[\frac{\partial}{\partial x}(u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z}(u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz})\Big]dx\, dy\, dz \\ &= \Phi\nabla\cdot(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\tau}_{ij})dx\, dy\, dz\end{aligned} \tag{4.47}$$

Sustituyendo las Ecuaciones (4.45) y (4.47) en la Ecuación (4.43) obtenemos una forma de la ecuación diferencial de la energía:

$$\begin{aligned}&\rho\frac{de}{dt} + \mathbf{V}\cdot\nabla p + p\nabla\cdot\mathbf{V} = \nabla\cdot(k\,\nabla T) + \nabla\cdot(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\tau}_{ij}) \\ &\text{donde } e = \hat{u} + \tfrac{1}{2}V^2 + gz\end{aligned} \tag{4.48}$$

Se obtiene una forma más útil separando el término viscoso como suma de dos:

$$\nabla\cdot(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\tau}_{ij}) \equiv \mathbf{V}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_{ij}) + \Phi \tag{4.49}$$

donde Φ es la *función de disipación viscosa*.[9] Para un fluido viscoso newtoniano e incompresible, esta función toma la forma

$$\begin{aligned}\ldots = \mu\Big[&2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 \\ &+ \Big(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big].\end{aligned} \tag{4.50}$$

Puesto que todos los términos son cuadráticos, la disipación viscosa es siempre positiva, de modo que un flujo viscoso siempre tiende a perder su energía disponible a causa de la disipación, de acuerdo con el segundo principio de la termodinámica.

Sustituyendo ahora la Ecuación (4.49) en la Ecuación (4.48) y utilizando la ecuación de la cantidad de movimiento (4.32) para eliminar $\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_{ij}$, se obtiene una forma más utilizada de la ecuación diferencial de la energía, en la que no aparece la energía cinética ni la potencial:

$$\boxed{\rho\frac{d\hat{u}}{dt} + p(\nabla\cdot\mathbf{V}) = \nabla\cdot(k\,\nabla T) + \ldots} \tag{4.51}$$

[9] Para más detalles, véase, por ejemplo, la Referencia 5, pág. 72.

www.elsolucionario.net

Esta ecuación es válida para un fluido newtoniano bajo unas condiciones muy generales de flujo no estacionario, compresible, viscoso y conductor del calor; sólo se desprecian la transferencia de calor por radiación y las *fuentes* internas de calor que podrían aparecer en una reacción química o nuclear.

La Ecuación (4.51), que debe resolverse junto con las ecuaciones de la continuidad, cantidad de movimiento y estado, hace el problema difícil de analizar, excepto si se usa un ordenador [1]. Es habitual hacer las siguientes aproximaciones:

$$d\hat{u} \Xi c_v \, dT \quad c_v, \mu, k, \rho \Xi \text{cte} \tag{4.52}$$

La Ecuación (4.51) toma en este caso la forma más simple, para $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$,

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = k\nabla^2 T + \ldots \tag{4.53}$$

que involucra a la temperatura T como variable primaria y a la velocidad como variable secundaria a través de la derivada sustancial:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} \tag{4.54}$$

Se conocen muchas soluciones interesantes de la Ecuación (4.53) para varios tipos de flujos, dándose extensos tratamientos en textos avanzados sobre flujos viscosos [4, 5] y en libros de transferencia de calor [7, 8].

Un caso especial bien conocido de la Ecuación (4.53) es cuando el fluido está en reposo o tiene una velocidad lo suficientemente pequeña para poder despreciar la disipación viscosa Φ y los términos convectivos:

www.elsolucionario.net

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T \tag{4.55}$$

El cambio de c_v por c_p es correcto y está justificado por el hecho de que cuando se desprecian los términos de presión en la ecuación de la energía para el flujo de un gas [4, 5], lo que queda es aproximadamente una variación de entalpía y no una variación de energía interna. Ésta es la llamada *ecuación de la conducción del calor* en matemática aplicada y es válida para sólidos y fluidos en reposo. Las soluciones de la Ecuación (4.55) para distintas condiciones cubren una gran parte de los cursos y libros de transferencia de calor.

Esto completa la obtención de las ecuaciones diferenciales básicas del movimiento de los fluidos.

4.6. CONDICIONES DE CONTORNO PARA LAS ECUACIONES BÁSICAS

Acabamos de obtener las tres ecuaciones diferenciales básicas del movimiento de los fluidos. Resumamos aquí estas ecuaciones:

Continuidad:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \tag{4.56}$$

Cantidad de movimiento:
$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij} \tag{4.57}$$

Energía:
$$\rho \frac{d\hat{u}}{dt} + p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \ldots \tag{4.58}$$

www.elsolucionario.net

donde Φ está dada por la Ecuación (4.50). En general, la densidad es variable, de modo que estas tres ecuaciones contienen cinco incógnitas: ρ, V, p, $\hat{u}$ y T. Por tanto, necesitamos dos relaciones adicionales para completar el sistema de ecuaciones. Éstas son las ecuaciones de estado que relacionan las propiedades termodinámicas, dadas en forma algebraica o mediante gráficos:

$$\rho = \rho(p, T) \qquad \hat{u} = \hat{u}(p, T) \tag{4.59}$$

Por ejemplo, para un gas perfecto con calores específicos constantes, completamos el sistema con

$$\Leftarrow \frac{p}{RT} \quad \hat{u} = \int c_v dT \Xi c_v T + \text{cte} \tag{4.60}$$

Se demuestra en libros avanzados [4, 5] que el sistema que forman las Ecuaciones (4.56) a (4.59) está bien planteado y se puede resolver analítica o numéricamente con las condiciones de contorno apropiadas a cada caso.

¿Cuáles son las condiciones de contorno apropiadas? Primero, si el flujo es no estacionario, debe haber *condiciones iniciales*, esto es, distribuciones espaciales conocidas para cada variable en el instante inicial:

En $t = 0$: $$\rho, V, p, \hat{u}, T = f(x, y, z) \text{ conocidas}^{10} \tag{4.61}$$

Después, para todo instante t, debemos saber algo acerca de las variables en cada *contorno* que encierra al flujo.

La Figura 4.7 muestra los tres tipos de contornos más comunes que se encuentran en el análisis de flujos: una pared sólida, una entrada o salida y una entrefase líquido-gas.

En primer lugar, en una pared sólida impermeable no hay deslizamiento ni salto de temperaturas cuando el fluido es viscoso y conductor del calor:

Pared sólida: $$\mathbf{V}_{\text{fluido}} = \mathbf{V}_{\text{pared}} \qquad T_{\text{fluido}} = T_{\text{pared}} \tag{4.62}$$

www.elsolucionario.net

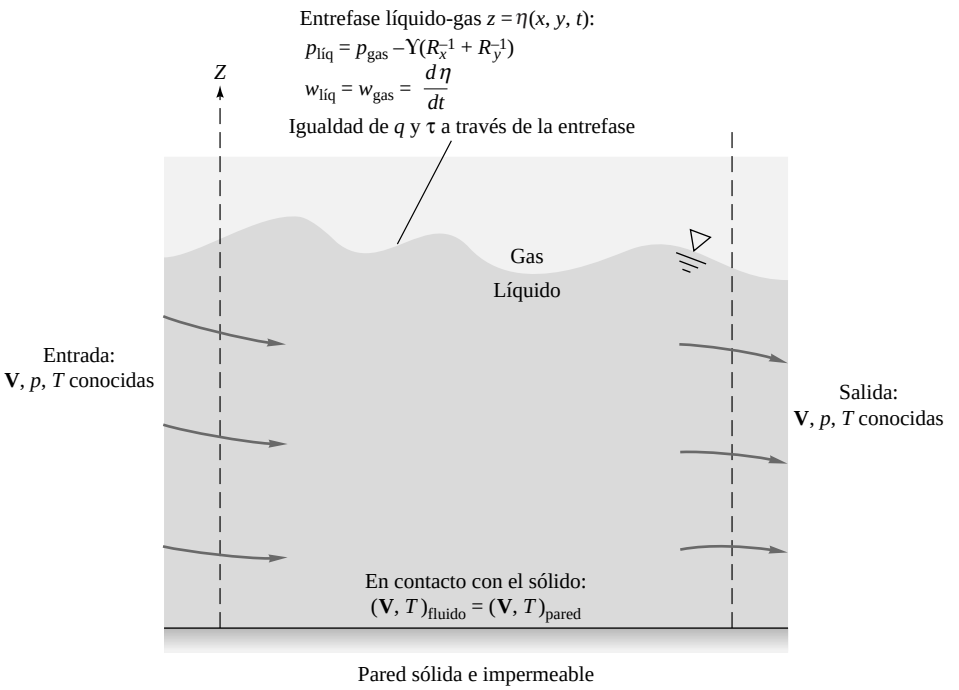


Figura 4.7. Condiciones de contorno típicas para el análisis del flujo de un fluido viscoso y conductor del calor.

[10] Para $t = 0$ sólo se necesita dar la distribución espacial de dos variables termodinámicas; la distribución espacial del resto se obtiene de las ecuaciones de estado (*N. del T.*).

www.elsolucionario.net

La única excepción a la Ecuación (4.62) ocurre en el flujo de gases muy rarificados, en cuyo caso puede haber deslizamiento [5].

En segundo lugar, en las secciones de entrada o salida se deben conocer las distribuciones de velocidad, presión y temperatura en todo instante:

Entrada o salida: $\mathbf{V}, p, T$ conocidas (4.63)

Estas secciones de entrada o salida a menudo están situadas en $\pm\div$, simulando un cuerpo sumergido en un fluido que se extiende hasta el infinito.

Finalmente, las condiciones más complejas se dan en la superficie de separación entre un líquido y un gas, o superficie libre, como la esquematizada en la Figura 4.7. Sea la superficie de separación dada por

Superficie de separación: $z = \eta(x, y, t)$ (4.64)

Debe haber igualdad de velocidades verticales a través de la superficie de separación, de modo que no aparezcan huecos entre el líquido y el gas:

$$w_{\text{líq}} = w_{\text{gas}} = \frac{d\Omega}{dt} = \frac{E\Omega}{Et} + u\frac{E\Omega}{Ex} + v\frac{E\Omega}{Ey} \tag{4.65}$$

Ésta es la llamada *condición de contorno cinemática*.[11]

También debe haber equilibrio mecánico en la entrefase. Los esfuerzos viscosos tangenciales a la superficie deben ser iguales:

$$(\tau_{zy})_{\text{líq}} = (\tau_{zy})_{\text{gas}} \qquad (\tau_{zx})_{\text{líq}} = (\tau_{zx})_{\text{gas}} \tag{4.66}$$

Despreciando los esfuerzos viscosos normales, las presiones deben equilibrarse en la superficie, excepto por los efectos de la tensión superficial:

$$p_{\text{líq}} = p_{\text{gas}} - \Upsilon(R_x^{-1} + R_y^{-1}) \tag{4.67}$$

que es equivalente a la Ecuación (1.34). Los radios de curvatura pueden escribirse en términos de la posición η de la superficie libre:

$$R_x^{\Phi 1} + R_y^{\Phi 1} = \frac{E}{Ex}\left\{\frac{E\Omega/Ex}{\sqrt{1+(E\Omega/Ex)^2+(E\Omega/Ey)^2}}\right\}_{\cdot} + \frac{E}{Ey}\left\{\frac{E\Omega/Ey}{\sqrt{1+(E\Omega/Ex)^2+(E\Omega/Ey)^2}}\right\}_{\cdot} \tag{4.68}$$

Finalmente, el flujo de calor normal a la superficie debe ser el mismo a ambos lados, dado que no se puede almacenar calor en una superficie de espesor infinitesimal:

$$(q_z)_{\text{líq}} = (q_z)_{\text{gas}} \tag{4.69}$$

Despreciando la radiación, esto es equivalente a

$$\left[k\frac{ET}{Ez}\right]_{\text{líq}} = \left[k\frac{ET}{Ez}\right]_{\text{gas}} \tag{4.70}$$

[11] También debe haber continuidad de temperaturas y velocidades horizontales (*N. del T.*).

www.elsolucionario.net

Éste es todo el detalle que deseamos dar para el nivel de exposición de este libro. En las Referencias 5 y 9 se dan detalles más amplios y complicados sobre las condiciones de contorno apropiadas para los movimientos de los fluidos.

Condiciones simplificadas en la superficie libre

En los análisis introductorios dados en este libro, como el del flujo en canales abiertos del Capítulo 10, deberíamos utilizar las condiciones exactas (4.65) a (4.69), pero en lugar de eso consideraremos que el fluido sobre la superficie libre es simplemente la «atmósfera» que solamente ejerce presión sobre el fluido situado debajo, con rozamiento y conducción de calor despreciables. También despreciaremos los términos no lineales que involucran las pendientes de la superficie libre. En ese caso las condiciones en la superficie libre adoptan la siguiente forma linealizada, mucho más simple:

$$p_{\text{líq}} = p_{\text{gas}} - \left[\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]_{\text{líq}} \qquad w_{\text{líq}} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial z}\right]_{\text{líq}} = 0 \qquad \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{\text{líq}} = 0 \tag{4.71}$$

En muchos casos, como en el flujo en canales abiertos, también es posible despreciar los efectos de tensión superficial, de modo que

$$p_{\text{líq}} = p_{\text{gas}} \tag{4.72}$$

Estos son los tipos de aproximaciones que usaremos en el Capítulo 10. En el Capítulo 5 se utilizarán las formas adimensionales de estas condiciones.

www.elsolucionario.net

Flujo incompresible con propiedades constantes

En el Capítulo 6 se simplificará el análisis de los flujos haciendo la hipótesis de que ρ, μ y k son constantes. En este caso, las ecuaciones básicas del movimiento (4.56) a (4.58) se reducen a

Continuidad:
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{4.73}$$

Cantidad de movimiento:
$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \tag{4.74}$$

Energía:
$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T + \ldots \tag{4.75}$$

Dado que ρ es constante, sólo hay tres incógnitas: p, $\mathbf{V}$ y T. El sistema está cerrado.[12] No sólo eso, el sistema se divide en dos, puesto que las ecuaciones de la continuidad y de la cantidad de movimiento son independientes de T. Por tanto, podemos resolver separadamente las Ecuaciones (4.73) y (4.74) para la presión y la velocidad, utilizando condiciones de contorno tales como

Superficie sólida:
$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{pared}} \tag{4.76}$$

Entrada o salida:
$$\mathbf{V},\ p \text{ conocidas} \tag{4.77}$$

Superficie libre:
$$p = p_a \qquad w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \tag{4.78}$$

[12] Para este sistema, ¿cuáles son los equivalentes termodinámicos a la Ecuación (4.59)?

www.elsolucionario.net

Posteriormente, si se quiere,[13] podemos obtener la distribución de temperaturas de la Ecuación (4.75), que depende de la velocidad **V** a través de la disipación Φ y de la derivada sustancial d/dt.

Aproximaciones para flujos no viscosos

En el Capítulo 8 se consideran los flujos no viscosos, para los cuales la viscosidad $\mu = 0$. La ecuación de la cantidad de movimiento (4.74) se reduce a

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p \tag{4.79}$$

Ésta es la *ecuación de Euler*, que puede integrarse a lo largo de una línea de corriente para obtener la ecuación de Bernoulli (véase Sección 4.9). Al despreciar la viscosidad, hemos perdido los términos de derivadas de segundo orden de **V** en la Ecuación (4.74); por tanto, debemos relajar una condición de contorno de la velocidad. La única condición que matemáticamente se puede quitar es la de no deslizamiento en la pared. Permitiremos que el fluido deslice paralelo a la pared, pero no que penetre en la pared impermeable. La condición apropiada para flujo no viscoso es que las velocidades normales sean iguales a las de las paredes sólidas:

Flujos no viscosoa: $$(V_n)_{\text{fluido}} = (V_n)_{\text{pared}} \tag{4.80}$$

En la mayoría de los casos la pared es fija; por tanto, la condición apropiada es

$$V_n = 0 \tag{4.81}$$

No hay condición alguna para la componente tangencial a la pared en los flujos no viscosos. La velocidad tangencial se obtendrá como parte de la solución del análisis del flujo no viscoso (véase Capítulo 8).

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 4.6

Para el flujo laminar, incompresible y estacionario en un tubo largo, la distribución de velocidades viene dada por

$$v_z = U\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right] \qquad v_r = v_\theta = 0$$

donde U es la velocidad máxima en la línea central y R es el radio del tubo. Si la temperatura de la pared es constante e igual a T_w y la temperatura depende sólo de la distancia r a la línea central, $T = T(r)$, determine $T(r)$ para este flujo.

Solución

Con $T = T(r)$, la Ecuación (4.75) para movimiento estacionario se reduce a

$$\rho c_p v_r \frac{dT}{dr} = k \frac{d}{dr}\left[r \frac{dT}{dr}\right] + \mu \left[\frac{dv_z}{dr}\right]^2 \tag{1}$$

Pero como en este flujo $v_r = 0$, el término convectivo del primer miembro desaparece. Introduciendo v_z en la Ecuación (1), se obtiene

$$k \frac{d}{dr}\left[r \frac{dT}{dr}\right] = -\Phi\mu \left[\frac{dv_z}{dr}\right]^2 = -\Phi \frac{4U^2 \mu r^2}{R^4} \tag{2}$$

[13] Dado que la temperatura está *desacoplada*, no la vamos a resolver aquí; esto se hará en el curso de transporte de calor.

www.elsolucionario.net

Multiplicando por r/k e integrando una vez:

$$r\frac{dT}{dr} = \Phi\frac{\mu U^2 r^4}{kR^4} + C_1 \tag{3}$$

Dividiendo por r e integrando otra vez:

$$T = \Phi\frac{\mu U^2 r^4}{4kR^4} + C_1 \ln r + C_2 \tag{4}$$

Impondremos ahora las condiciones de contorno para determinar C_1 y C_2.
En primer lugar, como el logaritmo de cero es $-\infty$, la temperatura sería infinita en $r = 0$ a menos que

$$C_1 = 0 \tag{5}$$

Eliminamos así la posibilidad de una singularidad logarítmica. Lo mismo habría ocurrido si imponemos la condición de *simetría* $dT/dr = 0$ en $r = 0$ a la Ecuación (3). La constante C_2 se obtiene de la condición de que la temperatura en $r = R$ es igual a la de la pared:

$$T = T_w = \Phi\frac{\mu U^2}{4k} + C_2$$

o

$$C_2 = T_w + \frac{\mu U^2}{4k} \tag{6}$$

La solución correcta es entonces

$$T(r) = T_w + \frac{\mu U^2}{4k}\left[1 - \Phi\frac{r^4}{R^4}\right] \qquad \textit{Resp.}\ (7)$$

www.elsolucionario.net

que es una distribución parabólica de cuarto orden con un valor máximo de $T_0 = T_w + \mu U^2/(4k)$ en la línea central.

4.7. LA FUNCIÓN DE CORRIENTE

Hemos visto en la Sección 4.6 que cuando la temperatura está desacoplada del sistema de ecuaciones del movimiento, se pueden resolver simultáneamente las ecuaciones de la continuidad y de la cantidad de movimiento para obtener la presión y la velocidad. La *función de corriente* ψ es una idea muy ingeniosa que nos permite eliminar la ecuación de la continuidad y resolver la ecuación de la cantidad de movimiento directamente para una única variable ψ.

La idea de la función de corriente sólo es aplicable si la ecuación de la continuidad (4.56) se puede reducir a *dos* sumandos. En general tenemos *cuatro* sumandos:

Cartesianas:
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \tag{4.82a}$$

Cilíndricas:
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \tag{4.82b}$$

Eliminamos primero el flujo no estacionario, que es una aplicación peculiar y poco realista de la función de corriente. Reduzcamos cualquiera de las Ecuaciones (4.82) a la suma de *dos* sumandos. La aplicación más común es el flujo bidimensional incompresible, por ejemplo, en el plano xy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4.83}$$

www.elsolucionario.net

Esta ecuación se satisface *idénticamente* si se define una función $\psi(x, y)$, de tal modo que la Ecuación (4.83) toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0 \tag{4.84}$$

Comparando (4.83) con (4.84), la nueva función ψ debe definirse de tal modo que

$$\boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = \rho \frac{\partial \psi}{\partial x}} \tag{4.85}$$

o

$$\boxed{\mathbf{V} = \mathbf{i}\frac{\partial \psi}{\partial y} \rho \mathbf{j}\frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

¿Es esto legítimo? Sí, no es más que un truco matemático para reemplazar dos variables (u y v) por una única función ψ de orden superior. La vorticidad[14], o rot **V**, es una función interesante:

$$\text{rot}\,\mathbf{V} = \rho \mathbf{k} \nabla^2 \psi \quad \text{donde} \quad \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{4.86}$$

Si tomamos el rotor de la ecuación de la cantidad de movimiento (4.74) y utilizamos la Ecuación (4.86), obtenemos una única ecuación para ψ en flujo incompresible:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \psi) \rho \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 \psi) = \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi) \tag{4.87}$$

donde $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática. Esta ecuación tiene ventajas e inconvenientes: ventajas porque la Ecuación (4.87) es escalar y sólo hay una variable, ψ, pero como contrapartida contiene derivadas de *cuarto* orden, y probablemente requiera una solución numérica. Se necesitan cuatro condiciones de contorno para ψ. Por ejemplo, si el flujo es una corriente uniforme en la dirección del eje x que incide sobre un cuerpo sólido, las cuatro condiciones de contorno serían:

En el infinito: $$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U_\infty \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

En el cuerpo: $$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{4.88}$$

En la Referencia 1 se dan muchos ejemplos de soluciones numéricas de las Ecuaciones (4.87) y (4.88).

Una aplicación importante es la del flujo no viscoso, *irrotacional* e incompresible[15] en el plano xy, donde rot **V** ≡ 0. Las Ecuaciones (4.86) y (4.87) se reducen a

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{4.89}$$

[14] Véase la Sección 4.8.
[15] Véase la Sección 4.8.

www.elsolucionario.net

Ésta es la *ecuación de Laplace* (Capítulo 8), de segundo orden, para la que se conocen muchas soluciones y técnicas analíticas para obtenerlas. A su vez, las condiciones de contorno tales como las dadas en (4.88) se reducen a:

En el infinito: $\psi = U_{\infty} y + \text{cte}$ (4.90)

En el cuerpo: $\psi = \text{constante}$

Está dentro de nuestras posibilidades el encontrar soluciones simples a las Ecuaciones (4.89) y (4.90), como las que daremos en el Capítulo 8.

Interpretación geométrica de ψ

La idea matemática anterior podría servir por sí misma para hacer la función de corriente ψ inmortal y muy útil para los ingenieros. Por si fuera poco, ψ tiene una bella interpretación geométrica: las líneas ψ constante son *líneas de corriente* del flujo. Esto puede demostrarse como sigue. La definición de las líneas de corriente en un flujo bidimensional, dada por la Ecuación (1.41), es

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

o $$u\,dy - v\,dx = 0 \quad \text{línea de corriente} \tag{4.91}$$

Introduciendo la función de corriente de la Ecuación (4.85), tenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0 = d\psi \tag{4.92}$$

www.elsolucionario.net

Por tanto, la variación de ψ a lo largo de las líneas de corriente es cero, o

$$\psi = \text{constante a lo largo de las líneas de corriente} \tag{4.93}$$

Dada una solución $\psi(x, y)$, podemos representar las líneas ψ constante para obtener las líneas de corriente del flujo.

Hay también una interpretación física que relaciona ψ con el flujo volumétrico. De la Figura 4.8 podemos determinar el flujo volumétrico dQ a través de un elemento de superficie de control ds de profundidad unidad:

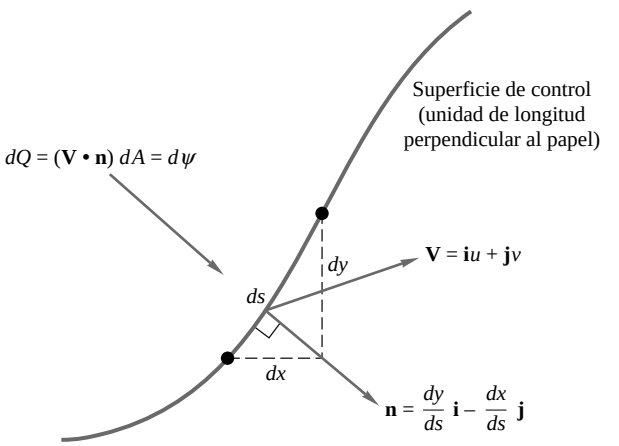


Figura 4.8. Interpretación geométrica de la función de corriente: flujo volumétrico a través de un elemento infinitesimal de superficie de control.

www.elsolucionario.net

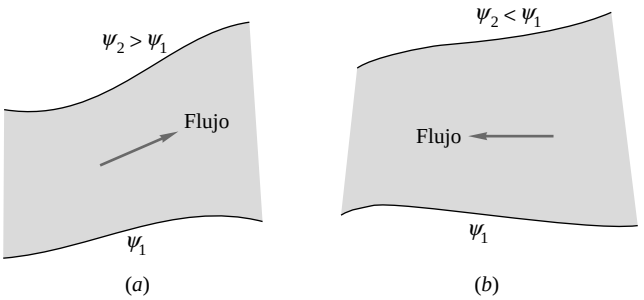


Figura 4.9. Convenio de signos para la dirección del flujo de acuerdo con la variación de la función de corriente: (*a*) flujo hacia la derecha si ψ_2 es más grande; (*b*) flujo hacia la izquierda si ψ_1 es más grande.

$$dQ = (\mathbf{V}\Delta\mathbf{n})dA = \left[\mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \mathbf{j}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]\Delta\left[\mathbf{i}\frac{dy}{ds} - \mathbf{j}\frac{dx}{ds}\right]ds \quad (1)$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = d\psi \quad (4.94)$$

Por tanto, la variación de ψ a través del elemento es numéricamente igual al flujo volumétrico a través del elemento. El flujo volumétrico entre dos líneas de corriente cualesquiera del flujo es igual a la diferencia de valores de la función de corriente entre dichas líneas de corriente:

$$Q_{1\gamma\ 2} = \int_1^2 (\mathbf{V}\Delta\mathbf{n})dA = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (4.95)$$

www.elsolucionario.net

Por otra parte, se puede determinar la dirección del flujo observando si ψ crece o decrece. Como muestra la Figura 4.9, el flujo es hacia la derecha si ψ_2 es mayor que ψ_1; en caso contrario, el flujo es hacia la izquierda.

Tanto la función de corriente como el potencial de velocidades los inventó el matemático francés Joseph Louis Lagrange, y los publicó en su tratado sobre mecánica de fluidos en 1781.

EJEMPLO 4.7

¿Existe una función de corriente para el campo de velocidades del Ejemplo 4.5?

$$u = a(x^2 - y^2) \quad v = -2axy \quad w = 0$$

Si es así, determínela, dibújela e interprétela.

Solución

- *Consideraciones*. Flujo incompresible y bidimensional.
- *Procedimiento*. Utilizaremos la definición de las derivadas de la función de corriente, Ecuaciones (4.85), para determinar $\psi(x, y)$.
- *Paso 1*. En el Ejemplo 4.3 se mostró que este campo de velocidades satisface la ecuación de la continuidad (4.83), luego, estamos razonablemente seguros de que existe función de corriente, pero volvamos a comprobarlo; en caso contrario no existiría ψ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}[a(x^2 - y^2)] + \frac{\partial}{\partial y}(-2axy) = 2ax + (-2ax) = 0 \quad \text{se cumple}$$

Por tanto, existe la función de corriente.

www.elsolucionario.net

• *Paso 2*. Para determinar ψ, escribimos las Ecuaciones (4.85) e integramos:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = ax^2 - ay^2 \tag{1}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2axy \tag{2}$$

y podemos empezar a operar con cualquiera de ellas. Integrando parcialmente (1)

$$\psi = ax^2 y - \frac{ay^3}{3} + f(x) \tag{3}$$

Derivando (3) con respecto de x y comparándola con (2),

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2axy + f'(x) = 2axy \tag{4}$$

Así pues, $f'(x) = 0$, o f = constante. La función de corriente es, por tanto:

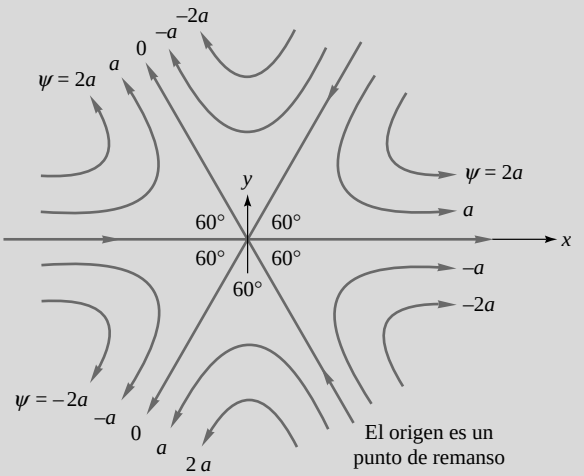
$$\psi = a\left[x^2 y - \frac{y^3}{3}\right] + C \qquad \textit{Resp.} \tag{5}$$

Para representarla elegimos $C = 0$ por conveniencia y representamos la función

www.elsolucionario.net

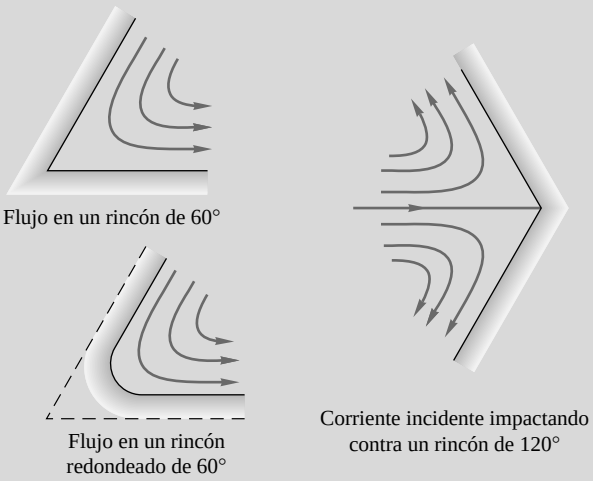
$$3x^2 y - y^3 = \frac{3\psi}{a} \tag{6}$$

para valores constantes de ψ. El resultado, que se muestra en la Figura E4.7*a*, representa un movimiento circulatorio en seis cuñas de 60°, en cuyo interior el movimiento es idéntico salvo por el sentido que indican las flechas. Una vez que se tienen las líneas de corriente, la dirección del flujo se obtiene directamente del convenio de signos de la Figura 4.9. ¿Cómo puede interpretarse el flujo? Puesto que hay deslizamiento a lo largo de todas las líneas de corriente, ninguna de ellas puede representar una superficie en un flujo viscoso. Sin embargo, el flujo podría representar la deflexión de tres corrientes incidiendo a 60, 180 y 300°. Como vimos en el Ejemplo 4.5, ésta es una solución exacta, aunque todavía poco realista, de las ecuaciones de Navier-Stokes.



E4.7a

www.elsolucionario.net



E4.7b

Permitiendo al fluido deslizar, como en la aproximación no viscosa, podríamos considerar alguna línea de corriente como representativa de la forma de un cuerpo. La Figura E4.7*b* muestra algunos ejemplos.

Existe también función de corriente en una variedad de situaciones físicas donde sólo se necesitan dos coordenadas para describir el flujo. Se ilustran aquí tres ejemplos.

Flujo plano, compresible y estacionario

www.elsolucionario.net

Suponga ahora que la densidad es variable, pero que $w = 0$, de modo que el flujo tiene lugar en el plano xy. En este caso, la ecuación de la continuidad es

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \tag{4.96}$$

Vemos que es exactamente de la misma forma que la Ecuación (4.84). Por tanto, la función de corriente de un flujo compresible puede definirse de tal modo que

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{4.97}$$

De nuevo, las líneas ψ constante son líneas de corriente, pero ahora la diferencia de valores de ψ es igual al flujo *másico* y no al volumétrico:

$$d\dot{m} = \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\,dA = d\psi$$

o

$$\dot{m}_{1 \to 2} = \int_1^2 \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\,dA = \psi_2 - \psi_1 \tag{4.98}$$

El convenio de signos para la dirección del flujo es el mismo que en la Figura 4.9. Esta función de corriente combina la densidad con la velocidad y debe sustituirse no sólo en la ecuación de la cantidad de movimiento, sino también en la de la energía y en las de estado (4.58) y (4.59) con la presión y la temperatura como variables adicionales. En estas condiciones, la función de corriente no es tan útil como en el caso de densidad constante, y suelen ser necesarias algunas simplificaciones adicionales para obtener soluciones analíticas de problemas típicos (véase, por ejemplo, Referencia 5, Capítulo 7).

www.elsolucionario.net

Flujo incompresible plano en coordenadas polares

Supongamos que las coordenadas importantes son r y θ, con $v_z = 0$, y que la densidad es constante. Entonces la Ecuación (4.82*b*) se reduce a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) = 0 \tag{4.99}$$

Después de multiplicar todo por r, toma una forma análoga a la de la Ecuación (4.84):

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0 \tag{4.100}$$

Comparando (4.99) con (4.100) se deduce la forma de la función de corriente incompresible en coordenadas polares:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{4.101}$$

De nuevo, las líneas ψ constante son líneas de corriente, y la diferencia de dos valores de ψ es el *flujo volumétrico*, $Q_{1\to 2} = \psi_2 - \psi_1$. El convenio de signos es el mismo que en la Figura 4.9. Este tipo de función de corriente es muy útil a la hora de analizar flujos alrededor de cilindros, con torbellinos, fuentes y sumideros (Capítulo 8).

Flujo incompresible axilsimétrico

www.elsolucionario.net

Como ejemplo final, supongamos que el flujo es tridimensional (v_r, v_z) pero sin variaciones circunferenciales, $v_\theta = \partial/\partial\theta = 0$ (para la definición de las coordenadas véase Figura 4.2). Un flujo de este tipo se denomina *axilsimétrico*, y la estructura del flujo es la misma en cualquier plano meridional que contiene al eje de revolución z. Para un flujo incompresible, la Ecuación (4.82*b*) toma la forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \tag{4.102}$$

Aquí hay algo que no funciona: ¿cómo podríamos deshacernos de la r que aparece dividiendo en el primer miembro? Dado que r y z son coordenadas independientes, la Ecuación (4.102) puede rescribirse como

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) = 0 \tag{4.103}$$

Por analogía con (4.84), esta ecuación toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0 \tag{4.104}$$

Comparando (4.103) con (4.104), deducimos la forma de la función de corriente $\psi(r, z)$ para el movimiento axilsimétrico de un fluido incompresible

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{4.105}$$

www.elsolucionario.net

Las líneas ψ constante son, de nuevo, líneas de corriente, pero hay un factor (2π) en el flujo volumétrico: $Q_{1\to 2} = 2\pi(\psi_2 - \psi_1)$. El convenio de signos para el flujo es el mismo que en la Figura 4.9.

EJEMPLO 4.8

Investigue la función de corriente en coordenadas polares

$$\psi = U \operatorname{sen} \theta \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \tag{1}$$

donde U y R son una velocidad y una longitud constantes, respectivamente. Represente las líneas de corriente. ¿Qué representa el flujo? ¿Se trata de una solución realista de las ecuaciones básicas?

Solución

Las líneas de corriente son líneas de ψ constante, cuyas dimensiones son metro cuadrado por segundo. Obsérvese que $\psi/(UR)$ es adimensional. Reescribimos la Ecuación (1) en forma adimensional

$$\frac{\psi}{UR} = \operatorname{sen} \theta \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right) \qquad \Omega = \frac{r}{R} \tag{2}$$

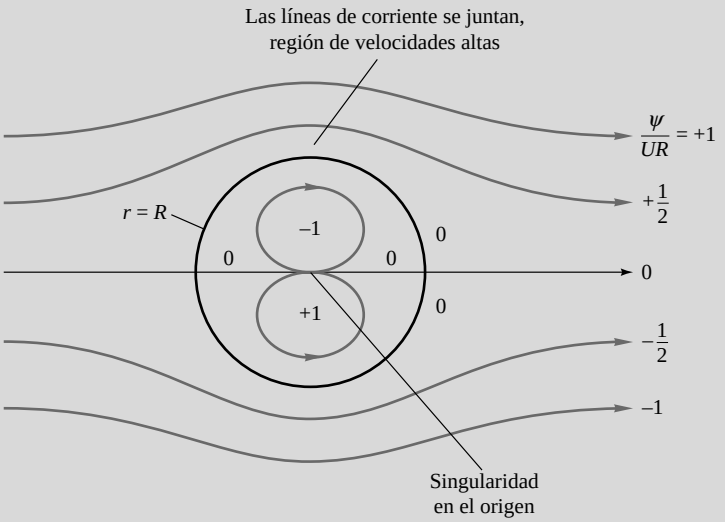
La línea $\psi = 0$ es de particular interés. De la Ecuación (1) o (2) se obtiene que esto ocurre cuando (*a*) $\theta = 0$ o 180° y (*b*) $r = R$. El caso (*a*) es el eje x y el caso (*b*) es un círculo de radio R, ambos representados en la Figura E4.8.

Para cualquier valor de ψ distinto de cero, es fácil despejar θ en función de r:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\psi/(UR)}{r/R - R/r} \tag{3}$$

www.elsolucionario.net

En general habrá dos soluciones para θ a causa de la simetría alrededor del eje y. Por ejemplo, tomando $\psi/(UR) = +1{,}0$:



E4.8

r/R (supuesto)	3,0	2,5	2,0	1,8	1,7	1,618
θ (calculado)	22° 158°	28° 152°	42° 138°	53° 127°	64° 116°	90°

www.elsolucionario.net

Esta línea, representada en la Figura E4.8, es exterior al círculo $r = R$. Obsérvese que hay una segunda curva para $\psi/(UR) = +1{,}0$ con valores de $r < R$ que está situada por debajo del eje x:

r/R (supuesto)	0,618	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
θ (calculado)	–90°	–70° –110°	–42° –138°	–28° –152°	–19° –161°	–12° –168°	–6° –174°

Esta segunda curva está representada como una curva cerrada en el interior del círculo $r = R$. Hay una singularidad en el origen, donde la velocidad es infinita y la dirección de la corriente está indeterminada. En la Figura E4.8 se muestra el esquema completo de las líneas de corriente.

La función de corriente de la Ecuación (1) corresponde a una solución exacta, ya clásica, de la ecuación de la cantidad de movimiento (4.38) para un flujo no viscoso. Fuera del círculo $r = R$ representa el flujo no viscoso bidimensional de una corriente uniforme alrededor de un cilindro circular (Sección 8.3). En el interior del círculo representa un movimiento circulatorio, bastante poco realista, denominado *doblete*.

4.8. VORTICIDAD E IRROTACIONALIDAD

La suposición de velocidad angular nula del fluido, o irrotacionalidad, conduce a simplificaciones muy útiles. Vamos a mostrar aquí que la velocidad angular está asociada al rotor de la velocidad local de un fluido.

Las relaciones diferenciales para la deformación de un elemento fluido pueden obtenerse analizando la Figura 4.10. Dos líneas fluidas AB y BC, perpendiculares entre sí en el instante t, se mueven y se deforman de modo que en el instante $t + dt$ tienen longitudes ligeramente diferentes $A'B'$ y $B'C'$, y el ángulo que forman difiere de 90° en los ángulos $d\alpha$ y $d\beta$. Tales deformaciones aparecen de un modo cinemático a consecuencia de que A, B y C tienen velocidades ligeramente distintas cuando el campo de velocidades $\mathbf{V}$ no es espacialmente uniforme. Estos cambios diferenciales en el movimiento de A, B y C se indican en la Figura 4.10.

www.elsolucionario.net

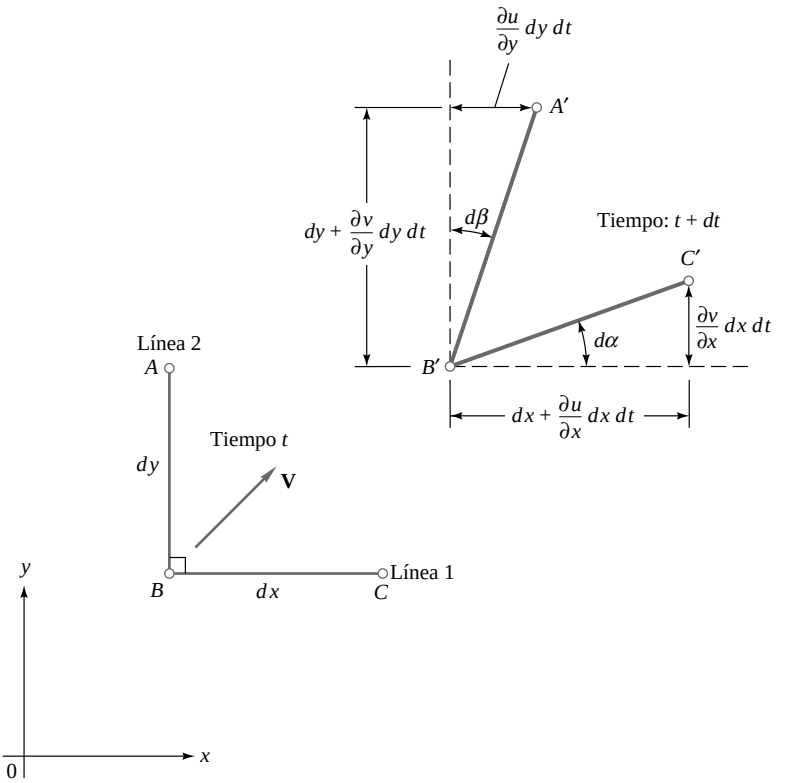


Figura 4.10. Velocidad angular y velocidad de deformación de dos líneas fluidas que se deforman en el plano xy.

www.elsolucionario.net

Definimos la velocidad angular ω_z alrededor del eje z como el valor medio del giro, por unidad de tiempo, de las dos líneas en sentido contrario a las aguas del reloj:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\right) \tag{4.106}$$

Pero como muestra la Figura 4.10, $d\alpha$ y $d\beta$ están directamente relacionados para valores infinitesimales de dt mediante las derivadas de la velocidad:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \lim_{dt\to 0}\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{(\partial v/\partial x)\,dx\,dt}{dx + (\partial u/\partial x)\,dx\,dt}\right] = \frac{\partial v}{\partial x}dt \\ d\beta &= \lim_{dt\to 0}\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{(\partial u/\partial y)\,dy\,dt}{dy + (\partial v/\partial y)\,dy\,dt}\right] = \frac{\partial u}{\partial y}dt \end{aligned} \tag{4.107}$$

Combinando las Ecuaciones (4.106) y (4.107) se obtiene el resultado deseado:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{4.108}$$

De forma análoga se obtiene

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{4.109}$$

El vector $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i}\omega_x + \mathbf{j}\omega_y + \mathbf{k}\omega_z$ es la mitad del rotor de la velocidad

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{vmatrix} \tag{4.110}$$

Como el factor $\frac{1}{2}$ es incómodo, resulta preferible trabajar con un vector el doble de grande, que se denomina *vorticidad*:

$$\boldsymbol{\zeta} = 2\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{V} \tag{4.111}$$

Muchos flujos tienen vorticidad nula y reciben el nombre de *irrotacionales*:

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} \equiv 0 \tag{4.112}$$

La próxima sección amplía esta idea. Tales flujos pueden ser incompresibles o compresibles, estacionarios o no estacionarios.

Podemos observar que en la Figura 4.10 se muestra también cómo calcular la *velocidad de deformación* del elemento, definida como el ritmo al que se juntan las líneas inicialmente perpendiculares entre sí:

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.113}$$

Cuando se multiplica por la viscosidad μ, se obtiene el esfuerzo viscoso de cortadura τ_{xy} en un fluido newtoniano, como se indicó anteriormente en las Ecuaciones (4.37). En el Apéndice D se pueden encontrar ex-

www.elsolucionario.net

presiones para las velocidades de deformación y las componentes de la vorticidad en coordenadas cilíndricas.

4.9. FLUJOS IRROTACIONALES NO VISCOSOS

Cuando el flujo es a la vez irrotacional y no viscoso, ocurren varias cosas interesantes. En primer lugar, la ecuación de la cantidad de movimiento (4.38) se reduce a la ecuación de Euler:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p \tag{4.114}$$

En segundo lugar, el término de la aceleración se simplifica considerablemente. Recuérdese que, según la Sección 4.1, la aceleración tiene dos términos:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} \tag{4.2}$$

Utilizando una identidad vectorial bien conocida, el segundo término puede escribirse como [11]:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \nabla\left(\tfrac{1}{2} V^2\right) + \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{V} \tag{4.115}$$

donde $\boldsymbol{\zeta}$ = rot $\mathbf{V}$ es la vorticidad del fluido, Ecuación (4.111).

Combinemos ahora (4.114) con (4.115), dividiendo primero por ρ y reordenando el primer miembro. Multiplicando escalarmente toda la ecuación por un vector desplazamiento arbitrario $d\mathbf{r}$, se obtiene:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2} V^2\right) + \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g}\right] \cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{4.116}$$

El tercer sumando se anula si

$$(\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{V}) \cdot (d\mathbf{r}) \equiv 0 \tag{4.117}$$

lo que ocurrirá bajo las siguientes condiciones:

1. $\mathbf{V}$ es cero; caso trivial, no hay flujo (hidrostática).
2. $\boldsymbol{\zeta}$ es cero; flujo irrotacional.
3. $d\mathbf{r}$ es perpendicular a $\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{V}$; este flujo es bastante particular y resulta poco común.
4. $d\mathbf{r}$ es paralelo a $\mathbf{V}$; integramos *a lo largo de una línea de corriente* (véase Sección 3.7).

La condición 4 es la que conduce a resultados más útiles. Si integramos a lo largo de una línea de corriente en un flujo compresible no viscoso y tomamos por conveniencia $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$, la Ecuación (4.116) se reduce a

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} + d\left(\frac{1}{2} V^2\right) + \frac{dp}{\rho} + g\, dz = 0 \tag{4.118}$$

A excepción del primer y tercer sumandos, todos los términos son diferenciales exactas. Integrando a lo largo de una línea de corriente entre los puntos 1 y 2:

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} ds + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) + g(z_2 - z_1) = 0 \tag{4.119}$$

www.elsolucionario.net

donde *ds* es el elemento de longitud a lo largo de la línea de corriente. La Ecuación (4.119) es la ecuación de Bernoulli para flujo no estacionario y no viscoso a lo largo de una línea de corriente y es idéntica a la Ecuación (3.76). Para flujo incompresible estacionario, se reduce a

$$\frac{p}{\Leftarrow} + \frac{1}{2}V^2 + gz = \text{constante a lo largo de una línea de corriente} \tag{4.120}$$

La constante puede variar de una línea de corriente a otra a menos que el flujo sea también irrotacional (suposición 2). Para flujo irrotacional, $\zeta = 0$, la Ecuación (4.117) se cumple independientemente de la dirección de $d\mathbf{r}$, y la constante de la Ecuación (4.120) es la misma en todo el campo fluido.

Potencial de velocidades

La irrotacionalidad da lugar a una función escalar ϕ similar y complementaria a la función de corriente ψ. Un teorema del análisis vectorial [11] muestra que un vector con rotacional nulo debe ser el gradiente de una función escalar

$$\text{Si} \quad \nabla \times \mathbf{V} \equiv 0 \quad \text{entonces} \quad \mathbf{V} = \nabla\phi \tag{4.121}$$

donde $\phi = \phi(x, y, z, t)$ recibe el nombre de *potencial de velocidades*. Conocida ϕ, pueden obtenerse inmediatamente las componentes de la velocidad

$$\boxed{u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial\phi}{\partial z}} \tag{4.122}$$

www.elsolucionario.net

Las líneas o superficies ϕ constante se denominan *líneas* (*o superficies*) *equipotenciales* del flujo.

Obsérvese que ϕ, a diferencia de la función de corriente, es completamente tridimensional y no está limitada a dos coordenadas. Esto reduce un problema con tres incógnitas (u, v y w) a un único potencial desconocido ϕ; en el Capítulo 8 y en la Sección 4.10 se dan muchos ejemplos. La ecuación de Bernoulli no estacionaria (4.118) también se simplifica cuando existe potencial de velocidades, ya que si ϕ existe tenemos

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}\cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi)\cdot d\mathbf{r} = d\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\right] \tag{4.123}$$

a lo largo de cualquier dirección arbitraria. La Ecuación (4.118) se convierte entonces en una relación entre ϕ y p:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \int\frac{dp}{\Leftarrow} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + gz = \text{constante} \tag{4.124}$$

Ésta es la ecuación de Bernoulli para movimiento irrotacional no estacionario. Es muy importante en el análisis de flujos no estacionarios (vea las Referencias 10 y 15), pero en este texto sólo se dará una aplicación para flujo estacionario en la Sección 9.3.

Ortogonalidad de las líneas de corriente y equipotenciales

Si un flujo es irrotacional y puede describirse mediante sólo dos coordenadas, existen tanto la función de corriente ψ como el potencial de velocidades ϕ, y las líneas de corriente y equipotenciales son ortogonales entre sí salvo en los puntos de remanso. Por ejemplo, para el flujo incompresible en el plano xy, tendríamos

www.elsolucionario.net

$$u = \frac{\partial \exists}{\partial y} = \frac{\partial \forall}{\partial x} \tag{4.125}$$

$$v = \frac{\partial \exists}{\partial x} = \frac{\partial \forall}{\partial y} \tag{4.126}$$

¿Podría deducir a primera vista que estas relaciones no sólo implican ortogonalidad, sino también que ϕ y ψ satisfacen la ecuación de Laplace?[16] Una línea ϕ constante será tal que a lo largo de ella la variación de ϕ es nula:

$$d\forall = \frac{\partial \forall}{\partial x} dx + \frac{\partial \forall}{\partial y} dy = 0 = u\,dx + v\,dy \tag{4.127}$$

de donde

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\forall=\text{cte}} = \Phi\frac{u}{v} = \Phi\frac{1}{(dy/dx)_{\forall=\text{cte}}} \tag{4.128}$$

La Ecuación (4.128) es la condición matemática de ortogonalidad entre las líneas ϕ y ψ constante. Esto puede no ser cierto en un punto de remanso, donde u y v son cero, de modo que su cociente en la Ecuación (4.128) está indeterminado.

Generación de vorticidad[17]

Ésta es la segunda vez que tratamos la ecuación de Bernoulli en circunstancias distintas (la primera fue en la Sección 3.7). Tal insistencia es buena, puesto que probablemente es la ecuación más usada en la Mecánica de Fluidos. Para su validez es necesario que el flujo sea no viscoso, y que no exista trabajo exterior ni adición de calor entre las secciones 1 y 2. El flujo puede ser o no irrotacional; si es irrotacional el problema es más sencillo, pues la constante de la ecuación de Bernoulli es universal.

Queda una única cuestión: ¿*Cuándo* es un flujo irrotacional? En otras palabras, ¿cuándo tiene un flujo una velocidad angular despreciable? El análisis exacto de la rotacionalidad del fluido bajo condiciones arbitrarias es un tema para estudios avanzados (véase, por ejemplo, Referencia 10, Sección 8.5; Referencia 9, Sección 5.2, y Referencia 5, Sección 2.10). Daremos aquí los resultados sin demostrarlos.

Un flujo inicialmente irrotacional puede llegar a ser rotacional si:

1. Hay fuerzas viscosas apreciables inducidas por chorros, estelas o paredes sólidas. En este caso la ecuación de Bernoulli no es válida en dichas regiones viscosas.
2. Hay gradientes de entropía originados por ondas de choque curvadas (véase Figura 4.11*b*).
3. Hay gradientes de densidad originados por *estratificación* (calentamiento no uniforme) más que por gradientes de presión.
4. Hay efectos *no inerciales* importantes tales como la rotación de la Tierra (aceleración de Coriolis).

En los casos 2 a 4, la ecuación de Bernoulli sigue siendo válida a lo largo de una línea de corriente si la fricción es despreciable. En este libro no estudiaremos los casos 3 y 4. El caso 2 se tratará brevemente en el Capítulo 9, sobre dinámica de gases. Principalmente estamos interesados en el caso 1, donde la vorticidad se induce por los esfuerzos viscosos. Esto ocurre cerca de superficies sólidas, donde la condición de no deslizamiento crea una capa límite a través de la cual la velocidad cae a cero, y en chorros y estelas, donde corrientes con distintas velocidades aparecen separadas por una capa delgada de cortadura muy intensa.

Los flujos internos, como en tubos y conductos, son principalmente viscosos, pues las capas límite de las paredes crecen hasta extenderse a todo el conducto. La ecuación de Bernoulli no es válida en estos flujos a menos que se modifique incluyendo los efectos de las pérdidas viscosas.

---

[16] Las Ecuaciones (4.125) y (4.126) se denominan *condiciones de Cauchy-Riemann* y se estudian en la teoría de variable compleja.

[17] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

Los flujos externos, como el flujo alrededor de cuerpos sumergidos en una corriente, son parcialmente viscosos y parcialmente no viscosos; las dos regiones se acoplan en el borde de la capa de cortadura o capa límite. Se muestran dos ejemplos en la Figura 4.11. La Figura 4.11*a* muestra un flujo subsónico alrededor de un cuerpo. La corriente incidente uniforme es irrotacional, pues el rotor de una constante es cero, pero los esfuerzos viscosos originan una capa de cortadura en torno y aguas abajo del cuerpo. En términos generales (véase Capítulo 7), la capa de cortadura es laminar, u ordenada, cerca del borde de ataque del cuerpo, y turbulenta, o desordenada, en la parte posterior. Generalmente aparece una región desprendida, o muerta, cerca del borde de salida, seguida de una estela turbulenta no estacionaria, que se extiende lejos aguas abajo. Existen teorías viscosas laminares o turbulentas aproximadas para analizar estas regiones; las soluciones se acoplan entonces con la solución para la corriente exterior, que es irrotacional y no viscosa. Si el número de Mach de la corriente es menor que 0,3, se puede combinar la Ecuación (4.122) con la ecuación de la continuidad para flujo incompresible (4.73):

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot (\nabla \phi) = 0$$

o

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}} \tag{4.129}$$

Ésta es la ecuación de Laplace en tres dimensiones, sin que existan restricciones para el número de coordenadas del flujo potencial. Gran parte del Capítulo 8 trata de la solución de la Ecuación (4.129) para problemas ingenieriles prácticos; esta solución es válida en toda la región de la Figura 4.11*a* fuera de la capa de cortadura.

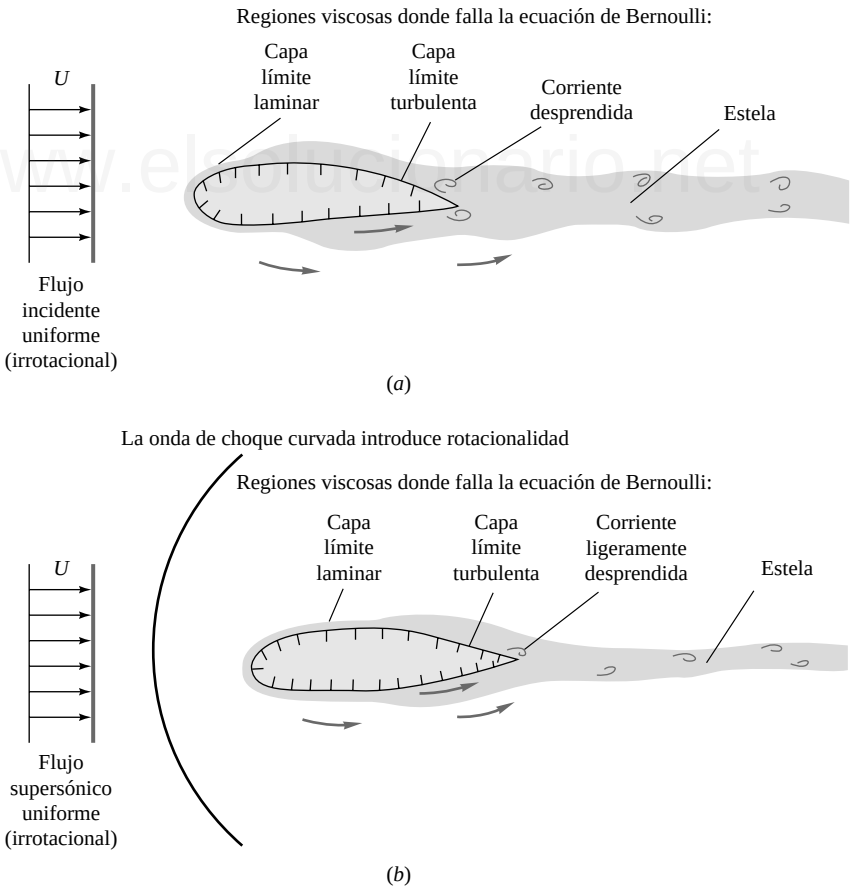


Figura 4.11. Modelos típicos del flujo que muestran las regiones viscosas acopladas a regiones no viscosas: (*a*) flujo subsónico alrededor de un cuerpo ($U \ll a$); flujo no viscoso e irrotacional fuera de la capa límite y la estela (donde son válidas las ecuaciones de Bernoulli y Laplace); (*b*) flujo supersónico alrededor de un cuerpo ($U > a$); flujo rotacional no viscoso fuera de la capa límite y la estela (ecuación de Bernoulli válida, pero no existe potencial de velocidades).

www.elsolucionario.net

La Figura 4.11*b* muestra un flujo supersónico alrededor de un cuerpo con borde de ataque redondeado. Generalmente se forma una onda de choque curvada en la parte delantera, y el flujo aguas abajo es *rotacional* debido a los gradientes de entropía (caso 2). Podemos utilizar la ecuación de Euler (4.114) en esta región no viscosa, pero no la teoría potencial. Las capas de cortadura tienen el mismo carácter general que en la Figura 4.11*a*, excepto que la zona de separación es pequeña, o a menudo no existe, y la estela es normalmente más delgada. La teoría de flujos desprendidos es actualmente de carácter cualitativo, pero se pueden hacer estimaciones cuantitativas de las capas límite laminares y turbulentas y de las estelas.

EJEMPLO 4.9

¿Existe un potencial de velocidades para el campo de velocidades del Ejemplo 4.5?

$$u = a(x^2 - y^2) \qquad v = -2axy \qquad w = 0$$

Si es así, determínelo, represéntelo y compárelo con el Ejemplo 4.7.

Solución

Puesto que $w = 0$, el rotor de $\mathbf{V}$ tiene sólo una componente, según z, y debemos demostrar que es nula:

$$(\nabla \times \mathbf{V})_z = 2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-2axy) - \frac{\partial}{\partial y}(ax^2 - ay^2)$$

$$= -2ay + 2ay = 0 \quad \text{se cumple} \qquad \textit{Resp.}$$

Por tanto, el flujo es irrotacional y existe potencial de velocidades.

Para encontrar $\phi(x, y)$, escribimos

www.elsolucionario.net

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = ax^2 - ay^2 \tag{1}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -2axy \tag{2}$$

Integrando (1)

$$\phi = \frac{ax^3}{3} - axy^2 + f(y) \tag{3}$$

Derivando (3) y comparándola con (2),

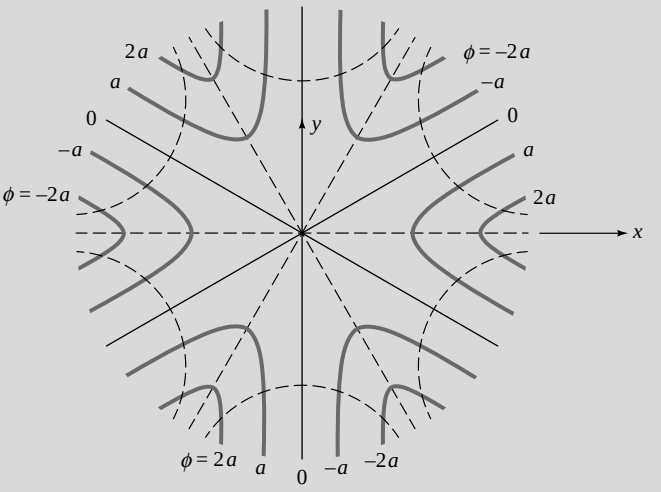
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -2axy + f'(y) = -2axy \tag{4}$$

Por tanto, $f' = 0$, o f = constante. El potencial de velocidades es

$$\phi = \frac{ax^3}{3} - axy^2 + C \qquad \textit{Resp.}$$

Haciendo $C = 0$, podemos representar las líneas ϕ constante del mismo modo que en el Ejemplo 4.7. El resultado se muestra en la Figura E4.9 (sin flechas para ϕ). Para este problema en particular, las líneas ϕ constante forman el mismo patrón que las líneas ψ constante del Ejemplo 4.7 (que se representan aquí en trazo discontinuo), pero están giradas 30°. Las líneas ϕ y ψ constantes son perpendiculares en todo el campo fluido salvo en el origen, que es un

www.elsolucionario.net



E4.9

punto de remanso, donde forman un ángulo de 30°. Ya esperábamos que hubiera problemas en el punto de remanso, y en general no hay ninguna regla para determinar el comportamiento de las líneas en estos puntos.

4.10. ALGUNOS FLUJOS POTENCIALES PLANOS ILUSTRATIVOS[18]

El Capítulo 8 está dedicado completamente al estudio detallado de los flujos no viscosos incompresibles, especialmente aquellos que tienen tanto función de corriente como potencial de velocidades. Como se indica en la Figura 4.11*a*, el flujo no viscoso es válido lejos de las superficies sólidas y se «acopla» a las capas viscosas cerca de la pared, una idea que se desarrolla en el Capítulo 7. Mediante la estructura de los flujos no viscosos, es posible simular diversas formas de cuerpos. Aquí estudiamos los flujos planos, tres de los cuales se muestran en la Figura 4.12.

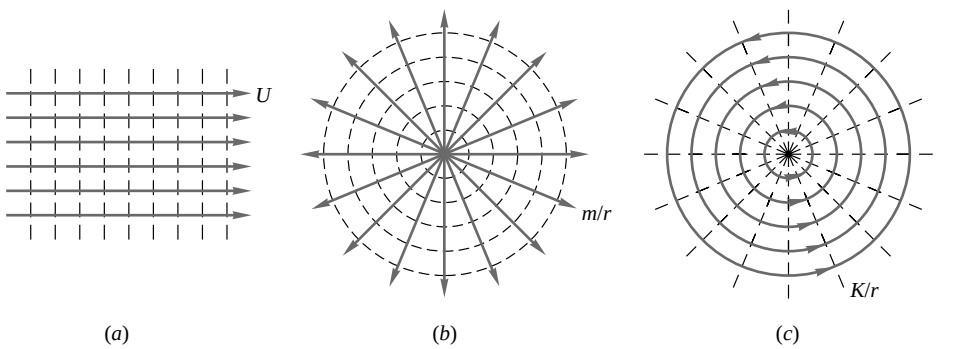


Figura 4.12. Tres flujos potenciales planos básicos. Las líneas continuas son líneas de corriente y las líneas discontinuas son líneas equipotenciales.

[18] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

Corriente uniforme en la dirección del eje *x*

Una corriente uniforme $\mathbf{V} = \mathbf{i}U$, como la de la Figura 4.12*a*, posee tanto función de corriente como potencial de velocidades, que se pueden determinar de la siguiente manera:

$$u = U = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = 0 = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Podemos integrar cada una de las expresiones anteriores y deshacernos de las constantes de integración, que no afectan a las velocidades ni a las presiones. Los resultados son

Corriente uniforme $\mathbf{i}U$: $\qquad \psi = Uy \qquad \phi = Ux \qquad (4.130)$

Las líneas de corriente son líneas rectas horizontales (y = cte), y las líneas equipotenciales son verticales (x = cte), esto es, ortogonales a las líneas de corriente, como era de esperar.

Fuente o sumidero en el origen

Supongamos que el eje z fuera una especie de tubo delgado perforado que emitiese transversalmente un caudal Q uniforme a lo largo de su longitud b. Mirando al plano xy, veríamos un flujo radial saliente, o *fuente*, como muestra esquemáticamente la Figura 4.12*b*. En este caso conviene utilizar coordenadas polares (véase Figura 4.2), pues no hay velocidad circunferencial. A una distancia radial r, la velocidad es

$$v_r = \frac{Q}{2\pi rb} = \frac{m}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad v_\theta = 0 = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

donde se ha usado la forma de la función de corriente y del potencial de velocidades en coordenadas polares. Si ignoramos de nuevo las constantes de integración, integrando obtenemos:

Fuente o sumidero bidimensional: $\qquad \psi = m\theta \qquad \phi = m \ln r \qquad (4.131)$

donde $m = Q/(2\pi b)$ es una constante, positiva para una distribución lineal de fuentes, o fuente bidimensional, y negativa para un sumidero. Como se muestra en la Figura 4.12*b*, las líneas de corriente son rayos radiales (θ constante), y las líneas equipotenciales son circunferencias (r constante).

Torbellino irrotacional

Un torbellino (bidimensional) es un flujo circulatorio puro, $v_\theta = f(r)$, $v_r = 0$. Este movimiento satisface idénticamente la ecuación de la continuidad, como puede comprobarse utilizando la Ecuación (4.12*b*). Conviene advertir que existe una gran variedad de distribuciones de velocidad $v_\theta(r)$ que satisfacen la ecuación de cantidad de movimiento de un fluido viscoso en la dirección θ, Ecuación (D.6). Se deja como ejercicio demostrar que sólo una de estas funciones $v_\theta(r)$ es *irrotacional*: esto es, rot $\mathbf{V} = 0$. Concretamente, $v_\theta = K/r$, donde K es una constante. En este caso, es fácil calcular la función de corriente y el potencial de velocidades:

$$v_r = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad v_\theta = \frac{K}{r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

Podemos integrar nuevamente para determinar las funciones apropiadas:

$$\psi = -K \ln r \qquad \phi = K\theta \qquad (4.132)$$

donde la constante K es la *intensidad* del torbellino. Como se muestra en la Figura 4.12*c*, las líneas de corriente son círculos (r constante) y las líneas equipotenciales son rayos radiales (θ constante). Nótese la si-

www.elsolucionario.net

militud entre las Ecuaciones (4.131) y (4.132). Un torbellino libre viene a ser como el reverso de una fuente. El «torbellino de bañera», que aparece cuando el agua sale a través de un orificio en el fondo de un depósito, es una buena aproximación de un torbellino libre.

Superposición: fuente más sumidero de igual intensidad

Cada uno de los flujos elementales representados en la Figura 4.12 es un flujo irrotacional incompresible y por tanto satisface las dos ecuaciones $\nabla^2\psi = 0$ y $\nabla^2\phi = 0$ del «flujo potencial» plano. Como estas ecuaciones en derivadas parciales son lineales, cualquier *suma* de soluciones básicas también es solución. Algunas de las soluciones compuestas así obtenidas son sumamente útiles e interesantes.

Por ejemplo, consideremos una fuente de intensidad $+m$ situada en $(x, y) = (-a, 0)$ combinada con un sumidero de intensidad $-m$ situado en $(+a, 0)$, como en la Figura 4.13. La función de corriente resultante es simplemente la suma de las dos. En coordenadas cartesianas,

$$\exists = \exists_{\text{fuente}} + \exists_{\text{sumidero}} = m\,\text{tg}^{\Phi 1}\frac{y}{x+a} \Phi m\,\text{tg}^{\Phi 1}\frac{y}{x \Phi a}$$

Análogamente, el potencial de velocidades compuesto es

$$\forall = \forall_{\text{fuente}} + \forall_{\text{sumidero}} = \frac{1}{2}m\ln[(x+a)^2 + y^2] \Phi \frac{1}{2}m\ln[(x+a)^2 + y^2]$$

Utilizando identidades trigonométricas y logarítmicas estas expresiones adoptan la forma simplificada

Fuente más sumidero:

$$\exists = \Phi m\,\text{tg}^{\Phi 1}\frac{2ay}{x^2 + y^2 \Phi a^2}$$
$$\forall = \frac{1}{2}m\ln\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x \Phi a)^2 + y^2} \qquad (4.133)$$

www.elsolucionario.net

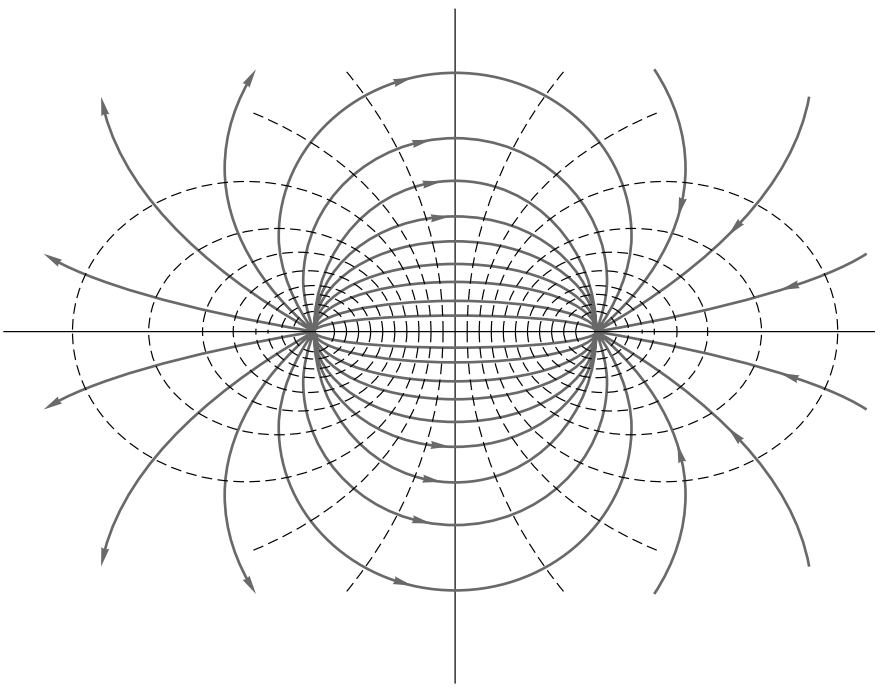


Figura 4.13. Flujo potencial debido a la superposición de una fuente y un sumidero de igual intensidad, Ecuación (4.133). Las líneas continuas son líneas de corriente y las líneas discontinuas son líneas equipotenciales.

www.elsolucionario.net

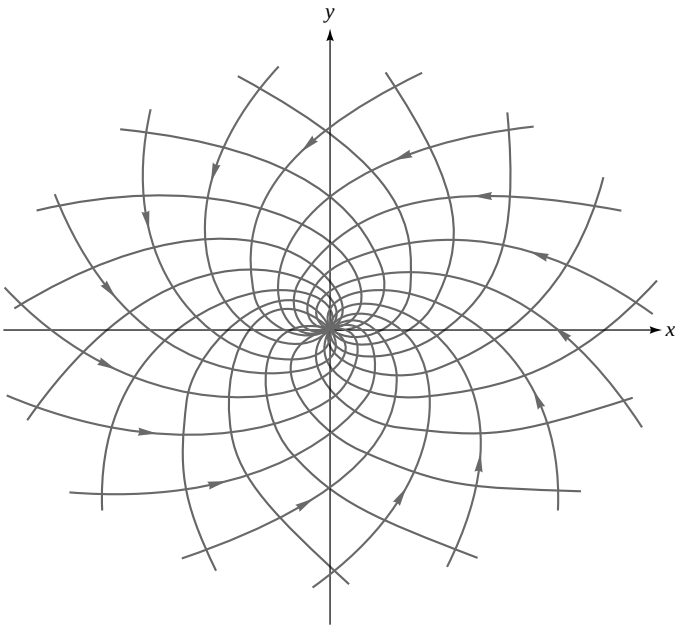


Figura 4.14. La superposición de un sumidero y un torbellino, Ecuación (4.134), simula un tornado.

La Figura 4.13 representa las líneas de corriente y equipotenciales; se puede ver que forman dos familias de círculos ortogonales, las líneas de corriente atraviesan la fuente y el sumidero y las líneas equipotenciales los rodean. Son funciones armónicas (laplacianas) con estructuras análogas a las líneas de corriente eléctrica y equipotenciales que proporciona la teoría del electromagnetismo para un imán con polos en $(\pm a, 0)$.

www.elsolucionario.net

Sumidero más torbellino en el origen

La superposición de un sumidero y un torbellino, ambos centrados en el origen, da lugar a un flujo muy interesante que se puede observar en la naturaleza. La función de corriente y el potencial de velocidades combinados son

Sumidero más torbellino: $$\psi = m\theta - K \ln r \qquad \phi = m \ln r + K\theta \tag{4.134}$$

Como se muestra en la Figura 4.14, las líneas de corriente y equipotenciales forman dos familias ortogonales de espirales logarítmicas. Este flujo representa un modelo bastante realista de un tornado (donde el flujo del sumidero sube a lo largo del eje z hacia la atmósfera) o del torbellino que se forma en el desagüe de una bañera. En el centro de un torbellino real (viscoso), donde la Ecuación (4.134) predice una velocidad infinita, el flujo circulatorio es muy *rotacional* y se puede aproximar por un movimiento como sólido-rígido $v_\theta \equiv Cr$.

Corriente uniforme más fuente en el origen: cuerpo semiinfinito de Rankine

Cuando a una corriente uniforme según el eje x se le añade una fuente aislada, se obtiene la forma de un cuerpo semiinfinito. Si la fuente está en el origen, la función de corriente compuesta es, en coordenadas polares,

Corriente uniforme más fuente: $$\psi = Ur \operatorname{sen} \theta + m\theta \tag{4.135}$$

Para representar las líneas de corriente podemos dar a esta función diversos valores constantes y dibujar las líneas correspondientes. El resultado se muestra en la Figura 4.15. Aparece un cuerpo *semiinfinito*,

www.elsolucionario.net

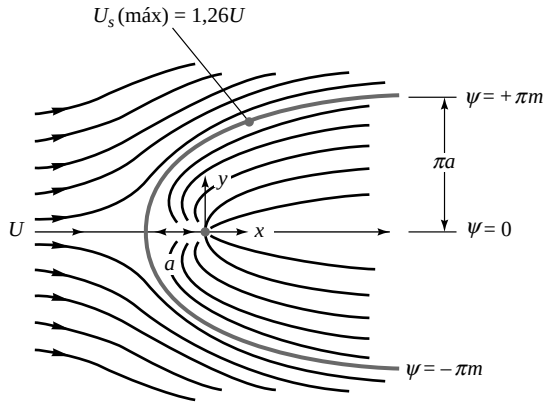


Figura 4.15. La superposición de una fuente y una corriente uniforme origina un cuerpo semiinfinito de Rankine.

aproximadamente elíptico, que separa el flujo de la fuente del flujo de la corriente uniforme. El cuerpo semiinfinito de Rankine, llamado así en honor al ingeniero escocés W. J. M. Rankine (1820-1872), está formado por las líneas de corriente $\psi = \pm m$. La semianchura del cuerpo, lejos aguas abajo, es m/U. La forma de la parte superior del cuerpo está dada por

$$r = \frac{m(\pi - \theta)}{U \operatorname{sen} \theta} \tag{4.136}$$

No es realmente una elipse. La parte frontal del cuerpo, que tiene un punto de «remanso» donde $V = 0$, se encuentra en $(x, y) = (-a, 0)$, con $a = m/U$. La línea de corriente $\psi = 0$ también atraviesa este punto —recuerde que las líneas de corriente sólo pueden cruzarse en los puntos de remanso.

Las componentes cartesianas de la velocidad se obtienen derivando:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y} = U + \frac{m}{r}\cos\theta \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{m}{r}\operatorname{sen}\theta \tag{4.137}$$

Haciendo $u = v = 0$ se determina la posición del punto de remanso, $\theta = 180°$ y $r = m/U$, o $(x, y) = (-m/U, 0)$. La velocidad resultante en cualquier punto está dada por

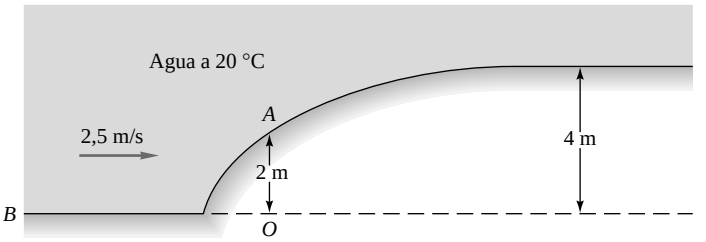
$$V^2 = u^2 + v^2 = U^2\left[1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2a}{r}\cos\theta\right] \tag{4.138}$$

donde hemos sustituido $m = Ua$. Evaluando la velocidad a lo largo de la superficie superior $\psi = \pi m$, se observa que alcanza un valor máximo $U_{s,\text{máx}} \cong 1{,}26U$ en $\theta = 63°$. Este punto está marcado en la Figura 4.15 y, según la ecuación de Bernoulli, es el punto de mínima presión sobre la superficie del cuerpo. Después de este punto, el flujo sobre la superficie se decelera, la presión aumenta y la capa límite engorda aumentando el peligro de desprendimiento, como veremos en el Capítulo 7.

EJEMPLO 4.10

El fondo de un río presenta un bache de 4 m de altura cuya forma puede aproximarse por un cuerpo semiinfinito de Rankine, como se muestra en la Figura E4.10. La presión en el punto *B* del fondo es de 130 kPa y la velocidad del río es de 2,5 m/s. Utilice la teoría no viscosa para estimar la presión del agua en el punto *A* del bache, situado 2 m por encima del punto *B*.

www.elsolucionario.net



E4.10

Solución

Como en toda teoría no viscosa, ignoramos las capas límite de baja velocidad que se forman sobre las superficies sólidas debido a la condición de no deslizamiento. De acuerdo con la Ecuación (4.136) y la Figura 4.15, la semialtura del bache lejos aguas abajo es igual a Θa. Por tanto, en nuestro caso, a = (4 m)/Θ= 1,27 m. Tenemos que encontrar el punto donde la altura del bache es exactamente la mitad, h = 2 m = $\Theta a/2$. De la Ecuación (4.136) se obtiene

$$r = h_A = \frac{a(\Theta\Phi\aleph)}{\text{sen}\,\aleph} = \frac{\Theta}{2}a \quad \text{o} \quad \aleph = \frac{\Theta}{2} = 90°$$

Por tanto, el punto A se encuentra justo encima del origen de coordenadas (marcado con una O en la Figura E4.10), esto es, 1,27 m a la derecha del comienzo del bache. Conocidos $r = \Theta a/2$ y $\theta = \Theta/2$, calculamos la velocidad en el punto A mediante la Ecuación (4.138):

$$V_A^2 = U^2\left[1 + \frac{a^2}{(\Theta a/2)^2} + \frac{2a}{\Theta a/2}\cos\frac{\Theta}{2}\right] = 1{,}405U^2$$

o

$$V_A = 1{,}185U = 1{,}185(2{,}5\,\text{m/s}) = 2{,}96\,\text{m/s}$$

Para agua a 20 °C, tomamos ρ = 998 kg/m^3 y ρg = 9790 N/m^3. Conocidas la velocidad y la elevación del punto A, estamos en condiciones de utilizar la ecuación de Bernoulli para flujo incompresible no viscoso (4.120) para estimar p_A a partir de las propiedades conocidas en el punto B (situado en la misma línea de corriente):

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B$$

o

$$\frac{p_A}{9790\,\text{N/m}^3} + \frac{(2{,}96\,\text{m/s})^2}{2(9{,}81\,\text{m/s}^2)} + 2\,\text{m} = \frac{130.000}{9790} + \frac{(2{,}5)^2}{2(9{,}81)} + 0$$

Despejando, obtenemos

$$p_A = (13{,}60 - 2{,}45)(9790) = 109.200\ \text{Pa} \qquad \textit{Resp.}$$

Si la velocidad de la corriente incidente es uniforme, ésta debería ser una aproximación bastante buena, pues el agua es muy poco viscosa y las capas límite son delgadas.

4.11. ALGUNOS FLUJOS VISCOSOS INCOMPRESIBLES ILUSTRATIVOS

Los flujos no viscosos de la Sección 4.10 *no* satisfacen la condición de no deslizamiento; se deslizan a lo largo de la pared sin pasar a través de ella. Para retener las condiciones viscosas de no deslizamiento tenemos que considerar las ecuaciones de Navier-Stokes completas (4.74), y el resultado no suele ser irrotacional ni admitir potencial de velocidades. Estudiaremos aquí tres casos: (1) el flujo entre dos placas paralelas debido al movimiento de la pared superior, (2) el flujo entre dos placas planas debido a un gradiente de

www.elsolucionario.net

presiones y (3) el flujo entre dos cilindros concéntricos debido a la rotación del cilindro interior. Estudiaremos otros casos en los problemas y en el Capítulo 6. Las Referencias 4 y 5 tratan de forma extensa las soluciones para flujos viscosos. Todos los flujos de esta sección son viscosos y rotacionales.

Flujo de Couette entre una placa fija y otra moviéndose

Consideremos el flujo incompresible, viscoso y bidimensional ($\partial/\partial z = 0$) entre dos placas paralelas separadas una distancia $2h$, como se indica en la Figura 4.16. Supondremos que las placas son muy largas y muy anchas, de modo que el flujo es esencialmente paralelo a las placas, $u \neq 0$ pero $v = w = 0$. El presente caso se muestra en la Figura 4.16*a*, donde la placa de arriba se mueve con velocidad V y no hay gradiente de presiones. Despreciaremos los efectos gravitatorios. De la ecuación de la continuidad (4.73) tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + 0 + 0 \quad \text{o} \quad u = u(y) \text{ únicamente}$$

Por tanto, la única componente de la velocidad distinta de cero es la componente paralela a las placas, que varía a través del canal. Supondremos que el flujo está *completamente desarrollado* (lejos aguas abajo de la entrada). Sustituyendo $u = u(y)$ en la ecuación de la cantidad de movimiento según x (4.74) para un flujo bidimensional (x, y):

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right] = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

o

$$\rho(0 + 0) = 0 + 0 + \mu\left[0 + \frac{d^2u}{dy^2}\right] \tag{4.139}$$

www.elsolucionario.net

La mayoría de los términos se anulan, y la ecuación se reduce a

$$\frac{d^2u}{dy^2} = 0 \quad \text{o} \quad u = C_1 y + C_2$$

Las dos constantes se determinan imponiendo la condición de no deslizamiento en las placas de arriba y abajo:

En $y = +h$: $\quad u = V = C_1 h + C_2$

En $y = -h$: $\quad u = 0 = C_1(-h) + C_2$

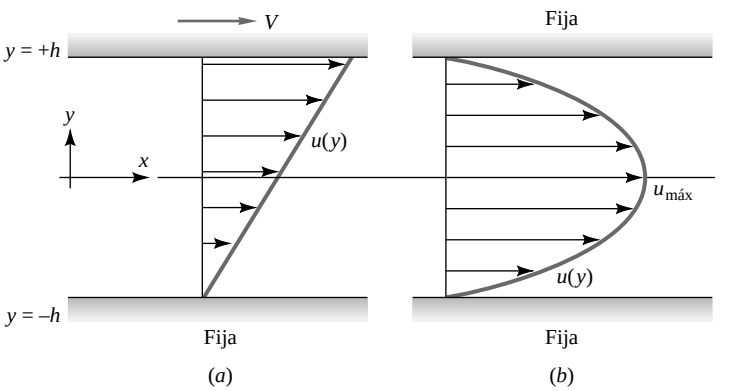


Figura 4.16. Flujo viscoso incompresible entre dos placas paralelas: (*a*) gradiente de presión nulo, pared superior moviéndose; (*b*) gradiente de presión $\partial p/\partial x$ y ambas paredes fijas.

www.elsolucionario.net

o $$C_1 = \frac{V}{2h} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{V}{2}$$

Por tanto, la solución en el caso (*a*), el flujo entre dos placas paralelas con la pared de arriba moviéndose, es

$$u = \frac{V}{2h}y + \frac{V}{2} \quad \Phi h \, \text{A} \, y \, \text{A} + h \tag{4.140}$$

Éste es el *flujo de Couette* debido a una pared móvil: un perfil de velocidades lineal sin deslizamiento en las paredes, tal como se anticipó y esquematizó en la Figura 4.16*a*. El origen se ha situado en el centro del canal porque resulta más conveniente para el análisis del caso (*b*).

Lo que acabamos de presentar es un análisis riguroso del flujo discutido de forma más informal en la Figura 1.6 (donde *y* y *h* se definieron de forma distinta).

Flujo entre dos placas fijas debido a un gradiente de presiones

El caso (*b*) se esquematiza en la Figura 4.16*b*. Ambas placas están fijas ($V = 0$), pero la presión varía según *x*. Si $v = w = 0$, la ecuación de la continuidad conduce a la misma conclusión que en el caso (*a*); esto es, que $u = u(y)$ únicamente. La ecuación de la cantidad de movimiento según *x* (4.138) cambia, porque ahora aparece el gradiente de presiones:

$$\mu \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{Ep}{Ex} \tag{4.141}$$

Además, como $v = w = 0$ y hemos despreciado la gravedad, las ecuaciones de la cantidad de movimiento según *y* y *z* proporcionan

$$\frac{Ep}{Ey} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{Ep}{Ez} = 0 \quad \text{o} \quad p = p(x) \, \text{únicamente}$$

Por tanto, el gradiente de presiones que aparece en la Ecuación (4.141) es el único no nulo:

$$\mu \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} = \text{cte} < 0 \tag{4.142}$$

¿Por qué afirmamos que dp/dx es *constante*? Recuerde una idea muy útil de la teoría de separación de variables: si dos cantidades son iguales y una es sólo función de *y* y la otra es sólo función de *x*, ambas deben ser iguales a la misma constante. En caso contrario no serían independientes entre sí.

¿Cómo sabemos que la constante es *negativa*? Desde un punto de vista físico, la presión debe decrecer en la dirección del flujo para vencer la resistencia de los esfuerzos viscosos en la pared. Por tanto, el perfil de velocidades $u(y)$ debe tener curvatura negativa en todos sus puntos, tal como se anticipó en la representación de la Figura 4.16*b*.

La solución de la Ecuación (4.142) se obtiene integrando dos veces:

$$u = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Las constantes se obtienen de imponer l condición de no deslizamiento en las paredes:

En $y = \pm h$: $$u = 0 \quad \text{o} \quad C_1 = 0 \quad \text{y} \quad C_2 = \Phi \frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2\mu}$$

www.elsolucionario.net

Por tanto, la solución en el caso (*b*), el flujo en un canal debido a un gradiente de presiones, es

$$u = \frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right] \tag{4.143}$$

El flujo forma una parábola de *Poiseuille* de curvatura negativa constante. La velocidad máxima aparece en la línea central $y = 0$:

$$u_{\text{máx}} = \frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2\mu} \tag{4.144}$$

En el siguiente ejemplo se calculan otros parámetros de este flujo (laminar).

EJEMPLO 4.11

En el caso (*b*) de la Figura 4.16*b*, el flujo entre dos placas paralelas debido a un gradiente de presiones, calcule (*a*) el esfuerzo de cortadura en la pared, (*b*) la función de corriente, (*c*) la vorticidad, (*d*) el potencial de velocidades y (*e*) la velocidad media.

Solución

Todos los parámetros pueden calcularse manipulando matemáticamente la solución básica, Ecuación (4.143).

Apartado (*a*)

El esfuerzo en la pared se obtiene de la definición de fluido newtoniano, Ecuación (4.37):

$$\tau_w = \tau_{xy\,\text{pared}} = \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]_{y=\pm h} = \mu\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right]\right]_{y=\pm h}$$

$$= \pm\frac{dp}{dx}h = \mp\frac{2\mu u_{\text{máx}}}{h} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

El esfuerzo en la pared es el mismo en ambas caras, pero según el convenio de signos de la Figura 4.3, en la pared de arriba el esfuerzo de cortadura es negativo.

Apartado (*b*)

Como el flujo es plano, estacionario e incompresible, existe función de corriente:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = u_{\text{máx}}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right] \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$$

Integrando y fijando $\psi = 0$ en la línea central por conveniencia, obtenemos

$$\psi = u_{\text{máx}}\left[y - \frac{y^3}{3h^2}\right] \qquad \textit{Resp. (b)}$$

En las paredes, $y = \pm h$ y $\psi = \pm 2u_{\text{máx}}h/3$, respectivamente.

Apartado (*c*)

Por ser un flujo plano sólo hay una componente de la vorticidad distinta de cero:

$$\zeta_z = (\text{rot}\,\mathbf{V})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2u_{\text{máx}}}{h^2}y \qquad \textit{Resp. (c)}$$

www.elsolucionario.net

La vorticidad es máxima en las paredes y es negativa (en el sentido de las agujas del reloj) en la mitad inferior y positiva (en sentido contrario) en la mitad superior del fluido. Típicamente, los flujos viscosos suelen tener vorticidad en todas partes y no son irrotacionales.

Apartado (*d*)

Según el apartado (*c*) la vorticidad es finita. Por tanto, el flujo no es irrotacional y *no existe* potencial de velocidades. *Resp*. (*d*)

Apartado (*e*)

La velocidad media se define como $V_{med} = Q/A$, donde $Q = \int u\, dA$ es el caudal que atraviesa la sección transversal. Para nuestra distribución particular $u(y)$ de la Ecuación (4.143) obtenemos

$$V_{med} = \frac{1}{A}\int u\, dA = \frac{1}{b(2h)}\int_{-h}^{+h} u_{máx}\left[1-\frac{y^2}{h^2}\right] b\, dy = \frac{2}{3}u_{máx} \qquad \textit{Resp. (e)}$$

En el flujo plano de Poiseuille entre dos placas paralelas, la velocidad media es dos tercios del valor máximo (en la línea central). Este resultado también podría haberse obtenido utilizando la función de corriente deducida en el apartado (*b*). De la Ecuación (4.95),

$$Q_{canal} = \psi_{superior} - \psi_{inferior} = \frac{2u_{máx}h}{3} - \left(-\frac{2u_{máx}h}{3}\right) = \frac{4}{3}u_{máx}h \text{ por unidad de anchura}$$

de donde $V_{med} = Q/A_{b=1} = (4u_{máx}h/3)/(2h) = 2u_{máx}/3$, que es el mismo resultado.

Este ejemplo ilustra la afirmación hecha más arriba: conocer el vector velocidad **V** [como en la Ecuación (4.143)] es esencialmente la *solución* de un problema de Mecánica de Fluidos, porque a partir de él se pueden calcular el resto de las propiedades del flujo.

www.elsolucionario.net

Flujo laminar completamente desarrollado en un conducto circular

Quizás la solución exacta más útil de las ecuaciones de Navier-Stokes corresponde al flujo incompresible en un conducto recto de sección circular de radio *R*, estudiado experimentalmente por primera vez por G. Hagen en 1839 y por J. L. Poiseuille en 1840. Cuando decimos *completamente desarrollado*, nos referimos a que la región en estudio está suficientemente lejos de la entrada como para que el flujo sea puramente axial, $v_z \neq 0$, mientras que v_r y v_θ son nulas. Despreciaremos la gravedad y supondremos simetría axial, esto es, $\partial/\partial\theta = 0$. En este caso, la ecuación de la continuidad en coordenadas cilíndricas, Ecuación (4.12*b*), se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \quad \text{o} \quad v_z = v_z(r) \text{ únicamente}$$

El flujo a lo largo del tubo no tiene componente radial. La ecuación de la cantidad de movimiento según *r* en coordenadas cilíndricas, Ecuación (D.5), adopta la forma simplificada $\partial p/\partial r = 0$, que indica que la presión sólo depende de *z*, esto es, $p = p(z)$. La ecuación de la cantidad de movimiento según *z* en coordenadas cilíndricas, Ecuación (D.7), se reduce a

$$\rho v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{dp}{dz} + \mu\nabla^2 v_z = -\frac{dp}{dz} + \frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dv_z}{dr}\right]$$

El término de aceleración convectiva del primer miembro se anula de acuerdo con la ecuación de la continuidad dada más arriba. Por tanto, la ecuación de la cantidad de movimiento se puede escribir como sigue:

$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dv_z}{dr}\right] = \frac{dp}{dz} = \text{cte} < 0 \qquad (4.145)$$

www.elsolucionario.net

Al igual que en la Ecuación (4.141) para el flujo entre dos placas planas, aquí se puede aplicar separación de variables. De nuevo la constante es negativa, y el flujo en un conducto se parece mucho al flujo entre placas de la Figura 4.16*b*.

La Ecuación (4.145) es lineal y puede integrarse dos veces para obtener

$$v_z = \frac{dp}{dz}\frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln(r) + C_2$$

donde C_1 y C_2 son constantes. Las condiciones de contorno apropiadas son las de no deslizamiento en la pared y de velocidad finita en la línea central:

$$\text{No deslizamiento en } r = R: \quad v_z = 0 = \frac{dp}{dz}\frac{R^2}{4\mu} + C_1 \ln(R) + C_2$$

$$\text{Velocidad finita en } r = 0: \quad v_z = \text{finita} = 0 + C_1 \ln(0) + C_2$$

Para evitar una singularidad logarítmica, la condición en el centro exige que $C_1 = 0$. Entonces, del no deslizamiento se obtiene $C_2 = (-dp/dz)(R^2/4\mu)$. La famosa solución para el *flujo de Hagen-Poiseuille* completamente desarrollado es

$$\boxed{v_z = \left(-\frac{dp}{dz}\right)\frac{1}{4\mu}(R^2 - r^2)} \tag{4.146}$$

El perfil de velocidades es un paraboloide que cae a cero en la pared y alcanza su máximo en el eje. Al igual que en el Ejemplo 4.11, una vez conocida la distribución de velocidades se obtiene inmediatamente el resto de resultados:

$$V_{\text{máx}} = v_z(r=0) = \left(-\frac{dp}{dz}\right)\frac{R^2}{4\mu}$$

$$V_{\text{med}} = \frac{1}{A}\int v_z\, dA = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R V_{\text{máx}}\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right] 2\pi r\, dr = \frac{V_{\text{máx}}}{2} = \left(-\frac{dp}{dz}\right)\frac{R^2}{8\mu}$$

$$Q = \int v_z\, dA = \int_0^R V_{\text{máx}}\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right] 2\pi r\, dr = \pi R^2 V_{\text{med}} = \frac{\pi R^4}{8\mu}\left(-\frac{dp}{dz}\right) = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L}$$

$$\tau_{\text{pared}} = \mu\left|\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{4\mu V_{\text{med}}}{R} = \frac{R}{2}\left(-\frac{dp}{dz}\right) = \frac{R}{2}\frac{\Delta p}{L} \tag{4.147}$$

Obsérvese que aquí hemos utilizado la igualdad $(-dp/dz) = \Delta p/L$, donde Δp es la caída de presión a lo largo de la longitud total L del tubo.

Estas fórmulas son válidas siempre que el flujo sea *laminar*, esto es, siempre que el número de Reynolds del flujo, $\text{Re}_D = \rho V_{\text{med}}(2R)/\mu$, sea menor que 2100. Obsérvese también que las fórmulas no dependen de la densidad, debido a que la aceleración convectiva del flujo es nula.

EJEMPLO 4.12

Un flujo de aceite SAE 10W a 20 °C circula a 1,1 m³/h a través de un tubo horizontal de diámetro $d = 2$ cm y longitud $L = 12$ m. Calcule (*a*) la velocidad media, (*b*) el número de Reynolds, (*c*) la caída de presión y (*d*) la potencia necesaria.

www.elsolucionario.net

Solución

- *Consideraciones.* Flujo de Hagen-Poiseuille laminar y estacionario.
- *Procedimiento*. Las fórmulas de las Ecuaciones (4.147) son apropiadas para este problema. Obsérvese que $R = 0{,}01$ m.
- *Valores de las propiedades.* De la Tabla A.3, para el aceite SAE 10W, $\rho = 870$ kg/m^3 y $\mu = 0{,}104$ kg/(m · s).
- *Resolución*. La velocidad media se obtiene fácilmente conocido el caudal y el área del tubo:

$$V_{\text{med}} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{(1{,}1/3600)\,\text{m}^3/\text{s}}{\pi(0{,}01\,\text{m})^2} = 0{,}973\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Fue necesario convertir Q a m^3/s. El número de Reynolds (basado en el diámetro) se obtiene de la velocidad media:

$$\text{Re}_d = \frac{\rho V_{\text{med}} d}{\mu} = \frac{(870\ \text{kg/m}^3)(0{,}973\ \text{m/s})(0{,}02\ \text{m})}{0{,}104\ \text{kg/(m}\cdot\text{s)}} = 163 \qquad \textit{Resp. (b)}$$

Este valor es menor que el de «transición», $\text{Re}_d = 2100$; por tanto, el flujo es *laminar* y las fórmulas son válidas. La caída de presión se calcula con la tercera de las Ecuaciones (4.147):

$$Q = \frac{1{,}1}{3600}\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L} = \frac{\pi(0{,}01\ \text{m})^4 \Delta p}{8(0{,}104\ \text{kg/m}\cdot\text{s})(12\ \text{m})} \quad \text{proporciona} \quad \Delta p = 97.100\ \text{Pa} \qquad \textit{Resp. (c)}$$

Cuando se utilizan las unidades SI, el resultado se obtiene en pascales; no hace falta usar factores de conversión. Finalmente, la potencia requerida es el producto del flujo volumétrico y la caída de presión:

$$\text{Potencia} = Q\Delta p = \left(\frac{1{,}1}{3600}\ \text{m}^3/\text{s}\right)(97.100\ \text{N/m}^2) = 29{,}7\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{s}} = 29{,}7\ \text{W} \qquad \textit{Resp. (d)}$$

www.elsolucionario.net

- *Comentarios*. Los problemas de flujo en tubos son ejercicios algebraicos sencillos cuando los datos son compatibles. Nótese de nuevo que al haber utilizado unidades SI no han sido necesarios factores de conversión en las fórmulas.

Flujo entre cilindros concéntricos infinitamente largos

Considere un fluido con ρ y μ constantes entre dos cilindros concéntricos, como se muestra en la Figura 4.17. No hay movimiento axial o efectos de borde: $v_z = \partial/\partial z = 0$. Supongamos que el cilindro interior gira con velocidad angular Ω_i y el cilindro exterior está en reposo. Hay simetría circular, por lo que la velocidad es independiente de θ y sólo es función de r.

La ecuación de la continuidad para este problema es la Ecuación (4.12*b*) con $v_z = 0$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_r) \quad \text{o} \quad (rv_r) = \text{cte}$$

Obsérvese que v_θ no depende de θ. Como $v_r = 0$ tanto en el cilindro interior como en el exterior, se deduce que $v_r = 0$ en todas partes, luego el movimiento debe ser puramente circunferencial, $v_\theta = v_\theta(r)$. La ecuación de cantidad de movimiento según θ (D.6) queda

$$\rho\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)v_\theta + \frac{\rho v_r v_\theta}{r} = \rho\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu\left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2}\right)$$

www.elsolucionario.net

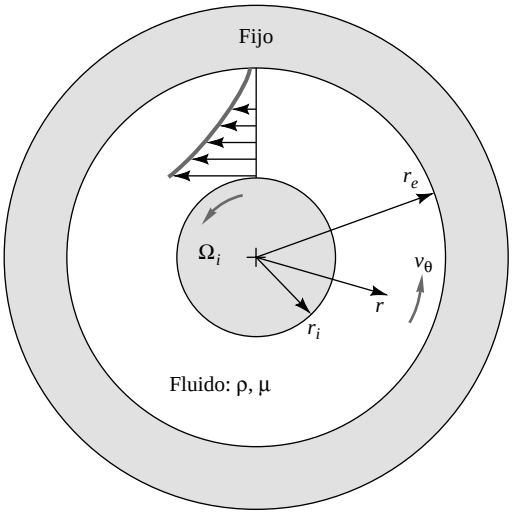


Figura 4.17. Sistema de coordenadas para el flujo viscoso incompresible entre un cilindro exterior fijo y un cilindro interior girando.

Bajo las condiciones del presente problema, todos los términos son nulos salvo el último. Por tanto, la ecuación diferencial básica para el flujo entre dos cilindros rotatorios es

$$\nabla^2 v_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dv_\theta}{dr}\right] = \frac{v_\theta}{r^2} \tag{4.148}$$

Ésta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, cuya solución es

$$v_\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

Las constantes se obtienen de la condición de no deslizamiento en los cilindros interior y exterior:

Exterior, en $r = r_e$: $$v_\theta = 0 = C_1 r_e + \frac{C_2}{r_e}$$

Interior en $r = r_i$: $$v_\theta = \Omega_i r_i = C_1 r_i + \frac{C_2}{r_i}$$

La solución final para la distribución de velocidades es

Cilindro interior rotando: $$v_\theta = \Omega_i r_i \frac{r_e / r - r / r_e}{r_e / r_i - r_i / r_e} \tag{4.149}$$

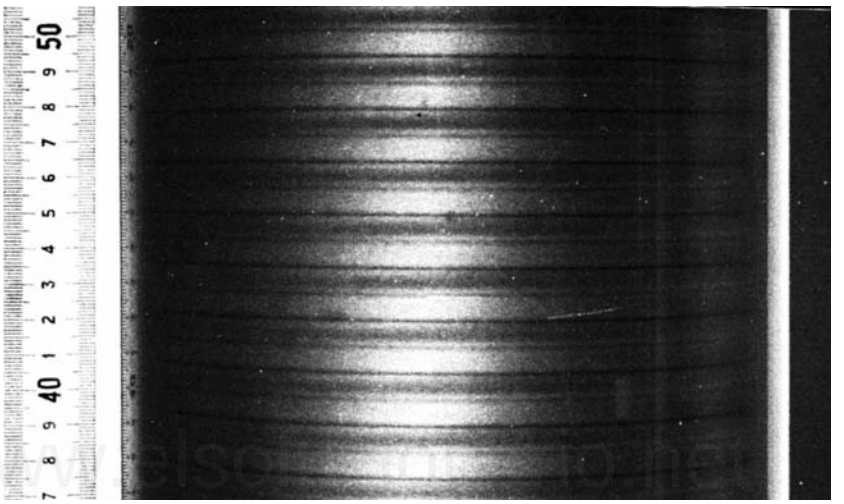
Este perfil de velocidades es parecido al que se muestra esquemáticamente en la Figura 4.17. En los problemas de final de capítulo se estudian variantes de este problema, tales como que gire el cilindro exterior.

www.elsolucionario.net

Inestabilidad del flujo con cilindro interior rotatorio[19]

La solución clásica para el *flujo de Couette*[20], Ecuación (4.149), describe satisfactoriamente el perfil de velocidades cóncavo del flujo laminar bidimensional que se muestra en la Figura 4.17. La solución es matemáticamente exacta para un fluido incompresible. Sin embargo, se desestabiliza cuando el cilindro interior gira a una velocidad relativamente baja, como mostró G. I. Taylor [17] en su artículo, ya clásico, de 1923. Por encima de un valor crítico de lo que hoy en día se conoce como *número de Taylor*, denominado Ta, el flujo plano de la Figura 4.17 desaparece y es sustituido por un flujo laminar *tridimensional* compuesto por filas de torbellinos toroidales de sección cuadrada que giran en direcciones alternas. En la Figura 4.18*a* se pueden observar los «torbellinos toroidales de Taylor» correspondientes a Ta Ξ 1,16 $\mathrm{Ta}_{\mathrm{crít}}$ en un experimento

$$\mathrm{Ta}_{\mathrm{crít}} = \frac{r_i(r_e \Phi r_i)^3 \mathrm{K}_i^2}{\nu^2} \Xi 1700 \tag{4.150}$$



(*a*)

(*b*)

Figura 4.18. Verificación experimental de la inestabilidad del flujo entre un cilindro exterior fijo y un cilindro interior girando. (*a*) A 1,16 veces la velocidad crítica de rotación aparecen los torbellinos toroidales de Taylor; (*b*) a 8,5 veces la velocidad crítica de rotación los torbellinos son doblemente periódicos. (*Cortesía de Cambridge University Press-E.L. Koschmieder, «Turbulent Taylor Vortex Flow», Journal of Fluid Mechanics, vol. 93, 1979, págs. 515-527.*) Esta inestabilidad no aparece cuando es el cilindro exterior el que gira.

[19] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

[20] Llamado así en honor de M. Couette, cuyo artículo de 1890 propuso utilizar el flujo entre cilindros rotatorios como método para medir la viscosidad de los fluidos, algo que aún se hace hoy en día.

www.elsolucionario.net

llevado a cabo por Koschmieder [18]. Para valores mayores del número de Taylor, los torbellinos desarrollan también inestabilidades circunferenciales pero se mantienen laminares, como ilustra la Figura 4.18*b*. Si se aumenta aún más el número de Taylor aparece la turbulencia. Esta interesante inestabilidad nos recuerda que las ecuaciones de Navier-Stokes, por ser no lineales, admiten soluciones laminares múltiples además de las inestabilidades usuales asociadas a la turbulencia y a los sistemas dinámicos caóticos.

Resumen

Este capítulo complementa al Capítulo 3 utilizando un volumen de control infinitesimal para obtener las ecuaciones diferenciales básicas, en derivadas parciales, para la descripción del movimiento de los fluidos: la ecuación de la continuidad, la ecuación de la cantidad de movimiento y la ecuación de la energía. Estas ecuaciones, junto con las ecuaciones termodinámicas de estado para el fluido y las condiciones de contorno apropiadas, pueden resolverse, en principio, para determinar el campo fluido de cualquier problema de Mecánica de Fluidos. Excepto en el Capítulo 9, en la mayoría de los problemas que se estudian aquí se considera un fluido incompresible con viscosidad constante.

Además de deducirse en este capítulo las ecuaciones de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía, también se han introducido algunos conceptos útiles tales como la función de corriente, la vorticidad, la irrotacionalidad y el potencial de velocidades, que serán de gran utilidad en los capítulos siguientes, en especial en el Capítulo 8. Las variaciones de densidad y temperaturas no se van a tener en cuenta, salvo en el Capítulo 9, donde se estudiará la compresibilidad.

El capítulo finalizó presentando algunas soluciones clásicas, tanto para flujos no viscosos (corriente uniforme, fuente, sumidero, torbellino, cuerpo semiinfinito) como para flujos laminares viscosos (flujo de Couette debido a paredes móviles, flujo de Poiseuille en un conducto debido a un gradiente de presiones y el flujo entre dos cilindros rotatorios). Libros enteros [4, 5, 9-11, 15] tratan sobre los enfoques clásicos a la Mecánica de Fluidos, y otros textos [6, 12-14] extienden estos estudios al reino de la mecánica de medios continuos. Esto no significa que todos los problemas puedan ser resueltos analíticamente. El nuevo campo de la mecánica de fluidos computacional [1] resulta prometedor para obtener soluciones aproximadas de una amplia variedad de flujos. Adicionalmente, cuando la geometría y las condiciones de contorno son verdaderamente complicadas, se prefiere recurrir a la experimentación (Capítulo 5).

www.elsolucionario.net

Problemas

La mayoría de los problemas propuestos aquí son bastante sencillos. Los más difíciles, o de final abierto, se indican con un asterisco. Para resolver los problemas señalados con un icono EES se recomienda el uso del Resolvedor de Ecuaciones de Ingeniería (EES, *Engineering Equation Solver*), mientras que los problemas señalados con un disquete pueden requerir el uso de un ordenador. Los problemas estándar de final de capítulo P4.1 a P4.93 (ordenados por temas en la lista de abajo) están seguidos por los problemas conceptuales C4.1 a C4.10, los problemas del examen de fundamentos de ingeniería (FE, *Fundamentals of Engineering*) FE4.1 a FE4.3 y los problemas extensos PE4.1 y PE4.2.

Distribución de los problemas

Sección	Tema	Problemas
4.1	La aceleración de un fluido	P4.1-P4.8
4.2	La ecuación de la continuidad	P4.9-P4.25
4.3	Cantidad de movimiento: Navier-Stokes	P4.26-P4.38
4.4	Momento cinético: momento de esfuerzos	P4.39
4.5	La ecuación diferencial de la energía	P4.40-P4.41
4.6	Condiciones de contorno	P4.42-P4.46
4.7	Función de corriente	P4.47-P4.55
4.8	Vorticidad, irrotacionalidad	P4.56-P4.60
4.9	Potencial de velocidades	P4.61-P4.67
4.10	Flujos potenciales planos	P4.68-P4.78
4.11	Flujos viscosos incompresibles	P4.79-P4.93

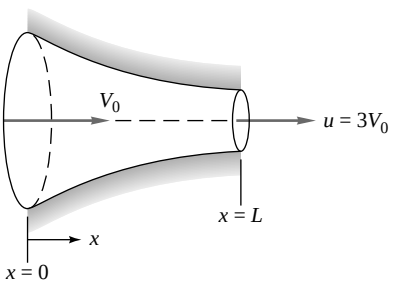
P4.1 Un campo de velocidades viene dado por

$$\mathbf{V} = 4txy\mathbf{i} - 2t^2y\mathbf{j} + 4xz\mathbf{k}$$

¿Es el flujo estacionario o no estacionario? ¿Es bidimensional o tridimensional? Calcule, en el punto $(x, y, z) = (-1, 1, 0)$, (*a*) el vector aceleración y (*b*) un vector unitario normal a la aceleración.

P4.2 El flujo a través de la tobera convergente de la Figura P4.2 puede aproximarse por la distribución de velocidades unidimensional

$$u = V_0\left(1 + \frac{2x}{L}\right) \quad v = 0 \quad w = 0$$



P4.2

www.elsolucionario.net

(*a*) Obtenga una expresión general para la aceleración del fluido en la tobera. (*b*) Calcule la aceleración a la entrada y a la salida en el caso $V_0 = 10$ ft/s y $L = 6$ in, expresada en unidades *g*.

P4.3 Un campo de velocidades bidimensional viene dado por

$$\mathbf{V} = (x^2 - y^2 + x)\,\mathbf{i} - (2xy + y)\,\mathbf{j}$$

en unidades arbitrarias. Calcule, en el punto $(x, y) = (1, 2)$, (*a*) las aceleraciones a_x y a_y, (*b*) la componente de la velocidad según la dirección $\theta = 40°$, (*c*) la dirección de máxima velocidad y (*d*) la dirección de máxima aceleración.

P4.4 El campo de temperaturas $T = 4x^2 - 3y^3$, en unidades arbitrarias, está asociado al campo de velocidades del Problema P4.3. Calcule el valor de la derivada dT/dt en $(x, y) = (2, 1)$.

P4.5 En las proximidades de un punto de remanso bidimensional (véase Ejemplo 1.13), el campo de velocidades viene dado por

$$u = \frac{U_0 x}{L} \quad v = -\frac{U_0 y}{L} \quad U_0 \text{ y } L \text{ son constantes}$$

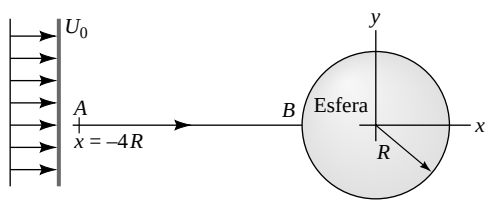
(*a*) Demuestre que el vector aceleración es puramente radial. (*b*) Si $L = 1{,}5$ m, ¿cuál debe ser el valor de U_0 para que la aceleración en el punto $(x, y) = (1\text{ m}, 1\text{ m})$ sea de 25 m/s^2?

P4.6 Suponga que el flujo en la tobera convergente de la Figura P4.2 tiene la forma $\mathbf{V} = V_0[1 + (2x)/L]\mathbf{i}$. Calcule (*a*) la aceleración del fluido en $x = L$ y (*b*) el tiempo que tarda una partícula fluida en viajar desde $x = 0$ hasta $x = L$.

P4.7 Considere una esfera de radio *R* sumergida en una corriente uniforme U_0, como se muestra en la Figura P4.7. Como se demuestra en el Capítulo 8, la velocidad del fluido a lo largo de la línea de corriente *AB* viene dada por

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} = U_0\left[1 + \frac{R^3}{x^3}\right]\mathbf{i}$$

Encuentre (*a*) el punto de *AB* donde la aceleración es máxima y (*b*) el tiempo que tarda una partícula fluida en viajar desde *A* hasta *B*.

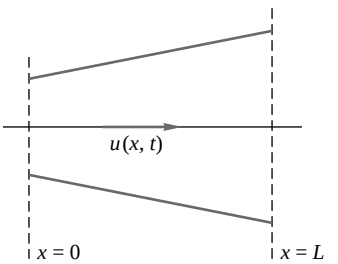


P4.7

P4.8 Cuando se abre una válvula, la velocidad del fluido que fluye a través del conducto de expansión de la Figura P4.8 se puede aproximar por

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}U\left[1 - \frac{x}{2L}\right]\tanh\frac{Ut}{L}$$

Determine (*a*) la aceleración del fluido en $(x, t) = (L, L/U)$ y (*b*) el instante en el que la aceleración del fluido en $x = L$ se anula. ¿Por qué se vuelve negativa la aceleración después de este instante?



P4.8

P4.9 Un flujo incompresible idealizado tiene la siguiente distribución de velocidades tridimensional:

$$\mathbf{V} = 4xy^2\mathbf{i} + f(y)\,\mathbf{j} - zy^2\mathbf{k}$$

Determine la forma que debe tener la función $f(y)$ para que se cumpla la ecuación de la continuidad.

P4.10 Ignorando las constantes de integración, determine la componente desconocida de la velocidad, *u* o *v*, que satisface la ecuación de la continuidad correspondiente a un flujo bidimensional incompresible en los siguientes casos

(*a*) $u = x^2y$ (*b*) $v = x^2y$
(*c*) $u = x^2 - xy$ (*d*) $v = y^2 - xy$

P4.11 Obtenga la Ecuación (4.12*b*) para coordenadas cilíndricas considerando los flujos de entrada y salida de un fluido incompresible que entra y sale del volumen de control elemental de la Figura 4.2.

P4.12 Las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) están definidas en la Figura P4.12. La transformación de esféricas a cartesianas es

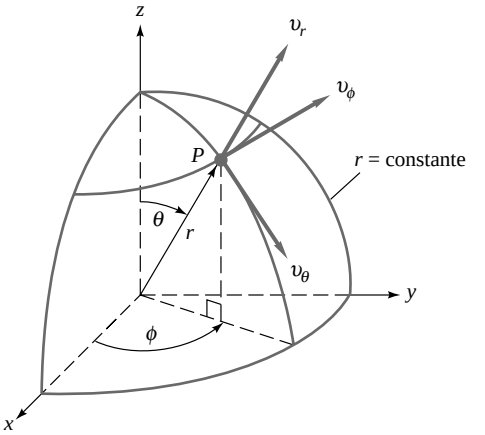
$$x = r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

La ecuación de la continuidad para un fluido incompresible en cartesianas [Ecuación (4.12*a*)] se puede transformar a la forma

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\,\text{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(v_\phi) = 0$$

en coordenadas esféricas. ¿Cuál es la forma más general de v_r cuando el flujo es puramente radial, esto es, cuando v_θ y v_ϕ son cero?

www.elsolucionario.net



P4.12

P4.13 Un campo de velocidades bidimensional está dado por

$$u = \Phi\frac{Ky}{x^2 + y^2} \quad v = \frac{Kx}{x^2 + y^2}$$

donde K es constante. ¿Satisface la ecuación de la continuidad para un fluido incompresible? Transforme este campo de velocidades a sus componentes v_r y v_θ en polares. ¿Qué podría representar este flujo?

P4.14 ¿Cuál es la forma más general del movimiento puramente circulatorio de un flujo incompresible en coordenadas polares, $v_\theta = v_\theta(r, \theta, t)$ y $v_r = 0$, que satisface la ecuación de la continuidad?

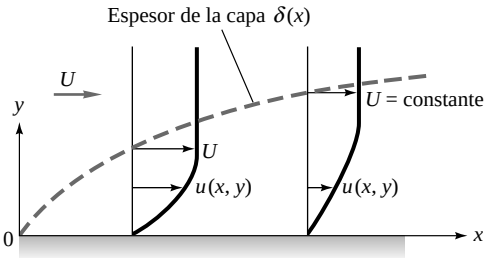
P4.15 ¿Cuál es la forma más general del movimiento puramente radial de un flujo incompresible en coordenadas polares, $v_r = v_r(r, \theta, t)$ y $v_\theta = 0$, que satisface la ecuación de la continuidad?

P4.16 Ignorando las constantes de integración, determine la componente desconocida de la velocidad, w o v, que satisface la ecuación de la continuidad correspondiente a un flujo tridimensional incompresible en los siguientes casos

(*a*) $u = x^2yz \qquad v = -y^2x$
(*b*) $u = x^2 + 3z^2x \qquad w = -z^3 + y^2$

P4.17 Una aproximación razonable para el flujo bidimensional en la capa límite laminar incompresible de una placa plana, como en la Figura P4.17, es

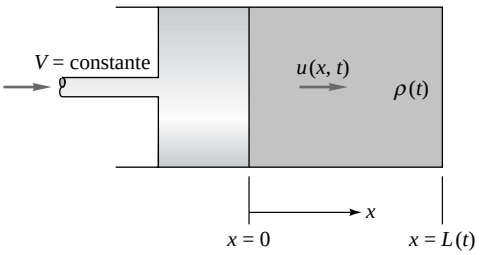
$$u = U\left[\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right] \text{ para } y \le \delta \text{ donde } \delta = Cx^{1/2}, C = \text{cte}$$



P4.17

(*a*) Suponiendo que no hay deslizamiento en la pared, determine la expresión para la componente $v(x, y)$ de la velocidad para $y \le \delta$. (*b*) Después, determine el valor máximo de v en el plano $x = 1$ m en el caso particular de un flujo de aire con $U = 3$ m/s y $\delta = 1{,}1$ cm.

P4.18 Un pistón que se mueve con velocidad constante V comprime gas en un cilindro, como muestra la Figura P4.18. Sean ρ_0 y L_0 la densidad del gas y la longitud del cilindro en $t = 0$, respectivamente. Suponga que la velocidad del gas varía linealmente desde $u = V$ en el pistón hasta $u = 0$ en $x = L$. Si la densidad del gas es sólo función del tiempo, obtenga una expresión para $\rho(t)$.

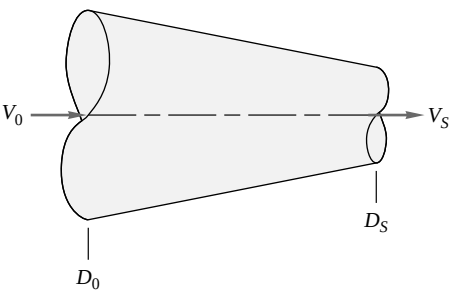


P4.18

P4.19 Las componentes de la velocidad de un flujo incompresible en coordenadas polares son $v_\theta = Cr$, $v_z = K(R^2 - r^2)$, $v_r = 0$, donde C y K son constantes y $r \le R$, $z \le L$. ¿Satisface este flujo la ecuación de la continuidad? ¿Qué podría representar físicamente?

P4.20 Un campo de velocidades incompresible y bidimensional viene dado por $u = K(1 - e^{-ay})$, para $x \le L$ y $0 \le y \le \infty$. ¿Cuál es la forma más general de $v(x, y)$ que satisface la ecuación de la continuidad y la condición $v = v_0$ en $y = 0$? ¿Cuáles son las unidades apropiadas para las constantes K y a?

P4.21 A través de la tobera cónica de la Figura P4.21 fluye aire de forma estacionaria en movimiento aproximadamente unidimensional. Si la velocidad del sonido es aproximadamente 340 m/s, ¿cuál es la mínima relación de diámetros D_s/D_0 para la cual se puede asegurar que los efectos de compresibilidad son despreciables si $V_0 =$ (*a*) 10 m/s y (*b*) 30 m/s?



P4.21

P4.22 Un flujo en el plano xy está descrito por $u = U_0 =$ constante, $v = V_0 =$ constante. Convierta estas velocidades a las componentes polares de la velocidad v_r y v_θ.

www.elsolucionario.net

P4.23 Un depósito de volumen $\mathcal{V}$ contiene gas en las condiciones (ρ_0, p_0, T_0). En $t = 0$ se perfora el depósito haciendo un pequeño orificio de área A. De acuerdo con la teoría del Capítulo 9, el flujo másico a través de un agujero así es aproximadamente proporcional al área A y a la presión del depósito. Obtenga una expresión para la variación de la densidad dentro del depósito suponiendo que la temperatura del depósito se mantiene constante y el gas es ideal.

***P4.24** Reconsidere la Figura P4.17 del siguiente modo más general. Se sabe que el espesor de la capa límite $\delta(x)$ crece de forma monótona con x y que no hay deslizamiento en la pared ($y = 0$). Además, $u(x, y)$ tiende suavemente a la velocidad de la corriente exterior, siendo $u \equiv U$ = constante fuera de la capa límite. Teniendo esto en cuenta, demuestre que (*a*) la componente $v(x, y)$ es siempre positiva dentro de la capa límite, (*b*) v crece parabólicamente con y muy cerca de la pared y (*c*) v es máxima en $y = \delta$.

P4.25 Un flujo incompresible en coordenadas polares está dado por

$$v_r = K\cos\theta\left(1 - \frac{b}{r^2}\right)$$

$$v_\theta = -K\,\text{sen}\,\theta\left(1 + \frac{b}{r^2}\right)$$

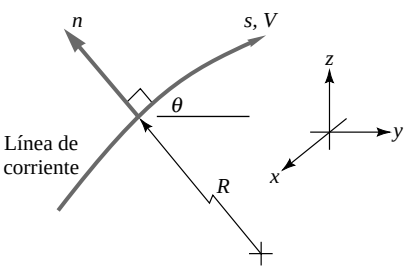
¿Satisface este campo de velocidades la ecuación de la continuidad? ¿Cuáles deben ser las unidades de las constantes K y b? Represente la línea donde $v_r = 0$ e interprete el resultado.

***P4.26** Las coordenadas curvilíneas, o coordenadas a lo largo y normal a las líneas de corriente, se definen en la Figura P4.26, donde n es la normal a las líneas de corriente en el plano osculador y R es el radio de curvatura. La ecuación de Euler de la cantidad de movimiento (4.36) en estas coordenadas toma la forma

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g_s \qquad (1)$$

$$-V\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{V^2}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + g_n \qquad (2)$$

Muestre que la integral de la Ecuación (1) con respecto a s no es otra que la ecuación de Bernoulli (3.76).



P4.26

P4.27 Un campo de velocidades estacionario, incompresible y no viscoso viene dado por

$$\mathbf{V} = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$$

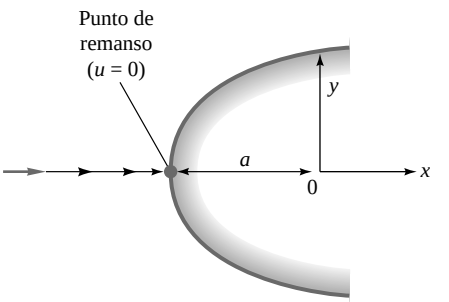
en unidades arbitrarias. Sea la densidad ρ_0 = constante. Despreciando la gravedad, obtenga una expresión para el gradiente de presiones en la dirección x.

P4.28 Si z es vertical, positiva hacia arriba, ¿qué condiciones deben cumplir las constantes a y b para que el campo de velocidades $u = ay$, $v = bx$, $w = 0$ sea una solución exacta de las ecuaciones del movimiento (continuidad y Navier-Stokes) de un fluido incompresible?

P4.29 Considere el flujo incompresible, bidimensional y estacionario de un fluido newtoniano cuyo campo de velocidades viene dado por: $u = -2xy$, $v = y^2 - x^2$, $w = 0$. (*a*) ¿Satisface este flujo la conservación de la masa? (*b*) Determine el campo de presiones $p(x, y)$ si la presión en el punto ($x = 0$, $y = 0$) es igual a p_a.

P4.30 Demuestre que el campo fluido bidimensional del Ejemplo 1.13 es una solución exacta de las ecuaciones de Navier-Stokes (4.38) para un fluido incompresible. Despreciando la gravedad, calcule el campo de presiones $p(x, y)$ y relaciónelo con la velocidad absoluta $V^2 = u^2 + v^2$. Interprete el resultado.

P4.31 De acuerdo con la teoría potencial del Capítulo 8, cerca del borde de ataque de un cuerpo bidimensional redondeado, como el de la Figura P4.31, la velocidad en las proximidades del punto de remanso está dada por $u = U(1 - a^2/x^2)$, donde a es el radio de la nariz y U es la velocidad lejos aguas arriba. Calcule el valor máximo del esfuerzo viscoso normal y su posición a lo largo de la línea de corriente que se indica en la figura.



P4.31

¿Se produce en el mismo punto la máxima deceleración del fluido? Evalúe el esfuerzo viscoso normal máximo si el fluido es aceite SAE 30 a 20 °C, $U = 2$ m/s y $a = 6$ cm.

P4.32 La respuesta al Problema P4.14 es que v_θ sólo depende de r, esto es, $v_\theta = f(r)$. (No revele esto a sus compañeros que aún estén trabajando en el Problema P4.14). Despreciando la gravedad, demuestre que para que este campo fluido sea una solución exacta de las ecuaciones de Navier-Stokes (4.38) la función $f(r)$ sólo puede tener dos formas distintas. Interprete físicamente estos dos casos.

P4.33 Del Problema P4.15, el único flujo puramente radial en coordenadas polares que satisface la ecuación de la

www.elsolucionario.net

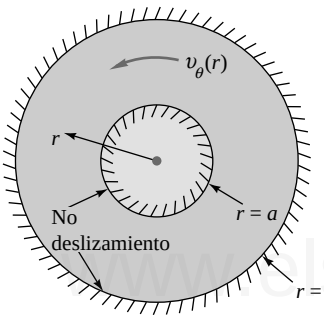
continuidad tiene la forma $v_r = f(\theta)/r$, donde f es una función arbitraria. Determine qué formas particulares de $f(\theta)$ satisfacen las ecuaciones de Navier-Stokes completas en coordenadas polares, Ecuaciones (D.5) y (D.6).

P4.34 Se propone un flujo incompresible tridimensional que tiene la siguiente forma vectorial:

$$\mathbf{V} = Kx\mathbf{i} - Ky\mathbf{j} - 2Kz\mathbf{k}$$

(*a*) Determine si es una solución válida de las ecuaciones de la continuidad y Navier-Stokes. (*b*) Calcule el campo de presiones $p(x, y, z)$ si $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$. (*c*) ¿Es el flujo irrotacional?

P4.35 De las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas polares (véase Apéndice D para coordenadas cilíndricas) para un fluido incompresible, determine la forma más general de un movimiento puramente circulatorio $v_\theta(r)$, $v_r = v_z = 0$, para el flujo sin deslizamiento entre dos cilindros concéntricos fijos, como en la Figura P4.35.

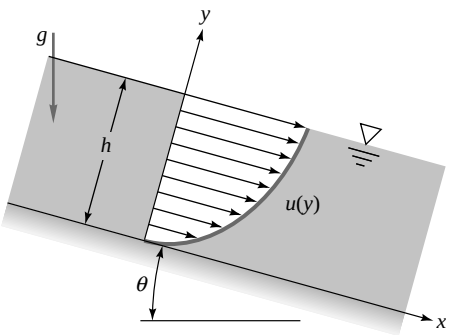


P4.35

P4.36 Una película líquida de espesor constante y viscosa fluye de forma laminar sobre una placa inclinada un ángulo θ, como en la Figura P3.36. El perfil de velocidades es

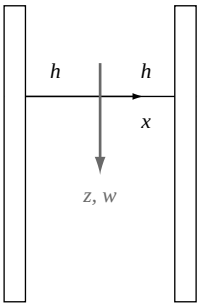
$$u = Cy\,(2h - y) \quad v = w = 0$$

Determine la constante C en función del peso específico, la viscosidad y el ángulo θ. Determine el gasto volumétrico Q por unidad de anchura (perpendicular al papel) en función de estos parámetros.



P4.36

***P4.37** La Figura P4.37 muestra a un líquido viscoso, con ρ y μ constantes, que fluye por gravedad entre dos placas separadas una distancia $2h$. El flujo está completamente desarrollado, con una única componente de velocidad $w = w(x)$. No hay gradientes de presión, sólo gravedad. Resuelva la ecuación de Navier-Stokes para obtener el perfil de velocidades entre las dos placas.



P4.37

P4.38 En el Problema P3.18 y la Figura P3.18 se sugirió la siguiente forma aproximada para el perfil de velocidades del flujo laminar estacionario en un conducto

$$u = u_{máx}\left[1 - \frac{y^2}{b^2}\right]\left[1 - \frac{z^2}{h^2}\right]$$

Con $v = w = 0$, este flujo satisfacía la condición de no deslizamiento y proporcionaba una estimación razonable del flujo volumétrico (que era la clave del Problema P3.18). Muestre que, aun así, *no* satisface la ecuación de Navier-Stokes según x para el flujo en un conducto con gradiente de presiones constante $\partial p/\partial x < 0$. Explique brevemente cómo se obtiene la solución exacta de este problema (véase, por ejemplo, Referencia 5, págs. 120-121).

P4.39 Considere el balance de momento cinético de la Figura 4.5 y añada un *momento volumétrico* concentrado C_z alrededor del eje z [6]. Determine una relación de equilibrio entre el momento volumétrico y el esfuerzo de cortadura. ¿Cuáles son las unidades apropiadas para la constante C_z? (Los momentos volumétricos son importantes en medios continuos con microestructura, como los materiales granulados.)

P4.40 Los problemas que involucran la disipación viscosa de energía dependen de la viscosidad μ, la conductividad térmica k, la velocidad de la corriente U_0 y la temperatura de la corriente T_0. Agrupe estos parámetros en el *número adimensional de Brinkman*, sabiendo que es proporcional a μ.

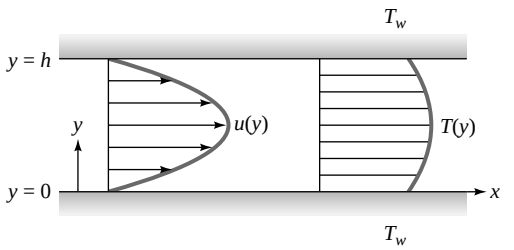
P4.41 Como se mencionó en la Sección 4.11, el perfil de velocidades para el flujo laminar entre dos placas, como en la Figura P4.41, es

$$u = \frac{4u_{máx}\,y(h - y)}{h^2} \quad v = w = 0$$

Si la temperatura de ambas placas es T_w, utilice la ecuación de la energía (4.75) para un fluido incompre-

www.elsolucionario.net

sible para obtener la distribución de temperaturas $T(y)$ entre las placas si el flujo es estacionario.



P4.41

P4.42 Suponga que queremos analizar el cilindro giratorio parcialmente lleno de la Figura 2.23 como un problema de *puesta en marcha*, poniéndolo a girar partiendo del reposo hasta que el fluido gire como un sólido rígido. ¿Cuáles son las condiciones de contorno e iniciales apropiadas para este problema?

P4.43 Para la película de líquido de la Figura P4.36, ¿cuáles son las condiciones de contorno apropiadas (*a*) en el fondo $y = 0$ y (*b*) en la superficie $y = h$?

P4.44 Suponga que deseamos analizar la expansión súbita en un conducto de la Figura P3.59 usando las ecuaciones de la continuidad y de Navier-Stokes en forma diferencial. ¿Cuáles son las condiciones de contorno apropiadas para abordar este problema?

P4.45 Suponga que deseamos analizar el flujo oscilatorio en el tubo en U de la Figura P3.96 usando las ecuaciones de la continuidad y de Navier-Stokes en forma diferencial. ¿Cuáles son las condiciones de contorno apropiadas para abordar este problema?

P4.46 Un depósito grande a temperatura T_0 alimenta con fluido un tubo circular de radio R. Alrededor de las paredes del tubo se enrolla una bobina eléctrica que suministra calor al fluido a un ritmo q_w (energía por unidad de área de la pared). Si deseamos analizar este problema usando las ecuaciones de la continuidad, de Navier-Stokes y de la energía en forma diferencial, ¿cuáles son las condiciones de contorno apropiadas en este caso?

P4.47 Un flujo incompresible bidimensional viene dado por el campo de velocidades $\mathbf{V} = 3y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$, expresado en unidades arbitrarias. ¿Satisface este flujo la ecuación de la continuidad? Si es así, determine la función de corriente $\psi(x, y)$ y represente, incluyendo flechas, algunas de las líneas de corriente.

P4.48 Considere el siguiente flujo bidimensional incompresible, que satisface claramente la ecuación de la continuidad:

$$u = U_0 = \text{constante}, \quad v = V_0 = \text{constante}$$

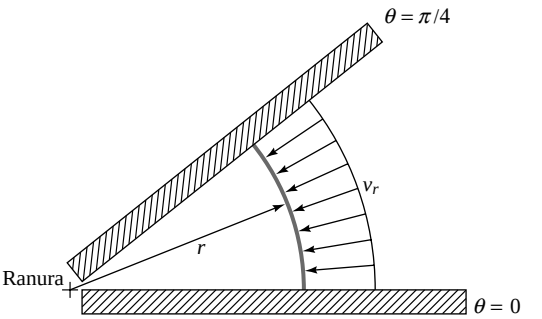
Determine la función de corriente $\psi(r, \theta)$ de este flujo usando *coordenadas polares*.

P4.49 Investigue la función de corriente $\psi = K(x^2 - y^2)$, K = constante. Represente las líneas de corriente en todo el plano xy, determine los puntos de remanso e interprete qué tipo de flujo representa.

P4.50 Investigue la función de corriente en coordenadas polares $\psi = Kr^{1/2}$ sen $\frac{1}{2}\theta$, K = constante. Represente las líneas de corriente en todo el plano xy, determine los puntos de remanso e interprete el flujo.

P4.51 Investigue la función de corriente en coordenadas polares $\psi = Kr^{2/3}$ sen $(2\theta/3)$, K = constante. Represente las líneas de corriente en todo el plano xy, excepto en el cuadrante inferior de la derecha, e interprete el flujo.

P4.52 Dos paredes en forma de cuña guían un flujo no viscoso, incompresible y bidimensional hacia una pequeña ranura situada en el origen, como en la Figura P4.52. La anchura (perpendicular al papel) es b y el flujo volumétrico es Q. A cualquier distancia r de la ranura, el flujo es radial y con velocidad constante. Obtenga una expresión para la función de corriente de este flujo usando coordenadas polares.



P4.52

P4.53 Determine la función de corriente axilsimétrica $\psi(r, z)$ correspondiente al flujo laminar completamente desarrollado en un conducto circular, Ecuación (4.146). Utilice el resultado para determinar la velocidad media $V = Q/A$ en el tubo como fracción de $u_{máx}$.

P4.54 Una función de corriente incompresible viene dada por

$$\psi(x, y) = \frac{U}{L^2}(3x^2y - y^3)$$

donde U y L son constantes (positivas). ¿Dónde se representan las líneas de corriente de este flujo en este capítulo? Utilice esta función de corriente para determinar el flujo volumétrico Q que atraviesa la superficie rectangular definida por los puntos $(x, y, z) = (2L, 0, 0)$, $(2L, 0, b)$, $(0, L, b)$ y $(0, L, 0)$. Indique la dirección del flujo.

***P4.55** En coordenadas esféricas, como las de la Figura P4.12, un flujo se denomina *axilsimétrico* si $v_\phi \equiv 0$ y $\partial/\partial\phi \equiv 0$, de modo que $v_r = v_r(r, \theta)$ y $v_\theta = v_\theta(r, \theta)$. Demuestre que en este caso existe una función de corriente $\psi(r, \theta)$ dada por

$$v_r = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad v_\theta = -\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Esta función se llama *función de corriente de Stokes* [5, pág. 204].

www.elsolucionario.net

P4.56 Investigue el potencial de velocidades $\phi = Kxy$, K = constante. Represente las líneas equipotenciales en todo el plano xy, determine los puntos de remanso y represente esquemáticamente las líneas de corriente ortogonales a las equipotenciales. ¿Qué flujo podrían representar?

P4.57 Un campo fluido incompresible bidimensional está definido por las componentes de la velocidad

$$u = 2V\frac{x}{L}\left|\frac{y}{L}\right. \qquad v = -2V\frac{y}{L}$$

donde V y L son constantes. En caso de existir, determine la función de corriente y el potencial de velocidades.

P4.58 Muestre que el potencial de velocidades correspondiente al movimiento plano de un fluido incompresible en coordenadas polares $\phi(r, \theta)$ es tal que

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

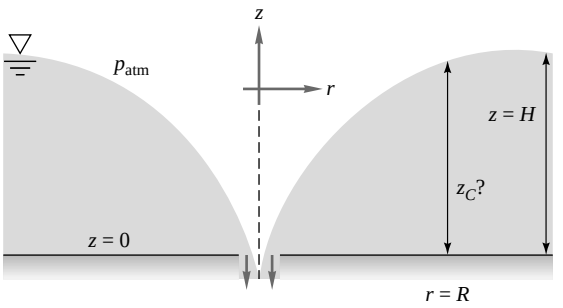
A continuación muestre que la componente z de la vorticidad en estos flujos está dada por

$$2\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_r)$$

Finalmente muestre que ϕ, tal como se ha definido aquí, satisface la ecuación de Laplace en coordenadas polares para flujo incompresible.

P4.59 Considere el potencial de velocidades $\phi = xy + x^2 - y^2$ del movimiento plano de un fluido incompresible. (*a*) ¿Es cierto que $\nabla^2\phi = 0$? Si es así, ¿qué significa esto? (*b*) En caso de existir, obtenga la función de corriente $\psi(x, y)$ de este flujo. (*c*) Obtenga la ecuación de la línea de corriente que pasa por $(x, y) = (2, 1)$.

P4.60 Se drena líquido a través de un pequeño orificio en un tanque, como muestra la Figura P4.60, de modo que el campo de velocidades resultante está dado por $v_r = 0$, $v_z = 0$, $v_\theta = KR^2/r$, donde $z = H$ es la profundidad del agua lejos del orificio. ¿Es este campo fluido rotacional o irrotacional? Determine la profundidad z_C del agua en $r = R$.



P4.60

P4.61 Investigue el potencial de velocidades en coordenadas polares $\phi = Kr^{1/2}\cos\frac{1}{2}\theta$, K = constante. Represente las líneas equipotenciales en todo el plano xy, represente esquemáticamente las líneas de corriente ortogonales e interprete el flujo.

P4.62 Muestre que el flujo lineal de Couette entre dos placas paralelas de la Figura 1.6 tiene función de corriente pero no tiene potencial de velocidades. ¿Por qué ocurre esto?

P4.63 Determine el potencial de velocidades $\phi(r, \theta)$ para el flujo bidimensional en coordenadas polares $v_r = Q/r$, $v_\theta = K/r$, donde Q y K son constantes.

P4.64 Muestre que el potencial de velocidades $\phi(r, z)$ en coordenadas cilíndricas (véase Figura 4.2) para movimiento axilsimétrico está definido de modo que

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Muestre a continuación que este potencial satisface la ecuación de Laplace en las coordenadas (r, z) para flujo incompresible.

P4.65 Un flujo incompresible bidimensional está dado por

$$u = -\frac{Ky}{x^2 + y^2} \qquad v = \frac{Kx}{x^2 + y^2}$$

donde K = constante. ¿Es este flujo irrotacional? Si es así, encuentre el potencial de velocidades, represente algunas líneas equipotenciales e interprete el flujo.

P4.66 Un potencial de velocidades en coordenadas polares está dado por

$$\phi = \frac{K\cos\theta}{r} \qquad K = \text{cte}$$

Determine la función de corriente de este flujo, represente algunas líneas de corriente y líneas equipotenciales e interprete el flujo.

P4.67 La función de corriente de un flujo irrotacional y plano en coordenadas polares es

$$\psi = C\theta - K\ln r \qquad C \text{ y } K = \text{ctes}$$

Determine el potencial de velocidades de este flujo, represente algunas líneas de corriente y líneas equipotenciales e interprete el flujo.

P4.68 Determine la función de corriente y represente las líneas de corriente debidas a la combinación de una fuente m situada en $(x, y) = (0, +a)$ y otra fuente de igual intensidad situada en $(0, -a)$.

P4.69 Determine la función de corriente y represente las líneas de corriente debidas a la combinación de un torbellino bidimensional de intensidad K (en sentido contrario a las agujas del reloj) situado en $(x, y) = (+a, 0)$ y otro torbellino igual situado en $(-a, 0)$.

***P4.70** En este capítulo se discutió brevemente la superposición de una fuente de intensidad m situada en $(-a, 0)$ y

www.elsolucionario.net

un sumidero (fuente de intensidad $-m$) situado en $(+a, 0)$, cuyo potencial de velocidades es

$$\forall = \frac{1}{2} m \Delta \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x \Phi a)^2 + y^2}$$

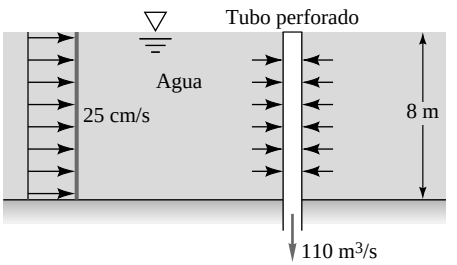
En el límite en que a tiende a cero (la fuente y el sumidero se acercan) al mismo tiempo que las intensidades m y $-m$ tienden a más y menos infinito, respectivamente, manteniendo constante el producto $a \cdot m$, se obtiene un *doblete*. (*a*) Determine la forma que adopta el potencial de velocidades para el doblete. *Consejo*: desarrolle el logaritmo natural como una serie infinita de la forma

$$\ln \frac{1+\epsilon}{1 \Phi \epsilon} = 2 \left[\epsilon + \frac{\epsilon^3}{3} + \ldots \right]$$

para ϵ tendiendo a cero. (*b*) Reescriba el resultado para ϕ_{doblete} en coordenadas polares.

P4.71 Determine la función de corriente y represente las líneas de corriente debidas a la combinación de un torbellino de intensidad K (en sentido contrario a las agujas del reloj) situado en $(x, y) = (+a, 0)$ y un torbellino de intensidad $-K$, en sentido opuesto, situado en $(-a, 0)$.

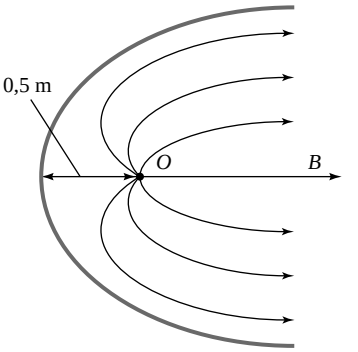
P4.72 Una planta de potencia costera toma 110 m^3/s de agua de refrigeración a través de un colector vertical perforado inmerso en una corriente de agua de 8 m de profundidad, como en la Figura P4.72. Si la velocidad de la corriente es de 25 cm/s, estime (*a*) cómo de lejos aguas abajo y (*b*) cómo de lejos en la dirección perpendicular al papel se sienten los efectos de la toma.



P4.72

P4.73 Un cuerpo semiinfinito de Rankine bidimensional, de 8 cm de anchura, está situado en un túnel de agua a 20 °C. La presión del agua lejos aguas arriba a lo largo de la línea central del cuerpo es de 120 kPa. ¿Cuál es el radio de la nariz del cuerpo semiinfinito? ¿A qué velocidad del flujo en el túnel comenzarán a formarse burbujas de cavitación en la superficie del cuerpo?

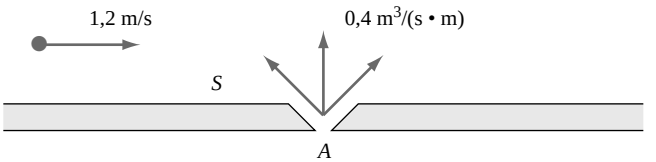
P4.74 La forma de una pequeña charca de pesca se puede aproximar por un cuerpo semiinfinito, como se muestra en la Figura P4.74. El punto *O*, que está a 0,5 m del borde izquierdo de la charca, es una fuente que suministra 0,63 m^3/s de agua por unidad de longitud perpendicular al papel. Encuentre el punto *B*, situado a lo largo del eje, donde la velocidad del agua es aproximadamente 25 cm/s.



P4.74

***P4.75** Determine la función de corriente y represente las líneas de corriente debidas a la combinación de una fuente de intensidad $2m$ situada en $(x, y) = (+a, 0)$ y una fuente de intensidad m situada en $(-a, 0)$. ¿Existen puntos de remanso en el campo fluido?

P4.76 El aire que fluye sobre una superficie plana a 1,2 m/s se encuentra con un chorro de aire que emerge del punto *A* de la pared horizontal, como en la Figura P4.76. El gasto volumétrico del chorro es de 0,4 m^3/s por unidad de longitud perpendicular al papel. Si se aproxima el chorro por una fuente no viscosa, (*a*) localice el punto de remanso *S* situado sobre la pared. (*b*) ¿Qué distancia perpendicular a la placa alcanzará el flujo del chorro en la corriente?



P4.76

P4.77 Se simula un tornado mediante la superposición de un sumidero de intensidad $m = -1000$ m^2/s y un torbellino de intensidad $K = +1600$ m^2/s. Determine el ángulo con el que las líneas de corriente cruzan las líneas radiales y demuestre que es independiente de r y θ. Si el tornado se forma en aire estándar a nivel del mar, ¿a qué radio la presión local será equivalente a 29 in Hg?

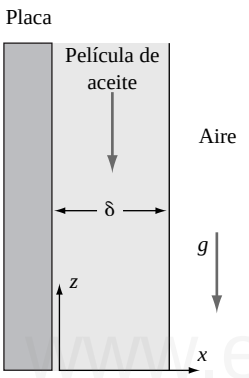
P4.78 La solución del Problema P4.68 (¡no la revele!) puede representar una fuente de intensidad m situada en $(0, +a)$ cerca de una pared horizontal ($y = 0$). [La otra fuente en $(0, -a)$ representa una «imagen» que permite simular la pared]. Determine (*a*) la velocidad máxima del flujo a lo largo de la pared y (*b*) el punto de presión mínima a lo largo de la pared. *Consejo*: utilice la ecuación de Bernoulli.

***P4.79** Estudie el efecto combinado de los dos flujos viscosos de la Figura 4.16. Esto es, determine $u(y)$ cuando la pared de arriba se mueve con velocidad V y hay también un gradiente de presiones constante (dp/dx). ¿Es posible superponer ambos flujos? Si es así, explique por qué. Represente los perfiles de velocidades correspon-

www.elsolucionario.net

dientes a un gradiente de presiones (*a*) nulo, (*b*) positivo y (*c*) negativo para la misma velocidad V de la pared superior.

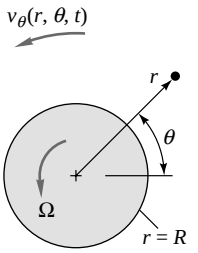
***P4.80** Considere una película de aceite, de densidad ρ y viscosidad μ, que fluye hacia abajo de forma estacionaria sobre una placa vertical, como en la Figura P4.80. Tras una región de desarrollo cerca de la parte superior de la placa, el flujo de aceite se vuelve independiente de z y de espesor constante δ. Suponga que la velocidad sólo depende de x, esto es, $w = w(x)$, y que la atmósfera no ofrece resistencia de cortadura en la superficie de la película. (*a*) Resuelva la ecuación de Navier-Stokes para $w(x)$ y represente la solución de forma aproximada. (*b*) Suponga que se miden el espesor δ de la película y la pendiente del perfil de velocidades en la pared $[\partial w/\partial x]_{\text{pared}}$ con un anemómetro láser-Doppler (Capítulo 6). Obtenga una expresión para la viscosidad μ del aceite en función de (r, δ, g, $[\partial w/\partial x]_{\text{pared}}$).



P4.80

P4.81 Modifique el análisis de la Figura 4.17 para encontrar la velocidad u_θ cuando el cilindro interior está fijo y el cilindro exterior gira con velocidad angular Ω_0. ¿Puede *añadirse* esta solución a la Ecuación (4.149) para representar el flujo causado por la rotación de los cilindros interior y exterior? Explique su conclusión.

***P4.82** Un cilindro circular de radio R gira con velocidad angular Ω en un fluido incompresible y viscoso que está en reposo lejos del cilindro, como en la Figura P4.82. Haga las simplificaciones pertinentes y obtenga la ecuación diferencial y las condiciones de contorno que determinan la velocidad v_θ en el fluido. No las resuelva a no ser que esté obsesionado con este problema. ¿Cómo es el campo de velocidades estacionario en este caso?

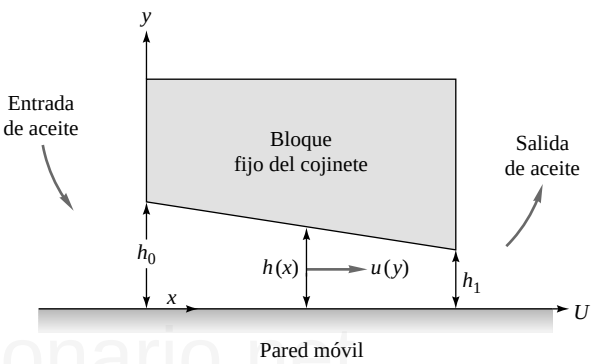


P4.82

P4.83 La Figura P4.83 ilustra el flujo que aparece en la lubricación de cojinetes, donde un aceite viscoso (ρ, μ) es forzado a pasar por un hueco $h(x)$ entre un bloque fijo y una pared que se mueve con velocidad U. Si el hueco es estrecho, $h \ll L$, demuestre que las distribuciones de presión y velocidad son de la forma $p = p(x)$, $u = u(y)$, $v = w = 0$. Despreciando la gravedad, reduzca las ecuaciones de Navier-Stokes (4.38) a una única ecuación diferencial para $u(y)$. ¿Cuáles son las condiciones de contorno apropiadas? Integre y demuestre que

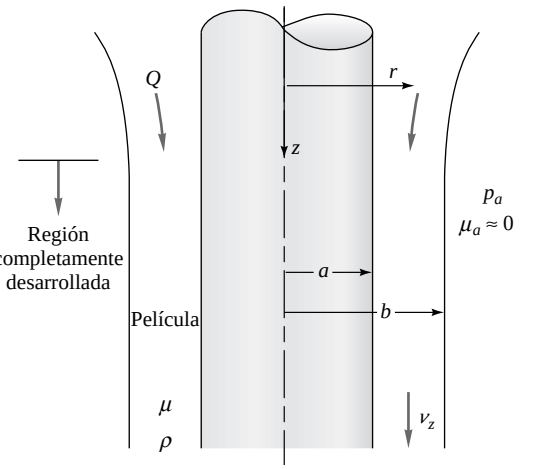
$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2 - yh) + U\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

donde $h = h(x)$ puede ser un perfil de hueco arbitrario lentamente variable. (Para más información sobre la teoría de lubricación véase la Referencia 16)



P4.83

***P4.84** Considere una película de un líquido viscoso que fluye uniformemente hacia abajo por una barra vertical de radio a, como en la Figura P4.84. A cierta distancia del borde superior de la barra, la película alcanza un flujo límite o *completamente desarrollado* de radio exterior constante b, con $v_z = v_z(r)$, $v_\theta = v_r = 0$. Suponga que la atmósfera no ofrece resistencia de cortadura al movimiento de la película. Obtenga una ecuación diferen-

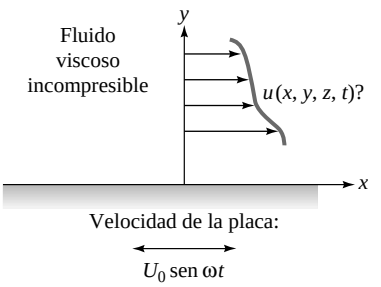


P4.84

www.elsolucionario.net

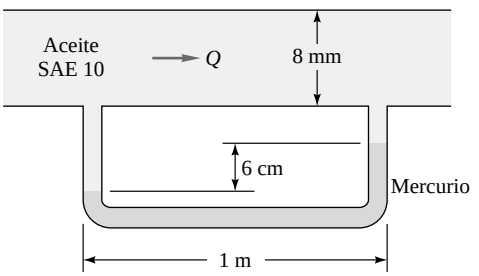
cial para v_z, plantee las condiciones de contorno apropiadas y obtenga la distribución de velocidades en la película. ¿Qué relación existe entre el radio b de la película y el flujo volumétrico Q de la película?

P4.85 Una placa plana de anchura y longitud infinita oscila sinusoidalmente en su propio plano en presencia de un fluido incompresible y viscoso, como en la Figura P4.85. En la parte superior de la placa y lejos de ella el fluido está en reposo. Haciendo cuantas simplificaciones pueda, obtenga la ecuación diferencial y las condiciones de contorno que determinan la velocidad u en el fluido. No la resuelva (si *puede* resolverla inmediatamente, podría considerársele liberado de este curso con nota).



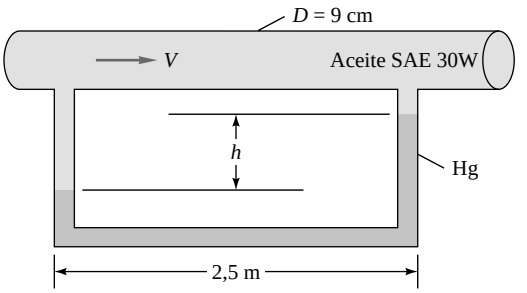
P4.85

P4.86 Entre dos placas paralelas separadas 8 cm fluye aceite SAE 10 a 20 °C, como en la Figura P4.86. Un manómetro de mercurio, cuyas tomas de presión están separadas 1 m entre sí, registra una altura de 6 cm, como indica la figura. Estime el caudal de aceite en estas condiciones.



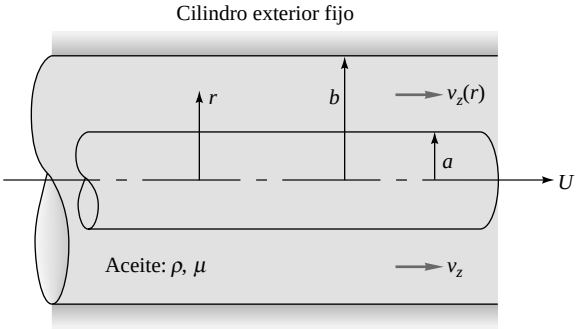
P4.86

P4.87 A través del tubo de 9 cm de diámetro de la Figura P4.87 fluye aceite SAE 30W a 20 °C con una velocidad media de 4,3 m/s. (*a*) Verifique que el flujo es laminar. (*b*) Determine el caudal en m³/h. (*c*) Calcule la altura h que debería proporcionar el manómetro de mercurio, en cm.



P4.87

P4.88 El aceite viscoso de la Figura P4.88 fluye de forma estacionaria dentro de un cilindro fijo debido al movimiento de un cilindro concéntrico interior que se desplaza axialmente con velocidad U dentro del cilindro exterior. Suponiendo presión y densidad constantes y que el movimiento es puramente axial, resuelva las Ecuaciones (4.38) para obtener la velocidad $v_z(r)$ del fluido. ¿Cuáles son las condiciones de contorno apropiadas?



P4.88

***P4.89** Modifique el Problema P4.88 de modo que el cilindro exterior también se mueva hacia la *izquierda* con velocidad constante V. Determine la distribución de velocidades $v_z(r)$. ¿Para qué valor del cociente V/U el esfuerzo de cortadura en la pared será igual en las superficies de ambos cilindros?

P4.90 A través de un tubo recto horizontal fluye aceite SAE 10W a 20 °C. El gradiente de presiones es constante e igual a 400 Pa/m. (*a*) ¿Qué diámetro D debe tener el tubo, en cm, para que el número de Reynolds Re_D del flujo sea igual a 1000? (*b*) En ese caso, ¿cuál es el caudal Q en m³/h?

***P4.91** Considere el flujo de Couette estacionario, incompresible y bidimensional (flujo entre dos placas planas infinitas, la superior moviéndose con velocidad constante y la inferior en reposo, como en la Figura 4.16*a*). Suponga que el fluido es no newtoniano, con los esfuerzos viscosos dados por

$$\tau_{xx} = a\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^c \quad \tau_{yy} = a\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|^c \quad \tau_{zz} = a\left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|^c$$

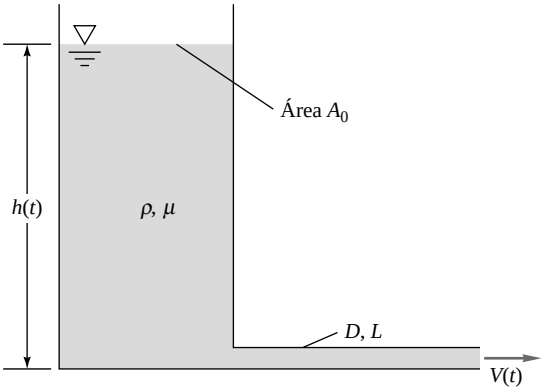
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tfrac{1}{2}a\left|\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right|^c \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tfrac{1}{2}a\left|\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right|^c$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tfrac{1}{2}a\left|\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right|^c$$

donde a y c son constantes del fluido. Haga las mismas simplificaciones que condujeron a la Ecuación (4.140). (*a*) Determine el perfil de velocidades $u(y)$. (*b*) ¿Cómo se parece el perfil de velocidades de este caso al de un fluido newtoniano?

www.elsolucionario.net

P4.92 Un tanque de área A_0 se descarga a través de un tubo de diámetro D y longitud L, como se muestra en la Figura P4.92. Suponiendo que el flujo en el tubo es laminar y está originado por la presión hidrostática a la entrada, y despreciando la energía cinética del chorro de salida, deduzca una fórmula para el nivel $h(t)$ del tanque, si el nivel inicial es h_0.



P4.92

P4.93 Se unen una serie de microtubos de diámetro d y longitud 25 cm para formar una estructura de panel de abeja, cuya sección transversal total es de 0,0006 m^2. La caída de presión entre la entrada y la salida es de 1,5 kPa. Se desea obtener un caudal total de agua a 20 °C de 5 m^3/h. (*a*) ¿Cuál es el diámetro apropiado de los microtubos? (*b*) ¿Cuántos microtubos forman el conjunto? (*c*) ¿Cuál es el número de Reynolds de cada microtubo?

Problemas conceptuales

C4.1 En la descripción euleriana, la aceleración total de una partícula fluida está dada por la Ecuación (4.2), donde **V** es una función conocida de la posición y del tiempo. Explique cómo se puede evaluar la aceleración de la partícula en la descripción lagrangiana, en la que la posición **r** de la partícula es una función conocida de la posición inicial y del tiempo, $\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{r}_0, t)$. ¿Puede ilustrarlo con una ejemplo?

C4.2 ¿Es cierto que la ecuación de la continuidad, Ecuación (4.6), es válida para flujos compresibles e incompresibles, newtonianos y no newtonianos, viscosos y no viscosos? Si es así, ¿existe *alguna* limitación a esta ecuación?

C4.3 Considere un CD (disco compacto) rotando con velocidad angular Ω. ¿Tiene *vorticidad* en el sentido discutido en este capítulo? Si es así, ¿cuánta?

C4.4 ¿Qué aceleración pueden soportar los fluidos? ¿Son los fluidos como los astronautas, para los cuales una aceleración de 5*g* resulta muy fuerte? Utilice el flujo del Ejemplo 4.8, en $r = R$, para realizar algunas estimaciones sobre el orden de magnitud de la aceleración de un fluido.

C4.5 Exponga las condiciones (hay más de una) bajo las cuales el análisis de la distribución de temperaturas de un flujo está completamente desacoplado, haciendo posible un análisis separado para la velocidad y la presión. ¿Es posible hacer esto tanto en flujo laminar como turbulento?

C4.6 Considere el flujo de un líquido sobre un vertedero. ¿Cómo pueden cambiar las condiciones de contorno y la estructura del flujo si comparamos el flujo de agua sobre un vertedero grande con el flujo de aceite SAE 30 sobre un vertedero a escala muy reducida?

C4.7 ¿Existe alguna diferencia entre la función de corriente ψ y el método desarrollado en la Sección 1.9 para determinar las líneas de corriente? ¿O son esencialmente equivalentes?

C4.8 ¿Bajo qué condiciones existen tanto la función de corriente ψ como el potencial de velocidades ϕ de un campo fluido? ¿Cuándo existe una de ellas, pero no la otra?

C4.9 ¿Cómo podría predecirse la (sorprendente) inestabilidad tridimensional de Taylor de la Figura 4.18? Discuta un procedimiento general para examinar la estabilidad de un flujo dado.

C4.10 Considere un flujo axilsimétrico ($\mathrm{E}/\mathrm{E}\theta = 0$), incompresible e irrotacional en coordenadas (r, z). ¿Existe función de corriente? Si es así, ¿satisface la ecuación de Laplace? ¿Son las líneas ψ constante iguales a las líneas de corriente del flujo? ¿Existe potencial de velocidades? Si es así, ¿satisface la ecuación de Laplace? ¿Son las líneas ϕ constante perpendiculares en todo punto a las líneas ψ constante?

Problemas del examen de fundamentos de ingeniería

Este capítulo no es el favorito de las personas que preparan el examen FE. Probablemente no aparezca un solo problema de este capítulo en el examen, pero si lo hiciera, seguramente sería como éstos.

FE4.1 Dada la distribución de velocidades incompresible y estacionaria $\mathbf{V} = 3x\mathbf{i} + Cy\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, donde C es una constante, ¿cuál debería ser el valor de C si se satisface la conservación de la masa?

(*a*) 3, (*b*) 3/2, (*c*) 0, (*d*) –3/2, (*e*) –3

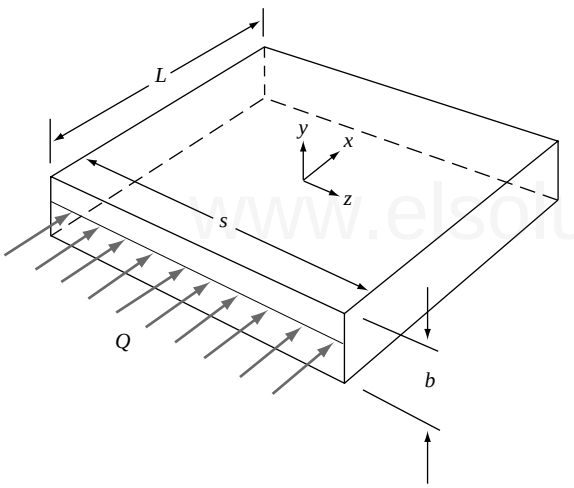
www.elsolucionario.net

FE4.2 Dada la distribución de velocidades estacionaria $\mathbf{V} = 3x\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + Cy\mathbf{k}$, donde C es una constante, ¿cuál debería ser el valor de C si el flujo es irrotacional?
(*a*) 3, (*b*) 3/2, (*c*) 0, (*d*) –3/2, (*e*) –3

FE4.3 Dada la distribución de velocidades incompresible y estacionaria $\mathbf{V} = 3x\mathbf{i} + Cy\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, donde C es una constante, el esfuerzo de cortadura τ_{xy} en el punto (x, y, z) viene dado por
(*a*) 3μ, (*b*) $(3x + Cy)\mu$, (*c*) 0, (*d*) $C\mu$, (*e*) $(3 + C)\mu$

Problemas extensos

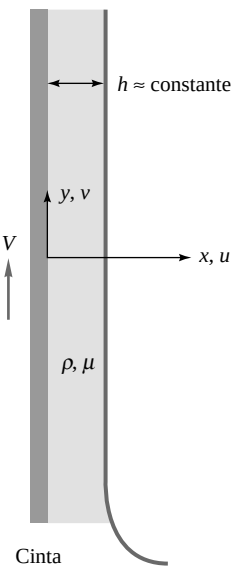
PE4.1 En una cierta aplicación médica, fluye agua a la temperatura y presión de la habitación a través de un canal rectangular muy delgado de longitud L = 10 cm, anchura s = 1,0 cm y espesor b = 0,30 mm, como se muestra en la Figura PE4.1. El flujo volumétrico es sinusoidal con amplitud $\hat{Q}$ = 0,50 mL/s y frecuencia f = 20 Hz, esto es, $Q = \hat{Q}\,\text{sen}\,(2\Theta f t)$.
(*a*) Calcule el número de Reynolds máximo (Re = Vb/ν) basado en la velocidad media máxima y el espesor del canal. El flujo en un canal como éste permanece laminar siempre que Re sea menor que un cierto valor crítico, alrededor de 2000. Si Re es mayor que



PE4.1

2000, el flujo será turbulento. ¿Es este flujo laminar o turbulento? (*b*) En este problema, la frecuencia es suficientemente baja para que el flujo pueda resolverse en cada instante como si fuera estacionario con el valor instantáneo del flujo volumétrico. (Ésta es la hipótesis de flujo *casi-estacionario*.) En un instante de tiempo genérico, encuentre una expresión para la velocidad u en la dirección de la corriente como función de y, μ, dp/dx y b, donde dp/dx es el gradiente de presiones requerido para forzar el flujo volumétrico Q a través del canal. A continuación, estime la magnitud máxima de la componente u de la velocidad. (*c*) Obtenga una relación entre los valores instantáneos del flujo volumétrico Q y del gradiente de presiones dp/dx. La respuesta debería darse en la forma de una expresión para Q en función de dp/dx, s, b y la viscosidad μ. (*d*) Estime el esfuerzo en la pared τ_w como función de $\hat{Q}$, f, μ, b, s y el tiempo t. (*e*) Finalmente, para los números dados en el enunciado del problema, estime la amplitud del esfuerzo de cortadura en la pared, $\hat{\tau}_w$, en N/m^2.

PE4.2 Una cinta se mueve hacia arriba con velocidad V arrastrando una película de un líquido viscoso de espesor h, como en la Figura PE4.2. Cerca de la cinta, el fluido se mueve hacia arriba debido a la condición de no deslizamiento. En la superficie exterior, la película fluye hacia abajo debido a la gravedad. Suponiendo que la única componente de la velocidad no nula es $v(x)$ y que los esfuerzos de cortadura son nulos en la cara exterior de la película, deduzca una fórmula para (*a*) $v(x)$, (*b*) la velocidad media V_{med} en la película y (*c*) la velocidad V_c para la cual no hay flujo neto ni hacia arriba ni hacia abajo. (*d*) Represente esquemáticamente $v(x)$ en el caso (*c*).



PE4.2

www.elsolucionario.net

Referencias

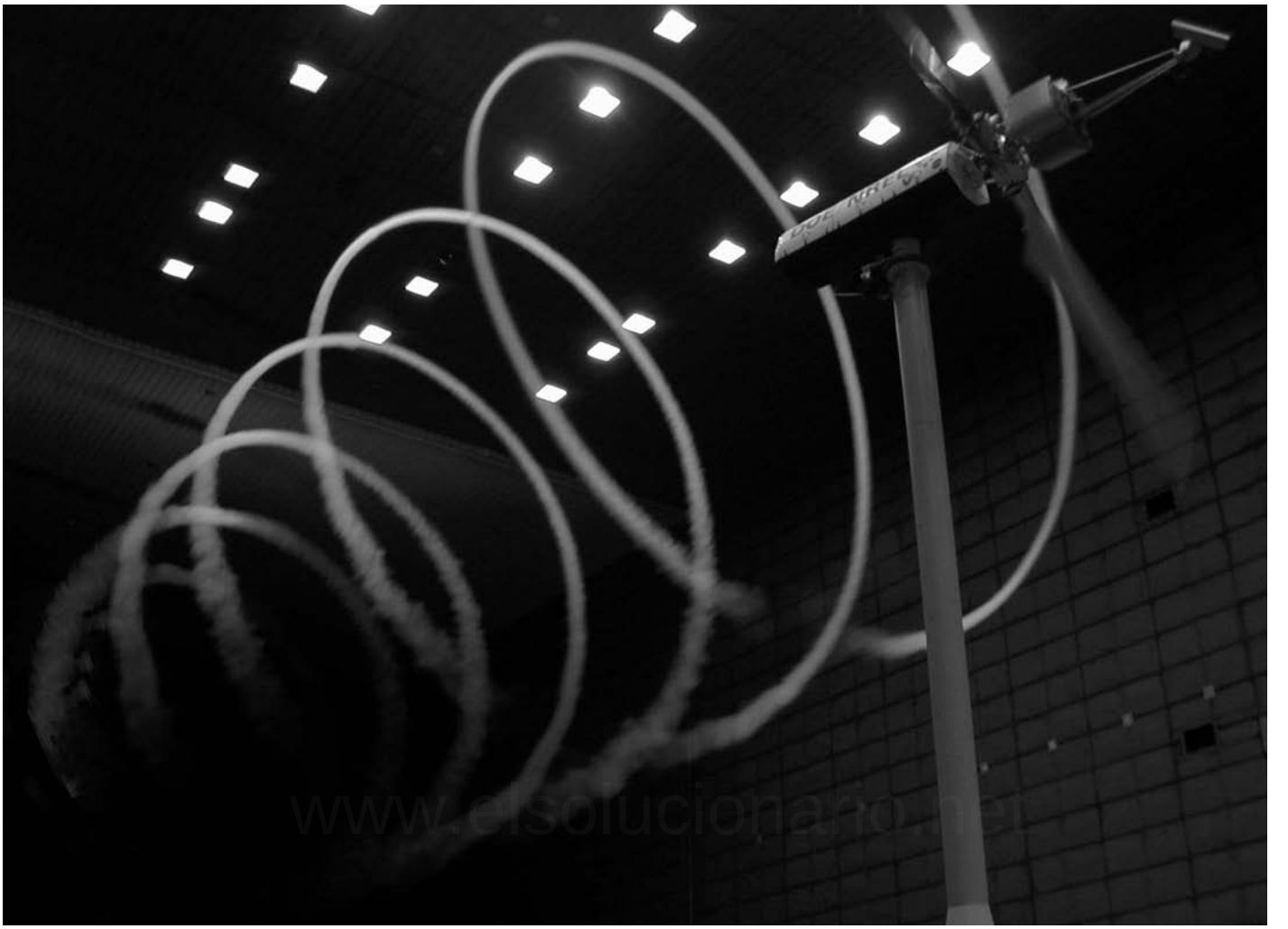
1. J. D. Anderson, *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*, McGraw-Hill, Nueva York, 1995.
2. S. Levy, *Two-Phase Flow in Complex Systems*, John Wiley, Nueva York, 1999.
3. S. M. Selby, *CRC Handbook of Tables for Mathematics*, 4.ª ed., CRC Press Inc., Cleveland, OH, 1976.
4. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, 7.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1979.
5. F. M. White, *Viscous Fluid Flow*, 2.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1991.
6. L. E. Malvern, *Introduction to Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.
7. J. P. Holman, *Heat Transfer*, 8.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1997.
8. W. M. Kays y M. E. Crawford, *Convective Heat and Mass Transfer*, 3.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1993.
9. G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1967.
10. L. Prandtl y O. G. Tietjens, *Fundamentals of Hydro-and Aeromechanics*, Dover, Nueva York, 1957.
11. R. Aris, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.
12. G. A. Holzapfel, *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*, John Wiley, Nueva York, 2000.
13. D. A. Danielson, *Vectors and Tensors in Engineering and Physics*, 2.ª ed., Westview (Perseus) Press, Boulder, CO, 1997.
14. R. I. Tanner, *Engineering Rheology*, 2.ª ed., Oxford University Press, Nueva York, 2000.
15. H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6.ª ed., Dover, Nueva York, 1945.
16. G. W. Stakowiak y A. W. Batchelor, *Engineering Tribology*, 2.ª ed., Butterworth-Heinemann, Woburn, MA, 2001.
17. G. I. Taylor, «Stability of a Viscous Liquid Contained between Two Rotating Cylinders», *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, vol. 223, 1923, págs. 289-343.
18. E. L. Koschmieder, «Turbulent Taylor Vortex Flow», *J. Fluid Mech.*, vol. 93, 1979, págs. 515-527.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Los experimentos son la base de la Mecánica de Fluidos. Aquí se muestra el ensayo, realizado por el *National Renewable Energy Laboratory,* de un aerogenerador de la Grumman Corp. de 10 metros de diámetro a escala real en el túnel de 80 ft por 120 ft de NASA Ames, el mayor túnel de viento del mundo. El diámetro del rotor es de 10 m, y gira a 72 rpm. El humo emitido por una de las palas muestra la estela helicoidal del rotor. En este experimento se variaron numerosos parámetros adimensionales: el número de Reynolds basado en la cuerda de las palas; la relación entre la velocidad de punta de pala y la velocidad del viento; el número de Strouhal basado en las oscilaciones del ángulo de paso de las palas; y un parámetro proporcional a la velocidad de variación del ángulo de paso de las palas. (*De la Referencia 37, cortesía de la American Society of Mechanical Engineers*.)

www.elsolucionario.net

Capítulo 5
Análisis dimensional y semejanza

Motivación. En este capítulo se discute la planificación, la presentación y la interpretación de los datos experimentales. Trataremos de convencer al lector de que la mejor manera de presentar dichos datos es en forma *adimensional*. Resultados experimentales que podrían requerir la utilización de tablas, incluso de varios volúmenes de tablas, se pueden presentar como un conjunto de curvas —o incluso una única curva— cuando se adimensionalizan convenientemente. La técnica que permite hacer esto es el *análisis dimensional*.

En el Capítulo 3 se presentaron los balances de masa, cantidad de movimiento y energía para volúmenes de control de tamaño macroscópico, lo que condujo a resultados globales: flujo másico, fuerza, par, trabajo total realizado o transferencia de calor. En el Capítulo 4 se presentaron los balances infinitesimales que conducen a las ecuaciones en derivadas parciales básicas de la Mecánica de Fluidos y algunas soluciones particulares tanto de flujo (laminar) viscoso como no viscoso. Las técnicas *analíticas* directas se limitan a geometrías sencillas y condiciones de contorno uniformes. Sólo una pequeña fracción de los problemas de flujos ingenieriles pueden resolverse directamente mediante fórmulas analíticas.

La mayoría de los flujos de aplicación práctica son demasiado complejos, tanto geométrica como físicamente, para ser resueltos analíticamente. En estos casos se debe recurrir a los ensayos experimentales o a las técnicas de la Mecánica de Fluidos Computacional (CFD, *Computational Fluid Dynamics*) [2]. Los resultados experimentales o numéricos se suelen presentar en forma de valores puntuales discretos y curvas suaves. Estos datos tienen mucha mayor generalidad si se expresan en una forma económica y compacta. Ésta es la motivación del análisis dimensional, una técnica que se encuentra entre los fundamentos de la Mecánica de Fluidos y que también se usa ampliamente en todos los campos de la ingeniería además de en las ciencias físicas, biológicas, en medicina y en las ciencias sociales. El presente capítulo muestra cómo el análisis dimensional mejora la presentación tanto de los resultados como de la teoría.

5.1. INTRODUCCIÓN

Básicamente, el análisis dimensional es un método que permite reducir el número y complejidad de las variables que intervienen en la descripción de un fenómeno físico dado, para lo que se utilizan una serie de técnicas. Si un fenómeno depende de n variables dimensionales, el análisis dimensional reduce el problema a sólo k variables *adimensionales*, donde la reducción es $n - k = 1, 2, 3$ o 4, dependiendo de la complejidad del problema. Generalmente $n - k$ es igual al número de dimensiones independientes (a veces llamadas dimensiones básicas, primarias o fundamentales) que aparecen en el problema. En Mecánica de Fluidos, las cuatro dimensiones básicas se toman generalmente como la masa M, la longitud L, el tiempo T y la temperatura Θ (letra teta griega mayúscula), en resumen un sistema $MLT\Theta$. Algunas veces se utiliza el sistema $FLT\Theta$, con la fuerza F reemplazando a la masa.

Aunque el objeto del análisis dimensional es reducir variables y agruparlas en forma adimensional, este método ofrece varias ventajas adicionales. La primera es un enorme ahorro de tiempo y dinero. Supongamos que se sabe que la fuerza F sobre un cuerpo inmerso en la corriente de un fluido depende sólo de la longitud del cuerpo L, de la velocidad de la corriente V, de la densidad del fluido ρ y de su viscosidad μ; esto es,

$$F = f(L, V, \rho, \mu) \tag{5.1}$$

www.elsolucionario.net

Supongamos además que la geometría y las condiciones del flujo son tan complicadas que las ecuaciones en forma integral (Capítulo 3) y diferencial (Capítulo 4) no pueden resolverse para obtener la fuerza. En ese caso debemos determinar experimentalmente la función $f(L, V, \rho, \mu)$.

En general, se necesitan unos 10 puntos para dar una curva. Para determinar la influencia de la longitud del cuerpo en la fuerza necesitaremos repetir el experimento para 10 longitudes L. Para cada L necesitaremos 10 valores de V, 10 valores de ρ y 10 valores de μ, debiendo realizarse en total 10^4, o 10.000, experimentos. A 100 euros por experimento, ya pueden imaginarse las consecuencias. Sin embargo, con el análisis dimensional podemos reducir la Ecuación (5.1) a su forma equivalente

$$\frac{F}{\rho V^2 L^2} = g\left(\frac{\rho V L}{\mu}\right) \qquad (5.2)$$

o

$$C_F = g(\mathrm{Re})$$

Esto es, el *coeficiente adimensional de fuerza* $F/(\rho V^2 L^2)$ es sólo función del *número adimensional de Reynolds* $\rho VL/\mu$. Aprenderemos a hacer esta reducción en las Secciones 5.2 y 5.3.

La función g es matemáticamente diferente de la función original f, pero contiene la misma información. Con el análisis dimensional no se pierde nada. Pensando en el ahorro, podemos determinar g sólo con 10 experimentos para la única variable denominada número de Reynolds. No es necesario cambiar los valores de L, V, ρ o μ separadamente, basta con variar el *grupo* $\rho VL/\mu$. Esto se puede hacer variando, por ejemplo, sólo la velocidad V en los ensayos del túnel aerodinámico o canal hidrodinámico; pero no es necesario construir 10 cuerpos de tamaño diferente ni utilizar 100 fluidos diferentes con 10 densidades y 10 viscosidades distintas. El coste es ahora mucho más bajo, sólo 1000 euros.

Un segundo aspecto favorable del análisis dimensional consiste en que nos ayuda a pensar y planificar un experimento o teoría. Sugiere formas adimensionales de las ecuaciones antes de gastar tiempo y dinero para encontrar las soluciones con ordenador. Sugiere las variables que deben descartarse; algunas veces se pueden rechazar variables o grupos de variables mediante el uso del análisis dimensional, haciendo algunos ensayos que muestran que son poco importantes. Finalmente, el análisis dimensional da a menudo gran información sobre las relaciones físicas que estamos intentando estudiar.

Una tercera ventaja del análisis dimensional es que proporciona las *leyes de escala* que pueden convertir los datos obtenidos sobre un pequeño *modelo* en información para el diseño de un *prototipo* grande. No construimos un avión de millones de dólares para ver si proporciona la sustentación suficiente. Mediremos primero la sustentación sobre un pequeño modelo y utilizaremos después las leyes de semejanza para predecir la sustentación del prototipo. Hay métodos, que explicaremos más adelante, para encontrar las leyes de escala. Cuando las leyes de escala son válidas, diremos que existe *semejanza* entre el modelo y el prototipo. En el caso de la Ecuación (5.1), existe semejanza si el número de Reynolds es el mismo para el modelo y prototipo, porque la función g exige entonces que el coeficiente de fuerza sea también el mismo:

$$\text{Si} \quad \mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_p \quad \text{entonces} \quad C_{Fm} = C_{Fp} \qquad (5.3)$$

donde los subíndices m y p significan modelo y prototipo, respectivamente. De la definición del coeficiente de fuerza, esto indica que

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{\rho_p}{\rho_m}\left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2\left(\frac{L_p}{L_m}\right)^2 \qquad (5.4)$$

cuando los datos tomados cumplen la condición $\rho_p V_p L_p/\mu_p = \rho_m V_m L_m/\mu_m$. La Ecuación (5.4) es una ley de escala; si medimos la fuerza sobre el modelo para el número de Reynolds del modelo, la fuerza sobre el prototipo para el mismo número de Reynolds es igual a la fuerza sobre el modelo multiplicada por la relación de densidades, la relación de velocidades al cuadrado y la relación de longitudes al cuadrado. Más adelante daremos más ejemplos.

¿Ha entendido estas explicaciones introductorias? Tenga en cuenta que aprender análisis dimensional es como aprender a jugar al tenis; hay distintos niveles de juego. Podemos establecer algunas reglas básicas y hacer un trabajo bastante eficaz en este breve capítulo, pero el análisis dimensional en toda su extensión tie-

www.elsolucionario.net

ne muchas sutilezas y matices que sólo con tiempo, práctica y madurez se pueden dominar. Aunque el análisis dimensional tiene un fundamento físico y matemático, para utilizarlo de un modo efectivo se necesitan grandes dosis de arte e ingenio.

EJEMPLO 5.1

Un copépodo es un crustáceo acuático de un diámetro aproximado de l mm. Queremos conocer la resistencia al movimiento del copépodo cuando se mueve lentamente en el agua. Se construye un modelo a escala 100 veces mayor y se ensaya en glicerina a una velocidad $V = 30$ cm/s. La resistencia medida en el modelo es de 1,3 N. Para asegurar la semejanza, ¿cuál es la velocidad y resistencia del copépodo en agua? Considere que es aplicable la Ecuación (5.2) y que la temperatura es de 20 °C.

Solución

- *Valores de las propiedades.* De la Tabla A.3, las densidades y viscosidades a 20 °C son

Agua (prototipo):	$\mu_p = 0{,}001$ kg/(m · s)	$\rho_p = 998$ kg/m^3
Glicerina (modelo):	$\mu_m = 1{,}5$ kg/(m · s)	$\rho_m = 1263$ kg/m^3

- *Consideraciones*. Se cumple la Ecuación (5.2) y existe semejanza; esto es, el modelo y el prototipo tienen el mismo número de Reynolds y, por tanto, el mismo coeficiente de fuerza.
- *Procedimiento*. Las escalas de longitud son $L_m = 100$ mm y $L_p = 1$ mm. Calculamos el número de Reynolds y el coeficiente de fuerza del modelo y los igualamos a los del prototipo:

$$\mathrm{Re}_m = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \frac{(1263\ \text{kg/m}^3)(0{,}3\ \text{m/s})(0{,}1\ \text{m})}{1{,}5\ \text{kg/(m}\cdot\text{s)}} = 25{,}3 = \mathrm{Re}_p = \frac{(998\ \text{kg/m}^3)V_p(0{,}001\ \text{m})}{0{,}001\ \text{kg/(m}\cdot\text{s)}}$$

Despejando se obtiene $V_p = 0{,}0253$ m/s = 2,53 cm/s *Resp.*

www.elsolucionario.net

Del mismo modo, usando esta velocidad del prototipo, igualamos los coeficientes de fuerza:

$$C_{Fm} = \frac{F_m}{\rho_m V_m^2 L_m^2} = \frac{1{,}3\ \text{N}}{(1263\ \text{kg/m}^3)(0{,}3\ \text{m/s})^2(0{,}1\ \text{m})^2} = 1{,}14$$

$$= C_{Fm} = \frac{F_p}{(998\ \text{kg/m}^3)(0{,}0253\ \text{m/s})^2(0{,}001\ \text{m})^2}$$

Despejando se obtiene $F_p = 7{,}3 \times 10^{-7}$ N *Resp.*

- *Comentario*. Suponiendo que reprodujimos el número de Reynolds correctamente, experimentar con el modelo es una buena idea, pues es obvio que sería difícil medir una fuerza de resistencia tan pequeña directamente sobre el copépodo.

Históricamente, fue Euler la primera persona que trató con extensión, en sus escritos de 1765, sobre las unidades y razonamientos dimensionales en las relaciones físicas. Las ideas de Euler se adelantaron a su tiempo, al igual que las de Joseph Fourier, en cuyo libro de 1882, *Analytical Theory of Heat*, se establece lo que ahora se llama el *principio de homogeneidad dimensional*, y se desarrollan algunas reglas de semejanza para el flujo de calor. No hubo más avances significativos hasta el libro de Lord Rayleigh de 1877, *Theory of Sound*, donde este último propuso un «método de dimensiones» y dio varios ejemplos de análisis dimensional. El avance final, que dio al método la forma en que lo conocemos hoy, se suele atribuir a E. Buckingham en 1914 [1], en cuyo trabajo se introduce lo que ahora se llama el *Teorema Pi de Buckingham* para describir los parámetros adimensionales (véase Sección 5.3). Sin embargo, hoy sabemos que un francés, A. Vaschy, en 1892, y un ruso, D. Riabouchinsky, en 1911, publicaron independientemente trabajos en los que se obtienen resultados equivalentes a los del teorema pi. P. W. Bridgman publicó en 1922 un libro [3] donde se describe la teoría general del análisis dimensional desarrollada a partir del trabajo de Buckingham.

La gran utilidad del análisis dimensional, y el juicio necesario para su uso, han dado lugar a una gran variedad de libros y monografías. Así, después del de Bridgman, el autor conoce al menos 30 libros pu-

www.elsolucionario.net

blicados sobre el tema, de los cuales los más extendidos en ingeniería se enumeran aquí en las Referencias [3-10]. La utilidad del análisis dimensional no está limitada a la mecánica de fluidos o a la ingeniería. Se han escrito libros especializados donde el análisis dimensional se aplica a la metrología [11], astrofísica [12], economía [13], química [14], hidrología [15], medicación [16], medicina clínica [17], plantas piloto de procesado químico [18], ciencias sociales [19], ciencias biomédicas [20], farmacia [21], geometría fractal [22], e incluso al crecimiento de las plantas [23]. Claramente éste es un tema que conviene aprender para muchas carreras profesionales.

5.2. EL PRINCIPIO DE HOMOGENEIDAD DIMENSIONAL

Para hacer el salto importante de las cinco variables de la Ecuación (5.1) a las dos variables de la Ecuación (5.2), utilizaremos una regla que es en física un axioma casi evidente. Esta regla, el *principio de homogeneidad dimensional* (PDH), puede establecerse como sigue:

> Si una ecuación expresa correctamente una relación entre variables de un proceso físico, debe ser *dimensionalmente homogénea*; esto es, todos sus sumandos deben tener las mismas dimensiones.

Todas las ecuaciones deducidas mediante la teoría de la mecánica son de esta forma. Por ejemplo, consideremos la relación que expresa el espacio que recorre un cuerpo en caída libre en función del tiempo:

$$S = S_0 + V_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2 \tag{5.5}$$

Cada término de esta ecuación es una longitud y tiene la dimensión $\{L\}$. La ecuación es dimensionalmente homogénea. Obsérvese que se puede utilizar cualquier sistema coherente de unidades para calcular el resultado.

Consideremos la ecuación de Bernoulli para un fluido incompresible:

www.elsolucionario.net

$$\frac{p}{\Leftarrow} + \frac{1}{2} V^2 + gz = \text{cte} \tag{5.6}$$

Todos los términos, incluyendo la constante, tienen dimensiones de velocidad al cuadrado, $\{L^2T^{-2}\}$. La ecuación es dimensionalmente homogénea y da el resultado apropiado para todo sistema coherente de unidades.

Los estudiantes deben tener en cuenta la homogeneidad dimensional y utilizarla para comprobar sus resultados cuando no puedan recordar una ecuación durante un examen. Por ejemplo, ¿cuál de las dos relaciones es verdadera,

$$S = \tfrac{1}{2} g t^2 ? \qquad \text{o} \qquad S = \tfrac{1}{2} g^2 t ? \tag{5.7}$$

Chequeando las dimensiones, desestimamos la segunda relación y sustituimos así la falta de memoria. Estamos sacando provecho del principio de homogeneidad dimensional, y este capítulo se limita a explotarlo aún más.

Variables y constantes

Las Ecuaciones (5.5) y (5.6) ilustran también los tipos de factores que intervienen a menudo en el análisis dimensional:

- Las *variables dimensionales* son las cantidades que varían en un caso dado y podrían representarse unas en función de otras para mostrar los resultados. En la Ecuación (5.5) son S y t; en la Ecuación (5.6) son p, V y z. Todas tienen dimensiones y todas pueden hacerse adimensionales mediante alguna técnica del análisis dimensional.
- Las *constantes dimensionales* pueden variar de un caso a otro, pero se mantienen constantes en un experimento dado. En la Ecuación (5.5) lo son S_0, V_0 y g, y en la Ecuación (5.6) lo son ρ, g y C. Todas

www.elsolucionario.net

tienen dimensiones y podrían hacerse adimensionales con otras, pero normalmente se utilizan para hacer adimensionales las variables del problema.

Las *constantes puras* no tienen dimensiones y nunca las tendrán. Aparecen en las manipulaciones matemáticas. En las Ecuaciones (5.5) y (5.6) son $\frac{1}{2}$ y el exponente 2, y ambas provienen de una integración: $\int t\,dt = \frac{1}{2}t^2$, $\int V\,dV = \frac{1}{2}V^2$. Otras constantes adimensionales corrientes son Θ y *e*. Además, el argumento de cualquier función matemática, como ln, exp, cos o J_0, es siempre adimensional.

Obsérvese que la integración y diferenciación de una ecuación puede cambiar las dimensiones, pero no la homogeneidad de la ecuación. Por ejemplo, integrando o diferenciando la Ecuación (5.5):

$$\int S\,dt = S_0 t + \tfrac{1}{2}V_0 t^2 + \tfrac{1}{6}gt^3 \tag{5.8a}$$

$$\frac{dS}{dt} = V_0 + gt \tag{5.8b}$$

En la forma integrada (5.8*a*) cada término tiene las dimensiones de $\{LT\}$, mientras que en la forma derivada (5.8*b*) cada término es una velocidad $\{LT^{-1}\}$.

Finalmente, hay algunas variables físicas que son adimensionales en virtud de su definición como relación de cantidades dimensionales. Algunos ejemplos son la deformación (cambio de longitud por unidad de longitud), módulo de Poisson (relación entre el esfuerzo transversal y el esfuerzo longitudinal) y la densidad relativa (relación entre la densidad y la estándar del agua). Todos los ángulos son adimensionales (relación entre la longitud del arco y el radio) y se miden en radianes por esta razón.

El motivo del uso del análisis dimensional proviene de que es posible escribir cualquier ecuación dimensionalmente homogénea en una forma equivalente, totalmente adimensional, más compacta. Normalmente existen distintas formas de presentar datos experimentales o resultados teóricos en forma adimensional. Ilustremos estos conceptos más detenidamente utilizando la relación (5.5) para la caída libre de un cuerpo a modo de ejemplo.

www.elsolucionario.net

Ambigüedad: la elección de las variables y de los parámetros de escala[1]

A pesar de su sencillez, la Ecuación (5.5) permite ilustrar la mayor parte de los conceptos del análisis dimensional. Contiene cinco términos (S, S_0, V_0, t, g), que podemos dividir, razonando un poco, en variables y parámetros. Las *variables* son los valores que queremos representar, los resultados básicos del experimento o la teoría: en este caso, S frente a t. Los *parámetros* son aquellas cantidades que influyen en las variables que deseamos conocer: en este caso S_0, V_0 y g. Casi todos los estudios ingenieriles se pueden subdividir de esta forma.

Para adimensionalizar nuestros resultados, necesitamos conocer cuántas dimensiones contienen nuestras variables y parámetros: en este caso, sólo dos, longitud $\{L\}$ y tiempo $\{T\}$. Inspeccionemos los distintos términos para comprobarlo:

$$\{S\} = \{S_0\} = \{L\} \qquad \{t\} = \{T\} \qquad \{V_0\} = \{LT^{-1}\} \qquad \{g\} = \{LT^{-2}\}$$

Entre nuestros parámetros, seleccionamos por tanto dos como *parámetros de escala* (o variables *dimensionalmente independientes*) que usaremos para definir las variables adimensionales. Los parámetros restantes serán los parámetros «básicos» cuyo efecto deseamos analizar. La elección no afectará al contenido de nuestros datos, sino a la forma de presentarlos. Claramente existe una cierta ambigüedad en la elección, algo que a veces molesta al principiante. En cada caso la elección más adecuada viene determinada por el propósito de estudiar un efecto particular.

En el caso del cuerpo en caída libre, seleccionaremos dos de los tres parámetros como parámetros de escala. Tenemos así las tres opciones que discutimos a continuación.

---

[1] Debo agradecer al Prof. Jacques Lewalle, de la Universidad de Syracuse, el haber sugerido, esbozado y clarificado esta discusión.

www.elsolucionario.net

Opción 1: Parámetros de escala S_0 y V_0: efecto de la gravedad g.

Utilicemos en primer lugar los parámetros de escala (S_0, V_0) para definir el desplazamiento y el tiempo adimensionales (*). Sólo hay una definición posible en cada caso:[2]

$$S^* = \frac{S}{S_0} \qquad t^* = \frac{V_0 t}{S_0} \tag{5.9}$$

Sustituyendo estas variables en la Ecuación (5.5) y expresando todos los términos en forma adimensional, se obtiene la primera opción:

$$S^* = 1 + t^* + \frac{1}{2} \not{} t^{*2} \qquad \not{} = \frac{g S_0}{V_0^2} \tag{5.10}$$

Este resultado se ha representado en la Figura 5.1*a*. Hay un único parámetro adimensional $\not{}$, que en este caso muestra el efecto de la gravedad. No puede mostrar el efecto directo de S_0 y V_0, pues estos dos valores intervienen también en la ordenada y la abscisa. Vemos que la gravedad aumenta la velocidad de caída parabólica para $t^* > 0$, pero no la pendiente inicial en $t^* = 0$. Podríamos haber llegado a la misma conclusión a partir de datos experimentales de cuerpos en caída libre. La representación coincidiría, dentro del error experimental, con la de la Figura 5.1*a*.

Opción 2: Parámetros de escala V_0 y g: efecto de la posición inicial S_0.

Utilicemos ahora los nuevos parámetros de escala (V_0, g) para definir el desplazamiento y el tiempo adimensionales (**). De nuevo hay una única definición posible:

$$S^{**} = \frac{Sg}{V_0^2} \qquad t^{**} = t\frac{g}{V_0} \tag{5.11}$$

www.elsolucionario.net

Sustituyendo de nuevo estas variables en la Ecuación (5.5) y poniéndola en forma adimensional, se obtiene la segunda opción:

$$S^{**} = \not{} + t^{**2} + \frac{1}{2} t^{**} \qquad \not{} = \frac{g S_0}{V_0^2} \tag{5.12}$$

Este resultado se representa en la Figura 5.1*b*. De nuevo aparece un único parámetro $\not{}$, que muestra ahora el efecto de la *posición* inicial, desplazando las curvas hacia arriba sin cambiar su forma.

Opción 3: Parámetros de escala S_0 y g: efecto de la velocidad inicial V_0.

Finalmente utilicemos los parámetros de escala (S_0, g) para definir el desplazamiento y el tiempo adimensionales (***). De nuevo hay una única definición posible:

$$S^{***} = \frac{S}{S_0} \qquad t^{***} = t \left[\frac{g}{S_0}\right]^{1/2} \tag{5.13}$$

Sustituyendo de nuevo estas variables en la Ecuación (5.5) y poniéndola en forma adimensional, como de costumbre, se obtiene la tercera y última opción:

$$S^{***} = 1 + \not{}^{***} + \frac{1}{2} t^{***2} \qquad \not{} = \frac{1}{\sqrt{\not{}}} = \frac{V_0}{\sqrt{g S_0}} \tag{5.14}$$

[2] Deben ser *proporcionales* a S y t. Conviene no definir términos adimensionales invertidos: S_0/S o $S_0/(V_0 t)$. Las representaciones gráficas pueden adoptar formas extrañas y confundir a los usuarios de sus datos. No es una buena idea.

www.elsolucionario.net

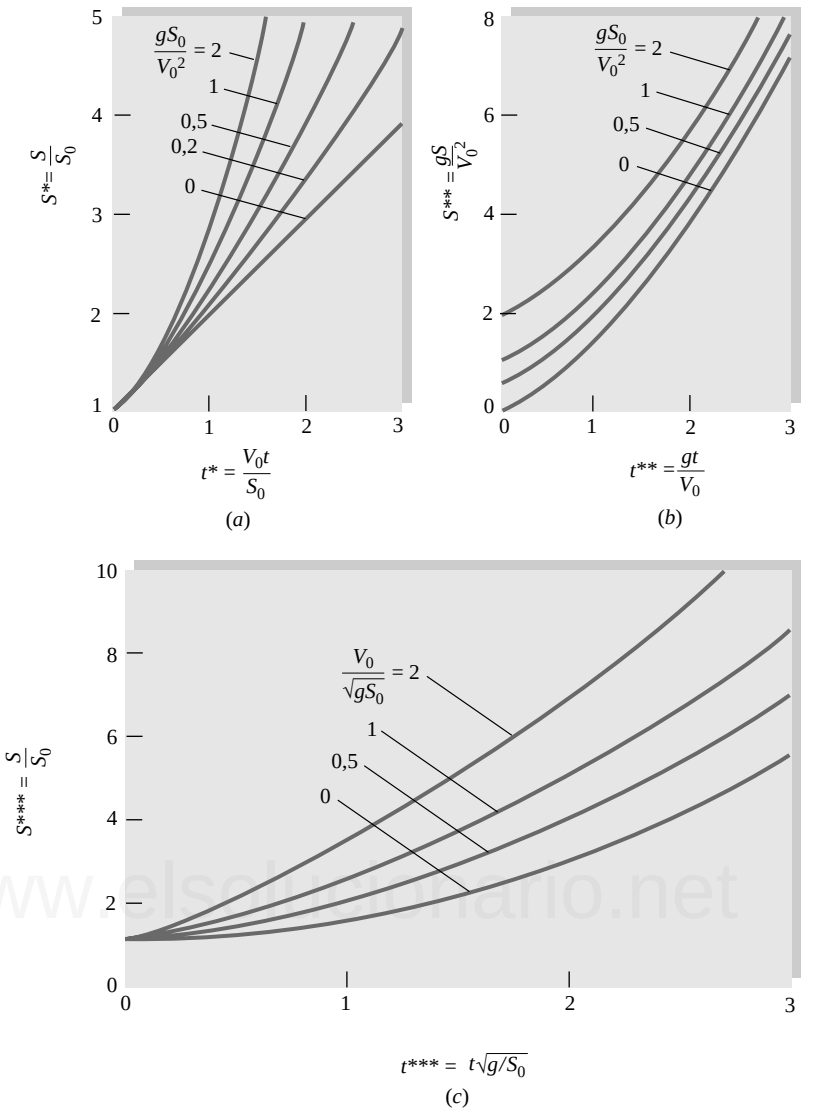


Figura 5.1. Dos formas adimensionales equivalentes de representar la Ecuación (5.5) de la caída libre de los cuerpos: efecto de la (*a*) gravedad, (*b*) posición inicial, y (*c*) velocidad inicial. Todas las figuras contienen la misma información.

Esta última forma de presentar los resultados se muestra en la Figura 5.1*c*. De nuevo aparece el parámetro α, salvo que lo hemos redefinido invertido, $\beta = 1/\alpha$, para que el parámetro de interés V_0 esté en el numerador y la dependencia sea lineal. Con esta elección se trata simplemente de mejorar la presentación de los datos. La Figura 5.1*c* muestra que la *velocidad* inicial incrementa la distancia recorrida y que este incremento es proporcional al tiempo.

Obsérvese que en los tres casos aparece un único parámetro α, pero con tres significados distintos: los valores adimensionales de la gravedad, la posición inicial y la velocidad inicial. Las gráficas, que contienen exactamente la misma información, cambian de apariencia como consecuencia de estas diferencias.

Mientras que en el problema original, Ecuación (5.5), aparecían cinco cantidades, en las representaciones adimensionales, que tienen la forma

$$S^* = f(t^*, \alpha) \qquad \alpha = \frac{gS_0}{V_0^2} \tag{5.15}$$

sólo aparecen tres. La reducción 5 – 3 = 2 debe ser igual al número de dimensiones fundamentales que aparecen en el problema $\{L, T\}$. Esta idea condujo al teorema pi (Sección 5.3).

www.elsolucionario.net

La elección de las variables dimensionalmente independientes

La elección de las variables dimensionalmente independientes o parámetros de escala utilizados para adimensionalizar el problema depende de cada caso, aunque se pueden dar algunas indicaciones. Ahora resulta evidente que en la Ecuación (5.2) los parámetros de escala eran ρ, V y L, pues intervienen tanto en el coeficiente de fuerza como en el número de Reynolds. Entonces los datos de la Ecuación (5.2) podrían interpretarse como la variación de la *fuerza* adimensional frente a la *viscosidad* adimensional, pues ambas aparecen en un único grupo adimensional. Del mismo modo, en la Ecuación (5.5) los parámetros de escala se eligieron entre (S_0, V_0, g), no (S, t), porque queríamos obtener una gráfica de S frente a t como resultado final.

A continuación se dan algunas recomendaciones para elegir las variables dimensionalmente independientes:

1. *No* deben poder formar un grupo adimensional entre ellas, pero sí que debe ser posible formarlo si se añade una variable más. Por ejemplo, pruebe con potencias de ρ, V y L:

$$\rho^a V^b L^c = (ML^{-3})^a\,(L/T)^b\,(L)^c = M^0L^0T^0 \quad \text{sólo si} \quad a = 0,\ b = 0,\ c = 0$$

   En este caso, es fácil ver por qué: ρ es la única variable que contiene la dimensión $\{M\}$, y V es la única que contiene la dimensión $\{T\}$, de modo que es imposible que se cancelen entre ellas. Si ahora añadimos μ al grupo de variables de escala, obtendremos el número de Reynolds. Si añadimos F, formaremos el coeficiente de fuerza.
2. No seleccione variables dependientes como parámetros de escala. Claramente, en la Ecuación (5.1) no conviene seleccionar F, que es lo que queremos representar en la gráfica. Tampoco μ, pues queremos representar la fuerza en función de la viscosidad.
3. Seleccione variables *populares*, que tengan bastante generalidad, porque aparecerán en la mayoría de los grupos adimensionales. Elija la densidad, no la tensión superficial. Elija la longitud del cuerpo, no la rugosidad de la superficie. Elija la velocidad de la corriente incidente, no la velocidad del sonido.

www.elsolucionario.net

Los siguientes ejemplos permitirán aclarar estas ideas. En los enunciados de los problemas se darán pistas.

Supongamos que queremos estudiar la dependencia de la resistencia con la *velocidad*. En ese caso no utilizaríamos V como parámetro de escala en la Ecuación (5.1). En su lugar, emplearíamos (ρ, μ, L), y la función adimensional finalmente sería

$$C_F' = \frac{F}{\mu^2} = f(\mathrm{Re}) \qquad \mathrm{Re} = \frac{\rho V L}{\mu} \tag{5.16}$$

Al representar estos resultados no seríamos capaces de distinguir el efecto de ρ o μ, dado que estas variables aparecen en ambos grupos adimensionales. El grupo C_F' representaría de nuevo la fuerza adimensional, mientras que Re debería ser interpretado ahora o bien como la velocidad, o bien como la longitud adimensional.[3] La representación diferiría bastante respecto a la Ecuación (5.2), aunque contendría exactamente la misma información. La obtención de parámetros como C_F' y Re a partir de las variables iniciales es el tema que trata el teorema pi (Sección 5.3).

Algunas ecuaciones peculiares en ingeniería

El método del análisis dimensional se apoya en dos hipótesis: (1) que la relación física propuesta es dimensionalmente homogénea, y (2) que todas las variables importantes se han incluido en la relación propuesta.

[3] Sólo por fortuna el número de Reynolds representa también el efecto del tamaño, pues en este caso L, un parámetro de escala, no aparece en el coeficiente de resistencia.

www.elsolucionario.net

Si se olvida una variable importante, el análisis dimensional falla, dando lugar a dificultades algebraicas o, lo que es peor, proporcionando una relación adimensional que no es aplicable al proceso. Un caso típico es la fórmula de Manning para canales abiertos, discutida en el Ejemplo 1.4:

$$V = \frac{1,49}{n} R^{2/3} S^{1/2} \tag{1}$$

Puesto que V es una velocidad, R un radio y n y S son adimensionales, la fórmula no es dimensionalmente homogénea. Esto puede ser peligroso porque (1) la fórmula cambia si cambian las unidades de V y R y (2), si es válida, sólo representa un caso muy especial. La Ecuación (1) del Ejemplo 1.4 precedió a las técnicas del análisis dimensional y es válida sólo para corrientes de agua en canales rugosos con velocidades moderadas y radios grandes y sólo en unidades inglesas.

En la literatura sobre hidráulica abundan las fórmulas que no son dimensionalmente homogéneas. Otro ejemplo es la fórmula de Hazen-Williams [24] que determina el caudal a través de tubos rectos lisos:

$$Q = 61,9 D^{2,63} \left| \frac{dp}{dx} \right|^{0,54} \tag{5.17}$$

donde D es el diámetro y dp/dx el gradiente de presión. Algunas de estas fórmulas se deben a que en los coeficientes que aparecen en las fórmulas perfectamente homogéneas se han sustituido anteriormente valores de propiedades del fluido y otros datos físicos. No damos las unidades de la Ecuación (5.17) para evitar que se utilice.

Por otra parte, otras fórmulas responden a correlaciones que no pueden convertirse en dimensionalmente homogéneas. Las «variables» que relacionan no pueden ser objeto de las técnicas del análisis dimensional. Muchas de estas fórmulas son empíricas y las utilizan un reducido grupo de especialistas. Se dan aquí tres ejemplos:

www.elsolucionario.net

$$B = \frac{25.000}{100 \Phi R} \tag{5.18}$$

$$S = \frac{140}{130 + \text{API}} \tag{5.19}$$

$$0,0147 D_E \Phi \frac{3,74}{D_E} = 0,26 t_R \Phi \frac{172}{t_R} \tag{5.20}$$

La Ecuación (5.18) relaciona la dureza Brinell, B, de un metal con su dureza Rockwell, R. La Ecuación (5.19) relaciona la densidad relativa, S, de un aceite con su densidad en grados API. La Ecuación (5.20) relaciona la viscosidad de un líquido en grados Engler, D_E, con su viscosidad en segundos Saybolt, t_R. Tales fórmulas tienen una cierta utilidad en las comunicaciones entre especialistas, pero no pueden considerarse aquí. Variables tales como la dureza Brinell y la viscosidad Saybolt no admiten expresión en un sistema de unidades tal como $MLT\Theta$.

5.3. EL TEOREMA PI

Existen muchos métodos para reducir una serie de variables dimensionales en un número más reducido de grupos adimensionales. El procedimiento que se expone aquí fue propuesto por Buckingham [1] en 1914 y se conoce como el *Teorema Pi de Buckingham*. El término pi proviene de la notación matemática Π, que significa un producto de variables. Los parámetros adimensionales encontrados con el teorema son productos de potencias denominadas Π_1, Π_2, Π_3, etc. El método nos permite determinar estos parámetros en orden secuencial sin necesidad de recurrir a exponentes libres.

La primera parte del teorema pi explica cuál es la reducción de variables esperada:

www.elsolucionario.net

Si un proceso físico satisface el PHD y relaciona n variables dimensionales, se puede describir mediante una relación entre sólo k variables adimensionales. La reducción $j = n - k$ es igual al máximo número de variables que no pueden formar un grupo adimensional entre ellas y es siempre menor o igual que el número de dimensiones que describen estas variables.

Tomando el caso específico de la fuerza sobre un cuerpo sumergido, la Ecuación (5.1) contiene cinco variables, F, L, U, ρ y μ, descritas por tres dimensiones $\{MLT\}$. Por tanto, $n = 5$ y j A3, con lo que podremos reducir el problema a k parámetros adimensionales, con $k = n - j$ B $5 - 3 = 2$. Y esto es exactamente lo que hemos obtenido: dos variables adimensionales $\Pi_1 = C_F$ y $\Pi_2 = \text{Re}$. En algunas ocasiones aparecen más parámetros adimensionales que este mínimo (véase Ejemplo 5.5).

La segunda parte del teorema muestra cómo encontrar los parámetros adimensionales:

Para encontrar la reducción j, se seleccionan j variables que no puedan formar un parámetro adimensional entre ellas.[4] Cada parámetro adimensional deseado estará formado por el producto de potencias de estas j variables con una variable adicional a la que se le asigna un exponente conveniente no nulo. Todos los grupos adimensionales así determinados son independientes.

Con objeto de aclarar lo dicho, supongamos que el proceso establece una relación entre cinco variables:

$$v_1 = f(v_2, v_3, v_4, v_5)$$

Supongamos que hay tres dimensiones $\{MLT\}$ y después de una inspección adecuada encontramos que $j = 3$. Entonces, $k = 5 - 3 = 2$ y, por tanto, habrá dos, y sólo dos, grupos adimensionales. Elegimos tres variables, por ejemplo, v_2, v_3 y v_4, que no puedan formar un grupo adimensional. Según esto, los dos grupos adimensionales estarán formados por esas tres variables más una variable adicional distinta para cada uno, v_1 y v_5, respectivamente

$$\Pi_1 = (v_2)^a (v_3)^b (v_4)^c v_1 = M^0 L^0 T^0 \qquad \Pi_2 = (v_2)^a (v_3)^b (v_4)^c v_5 = M^0 L^0 T^0$$

Hemos escogido, arbitrariamente, exponente unidad para v_1 y v_5. Agrupando los exponentes de las distintas dimensiones e igualándolos a cero, el teorema pi garantiza un valor único de a, b y c para cada grupo adimensional. Además son independientes, porque v_1 sólo aparece en Π_1, y v_5 sólo en Π_2. Es un procedimiento claro y sistemático una vez que uno se ha acostumbrado al mismo. Lo ilustraremos con varios ejemplos.

Normalmente, hay que dar seis pasos:

1. Hacer una lista de las n variables que aparecen en el problema. Si se omite alguna variable importante, fallará el análisis dimensional.
2. Escribir las dimensiones de cada variable de acuerdo con el sistema utilizado $\{MLT\Theta\}$ o $\{FLT\Theta\}$. Se da una lista en la Tabla 5.1.
3. Determinación de j. Elija inicialmente j igual al número de dimensiones diferentes que aparecen en el problema y busque j variables que no puedan formar un grupo adimensional. Si no lo encuentra, reduzca j en una unidad y búsquelas de nuevo. Con cierta práctica, encontrará j rápidamente.
4. Seleccione un grupo de j variables que no puedan formar un grupo adimensional, tratando de que le parezcan satisfactorias y, a ser posible, que tengan bastante generalidad, porque aparecerán en la mayoría de los grupos adimensionales. Elija la densidad, velocidad o longitud. No elija la tensión superficial, por ejemplo, ya que en caso contrario obtendría varios números de Weber independientes, lo que va a ser molesto.
5. Añada una variable adicional a sus j variables y forme un producto de potencias. Determine algebraicamente los exponentes que hacen al producto adimensional. Intente disponerlo de forma que las variables *dependientes* (fuerza, incremento de presiones, par, potencia) aparezcan en el numerador, de modo que su representación gráfica sea más sencilla. Repita esto, secuencialmente, con una variable nueva cada vez y encontrará todos los $n - j = k$ grupos adimensionales buscados.
6. Escriba la función adimensional resultante y compruebe que todos los grupos son realmente adimensionales.

[4] Haga una elección inteligente, porque todos los grupos adimensionales contendrán estas j variables.

www.elsolucionario.net

Tabla 5.1. Dimensiones de las cantidades en la Mecánica de Fluidos.

Cantidad	Símbolo	Dimensiones	
		MLTΘ	***FLTΘ***
Longitud	L	L	L
Área	A	L^2	L^2
Volumen	$\mathcal{V}$	L^3	L^3
Velocidad	V	LT^{-1}	LT^{-1}
Aceleración	dV/dt	LT^{-2}	LT^{-2}
Velocidad del sonido	a	LT^{-1}	LT^{-1}
Flujo volumétrico, caudal	Q	L^3T^{-1}	L^3T^{-1}
Flujo másico	$\dot{m}$	MT^{-1}	FTL^{-1}
Presión, esfuerzo	p, σ, τ	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}
Velocidad de deformación	$\dot{\varepsilon}$	T^{-1}	T^{-1}
Ángulo	θ	Ninguna	Ninguna
Velocidad angular	ω, Ω	T^{-1}	T^{-1}
Viscosidad	μ	$ML^{-1}T^{-1}$	FTL^{-2}
Viscosidad cinemática	ν	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}
Tensión superficial	Υ	MT^{-2}	FL^{-1}
Fuerza	F	MLT^{-2}	F
Momento par	M	ML^2T^{-2}	FL
Potencia	P	ML^2T^{-3}	FLT^{-1}
Trabajo, energía	W, E	ML^2T^{-2}	FL
Densidad	ρ	ML^{-3}	FT^2L^{-4}
Temperatura	T	Θ	Θ
Calor específico	c_p, c_v	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$
Peso específico	ρg	$ML^{-2}T^{-2}$	FL^{-3}
Conductividad térmica	k	$MLT^{-3}\Theta^{-1}$	$FT^{-1}\Theta^{-1}$
Coeficiente de expansión	β	Θ^{-1}	Θ^{-1}

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 5.2

Obtenga de nuevo la Ecuación (5.2) a partir de la Ecuación (5.1) utilizando el teorema pi.

Solución

Paso 1. Escribimos la función y contamos las variables:

$$F = f(L, U, \rho, \mu) \quad \text{hay cinco variables } (n = 5)$$

Paso 2. Las dimensiones de cada variable, de la Tabla 5.1, son

F	L	U	ρ	μ
$\{MLT^{-2}\}$	$\{L\}$	$\{LT^{-1}\}$	$\{ML^{-3}\}$	$\{ML^{-1}T^{-1}\}$

Paso 3. Determinamos j. Ninguna variable contiene la dimensión Θ, de modo que j es menor o igual que 3 (MLT). Inspeccionamos la lista y vemos que L, U y ρ no pueden formar ningún grupo adimensional, porque sólo ρ contiene la masa y sólo U contiene el tiempo. Por tanto, j es igual a 3, y $n - j = 5 - 3 = 2 = k$. El teorema pi garantiza que hay exactamente dos grupos adimensionales independientes en este problema.

Paso 4. Seleccionamos j variables. El grupo L, U, ρ que encontramos en el paso 3 parece adecuado.

Paso 5. Combinamos L, U, ρ, sucesivamente, con cada una de las variables adicionales para encontrar los dos grupos adimensionales.

www.elsolucionario.net

Primero añadimos la fuerza para determinar Π_1. Se puede elegir *cualquier* exponente para esta variable adicional y así situarla en el numerador o denominador elevada a cualquier potencia. Puesto que F es la variable dependiente, la situamos en el numerador elevada a la primera potencia:

$$\Pi_1 = L^aU^b\rho^cF = (L)^a(LT^{-1})^b(ML^{-3})^c(MLT^{-2}) = M^0L^0T^0$$

Agrupando exponentes:

Longitud:	a	$+ b$	$- 3c$	$+ 1 = 0$
Masa:			c	$+ 1 = 0$
Tiempo:		$- b$		$- 2 = 0$

Podemos resolver el sistema para dar

$$a = -2 \qquad b = -2 \qquad c = -1$$

Por tanto

$$\vartheta_1 = L^{\Phi 2}U^{\Phi 2} \Leftarrow^{\Phi 1} F = \frac{F}{\Leftarrow U^2L^2} = C_F \qquad \textit{Resp.}$$

Éste es exactamente el mismo grupo adimensional que aparece en la Ecuación (5.2). *V*ariando el exponente de F, podríamos haber obtenido otros grupos equivalentes tales como $UL\rho^{1/2}/F^{1/2}$.

Finalmente, añadiremos la viscosidad a U, L y ρ para determinar Π_2. Se puede elegir la potencia que se quiera para la viscosidad. Siguiendo la costumbre, elegiremos la potencia –1 para situarla en el denominador:

$$\Pi_2 = L^aU^b\rho^c\mu^{-1} = (L)^a(LT^{-1})^b(ML^{-3})^c(ML^{-1}T^{-1})^{-1} = M^0L^0T^0$$

Agrupando exponentes:

Longitud:	a	$+ b$	$-3c$	$+ 1 = 0$
Masa:			c	$- 1 = 0$
Tiempo:		$- b$		$+ 1 = 0$

de donde obtenemos

$$a = b = c = 1$$

Por tanto

$$\vartheta_2 = L^1U^1 \Leftarrow^1 \mu^{-1} = \frac{\Leftarrow UL}{\mu} = \mathrm{Re} \qquad \textit{Resp.}$$

Paso 6. Ya hemos terminado; éste es el segundo y último grupo adimensional. El teorema pi garantiza que la relación funcional debe ser de la forma

$$\frac{F}{\Leftarrow U^2L^2} = g\left(\frac{{}^{TM}\Leftarrow UL}{\mu}\right) \qquad \textit{Resp.}$$

que coincide exactamente con la Ecuación (5.2).

EJEMPLO 5.3

La potencia P requerida para accionar una bomba centrífuga es función del caudal Q, el diámetro del rotor D, la velocidad de giro Ω y la densidad ρ y viscosidad μ del fluido:

$$P = f(Q, D, V, \rho, \mu)$$

Reescriba esto como una relación adimensional. *Consejo*: Use V, ρ y D como variables dimensionalmente independientes.

www.elsolucionario.net

Solución

Paso 1. Contamos las variables. Hay seis (no olvide la del lado izquierdo de la ecuación, P).

Paso 2. En el sistema $\{FLT\Theta\}$, las dimensiones de cada variable, tomadas de la Tabla 5.1, son:

P	Q	D	Ω	ρ	μ
$\{FLT^{-1}\}$	$\{L^3T^{-1}\}$	$\{L\}$	$\{T^{-1}\}$	$\{FT^2L^{-4}\}$	$\{FTL^{-2}\}$

Paso 3. Determinamos j. Afortunadamente, nos han recomendado usar (Ω, ρ, D) para adimensionalizar, luego probablemente $j = 3$, el número de dimensiones (FLT). Comprobemos que estas tres variables *no* forman un grupo adimensional:

$$\Omega^a\rho^bD^c = (T^{-1})^a(FT^2L^{-4})^b(L)^c = F^0L^0T^0 \qquad \text{sólo si} \qquad a = 0,\ b = 0,\ c = 0$$

En efecto, $j = 3$. Demostrarlo no fue tan inmediato como con el grupo (L, U, ρ) del Ejemplo 5.2, pero es así. Ahora sabemos, del teorema, que añadiendo una variable más obtendremos de hecho un grupo adimensional.

Paso 4a. Combinando (Ω, ρ, D) con la potencia P se obtiene el primer grupo adimensional:

$$\Pi_1 = \Omega^a\rho^bD^cP = (T^{-1})^a(FT^2L^{-4})^b(L)^c(FLT^{-1}) = F^0L^0T^0$$

Agrupando exponentes:

$$\begin{aligned} \text{Fuerza:} \quad & b + 1 = 0 \\ \text{Longitud:} \quad & -4b + c + 1 = 0 \\ \text{Tiempo:} \quad & -a + 2b - 1 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema obtenemos $a = -3$, $b = -1$ y $c = -5$. Este primer grupo adimensional, la variable dependiente adimensional, se denomina *coeficiente de potencia* de la bomba, C_P:

$$\vartheta_1 = \mathrm{K}^{\Phi_3}\Leftarrow^{\Phi_1}D^{\Phi_5}P = \frac{P}{\rho\mathrm{K}^3D^5} = C_P$$

Paso 4b. Combinando (Ω, ρ, D) con el caudal Q se obtiene el segundo grupo adimensional:

$$\Pi_2 = \Omega^a\rho^bD^cQ = (T^{-1})^a(FT^2L^{-4})^b(L)^c(L^3T^{-1}) = F^0L^0T^0$$

Después de agrupar los exponentes, ahora resulta $a = -1$, $b = 0$ y $c = -3$. Este segundo grupo adimensional se denomina *coeficiente de flujo* de la bomba, C_Q:

$$\vartheta_1 = \mathrm{K}^{\Phi_1}\Leftarrow^{0}D^{\Phi_3}Q = \frac{Q}{\mathrm{K}D^3} = C_Q$$

Paso 4c. Combinando (Ω, ρ, D) con la viscosidad μ se obtiene el tercer y último grupo adimensional:

$$\Pi_3 = \Omega^a\rho^bD^c\mu = (T^{-1})^a(FT^2L^{-4})^b(L)^c(FTL^{-2}) = F^0L^0T^0$$

En esta ocasión, $a = -1$, $b = -1$ y $c = -2$; o $\Pi_3 = \mu/(\rho\Omega D^2)$, una especie de número de Reynolds.

Paso 5. La relación original entre las seis variables se ha reducido así a una relación entre tres grupos adimensionales:

$$\frac{P}{\rho\mathrm{K}^3D^5} = f\left[\frac{Q}{\mathrm{K}D^3}, \frac{\mu}{\rho\mathrm{K}D^2}\right] \qquad \textit{Resp.}$$

Comentario. Estos tres grupos adimensionales son los coeficientes utilizados habitualmente para correlacionar la potencia de las bombas, como veremos en el Capítulo 11.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 5.4

A bajas velocidades (flujo laminar), el caudal Q a través de un tubo de pequeño diámetro es sólo función del radio del tubo R, la viscosidad del fluido μ, y la caída de presión por unidad de longitud dp/dx. Utilizando el teorema pi, halle una relación adimensional que refleje estas dependencias.

Solución

Escribimos la relación y contamos las variables:

$$Q = f(R, \mu, \frac{dp}{dx}) \quad \text{hay cuatro variables } (n = 4)$$

Consultando la Tabla 5.1 podemos hacer una lista de las dimensiones de estas variables usando el sistema $\{MLT\}$:

Q	R	μ	dp/dx
$\{L^3T^{-1}\}$	$\{L\}$	$\{ML^{-1}T^{-1}\}$	$\{ML^{-2}T^{-2}\}$

Hay tres dimensiones primarias (M, L, T), luego j A 3. Por ensayo y error determinamos que R, μ y dp/dx no pueden formar un grupo adimensional. Entonces $j = 3$, y $n - j = 4 - 3 = 1$. Sólo hay *un* grupo adimensional, que obtenemos combinando Q en un producto de potencias con las otras tres variables:

$$\vartheta_1 = R^a \mu^b \left(\frac{dp}{dx}\right)^c Q^1 = (L)^a (ML^{-1}T^{-1})^b (ML^{-2}T^{-2})^c (L^3T^{-1})$$
$$= M^0 L^0 T^0$$

Agrupando exponentes:

Masa: $b + c = 0$
Longitud: $a - b - 2c + 3 = 0$
Tiempo: $-b - 2c - 1 = 0$

Resolviendo de forma simultánea, obtenemos $a = -4$, $b = 1$ y $c = -1$. Entonces

$$\vartheta_1 = R^{-4} \mu^1 \left(\frac{dp}{dx}\right)^{-1} Q$$

o

$$\vartheta_1 = \frac{Q\mu}{R^4 (dp/dx)} = \text{cte} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Como sólo hay un grupo adimensional, éste debe ser igual a una constante. Esto es todo lo que nos puede proporcionar el análisis dimensional. La teoría del flujo laminar de la Sección 4.11 muestra que el valor de esta constante es $-\pi/8$.

EJEMPLO 5.5

Supongamos que la deflexión δ de la punta de una viga en voladizo es función de la carga aplicada en la punta P, la longitud de la viga L, el momento de inercia de la sección I, y el módulo de elasticidad del material E; esto es, $\delta = f(P, L, I, E)$. Reescriba esta función en forma adimensional y discuta su complejidad y el valor peculiar de j.

Solución

Enumeremos las variables y sus dimensiones:

δ	P	L	I	E
$\{L\}$	$\{MLT^{-2}\}$	$\{L\}$	$\{L^4\}$	$\{ML^{-1}T^{-2}\}$

www.elsolucionario.net

Hay cinco variables ($n = 5$) y tres dimensiones primarias (M, L, T), luego j A 3. Pero hagamos lo que hagamos, *no podemos* encontrar ninguna combinación de tres variables que no pueda formar un grupo adimensional. Esto se debe a que $\{M\}$ y $\{T\}$ sólo aparecen en P y E y en ambos casos lo hacen de la misma forma, $\{MT^{-2}\}$. Así, nos hallamos ante un caso especial donde $j = 2$, que es menor que el número de dimensiones (M, L, T). Para comprender mejor lo que ocurre en este caso particular, debemos rehacer el problema usando el sistema de dimensiones (F, L, T). En este caso se observa que las variables sólo contienen las dimensiones $\{F\}$ y $\{L\}$, luego $j = 2$.

Con $j = 2$, elegimos L y E como dos variables que no pueden formar un grupo adimensional y vamos añadiendo el resto de las variables para formar los tres grupos adimensionales buscados:

$$\Pi_1 = L^a E^b I^1 = (L)^a (ML^{-1}T^{-2})^b (L^4) = M^0 L^0 T^0$$

de donde, tras agrupar los exponentes, se obtiene que $a = -4$, $b = 0$, o $\Pi_1 = I/L^4$. A continuación,

$$\Pi_2 = L^a E^b P^1 = (L)^a (ML^{-1}T^{-2})^b (MLT^{-2}) = M^0 L^0 T^0$$

de donde se obtiene $a = -2$, $b = -1$, o $\Pi_2 = P/(EL^2)$, y

$$\Pi_3 = L^a E^b \delta^1 = (L)^a (ML^{-1}T^{-2})^b (L) = M^0 L^0 T^0$$

de donde $a = -1$, $b = 0$, o $\Pi_3 = \delta/L$. La forma apropiada de la función adimensional es $\Pi_3 = f(\Pi_2, \Pi_1)$, o

$$\frac{\delta}{L} = f\left(\frac{P}{EL^2}, \frac{I}{L^4}\right) \qquad \textit{Resp.}\ (1)$$

Ésta es una función complicada que relaciona tres variables, pero el análisis dimensional no nos puede llevar más lejos.

Comentarios. Podemos «mejorar» la Ecuación (1) utilizando ciertos razonamientos físicos, como pone de manifiesto Langhaar [4, pág. 91]. Para pequeñas deflexiones elásticas, δ es proporcional a la carga P e inversamente proporcional al momento de inercia I. Dado que P e I aparecen por separado en la Ecuación (1), esto significa que Π_3 debe ser proporcional a Π_2 e inversamente proporcional a Π_1. Así, en estas condiciones,

$$\frac{\delta}{L} = (\text{cte})\frac{P}{EL^2}\frac{L^4}{I}$$

o

$$\delta = (\text{cte})\frac{PL^3}{EI} \qquad (2)$$

El análisis dimensional por sí solo no es capaz de predecir esto. La teoría de la resistencia de materiales predice que el valor de la constante es $\frac{1}{3}$.

5.4. ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES BÁSICAS

Podríamos utilizar el teorema pi de la sección anterior para analizar un problema tras otro, determinando los parámetros adimensionales que gobiernan cada caso. Algunos libros de texto sobre análisis dimensional hacen esto [por ejemplo, 5]. Una técnica alternativa y muy eficaz consiste en utilizar directamente las ecuaciones básicas del movimiento dadas en el Capítulo 4. Aunque en general estas ecuaciones no pueden resolverse, revelan los parámetros adimensionales básicos, por ejemplo, el número de Reynolds, con su forma y posición correcta en las ecuaciones, dando pistas de cuándo son despreciables los términos donde aparecen. Las condiciones de contorno e iniciales también deben ser adimensionalizadas.

Apliquemos brevemente esta técnica a las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento (Navier-Stokes) para un fluido incompresible con viscosidad constante:

Continuidad: $$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \qquad (5.21a)$$

Cantidad de movimiento: $$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \qquad (5.21b)$$

www.elsolucionario.net

Las condiciones de contorno típicas para estas ecuaciones son (Sección 4.6)

Superficie fija: $\mathbf{V} = 0$

Entrada o salida: $\mathbf{V}$, p conocidas (5.22)

Superficie libre, $z = \eta$: $w = \dfrac{d\Omega}{dt} \quad p = p_a \Phi \llcorner (R_x^{\Phi 1} + R_y^{\Phi 1})$

Omitimos la ecuación de la energía (4.75) por no ser necesaria en este caso, pero veremos su forma adimensional en los problemas (Problema P5.42).

Las Ecuaciones (5.21) y (5.22) contienen tres dimensiones básicas, M, L y T. Todas las variables p, V, x, y, z y t pueden adimensionalizarse utilizando la densidad y dos constantes de referencia, que podrían ser características del flujo particular que se esté tratando:

Velocidad de referencia = U Longitud de referencia = L

Por ejemplo, U podría ser la velocidad a la entrada o aguas arriba y L el diámetro de un cuerpo sumergido en la corriente.

A continuación definimos las variables adimensionales, designándolas con un asterisco:

$$\mathbf{V}^* = \frac{\mathbf{V}}{U} \qquad \boldsymbol{\nabla}^* = L\boldsymbol{\nabla}$$

$$x^* = \frac{x}{L} \qquad y^* = \frac{y}{L} \qquad z^* = \frac{z}{L} \qquad R^* = \frac{R}{L} \tag{5.23}$$

$$t^* = \frac{tU}{L} \qquad p^* = \frac{p + \Leftarrow gz}{\Leftarrow U^2}$$

www.elsolucionario.net

Todas ellas son bastante obvias excepto p^*, escrita para incluir los efectos gravitatorios, donde z se define «vertical» positiva hacia arriba. Esta idea está sugerida por la ecuación de Bernoulli (3.77).

Puesto que ρ, U y L son constantes, las derivadas de las Ecuaciones (5.21) pueden escribirse en forma adimensional con coeficientes con dimensiones. Por ejemplo:

$$\frac{\Leftarrow u}{\Leftarrow x} = \frac{\Leftarrow(Uu^*)}{\Leftarrow(Lx^*)} = \frac{U}{L}\frac{\Leftarrow u^*}{\Leftarrow x^*}$$

Sustituyendo las variables dadas en las Ecuaciones (5.23) en las Ecuaciones (5.21) y (5.22) y dividiéndolas, al igual que hicimos con la Ecuación (5.12), por uno de los coeficientes con dimensiones, las ecuaciones adimensionales del movimiento resultan

Continuidad: $\boxed{\boldsymbol{\nabla}^* \Delta \mathbf{V}^* = 0}$ (5.24*a*)

Calidad de movimiento: $\boxed{\dfrac{d\mathbf{V}^*}{dt^*} = \Phi \boldsymbol{\nabla}^* p^* + \dfrac{\mu}{\Leftarrow UL} \boldsymbol{\nabla}^{*2} (\mathbf{V}^*)}$ (5.24*b*)

Las condiciones de contorno adimensionalizadas son:

Superficie fija: $\mathbf{V}^* = 0$

Entrada o salida: $\mathbf{V}^*$, p^* conocidas

www.elsolucionario.net

Superficie libre, $z^* = \eta^*$:

$$w^* = \frac{d\Omega^*}{dt^*}$$

$$p^* = \frac{p_a}{\rho U^2} + \frac{gL}{U^2} z^* - \frac{1}{\rho U^2 L}\left(R_x^{*\Phi 1} + R_y^{*\Phi 1}\right) \tag{5.25}$$

En estas ecuaciones aparecen cuatro parámetros adimensionales, uno en la ecuación de cantidad de movimiento y tres en las condiciones de contorno en la superficie libre.

Parámetros adimensionales

En la ecuación de continuidad no aparece ningún parámetro. La ecuación de cantidad de movimiento contiene sólo uno, considerado, generalmente, como el más importante en Mecánica de Fluidos:

$$\text{Número de Reynolds, Re} = \frac{\rho UL}{\mu}$$

Su nombre se debe a Osborne Reynolds (1842-1912), un ingeniero británico que fue quien lo introdujo en 1883 (Referencia 4 del Capítulo 6). El número de Reynolds es siempre importante, haya o no superficie libre, y su efecto sólo puede despreciarse fuera de las regiones donde hay gradientes altos de velocidad; por ejemplo, lejos de las superficies fijas, chorros o estelas.

Las condiciones de contorno a la entrada o salida y la condición de no deslizamiento no contienen parámetros. La condición en la superficie libre contiene tres:

$$\text{Número de Euler (coeficiente de presión), Eu} = \frac{p_a}{\rho U^2}$$

www.elsolucionario.net

Debe su nombre a Leonhard Euler (1707-1783) y es poco importante a menos que las caídas de presión sean lo suficientemente importantes para dar lugar a formación de vapor (cavitación) en el líquido. El número de Euler se escribe a menudo en función de las diferencias de presión, $\text{Eu} = \Delta p/(\rho U^2)$. Si Δp incluye la presión de vapor p_v, se denomina *número de cavitación* $\text{Ca} = (p_a - p_v)/(\rho U^2)$.

El segundo parámetro es mucho más importante:

$$\text{Número de Froude, Fr} = \frac{U^2}{gL}$$

Su nombre se debe a William Froude (1810-1879), un arquitecto naval británico que, junto con su hijo Robert, desarrolló la idea de utilizar modelos de barcos en canales y propuso leyes de semejanza para flujos con superficie libre (resistencia de barcos, ondas superficiales, canales abiertos). El número de Froude tiene un efecto dominante en flujos con superficie libre y su efecto sólo puede despreciarse cuando no hay superficie libre. En el Capítulo 10 se investigan con detalle los efectos del número de Froude.

El tercer parámetro de la superficie libre es

$$\text{Número de Weber, We} = \frac{\rho U^2 L}{\sigma}$$

Debe su nombre a Moritz Weber (1871-1951), del Instituto Politécnico de Berlín, que desarrolló las leyes de semejanza en su forma actual. Fue Weber quien puso nombre a los números de Reynolds y Froude. El número de Weber juega un papel importante sólo si es de orden unidad o menor, lo que ocurre normalmente cuando la curvatura de la superficie es comparable en tamaño a la profundidad del líquido, por ejemplo, en gotas, flujos capilares, ondas de pequeña longitud de onda y en modelos hidráulicos de pequeñas dimensiones. Si el número de Weber es grande, sus efectos son despreciables.

www.elsolucionario.net

Los números Fr, Eu, We no intervienen, si no hay superficie libre, excepto si hay posibilidad de cavitación del líquido a valores muy bajos de Eu. Por tanto, en flujos viscosos a bajas velocidades sin superficie libre, el único parámetro adimensional importante es el número de Reynolds.

Parámetros de compresibilidad

En flujos de gases a altas velocidades hay cambios significativos de presión, densidad y temperatura que deben relacionarse por medio de una ecuación de estado tal como la ley de los gases perfectos, Ecuación (1.10). Estos cambios termodinámicos introducen dos nuevos parámetros adimensionales, mencionados brevemente en capítulos anteriores:

$$\text{Número de Mach, Ma} = \frac{U}{a} \qquad \text{Relación de calores específicos, } \Im = \frac{c_p}{c_v}$$

El número de Mach debe su nombre al físico austriaco Ernst Mach (1838-1916). El efecto de γ es sólo moderado, pero el número de Mach, si es mayor que alrededor de 0,3, determina los efectos de compresibilidad en el flujo. Estos efectos se estudian en el Capítulo 9.

Flujos oscilatorios

Si el flujo es oscilatorio, interviene un nuevo parámetro a través de las condiciones a la entrada. Por ejemplo, supongamos que la corriente a la entrada es de la forma

$$u = U \cos \omega t$$

Adimensionalizando esta relación se tiene

$$\frac{u}{U} = u^* = \cos \frac{\varnothing L}{U} t^*$$

El argumento del coseno contiene al nuevo parámetro

$$\text{Número de Strouhal, St} = \frac{\varnothing L}{U}$$

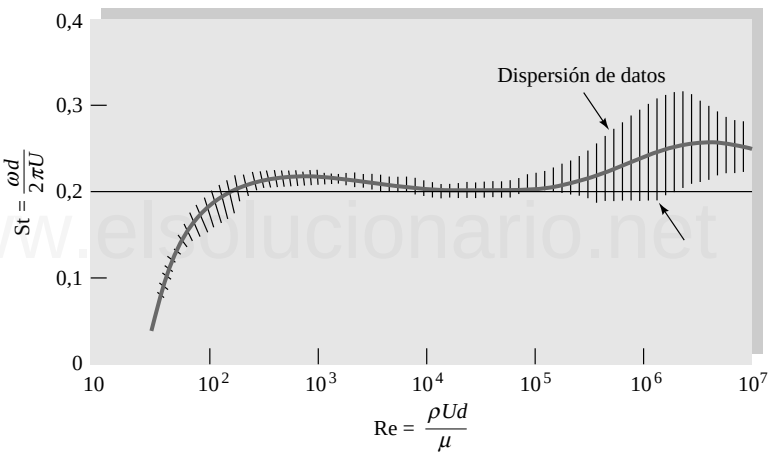
Los valores adimensionales de las fuerzas y momentos, de la fricción y el transporte de calor, etc., en estos flujos oscilatorios, serán funciones del número de Reynolds y del número de Strouhal. Este parámetro debe su nombre al físico alemán V. Strouhal, que en 1878 hizo experimentos con alambres que vibraban en el aire.

Algunos flujos que podrían parecer perfectamente estacionarios tienen en realidad un comportamiento oscilatorio que depende del número de Reynolds. Un ejemplo es la calle de torbellinos en la estela de un cuerpo romo inmerso en una corriente estacionaria de velocidad U. La Figura 5.2*a* muestra la disposición de los torbellinos alternativos emitidos por un cilindro circular sumergido en una corriente transversal estacionaria. Esta estructura regular de los torbellinos desprendidos periódicamente se denomina *calle de torbellinos de Kármán*, ya que fue T. von Kármán quien la explicó teóricamente en 1912. La disposición regular aparece en el rango $10^2 < \text{Re} < 10^7$, con un valor medio del número de Strouhal $\omega d/(2\Theta U) \Xi 0{,}21$. La Figura 5.2*b* muestra las frecuencias de desprendimiento medidas.

Si la frecuencia de desprendimiento de los torbellinos es próxima a la frecuencia de vibración estructural del cuerpo, puede aparecer resonancia. Los cables eléctricos silban con el viento, los cables de fondeo submarino tienen oscilaciones galopantes a ciertas velocidades de la corriente, y algunas estructuras esbeltas flamean o trepidan a velocidades críticas del viento o de los vehículos. Un ejemplo es el fallo catastrófico del puente colgante de Tacoma Narrows, en 1940, cuando los torbellinos desprendidos entraron en resonancia

www.elsolucionario.net

(*a*)



(*b*)

Figura 5.2. Desprendimiento de torbellinos de un cilindro circular: (*a*) calle de torbellinos en la estela de un cilindro circular (*por cortesía de la U.S. Navy*); (*b*) frecuencias de desprendimiento experimentales (*de las Referencias 25 y 26*).

con las oscilaciones naturales de torsión del puente. El problema se agravó debido a la rigidez no lineal de la estructura del puente, pues los cables quedaban flojos durante parte del periodo de oscilación.

Otros parámetros adimensionales

Hemos discutido siete de los parámetros importantes de la Mecánica de Fluidos, pero hay otros. Aparecen cuatro parámetros adicionales al adimensionalizar la ecuación de la energía (4.75) y sus condiciones de contorno. Estos cuatro (número de Prandtl, número de Eckert, número de Grashof y relación de temperaturas) se dan en la Tabla 5.2 y volverán a aparecer en el problema P5.42. Otro parámetro importante, aunque a menudo no tenido en cuenta, es la rugosidad relativa ϵ/L (véase Tabla 5.2).[5] Pequeños cambios en la rugosidad de la superficie tienen efectos importantes en el flujo turbulento o flujo a altos números de Reynolds, como veremos en el Capítulo 6 y en la Figura 5.3.

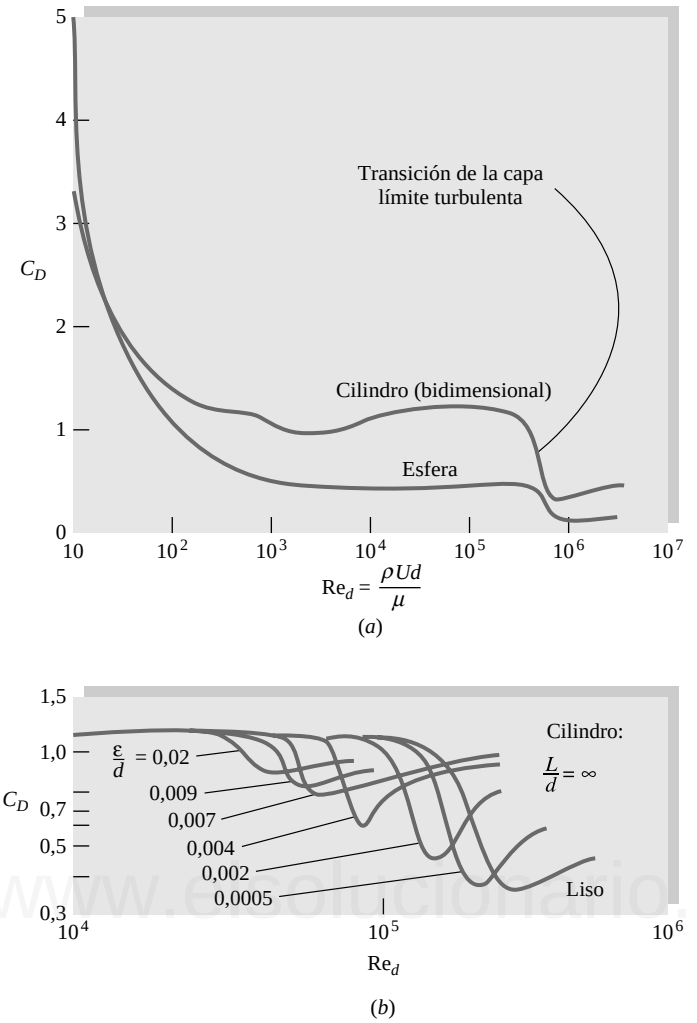
[5] La rugosidad es fácil de olvidar por ser un pequeño efecto geométrico que no aparece en las ecuaciones del movimiento, sino en las condiciones de contorno.

www.elsolucionario.net

Tabla 5.2. Grupos adimensionales en la Mecánica de Fluidos.

Parámetro	Definición	Relación cualitativa de efectos	Importancia
Número de Reynolds	$\mathrm{Re} = \frac{\rho UL}{\mu}$	$\frac{\text{Inercia}}{\text{Viscosidad}}$	Siempre
Número de Mach	$\mathrm{Ma} = \frac{U}{a}$	$\frac{\text{Velocidad del flujo}}{\text{Velocidad del sonido}}$	Flujo compresible
Número de Froude	$\mathrm{Fr} = \frac{U^2}{gL}$	$\frac{\text{Inercia}}{\text{Gravedad}}$	Flujo con superficie libre
Número de Weber	$\mathrm{We} = \frac{\rho U^2 L}{\sigma}$	$\frac{\text{Inercia}}{\text{Tensión superficial}}$	Flujo con superficie libre
Número de Rossby	$\mathrm{Ro} = \frac{U}{\mathrm{K}_{\text{tierra}} L}$	$\frac{\text{Velocidad del flujo}}{\text{Efecto de Coriolis}}$	Flujos geofísicos
Número de cavitación (número de Euler)	$\mathrm{Ca} = \frac{p - p_v}{\rho U^2}$	$\frac{\text{Presión}}{\text{Inercia}}$	Cavitación
Número de Prandtl	$\mathrm{Pr} = \frac{\mu c_p}{k}$	$\frac{\text{Disipación}}{\text{Conducción}}$	Convección de calor
Número de Eckert	$\mathrm{Ec} = \frac{U^2}{c_p T_0}$	$\frac{\text{Energía cinética}}{\text{Entalpía}}$	Disipación
Relación de calores específicos	$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$	$\frac{\text{Entalpía}}{\text{Energía interna}}$	Flujo compresible
Número de Strouhal	$\mathrm{St} = \frac{\omega L}{U}$	$\frac{\text{Oscilación}}{\text{Velocidad media}}$	Flujo oscilatorio
Rugosidad relativa	$\frac{\varepsilon}{L}$	$\frac{\text{Rugosidad}}{\text{Longitud del cuerpo}}$	Flujo turburlento, pared rugosa
Número de Grashof	$\mathrm{Gr} = \frac{\rho\beta T g L^3 \rho^2}{\mu^2}$	$\frac{\text{Flotabilidad}}{\text{Viscosidad}}$	Convección natural
Número de Rayleigh	$\mathrm{Ra} = \frac{\rho\beta T g L^3 \rho c_p}{\mu k}$	$\frac{\text{Flotabilidad}}{\text{Viscosidad}}$	Convección natural
Relación de temperaturas	$\frac{T_w}{T_0}$	$\frac{\text{Temperatura de la pared}}{\text{Temperatura de la corriente}}$	Transporte de calor
Coeficiente de presión	$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2}$	$\frac{\text{Presión estática}}{\text{Presión dinámica}}$	Aerodinámica, hidrodinámica
Coeficiente de sustentación	$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$	$\frac{\text{Sustentación}}{\text{Fuerza dinámica}}$	Aerodinámica, hidrodinámica
Coeficiente de resistencia	$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$	$\frac{\text{Resistencia}}{\text{Fuerza dinámica}}$	Aerodinámica, hidrodinámica
Coeficiente de fricción	$f = \frac{h_f}{(V^2/2g)(L/d)}$	$\frac{\text{Pérdida de carga por fricción}}{\text{Altura de la velocidad}}$	Flujo en tuberías
Coeficiente de fricción superficial	$c_f = \frac{\tau_{\text{pared}}}{\rho V^2/2}$	$\frac{\text{Esfuerzo cortante en la pared}}{\text{Presión dinámica}}$	Capa límite

www.elsolucionario.net



Efecto de la longitud del cilindro

$(10^4 < \mathrm{Re} < 10^5)$

L/d	C_D
∞	1,20
40	0,98
20	0,91
10	0,82
5	0,74
3	0,72
2	0,68
1	0,64

Figura 5.3. Demostración práctica del análisis dimensional: coeficientes de resistencia de un cilindro y una esfera: (*a*) cilindro y esfera lisos (datos de varias fuentes); (*b*) al aumentar la rugosidad se adelanta la transición de la capa límite a la turbulencia.

En este libro nos ocuparemos principalmente de los efectos de los números de Reynolds, Mach y Froude, que caracterizan la mayoría de los flujos. Obsérvese que hemos descubierto todos estos parámetros (excepto ϵ/L) por simple adimensionalización de las ecuaciones básicas sin necesidad de resolverlas.

Si el lector no está satisfecho con los 19 parámetros dados en la Tabla 5.2, en la Referencia 28 puede encontrar alrededor de 300 parámetros adimensionales de uso frecuente en ingeniería. También puede consultar la Referencia 29.

Una aplicación de gran utilidad

El análisis dimensional es divertido, pero ¿sirve para algo? Sí; si todas las variables se incluyen en la función propuesta, la función adimensional obtenida mediante el análisis dimensional agrupará todos los datos en una curva única o en una serie de curvas.

Un ejemplo de la utilidad del análisis dimensional se da en la Figura 5.3 para la resistencia medida en cilindros y esferas lisas. La corriente es perpendicular al eje del cilindro, que es muy largo, $L/d \rightarrow \div$. Los datos proceden de muchas fuentes, corresponden tanto a flujos de líquidos como de gases, e incluyen desde sólidos de varios metros de diámetro hasta hilos delgados y bolas de menos de 1 mm de diámetro. Las dos curvas de la Figura 5.3*a* son totalmente experimentales; el análisis de la resistencia de cuerpos sumergidos es una de las áreas más débiles de la teoría moderna de la Mecánica de Fluidos. Si se exceptúan algunos

www.elsolucionario.net

cálculos aislados mediante ordenador, no existe ninguna teoría que permita determinar la resistencia de un cilindro o una esfera salvo en el caso de *movimientos lentos*, Re < 1.

El número de Reynolds para ambos casos está basado en el diámetro de los cuerpos, de ahí la notación Re_d. Sin embargo, los coeficientes de resistencia se definen de forma diferente:

$$C_D = \begin{cases} \dfrac{\text{resistencia}}{\frac{1}{2}\rho U^2 Ld} & \text{cilindro} \\ \dfrac{\text{resistencia}}{\frac{1}{2}\rho U^2 \frac{1}{4}\pi d^2} & \text{esfera} \end{cases} \tag{5.26}$$

Ambos tienen un factor $\frac{1}{2}$ como tributo tradicional a Bernoulli y Euler, pues en la ecuación de Bernoulli también aparece el término $\frac{1}{2}\rho U^2$, y ambos están basados en el área proyectada; esto es, el área que se ve cuando se mira hacia el cuerpo desde aguas arriba. La definición corriente de C_D es pues

$$C_D = \frac{\text{resistencia}}{\frac{1}{2}\rho U^2 (\text{área frontal})} \tag{5.27}$$

Sin embargo, se deben comprobar cuidadosamente las definiciones de C_D, Re, etc., antes de utilizar los datos de la literatura. Los perfiles aerodinámicos, por ejemplo, utilizan la superficie de la forma en planta.

La Figura 5.3*a* corresponde a cilindros largos y lisos. Si se incluyen la rugosidad y longitud del cilindro como variables del análisis dimensional, obtenemos una función más complicada con tres parámetros:

$$C_D = f\left(\mathrm{Re}_d, \frac{\varepsilon}{d}, \frac{L}{d}\right) \tag{5.28}$$

Para describir adecuadamente esta función se requerirían más de 1000 experimentos o simulaciones CFD. Sin embargo, es costumbre explorar los efectos de la longitud y rugosidad por separado para establecer tendencias.

La tabla que se añade a la Figura 5.3*a* muestra el efecto de la longitud del cilindro en el caso de paredes lisas. Cuando la longitud decrece, la resistencia decrece más del 50 por 100. Esto se debe a que la sobrepresión cae en los extremos, ya que allí la corriente puede rodearlos en lugar de deflectarse hacia un lado y otro del cuerpo.

La Figura 5.3*b* muestra el efecto de la rugosidad en un cilindro infinito. La caída brusca de la resistencia ocurre a Re_d más bajos, cuando la rugosidad aumenta a causa de que la capa límite se hace antes turbulenta. La rugosidad produce el mismo efecto en la resistencia de una esfera, un hecho que se explota en deportes como el golf, donde los hoyuelos de las pelotas les proporcionan una menor resistencia en su movimiento a $\mathrm{Re}_d \approx 10^5$.

La Figura 5.3 corresponde a un análisis experimental típico, con ayuda del análisis dimensional, de un problema de Mecánica de Fluidos. Cuando el tiempo, el dinero y la demanda lo permitan, la relación triparamétrica (5.28) podría ampliarse con más experimentos.

EJEMPLO 5.6

La elevación capilar h de un líquido en un tubo varía con el diámetro d del tubo, la gravedad g, la densidad del fluido ρ, la tensión superficial Υ y el ángulo de contacto θ. (*a*) Determinar la expresión adimensional de esta relación. (*b*) Si $h = 3$ cm en un experimento dado, ¿cuánto valdrá h en un caso similar si el diámetro y la tensión superficial son la mitad, la densidad es el doble y el ángulo de contacto es el mismo?

Solución

Apartado (*a*)

Paso 1. Escribimos la función y contamos las variables

$$h = f(d, g, \rho, \Upsilon, \theta) \qquad n = 6 \text{ variables}$$

www.elsolucionario.net

Paso 2. De la lista de dimensiones {*FLT*} de la Tabla 5.2, tenemos:

h	d	g	ρ	Υ	θ
$\{L\}$	$\{L\}$	$\{LT^{-2}\}$	$\{FT^2L^{-4}\}$	$\{FL^{-1}\}$	Ninguna

Paso 3. Determinamos *j*. Hay varios grupos de tres variables dimensionalmente independientes: Υ, ρ, y g o ρ, g y d. Por tanto, $j = 3$, y esperamos que haya $n - j = 6 - 3 = 3$ grupos adimensionales. Uno de éstos es obviamente θ, que ya es adimensional:

$$\Pi_3 = \theta \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Si hubiéramos seguido los pasos 4 y 5, hubiéramos obtenido igualmente $\Pi_3 = \theta$.

Paso 4. Seleccionamos ρ, g, d como las j variables dimensionalmente independientes.

Paso 5. Añadimos de modo secuencial una variable adicional para obtener los grupos adimensionales:

Añadiendo h: $\Pi_1 = \rho^a g^b d^c h = (FT^2L^{-4})^a (LT^{-2})^b (L)^c (L) = F^0L^0T^0$

Resolviendo el sistema, se obtiene

$$a = b = 0 \qquad c = -1$$

Por tanto

$$\vartheta_1 = g^0 d^{-1} h = \frac{h}{d} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Finalmente, añadiendo Υ y eligiendo su exponente igual a 1

$$\Pi_2 = \rho^a g^b d^c \Upsilon = (FT^2L^{-4})^a (LT^{-2})^b (L)^c (FL^{-1}) = F^0L^0T^0$$

Obtenemos

$$a = b = -1 \qquad c = -2$$

Por tanto

$$\vartheta_2 = g^{-1} d^{-1} \rho = \frac{\rho}{gd^2} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Paso 6. La relación adimensional completa para este problema es entonces

$$\frac{h}{d} = F\left(\frac{\rho}{gd^2}, \theta\right) \qquad \textit{Resp. (a)} \ (1)$$

Esto es todo lo que nos puede proporcionar el análisis dimensional. Sin embargo, la teoría establece que h es proporcional a Υ. Dado que Υ aparece sólo en el segundo parámetro, podemos sacarlo fuera:

$$\left(\frac{h}{d}\right)_{\text{real}} = \frac{\rho}{gd^2} F_1(\theta) \quad \text{o} \quad \frac{h}{\rho} gd = F_1(\theta)$$

En el Ejemplo 1.9 se mostró de forma teórica que $F_1(\theta) = 4 \cos \theta$.

Apartado (*b*)

Se nos da h_1 en unas ciertas condiciones d_1, Υ_1, ρ_1 y θ_1. Si $h_1 = 3$ cm, ¿cuánto vale h_2 para $d_2 = d_1$, $\Upsilon_2 = \Upsilon_1$, $\rho_2 = 2\rho_1$ y $\theta_2 = \theta_1$? Sabemos que la relación funcional dada por la Ecuación (1) debe ser válida también en las condiciones 2:

www.elsolucionario.net

$$\frac{h_2}{d_2} = F\left[\frac{\mathcal{L}_2}{\Leftarrow_2 g d_2^2}, \aleph_2\right]$$

Pero

$$\frac{\mathcal{L}_2}{\Leftarrow_2 g d_2^2} = \frac{\frac{1}{2}\mathcal{L}_1}{2\Leftarrow_1 g(\frac{1}{2}d_1)^2} = \frac{\mathcal{L}_1}{\Leftarrow_1 g d_1^2}$$

Por tanto,

$$\frac{h_2}{d_2} = F\left[\frac{\mathcal{L}_2}{\Leftarrow_1 g d_1^2}, \aleph_1\right] = \frac{h_1}{d_1}$$

Hemos dado unas condiciones 2 que son semejantes a las condiciones 1, por tanto se cumple la ley de escala:

$$h_2 = h_1\frac{d_2}{d_1} = (3\text{ cm})\frac{\frac{1}{2}d_1}{d_1} = 1{,}5\text{ cm} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Si los grupos adimensionales no fuesen exactamente iguales en ambas condiciones, para poder determinar h_2 necesitaríamos más información acerca de la relación funcional F.

5.5. LA MODELIZACIÓN Y SUS DIFICULTADES

Hasta ahora nos hemos dedicado a estudiar la homogeneidad dimensional y el teorema pi para, usando productos de potencias, llevar una relación físicamente homogénea a su forma adimensional. Aunque esta transformación sea matemáticamente correcta, hay ciertas dificultades ingenieriles previas que necesitan ser discutidas.

En primer lugar, hemos dado más o menos por cierto que es posible especificar todas las variables que intervienen en el proceso. Realmente, la selección de las variables que influyen en el mismo necesita gran juicio y experiencia. El ingeniero debe decidir, por ejemplo, cuándo puede despreciarse la viscosidad. ¿Son importantes los efectos de la temperatura? ¿Es importante la tensión superficial? ¿Qué pasa con la rugosidad? Cada grupo adimensional que se retiene aumenta el precio y el esfuerzo necesario. El juicio correcto sobre qué variables deben retenerse en cada caso es consecuencia de la práctica y madurez; este libro proporcionará parte de la experiencia necesaria.

Una vez que se han seleccionado las variables y realizado el análisis dimensional, el investigador debe buscar la *semejanza* entre el modelo ensayado y el prototipo a diseñar. Con suficientes ensayos, los datos obtenidos del modelo proporcionarán la función adimensional buscada:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \ldots \Pi_k) \tag{5.29}$$

Con la Ecuación (5.29) disponible en tablas, gráficas o en forma analítica, estamos en posición de asegurar la semejanza completa entre modelo y prototipo. Una definición formal podría ser la siguiente:

> Las condiciones del flujo para un modelo de ensayo son completamente semejantes a las del prototipo si coinciden los valores de todos los parámetros adimensionales correspondientes en el modelo y el prototipo.

Esto se obtiene matemáticamente de la Ecuación (5.29). Si $\Pi_{2m} = \Pi_{2p}$, $\Pi_{3m} = \Pi_{3p}$, etc., la Ecuación (5.49) garantiza que el valor buscado de Π_{1m} es igual a Π_{1p}. Pero esto es más fácil de decir que de hacer, como veremos ahora. Hay libros enteros dedicados al ensayo de modelos [30-32].

Por ser difícil de conseguir la semejanza completa, la literatura ingenieril habla de tipos particulares de semejanza, siendo las más comunes la geométrica, cinemática, dinámica y térmica. Consideremos cada una por separado.

www.elsolucionario.net

Semejanza geométrica

La semejanza geométrica se refiere a la dimensión longitud $\{L\}$ y debe asegurarse que se cumple antes de proceder a los ensayos con cualquier modelo. Una definición formal es la siguiente:

> Un modelo y un prototipo son *geométricamente semejantes* si, y sólo si, todas las dimensiones espaciales en las tres coordenadas tienen la misma relación de escala lineal.

Obsérvese que *todas* las longitudes deben de estar referidas a la misma escala. Es como si se tomase una fotografía del prototipo y la redujésemos o agrandásemos hasta que tuviese el tamaño del modelo. Si el modelo está hecho a un décimo de tamaño del prototipo, su longitud, anchura y altura deben ser diez veces más pequeñas. No sólo eso, sino que cualquiera de sus dimensiones debe ser diez veces más pequeña, y, técnicamente, hablaremos de puntos *homólogos*, que son los puntos que tienen la misma posición relativa. Por ejemplo, el borde de ataque del prototipo es homólogo al borde de ataque del modelo. El extremo izquierdo del prototipo de un ala es homólogo al extremo izquierdo del modelo. La semejanza geométrica requiere que todos los puntos homólogos estén relacionados por la misma relación de escala lineal. Esto se aplica tanto a la geometría del fluido como del modelo.

> En la semejanza geométrica todos los ángulos se conservan. Todas las direcciones del flujo se conservan. La orientación del modelo y del prototipo con respecto a los objetos de los alrededores debe ser idéntica.

La Figura 5.4 ilustra un prototipo de ala y su modelo a escala un décimo. Las longitudes del modelo son todas un décimo más pequeñas, pero su ángulo de ataque con respecto a la corriente libre es el mismo: 10° no 1°. Todos los detalles geométricos del modelo deben estar a escala, y a veces se pasan por alto algunos de ellos por ser muy sutiles:

1. El radio de borde de ataque del modelo debe ser un décimo más pequeño.
2. La rugosidad de la superficie del modelo debe ser un décimo más pequeña.
3. Si el prototipo tiene un alambre perturbador de 5 mm, para inducir la transición de la capa límite a turbulenta, situado a 1,5 m del borde de salida, el modelo debe tener un alambre de 0,5 mm situado a 0,15 m del borde de salida.
4. Si el prototipo se construye con remaches que sobresalen, el modelo debe tener los remaches correspondientes de tamaño un décimo menor.

Y así sucesivamente. Habrá violación de la semejanza geométrica cuando el modelo no cumpla todas estas exigencias, si bien quizá sea posible mostrar mediante contraste experimental que el comportamiento del prototipo no va a estar afectado por la discrepancia.

El usuario de modelos se arriesga cuando utiliza modelos que parecen semejantes en su forma, pero que violan claramente la semejanza geométrica. La Figura 5.5 ilustra este punto. Las esferas de la Figura 5.5*a* son todas geométricamente semejantes y puede esperarse que los ensayos den buenos resultados si los nú-

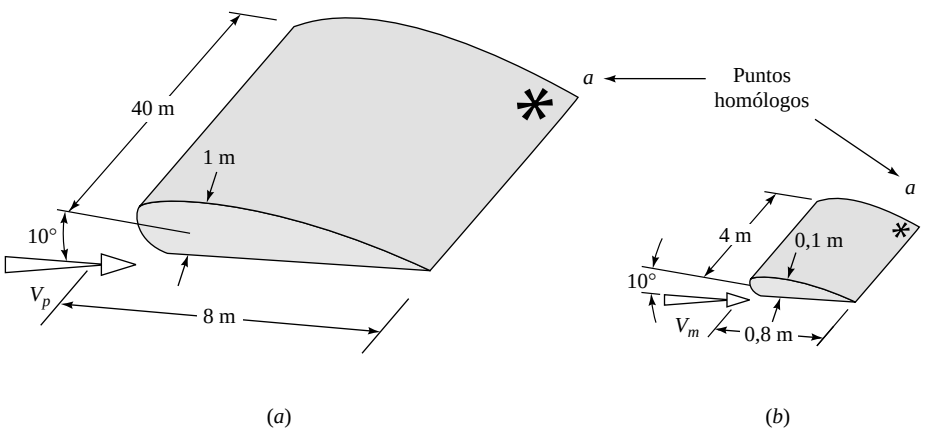


Figura 5.4. Semejanza geométrica en el ensayo con modelos: (*a*) prototipo; (*b*) modelo a escala un décimo.

www.elsolucionario.net

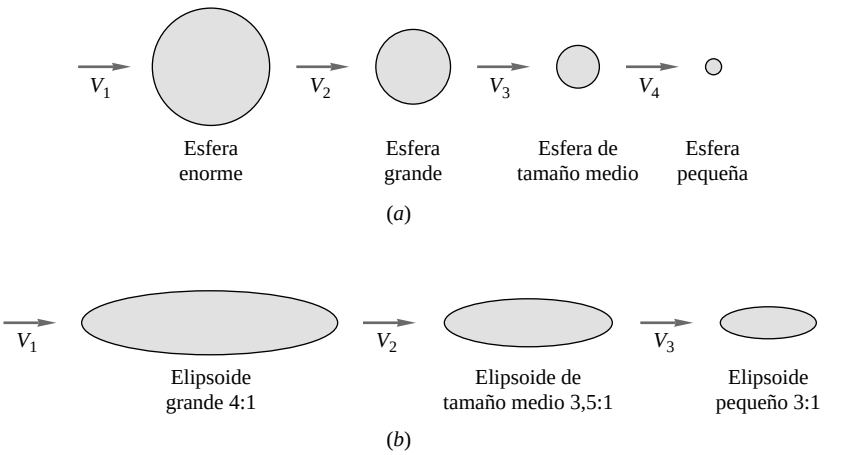


Figura 5.5. Semejanza y no semejanza geométrica de flujos: (*a*) semejantes; (*b*) no semejantes.

meros de Reynolds, Froude, etc., son los mismos. Sin embargo, los elipsoides de la Figura 5.5*b* sólo *parecen* semejantes. En realidad sus dos ejes tienen relaciones de escala lineal diferentes y no pueden compararse de ninguna forma racional, aunque los números de Reynolds, Froude, etc., sean idénticos. Los resultados no serán los mismos para estos elipsoides y cualquier intento de «compararlos» es una cuestión de juicio ingenieril grosero.

Semejanza cinemática

La semejanza cinemática exige que todas las relaciones entre longitudes homólogas del modelo y prototipo tengan el mismo valor, que se denomina relación de escala de longitudes, y también que todas las relaciones entre tiempos homólogos tengan un valor común, que se denomina relación de escala de tiempos. Entonces habrá una única relación de escala de velocidades. Langhaar [4] lo expresa:

> Los movimientos de dos sistemas son cinemáticamente semejantes si partículas homólogas alcanzan puntos homólogos en instantes homólogos.

La equivalencia de las escalas de longitud implica simplemente semejanza geométrica, pero la equivalencia de las escalas de tiempo puede exigir consideraciones dinámicas adicionales tales como la igualdad de los números de Reynolds y de Mach.

Un caso especial es el flujo sin fricción y sin superficie libre de un fluido incompresible, que se esquematiza en la Figura 5.6*a*. Este tipo de flujos son cinemáticamente semejantes con escalas de longitud y tiempo independientes, y no son necesarios parámetros adicionales (véase Capítulo 8 para más detalles).

Los flujos sin fricción con superficie libre, como el de la Figura 5.6*b*, son cinemáticamente semejantes si sus números de Froude son iguales:

$$\mathrm{Fr}_m = \frac{V_m^2}{gL_m} = \frac{V_p^2}{gL_p} = \mathrm{Fr}_p \tag{5.30}$$

Obsérvese que el número de Froude es un parámetro puramente cinemático que sólo relaciona magnitudes con dimensiones de longitud y tiempo. De la Ecuación (5.30), si la escala de longitud es

$$L_m = \alpha L_p \tag{5.31}$$

donde α es un factor adimensional, la escala de velocidades es

$$\frac{V_m}{V_p} = \left[\frac{L_m}{L_p}\right]^{1/2} = \sqrt{\alpha} \tag{5.32}$$

www.elsolucionario.net

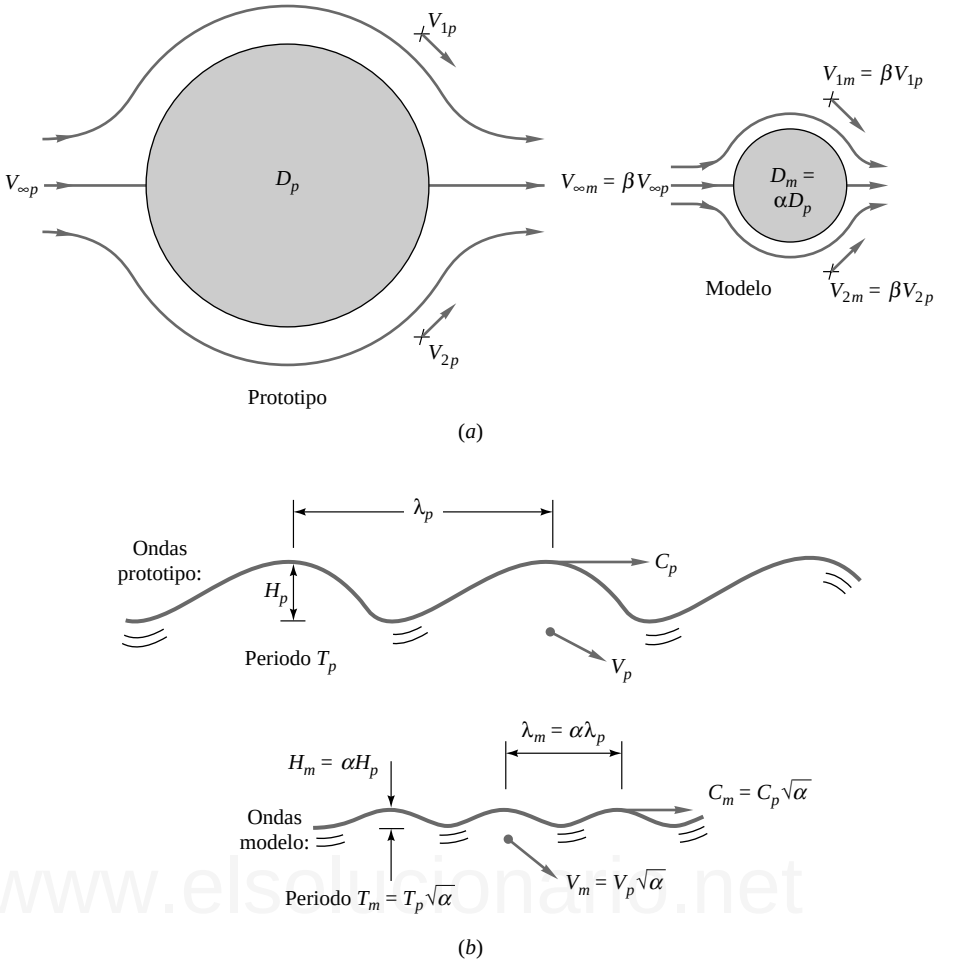


Figura 5.6. Los flujos no viscosos a bajas velocidades son cinemáticamente semejantes: (*a*) los flujos sin superficie libre son cinemáticamente semejantes con relaciones de escala de longitud y tiempo independientes; (*b*) los flujos con superficie libre son cinemáticamente semejantes con escalas de longitud y tiempo relacionadas entre sí por la conservación del número de Froude.

y la escala de tiempos es

$$\frac{T_m}{T_p} = \frac{L_m / V_m}{L_p / V_p} = \sqrt{\quad} \tag{5.33}$$

Estas relaciones cinemáticas obtenidas de la igualdad de los números de Froude se ilustran en la Figura 5.6*b*, que se refiere a la modelización del movimiento de ondas. Si la relación de escala de longitudes de las ondas es α, la relación entre períodos de onda, velocidades de propagación y velocidades de las partículas es $M\alpha$.

Si los efectos de viscosidad, tensión superficial o de compresibilidad son importantes, la semejanza cinemática está condicionada a que haya semejanza dinámica.

Semejanza dinámica

Existe semejanza dinámica cuando modelo y prototipo tienen la misma relación de escala de longitudes, la misma relación de escala de tiempos y la misma relación de escala de fuerzas (o de masa). De nuevo, la semejanza geométrica es el primer requisito; en caso contrario, no se debe proseguir. La semejanza dinámica

www.elsolucionario.net

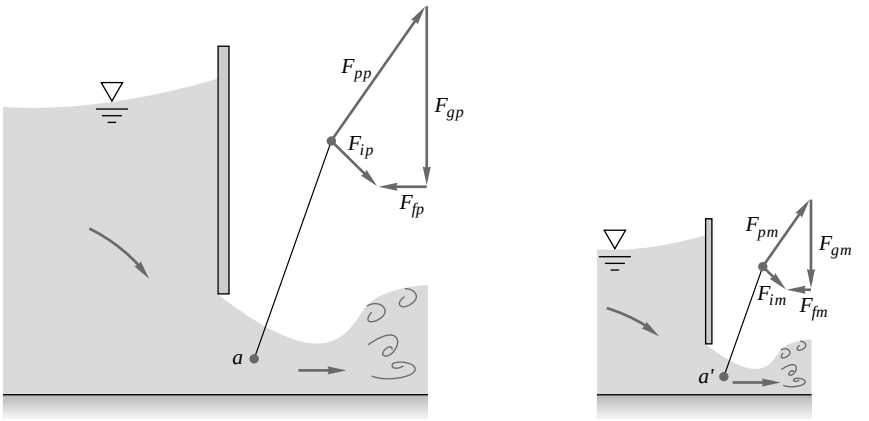


Figura 5.7. Semejanza dinámica en el flujo por debajo de una compuerta. El modelo y prototipo tienen polígonos de fuerzas semejantes, en puntos homólogos, si los números de Reynolds y Froude son iguales en ambos: (*a*) prototipo; (*b*) modelo.

existe simultáneamente con la semejanza cinemática, si todas las fuerzas en modelo y prototipo guardan la misma proporción. Esto ocurre si

1. Flujo compresible: los números de Reynolds y Mach del modelo y el prototipo y la relación de calores específicos son iguales.
2. Flujo incompresible:
   a. Sin superficie libre: los números de Reynolds del modelo y el prototipo son iguales.
   b. Con superficie libre: los números de Reynolds, Froude y (si intervienen) los de Weber y de cavitación son iguales en el modelo y el prototipo.

Esto es consecuencia de que la ley de Newton exige que para toda partícula fluida la suma de las fuerzas de presión, gravedad y fricción ha de ser igual al término de aceleración o fuerza de inercia,

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_f = \mathbf{F}_i$$

Las leyes de semejanza dinámica citadas anteriormente aseguran que todas estas fuerzas están en la misma proporción y tienen direcciones equivalentes en el modelo y el prototipo. La Figura 5.7 muestra un ejemplo correspondiente al flujo bajo una compuerta. Los polígonos de fuerzas en puntos homólogos tienen exactamente la misma forma si los números de Reynolds y Froude son iguales (despreciando, por supuesto, la tensión superficial y la cavitación). La semejanza cinemática también está asegurada por las mismas leyes.

Discrepancias de los ensayos en aire y agua

La semejanza dinámica perfecta mostrada en la Figura 5.7 es más una ilusión que una realidad, ya que la igualdad de los números de Reynolds y de Froude sólo se puede conseguir con cambios importantes en las propiedades de los fluidos; por el contrario, la mayor parte de los ensayos se hacen en agua o aire, los fluidos más baratos disponibles.

Consideremos en primer lugar los ensayos hidráulicos con superficie libre. La semejanza dinámica requiere que los números de Froude sean iguales, Ecuación (5.30), *y* que también lo sean los números de Reynolds:

$$\frac{V_m L_m}{\nu_m} = \frac{V_p L_p}{\nu_p} \tag{5.34}$$

www.elsolucionario.net

Pero tanto la velocidad como la longitud están relacionadas por la identidad del número de Froude, Ecuaciones (5.31) y (5.32). Por tanto, para una relación de escala de longitudes α dada, la Ecuación (5.34) se cumple sólo si

$$\frac{\nu_m}{\nu_p} = \frac{L_m}{L_p}\frac{V_m}{V_p} = \alpha \sqrt{\alpha} = \alpha^{3/2} \tag{5.35}$$

Por ejemplo, en un modelo a escala un décimo, $\alpha = 0{,}1$ y $\alpha^{3/2} = 0{,}032$. Puesto que ν_p es indudablemente la del agua, necesitamos un fluido con una viscosidad cinemática 0,032 veces la del agua para conseguir la semejanza dinámica. Refiriéndonos a la Tabla 1.4, vemos que esto es imposible: aunque el mercurio tiene una viscosidad cinemática un décimo de la del agua, un ensayo hidráulico con mercurio es caro y de efectos nocivos para la salud. En la práctica se utiliza el agua tanto para el modelo como para el prototipo, y la igualdad de los números de Reynolds (5.34) se viola inevitablemente. El número de Froude se mantiene constante, puesto que es el parámetro dominante en flujos con superficie libre. Normalmente, el número de Reynolds del modelo es de 10 a 1000 veces más pequeño que el del prototipo. Como se muestra en la Figura 5.8, los datos obtenidos de los ensayos con modelos a números de Reynolds más bajos se utilizan para estimar, por extrapolación, los datos del prototipo a números de Reynolds más altos. Como indica la figura, hay una incertidumbre considerable a la hora de utilizar tal extrapolación, pero no hay otra alternativa práctica en el ensayo de modelos hidráulicos.

En segundo lugar, consideremos el ensayo de modelos aerodinámicos en aire (donde no hay superficie libre). Los parámetros importantes son los números de Reynolds y de Mach. Se debe satisfacer la Ecuación (5.34), más el criterio de compresibilidad

$$\frac{V_m}{a_m} = \frac{V_p}{a_p} \tag{5.36}$$

Eliminando V_m/V_p entre (5.34) y (5.36), se obtiene

$$\frac{\nu_m}{\nu_p} = \frac{L_m}{L_p}\frac{a_m}{a_p} \tag{5.37}$$

Dado que el prototipo va a operar en aire, necesitamos un túnel aerodinámico con fluido de baja viscosidad y alta velocidad del sonido. El hidrógeno es el único ejemplo práctico, pero está claro que es demasiado caro y peligroso. Por tanto, los túneles aerodinámicos funcionan normalmente con aire. Si se enfría y presuriza el aire, se puede conseguir una aproximación a la Ecuación (5.37), pero no lo suficiente para satisfacer la reducción de escalas de longitudes de, por ejemplo, un décimo. Por tanto, en ensayos aerodinámicos también se viola la igualdad de los números de Reynolds, necesitándose una extrapolación semejante a la de la Figura 5.8.

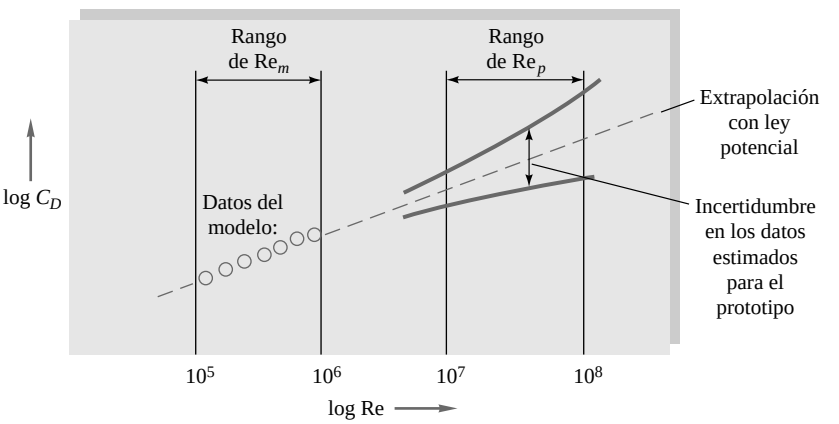


Figura 5.8. Extrapolación a números de Reynolds más altos de los datos obtenidos en ensayos hidráulicos con igual número de Froude.

www.elsolucionario.net

Figura 5.9. Modelo hidráulico de la presa del lago Bluestone en el río New River cerca de Hinton, West Virginia. La escala del modelo es de 1:65 tanto en horizontal como en vertical, y el número de Reynolds, aunque bastante menor que el valor del prototipo, es lo suficientemente grande para que el flujo sea turbulento. (*Por cortesía de la U.S. Army Corps of Engineers Waterways Experiment Station.*)

La Figura 5.9. muestra un modelo hidráulico de la presa del lago Bluestone en West Virginia. El modelo se encuentra en la *U.S. Army Waterways Experiment Station* en Vicksburg, MS. La escala (o relación de longitudes) horizontal es de 1:65, lo que es suficiente para que la escala vertical también pueda ser de 1:65 sin que aparezcan efectos importantes de tensión superficial (número de Weber). Las velocidades se escalan para hacer coincidir el número de Froude. Sin embargo, no es posible reproducir el número de Reynolds del prototipo, que es de orden 10^7. Los ingenieros fijaron el número de Reynolds en torno a 2×10^4, un valor suficientemente alto para simular el flujo turbulento del prototipo de forma aproximada. Obsérvese la intensa turbulencia que aparece en la parte inferior de la presa. Por este motivo, la base de los aliviaderos de una presa debe reforzarse estructuralmente para evitar la erosión de la superficie.

En los modelos hidráulicos de flujos naturales a gran escala, como los de ríos, puertos, estuarios y entradas de bahías, puede ser necesario violar la semejanza geométrica, distorsionando la escala vertical para evitar efectos del número de Weber. Por ejemplo, un modelo puede tener una escala horizontal de 1:1000 y una escala vertical de 1:100. De este modo el modelo puede tener *mayor profundidad* en relación a sus dimensiones horizontales. Puesto que el flujo en un canal más profundo es más eficiente, la base del modelo se hace deliberadamente más rugosa que la del canal natural para corregir los efectos de la discrepancia geométrica.

EJEMPLO 5.7

La caída de presión debida a la fricción en el flujo en un tubo largo de paredes lisas es función de la velocidad media del fluido, la densidad, la viscosidad y la longitud y el diámetro del tubo: $\Delta p = f(V, \rho, \mu, L, D)$. Queremos conocer cómo varía Δp con V. (*a*) Utilice el teorema pi para rescribir esta función en forma adimensional. (*b*) Represente gráficamente esta función, usando los siguientes datos correspondientes a tres tubos y tres fluidos distintos:

www.elsolucionario.net

D, cm	L, m	Q, m³/h	Δp, Pa	ρ, kg/m³	μ, kg/(m · s)	V, m/s*
1,0	5,0	0,3	4.680	680†	$2{,}92 \times 10^{-4}$†	1,06
1,0	7,0	0,6	22.300	680†	$2{,}92 \times 10^{-4}$†	2,12
1,0	9,0	1,0	70.800	680†	$2{,}92 \times 10^{-4}$†	3,54
2,0	4,0	1,0	2.080	998‡	0,0010‡	0,88
2,0	6,0	2,0	10.500	998‡	0,0010‡	1,77
2,0	8,0	3,1	30.400	998‡	0,0010‡	2,74
3,0	3,0	0,5	540	13.550§	$1{,}56 \times 10^{-3}$§	0,20
3,0	4,0	1,0	2.480	13.550§	$1{,}56 \times 10^{-3}$§	0,39
3,0	5,0	1,7	9.600	13.550§	$1{,}56 \times 10^{-3}$§	0,67

* $V = Q/A$, $A = \pi D^2/4$.
† Gasolina.
‡ Agua.
§ Mercurio.

(*c*) Supongamos que además sabemos que Δp es proporcional a L (lo que es una buena aproximación para tubos largos con entradas redondeadas). Utilice esta información para simplificar y mejorar el resultado del teorema pi. Represente los datos adimensionales de esta forma y comente los resultados.

Solución

Hay seis variables que involucran tres dimensiones primarias $\{MLT\}$. Por tanto esperamos $j = 6 - 3 = 3$ grupos adimensionales. Estamos en lo cierto, pues podemos encontrar tres variables que no pueden formar un grupo adimensional, por ejemplo, (ρ, V, L). Seleccionamos cuidadosamente tres (j) variables dimensionalmente independientes, que no incluyan Δp o V, que son las que queremos representar una frente a la otra. Tomamos (ρ, μ, D), y el teorema pi nos garantiza que existirán tres grupos adimensionales independientes formados por productos de potencias:

$$\vartheta_1 = \rho^a \mu^b D^c \Delta p \qquad \vartheta_2 = \rho^d \mu^e D^f V \qquad \vartheta_3 = \rho^g \mu^h D^i L$$

o

$$\vartheta_1 = \frac{\rho D^2 \Delta p}{\mu^2} \qquad \vartheta_2 = \frac{\rho V D}{\mu} \qquad \vartheta_3 = \frac{L}{D}$$

Hemos omitido el álgebra que conduce a los valores (a, b, c, d, e, f, g, h, i) cuando se igualan todos los exponentes a cero M^0, L^0, T^0. Así pues, la relación adimensional deseada es

$$\frac{\rho D^2 \Delta p}{\mu^2} = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}, \frac{L}{D}\right) \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Si representamos Π_1 frente a Π_2 con Π_3 como parámetro, habrá nueve puntos experimentales. Por ejemplo, la primera fila de la tabla de datos conduce a

$$\frac{\rho D^2 \Delta p}{\mu^2} = \frac{(680)(0{,}01)^2(4680)}{(2{,}92 \times 10^{-4})^2} = 3{,}73 \times 10^9$$

$$\frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(680)(1{,}06)(0{,}01)}{2{,}92 \times 10^{-4}} = 24.700 \qquad \frac{L}{D} = 500$$

Los nueve puntos experimentales se han representado con círculos abiertos en la Figura 5.10. En cada punto se indica el valor de L/D correspondiente, observándose un efecto significativo de la longitud del tubo. De hecho, si conectáramos los únicos dos puntos con el mismo valor de L/D (= 200), podríamos ver que Δp aumenta linealmente con L, como se indica en la última parte del problema. Como L aparece sólo en el grupo adimensional $\Pi_3 = L/D$, la función $\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3)$ debe reducirse a $\Pi_1 = (L/D)\, f(\Pi_2)$, o simplemente a una función entre dos parámetros adimensionales:

$$\frac{\rho D^3 \Delta p}{L \mu^2} = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right) \quad \text{flujo en un tubo largo} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

www.elsolucionario.net

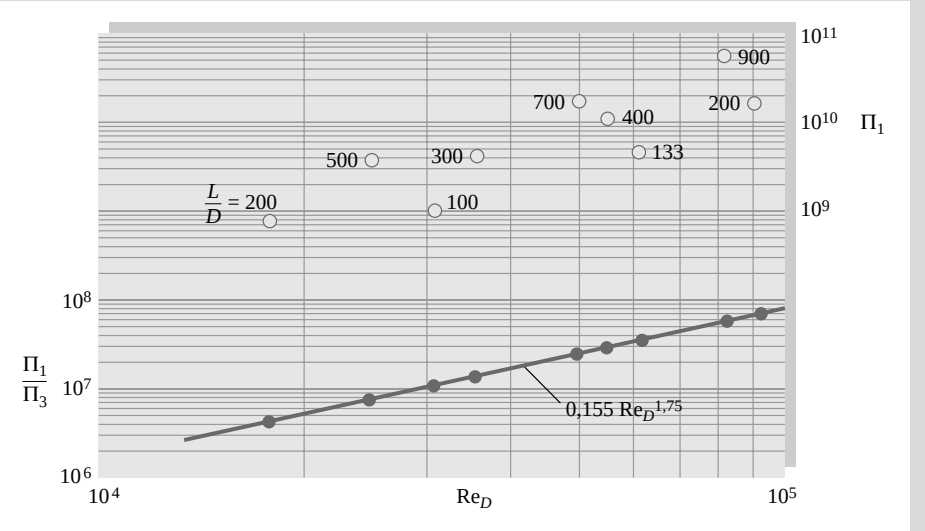


Figura 5.10. Dos representaciones de los datos del Ejemplo 5.7: Los círculos abiertos representan $\rho D^2 \nabla p/\mu^2$ frente a Re_D, con L/D como parámetro; cuando se sabe que ∇p es proporcional a L, la representación (círculos sólidos) de $\rho D^3 \nabla p/(L\mu^2)$ frente a Re_D colapsa en una única curva correspondiente a una ley potencial.

Modificamos ahora los puntos experimentales de la Figura 5.10 dividiéndolos por su valor L/D. Por ejemplo, para la primera fila de la tabla de datos, $\rho D^3 \nabla p/(L\mu^2) = (3{,}73 \times 10^9)/500 = 7{,}46 \times 10^6$. Estos nuevos datos se han representado con círculos sólidos en la Figura 5.10, donde se observa que existe prácticamente una correlación lineal entre ellos, dada por la ley potencial:

$$\frac{\rho D^3 \nabla p}{L\mu^2} \approx 0{,}155 \left[\frac{\rho V D}{\mu} \right]^{1{,}75} \qquad \textit{Resp. (c)}$$

www.elsolucionario.net

Todos los flujos de fluidos newtonianos en tubos deben verificar esta correlación. Este ejemplo es una variante del primer resultado completamente satisfactorio del análisis dimensional, relativo a la fricción en el flujo en conductos, llevado a cabo por Paul Blasius, estudiante de Prandtl, que publicó una figura parecida en 1911. En este rango de números de Reynolds (correspondiente a flujos turbulentos), la caída de presión aumenta aproximadamente como $V^{1{,}75}$.

EJEMPLO 5.8

Los datos de esferas lisas de la Figura 5.3*a* representan la resistencia adimensional frente a la viscosidad adimensional, pues se seleccionaron (ρ, V, d) como variables dimensionalmente independientes. (*a*) Represente estos datos para mostrar el efecto de la velocidad adimensional en la resistencia. (*b*) Utilice la nueva figura para predecir la velocidad límite (aceleración cero) de una bola de acero de 1 cm de diámetro (S = 7.86) que cae en agua a 20 °C.

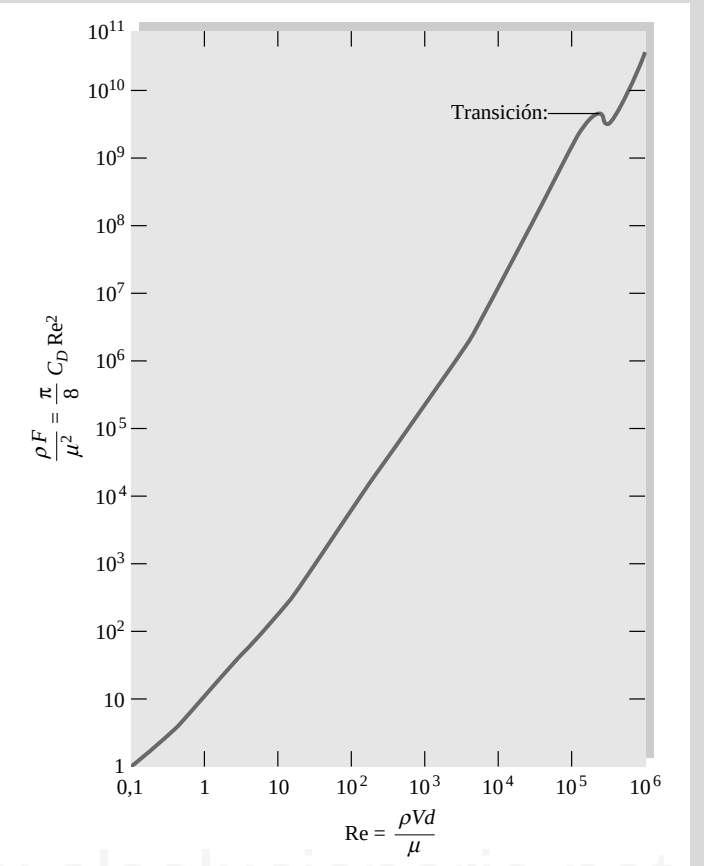
Solución

- *Consideraciones.* La Figura 5.3*a* es válida para cualquier esfera lisa en dicho rango de números de Reynolds.
- *Procedimiento* (*a*). Formamos grupos adimensionales partiendo de la función $F = f(d, V, \rho, \mu)$ que permitan representar F en función de V. La respuesta ya se dio en la Ecuación (5.16), pero revisemos los pasos. Las variables de escala adecuadas son (ρ, μ, d), que no forman un grupo adimensional. Por tanto j = 3, y esperamos $n - j = 5 - 3 = 2$ grupos adimensionales. Omitiendo el álgebra, estos grupos son los siguientes:

$$\vartheta_1 = \rho^a \mu^b d^c F = \frac{\rho F}{\mu^2} \qquad \vartheta_2 = \rho^a \mu^b d^c V = \frac{\rho V d}{\mu} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Podríamos representar los datos de la Figura 5.3*a* de esta nueva forma, observando que $\Pi_1 \equiv (\Theta/8)(C_D)(\mathrm{Re})^2$. Esta representación se muestra en la Figura 5.11. La resistencia aumenta rápidamente con la velocidad hasta la tran-

www.elsolucionario.net



www.elsolucionario.net

Figura 5.11. Representación de los datos de resistencia de esferas de la Figura 5.3*a* que muestra la fuerza adimensional en función de la velocidad adimensional.

sición, donde hay una ligera reducción, después de la cual alcanza valores aún más altos. Si conocemos la fuerza podemos predecir la velocidad a partir de la figura, y viceversa.

- *Valores de las propiedades para el apartado* (*b*). $\rho_{agua} = 998\ \text{kg/m}^3$ $\mu_{agua} = 0{,}001\ \text{kg/(m} \cdot \text{s)}$
  $\rho_{acero} = 7{,}86\ \rho_{agua} = 7844\ \text{kg/m}^3$

- *Solución del apartado* (*b*). A la velocidad límite la resistencia es igual al peso neto de la bola en el agua:

$$F = W_{neto} = (\rho_{acero} - \rho_{agua})g\frac{\pi}{6}d^3 = (7840 - 998)(9{,}81)\frac{\pi}{6}(0{,}01)^3 = 0{,}9351\ \text{N}$$

Por tanto, conocemos la ordenada en la Figura 5.11:

Bola de acero: $$\frac{\rho F}{\mu^2} = \frac{(998\ \text{kg/m}^3)(0{,}0351\ \text{N})}{[0{,}001\ \text{kg/(m} \cdot \text{s)}]^2} = 3{,}5 \times 10^7$$

Ampliando la Figura 5.11 alrededor de $\rho F/\mu^2 = 3{,}5 \times 10^7$ se observa que $\mathrm{Re}_d = 2 \times 10^4$. Una estimación burda de la velocidad límite de caída terminal es entonces

$$\frac{\rho V d}{\mu} = 20.000 \quad \text{o} \quad V = \frac{20.000[0{,}001\ \text{kg/(m} \cdot \text{s)}]}{(998\ \text{kg/m}^3)(0{,}01\ \text{m})} = 2{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

- *Comentarios.* Se podría obtener una precisión mayor expandiendo la escala de la Figura 5.11 en la región de interés. Sin embargo, existe una incertidumbre considerable en los datos publicados de resistencia para esferas, de modo que probablemente el error en la velocidad de caída predicha es de al menos el ±10 por 100.

www.elsolucionario.net

Obsérvese que hemos obtenido la respuesta directamente de la Figura 5.11. También podríamos haber usado la Figura 5.3*a*, pero entonces tendríamos que haber iterado entre la ordenada y la abscisa para obtener el resultado final, pues V aparece en las dos variables representadas.

Resumen

En los Capítulos 3 y 4 se han presentado los métodos integral y diferencial de análisis de los flujos. En este capítulo se ha introducido el tercer y último método: la experimentación, apoyada por la técnica del análisis dimensional. Los ensayos y experimentos se usan tanto para confirmar las teorías existentes como para obtener resultados ingenieriles de gran utilidad cuando no se dispone de una teoría apropiada.

El capítulo comienza con la discusión de varias relaciones físicas familiares y de cómo pueden escribirse en forma adimensional por satisfacer el principio de homogeneidad dimensional. A continuación se presenta el teorema pi, una técnica general que permite encontrar de forma sistemática un conjunto de parámetros adimensionales partiendo de la lista de variables que gobiernan un determinado proceso físico. Alternativamente, se puede aplicar directamente el análisis dimensional a las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos para obtener los parámetros fundamentales que gobiernan los flujos: el número de Reynolds, el número de Froude, el número de Prandtl, el número de Mach, etc.

Se ha mostrado que el ensayo de modelos en aire y agua suele presentar dificultades en el escalado, lo que obliga a adoptar soluciones de compromiso. Muchos ensayos de modelos no llegan a alcanzar realmente la semejanza dinámica.

El capítulo termina indicando que las figuras y representaciones adimensionales clásicas pueden manipularse de forma que proporcionen directamente la solución a ciertos problemas que de otra forma requerirían complicados y laboriosos procesos iterativos.

www.elsolucionario.net

Problemas

La mayoría de los problemas propuestos aquí son bastante sencillos. Los más difíciles, o de final abierto, se indican con un asterisco. Para resolver los problemas señalados con un icono EES (por ejemplo, el Problema P5.61) se recomienda el uso del Resolvedor de Ecuaciones de Ingeniería (EES, *Engineering Equation Solver*), mientras que los problemas señalados con un disquete pueden requerir el uso de un ordenador. Los problemas estándar de final de capítulo P5.1 a P5.91 (ordenados por temas en la lista de abajo) están seguidos por los problemas conceptuales C5.1 a C5.10, los problemas del examen de fundamentos de ingeniería (FE, *Fundamentals of Engineering*) FE1.1 a FE1.10, los problemas extensos PE1.1 a PE1.8, y los proyectos de diseño D5.1 y D5.2.

Distribución de los problemas

Sección	Tema	Problemas
5.1	Introducción	P5.1-P5.9
5.2	El principio de homogeneidad dimensional	P5.10-P5.17
5.3	El teorema de pi	P5.18-P5.41
5.4	Adimensionalización de las ecuaciones básicas	P5.42-P5.47
5.4	Datos relativos a esferas y cilindros	P5.48-P5.49
5.5	Escalado de datos de modelos	P5.60-P5.74
5.5	Ensayos con efectos del número de Mach y de Fraude	P5.75-P5.84
5.5	Reescalado imaginativo de los datos	P5.85-P5.91

P5.1 En el flujo axial a través de un tubo circular, el número de Reynolds de transición a la turbulencia basado en el diámetro y la velocidad media es aproximadamente 2300 [véase Ecuación (6.2)]. Si $d = 5$ cm y el fluido es queroseno a 20 °C, halle el caudal en m^3/h para el cual se produce la transición.

P5.2 En el flujo alrededor de un cuerpo plano delgado, como un perfil aerodinámico, la transición a la turbulencia ocurre alrededor de $Re = 10^6$, con el número de Reynolds basado en la distancia x desde el borde de ataque del ala. ¿Si un avión vuela a 450 mi/h a una altura estándar de 8 km y sufre transición al 12 por 100 de la cuerda, cuánto mide la cuerda (longitud desde el borde de ataque al borde de salida del ala)?

P5.3 Un avión tiene una cuerda de $L = 1{,}2$ m y vuela a Mach 0,7 en la atmósfera estándar. Si su número de Reynolds, basado en la longitud de la cuerda, es 7×10^6, ¿a qué altura está volando?

P5.4 Una esfera de 8 cm de diámetro se ensaya en agua a 20 °C a una velocidad de 2 m/s, obteniéndose una resistencia de 5 N. ¿Cuál será la velocidad y la fuerza de resistencia que experimentará un globo meteorológico de 1,5 m de diámetro amarrado a nivel del mar en la atmósfera estándar bajo condiciones dinámicamente semejantes?

P5.5 Un automóvil tiene una longitud y un área características de 8 ft y 60 ft^2, respectivamente. Cuando se en-

www.elsolucionario.net

saya a nivel del mar en la atmósfera estándar, se mide la siguiente resistencia en función de la velocidad:

V, mi/h	20	40	60
Resistencia, lbf	31	115	249

El mismo coche viaja en Colorado a 65 mi/h a una altura de 3500 m. Usando el análisis dimensional, estime (*a*) la fuerza de resistencia y (*b*) los caballos de vapor necesarios para vencer la resistencia del aire.

***P5.6** Una esfera de 8 cm de diámetro se ensaya en aceite SAE 10 a 20 °C a las velocidades de 1, 2 y 3 m/s, y las fuerzas resultantes son de 1,5, 5,3 y 11,2 N, respectivamente. Estime la fuerza que sufriría dicha esfera en glicerina a 20 °C a una velocidad de 15 m/s.

P5.7 Se deja caer un cuerpo en la luna (g = 1,62 m/s^2) con una velocidad inicial de 12 m/s. Usando las variables de la opción 2, Ecuación (5.11), el impacto en el suelo ocurre en t^{**} = 0,34 y S^{**} = 0,84. Estime (*a*) la posición inicial, (*b*) la posición final y (*c*) el tiempo de impacto.

P5.8 El *número de Morton* Mo, empleado para correlacionar estudios de dinámica de burbujas, es una combinación adimensional de la aceleración de la gravedad g, la viscosidad μ, la densidad ρ y el coeficiente de tensión superficial Υ. Obtenga la forma de Mo sabiendo que es proporcional a g.

P5.9 El *número de aceleración*, Ac, utilizado en ocasiones en la teoría del flujo compresible, es una combinación adimensional de la aceleración de la gravedad g, la viscosidad μ, la densidad ρ y el módulo de compresibilidad isentrópico B. Obtenga la forma de Ac sabiendo que es inversamente proporcional a la densidad.

P5.10 Determine la dimensión $\{MLTQ\}$ de las siguientes cantidades:

$$(a)\ \tau = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (b)\ \int_1^2 (p - p_0)\,dA \quad (c)\ \varepsilon_p \frac{E^2 T}{\partial x \partial y}$$

$$(d)\ \text{III} = \frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dy\,dz$$

Todas las variables representan sus valores usuales; por ejemplo, ρ es la densidad.

P5.11 La aceleración centrípeta de una partícula que se mueve en círculos tiene la forma $a = f(V, R)$, donde V es la velocidad y R el radio del círculo. Mediante razonamientos exclusivamente dimensionales, rescriba esta función en forma algebraica.

P5.12 El *número de Stokes*, St, utilizado en estudios de dinámica de partículas, es una combinación adimensional de *cinco* variables: la aceleración de la gravedad g, la viscosidad μ, la densidad ρ, la velocidad de la partícula U y el diámetro de la partícula D. (*a*) Obtenga la forma de St sabiendo que es proporcional a μ e inversamente proporcional a g. (*b*) Demuestre que St es el cociente de otros dos grupos adimensionales más conocidos.

P5.13 Se sabe que la velocidad de propagación C de una onda capilar en agua profunda es sólo función de la densidad ρ, la longitud de onda λ y la tensión superficial Υ. Escriba esta relación funcional en forma adimensional, completándola con constantes adimensionales. Para una cierta densidad y longitud de onda, ¿cómo cambia la velocidad de propagación si se duplica la tensión superficial?

P5.14 El espesor δ de la capa límite de una placa plana crece con la distancia x medida desde el borde de ataque de la placa y es función también de la velocidad de la corriente exterior U, de la viscosidad μ y de la densidad ρ del fluido. Obtenga los parámetros adimensionales de este problema, reagrupándolos si fuera necesario para escribirlos en la forma de los grupos adimensionales estándar de la Mecánica de Fluidos, dados en la Tabla 5.2.

P5.15 El esfuerzo cortante en la pared τ_w en una capa límite se considera que es función de la velocidad de la corriente exterior U, el espesor de la capa límite δ, la velocidad local turbulenta u', la densidad ρ y el gradiente de presiones local dp/dx. Escriba esta relación en forma adimensional usando (ρ, U, δ) como variables dimensionalmente independientes.

P5.16 Los datos de transferencia de calor por convección suelen presentarse en forma de un *coeficiente de transporte de calor* h, definido por

$$\dot{Q} = hA\,\Delta T$$

donde $\dot{Q}$ = flujo de calor, J/s
A = área de la superficie, m^2
ΔT = diferencia de temperaturas, K

La forma adimensional de h, denominada *número de Stanton*, es una combinación de h, la densidad del fluido ρ, el calor específico c_p y la velocidad V. Obtenga la forma del número de Stanton sabiendo que es proporcional a h. ¿Cuáles son las unidades de h?

P5.17 La caída de presión por unidad de longitud $\Delta p/L$ en un conducto rotatorio con paredes porosas (véase Referencia 35) depende de la velocidad media V, la densidad ρ, la viscosidad μ, la altura del conducto h, la velocidad de inyección a través de la pared porosa v_w y la velocidad de giro Ω. Usando (ρ, V, h) como variables dimensionalmente independientes, reescriba esta relación en forma adimensional.

P5.18 En condiciones de flujo laminar, el caudal Q a través de un pequeño conducto de sección triangular de lado b y longitud L es función de la viscosidad μ, la caída de presión por unidad de longitud $\Delta p/L$ y de b. Usando el teorema pi, reescriba esta relación en forma adimensional. ¿Cómo varía el caudal si se duplica el tamaño b de la sección?

P5.19 El período de oscilación T de una onda superficial en agua se considera que es función de la densidad ρ, la longitud de onda λ, la profundidad h, la gravedad g y la tensión superficial Υ. Reescriba esta relación en forma adimensional. ¿Qué ocurre cuando Υ es despreciable? *Consejo*: Tome λ, ρ y g como variables dimensionalmente independientes.

***P5.20** Podemos extender el Problema P5.18 al caso del flujo laminar en un conducto de un fluido no newtoniano,

www.elsolucionario.net

para el cual la expresión más sencilla para el esfuerzo en función de la velocidad de deformación viene dada por la *ley potencial* aproximada

$$\tau = C\left|\frac{d\theta}{dt}\right|^n$$

donde θ es el ángulo de la deformación de cortadura. Ésta es la expresión análoga a la Ecuación (1.23). La constante C juega el papel de la viscosidad. Si el exponente n es menor que (mayor que) la unidad, el material simula un fluido pseudoplástico (dilatante), como se ilustra en la Figura 1.7. (*a*) Usando el sistema {*MLT*}, determine las dimensiones de C. (*b*) La expresión análoga a la del Problema P5.18 para el flujo laminar en un conducto de un fluido que verifica esta ley potencial es $Q = f(C, \partial p/L, b)$. Escriba esta función en forma adimensional.

P5.21 En el Ejemplo 5.1 utilizamos el teorema pi para obtener la Ecuación (5.2) partiendo de la Ecuación (5.1). En lugar de enumerar las dimensiones primarias de cada variable, hay gente que prefiere enumerar las potencias de las dimensiones primarias de cada variable en una tabla:

	F	L	U	$\Leftarrow$	μ
M	1	0	0	1	1
L	1	1	1	−3	−1
T	−2	0	−1	0	−1

Esta tabla de exponentes se conoce como la *matriz dimensional* de la función considerada. Muestre que el rango de esta matriz (el tamaño del mayor determinante no nulo) es igual a $j = n - k$, es decir, la reducción deseada entre las variables originales y los grupos adimensionales. Ésta es una propiedad general de las matrices dimensionales, como observó Buckingham [1].

P5.22 La velocidad angular Ω de un aerogenerador en autorotación depende del diámetro del rotor D, la velocidad del viento V, la densidad del aire ρ, la altura del aerogenerador H comparada con la altura L de la capa límite atmosférica y el número de palas N:

$$\Omega = f\left(D, V, \frac{H}{L}, N\right)$$

Despreciando los efectos viscosos, obtenga los grupos adimensionales apropiados para este problema y reescriba la función en forma adimensional.

P5.23 El periodo T de vibración de una viga es función de la longitud L, el momento de inercia I de la sección, el módulo de elasticidad E, la densidad ρ y del módulo de Poisson σ. Escriba esta relación en forma dimensional. ¿Qué simplificaciones podría hacer si E e I sólo apareciesen formando el producto EI? *Consejo*: Tome L, ρ y E como variables dimensionalmente independientes.

P5.24 La fuerza de sustentación F que actúa sobre un misil es función de su longitud L, velocidad V, diámetro D, ángulo de ataque α, y de la densidad ρ, viscosidad μ y velocidad del sonido a del aire. Escriba la matriz dimensional de esta función y determine su rango. (Consulte el Problema P5.21 para una explicación de este concepto.) Escriba la función en términos de grupos adimensionales.

P5.25 Cuando se confina un fluido entre dos cilindros concéntricos alargados como en la Figura 4.17, el par por unidad de longitud T' requerido para hacer girar el cilindro interior con velocidad angular Ω es función de V, los radios a y b de los cilindros y la viscosidad μ. Obtenga la expresión adimensional equivalente. ¿Qué le ocurre al par si se duplican a y b?

P5.26 El periodo de oscilación T de un péndulo simple se considera función de su longitud L, su masa m, el ángulo máximo de oscilación θ y la aceleración de la gravedad. Se ensaya en la tierra un péndulo de 1 m de longitud y una masa de 200 g y se mide un período de 2,04 s cuando el ángulo máximo de oscilación es de 20°. (*a*) ¿Cuál es el periodo cuando el ángulo máximo de oscilación es de 45°? Un péndulo de construcción similar, con $L = 30$ cm y $m = 100$ g, oscila en la luna ($g = 1{,}62$ m/s^2) con $u = 20°$. (*b*) ¿Cuál es su periodo?

P5.27 Estudiando el transporte de arena por las olas oceánicas, A. Shields postuló en 1936 que el esfuerzo cortante umbral inducido por las olas en el fondo τ necesario para mover las partículas depende de la gravedad g, el tamaño d y la densidad ρ_p de las partículas y de la densidad ρ y viscosidad μ del agua. Obtenga los grupos adimensionales apropiados para este problema, que dieron lugar en 1936 al célebre diagrama de transporte de arena de Shields.

P5.28 Una viga simplemente apoyada de diámetro D, longitud L y módulo elástico E está sometida a un flujo cruzado de velocidad V, densidad ρ y viscosidad μ. La deflexión del punto central d se considera función de todas estas variables. (*a*) Escriba esta relación en forma adimensional. (*b*) Sabiendo que δ es independiente de μ, inversamente proporcional a E y depende exclusivamente del producto ρV^2, y no de ρ y V por separado, simplifique dicha función adimensional apropiadamente. *Consejo*: Tome L, ρ y V como variables dimensionalmente independientes.

P5.29 Cuando se acelera linealmente el fluido en un tubo partiendo del reposo, el flujo comienza siendo laminar para sufrir después la transición a la turbulencia en un tiempo t_{tr} que depende del diámetro del tubo D, de la aceleración a y de las propiedades ρ y μ del fluido. Escriba esto como una relación adimensional entre t_{tr} y D.

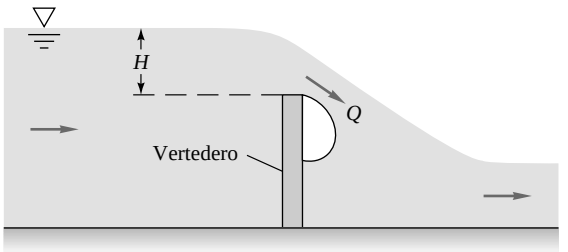
P5.30 En el flujo en la holgura entre un cilindro fijo y otro rotatorio, el esfuerzo cortante en la pared τ_w es función de la densidad ρ, la viscosidad μ, la velocidad angular Ω, el radio exterior R y el espesor de la holgura ∂r. Usando (ρ, Ω, R) como variables dimensionalmente independientes, escriba esta relación en forma adimensional.

P5.31 El flujo de calor q por unidad de área recibido por un cuerpo desde un fluido que se mueve por convección

www.elsolucionario.net

natural (o gravitacional) es función de la diferencia de temperatura ΔT, la gravedad g, la longitud del cuerpo L y de tres propiedades del fluido: la viscosidad cinemática ν, la conductividad k y el coeficiente de expansión térmica β. Escriba la relación en forma adimensional sabiendo que g y β aparecen sólo formando el producto $g\beta$.

P5.32 Un *vertedero* es una obstrucción en un canal que se utiliza para medir el caudal, como muestra la Figura P5.32. El caudal Q varía con la gravedad g, la anchura b del vertedero (en la dirección perpendicular al papel) y la altura del nivel del agua H por encima del vertedero aguas arriba. Sabiendo que Q es proporcional a b, utilice el teorema pi para dar la relación $Q(g, b, H)$ en forma adimensional.

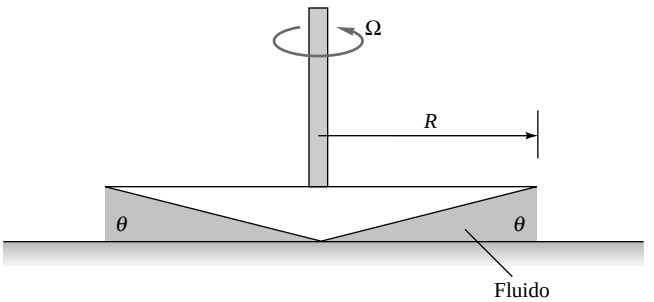


P5.32

P5.33 El periodo de oscilación T de una boya tipo mástil (véase Problema P2.113) varía con su área transversal A, su masa m y el peso específico del fluido ρg. ¿Cómo cambiará el periodo si se duplican (*a*) la masa y (*b*) el área? Las boyas con instrumentos deben tener un periodo largo para evitar la resonancia con el oleaje. Proponga un diseño que cumpla este requisito.

P5.34 En primera aproximación, la conductividad térmica k de un gas (véase la Referencia 8 del Capítulo 1) sólo depende de la densidad ρ, el camino libre medio l, la constante R del gas y la temperatura absoluta T. Para el aire a 20 °C y 1 atm, $k \Xi 0{,}026$ W/(m · K) y $l \Xi 6{,}5 \times 10^{-8}$ m. Utilice esta información para determinar el valor de k para el hidrógeno a 20 °C y 1 atm, si $l \Xi 1{,}2 \times 10^{-7}$ m.

P5.35 El par M requerido para hacer girar el viscosímetro cono-placa de la Figura P5.35 depende del radio R, la velocidad de rotación Ω, la viscosidad μ del fluido y el ángulo θ del cono. Escriba esta relación en forma adimensional. ¿Cómo se simplifica la relación si se sabe que M es proporcional a θ?



P5.35

P5.36 El ritmo de pérdidas de calor $\dot{Q}_{\text{pérdidas}}$ a través de una ventana o pared es función de la diferencia de temperaturas interior y exterior ΔT, la superficie A de la ventana y el parámetro R de la ventana, que tiene unidades de $(\text{ft}^2 \cdot \text{h} \cdot {}^\circ\text{F})/\text{Btu}$. (*a*) Usando el Teorema Pi de Buckingham, obtenga una expresión para el ritmo de pérdidas de calor en función de los otros tres parámetros del problema. (*b*) Si se duplica la diferencia de temperaturas ΔT, ¿por qué factor se multiplica el ritmo de pérdidas de calor?

P5.37 El salto de presiones Δp a través de la onda expansiva de una explosión es función de la distancia r al centro de la explosión, el tiempo t, la velocidad del sonido en el medio y la energía total E liberada en la explosión. Escriba esta relación en forma adimensional (véase la Referencia 18 del Capítulo 4 para más detalles sobre el escalado de las ondas expansivas). ¿Cómo cambia Δp si se duplica E?

P5.38 Se cree que el tamaño d de las gotitas de líquido producidas en la tobera de un pulverizador (spray) depende del diámetro D de la tobera, la velocidad U del chorro y de las propiedades del líquido ρ, μ y Υ. Escriba esta relación en forma adimensional. *Consejo*: Tome D, ρ y U como variables linealmente independientes.

P5.39 La velocidad u de un fluido en movimiento turbulento muy cerca de una pared varía aproximadamente de forma logarítmica con la distancia y a la pared y también depende de la viscosidad μ, la densidad ρ y el esfuerzo en la pared τ_w. En un cierto flujo de aire a 20 °C y 1 atm, $\tau_w = 0{,}8$ Pa y $u = 15$ m/s en $y = 3{,}6$ mm. Utilice esta información para estimar la velocidad u en $y = 6$ mm.

P5.40 Reconsidere el problema de las placas inclinadas con efectos de tensión superficial (véase la Figura PE1.3) como un ejercicio de análisis dimensional. Supongamos que la altura capilar h es una función sólo de las propiedades del fluido, la gravedad, la anchura del fondo y los dos ángulos que aparecen en la Figura PE1.3. Esto es, $h = f(\rho, \Upsilon, g, L, \alpha, \Theta)$. (*a*) Utilice el teorema pi para escribir esta función en términos de parámetros adimensionales. (*b*) Verifique que la solución exacta del Problema PE1.3 es consistente con los resultados del apartado (*a*).

P5.41 Una turbina de flujo axial tiene un par de salida M que es proporcional al caudal Q y que depende también de la densidad ρ, del diámetro del rotor D y de la velocidad de giro Ω. ¿Cómo varía el par cuando se duplican (*a*) D y (*b*) Ω?

P5.42 Adimensionalice la ecuación de la energía (4.75) y sus condiciones de contorno (4.62), (4.63) y (4.70) definiendo $T^* = T/T_0$, donde T_0 es la temperatura a la entrada, que se considera constante. Seleccione las demás variables adimensionales que necesite entre las dadas en las Ecuaciones (5.32). Aísle todos los parámetros adimensionales que encuentre y relaciónelos con los de la Tabla 5.2.

P5.43 La ecuación diferencial de conservación de la concentración de sal en el agua de mar en movimiento es

www.elsolucionario.net

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial t} + u\frac{\partial \hat{S}}{\partial x} + v\frac{\partial \hat{S}}{\partial y} + w\frac{\partial \hat{S}}{\partial z} = \kappa\left(\frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial z^2}\right)$$

donde la constante κ es un coeficiente de difusión, con dimensiones de longitud al cuadrado por unidad de tiempo, y $\hat{S}$ es la salinidad en partes por mil. Adimensionalice esta ecuación y discuta todos los parámetros que aparezcan.

P5.44 La ecuación diferencial de conservación de la energía en un flujo bidimensional incompresible a través de un medio poroso que verifica la ley de Darcy se puede aproximar por

$$\sigma_p\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \sigma_p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

donde σ es la *permeabilidad* del medio poroso. El resto de los símbolos representan las magnitudes usuales. (*a*) ¿Cuáles son las dimensiones apropiadas para σ? (*b*) Adimensionalice esta ecuación, usando (L, U, ρ, T_0) como variables dimensionalmente independientes, y discuta todos los parámetros adimensionales que aparezcan.

P5.45 La siguiente ecuación diferencial constituye un modelo para la dinámica de las reacciones químicas en un reactor de flujo continuo:

$$u\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \Phi kC\,\Phi\frac{\partial C}{\partial t}$$

donde u es la velocidad, D es el coeficiente de difusión, k es el ritmo de reacción, x es la distancia a lo largo del reactor y C es la concentración (adimensional) de un determinado compuesto químico en el reactor. (*a*) Determine las dimensiones apropiadas para D y k. (*b*) Escriba esta ecuación en forma adimensional utilizando una longitud L y la velocidad media V como magnitudes para definir las variables adimensionales y discuta los grupos adimensionales que aparezcan.

P5.46 La ecuación diferencial que describe el movimiento bidimensional en el plano xy de un fluido compresible no viscoso es

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(u^2 + v^2) + (u^2 - a^2)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$
$$+(v^2 - a^2)\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2uv\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0$$

donde ϕ es el potencial de velocidades y a es la velocidad local (variable) del sonido en el gas. Adimensionalice esta ecuación utilizando una longitud L de referencia y la velocidad del sonido a_0 a la entrada como magnitudes para definir las variables adimensionales.

P5.47 La ecuación diferencial que describe las vibraciones de pequeña amplitud $y(x, t)$ de una viga tiene la forma

$$\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

donde ρ = densidad del material de la viga
A = área de la sección
I = momento de inercia de la sección
E = módulo de Young

Utilice las cantidades ρ, E y A para adimensionalizar y, x y t, y escriba la ecuación diferencial en forma adimensional. ¿Quedan parámetros en la ecuación? ¿Podrían eliminarse manipulando las variables de forma apropiada?

P5.48 Una esfera lisa de acero (densidad relativa S = 7,86) está inmersa en una corriente de etanol a 20 °C que se mueve a 1,5 m/s. Estime su resistencia en N usando la Figura 5.3*a*. ¿Qué velocidad de la corriente sería necesaria para cuadruplicar la resistencia? Tome D = 2,5 cm.

P5.49 Se deja caer la esfera del Problema P5.48 en gasolina a 20 °C. Ignorando la fase de aceleración inicial, ¿cuál será la velocidad terminal (constante) de acuerdo con la Figura 5.3*a*?

P5.50 Cuando un microorganismo se desplaza en un fluido viscoso, la densidad del fluido tiene un efecto casi despreciable en la fuerza de resistencia que experimenta el microorganismo. Dichos flujos se denominan *flujos lentos*. Los únicos parámetros importantes del problema son la velocidad U de movimiento, la viscosidad μ del fluido y la escala de longitud del cuerpo. Aquí utilizaremos el diámetro d del cuerpo del microorganismo como escala de longitud. (*a*) Obtenga una expresión para la fuerza de resistencia D en función del resto de los parámetros del problema utilizando el Teorema Pi de Buckingham. (*b*) El coeficiente de resistencia definido en este capítulo $C_D = D/(\frac{1}{2}\rho U^2 A)$ no es apropiado para este tipo de flujos. Defina un coeficiente de resistencia más adecuado y llámelo C_{fl} (de flujo lento). (*c*) En el caso de un microorganismo esférico, el valor exacto de la resistencia se puede obtener a partir de las ecuaciones del movimiento de los flujos lentos. El resultado es $D = 3\pi\mu Ud$. Escriba las expresiones para los dos coeficientes de resistencia, C_{fl} y C_D, correspondientes al flujo lento alrededor de una esfera.

P5.51 Un barco arrastra una antena de sónar que se puede aproximar por un cilindro circular de 1 ft de diámetro y 30 ft de largo, sumergido en el agua y con su eje perpendicular a la dirección del movimiento. Si la velocidad del barco es de 12 nudos (1 nudo = 1,69 ft/s), estime la potencia necesaria para remolcar el cilindro. ¿Cuál sería la frecuencia de desprendimiento de los torbellinos del cilindro? Utilice las Figuras 5.2 y 5.3.

P5.52 Un cable telefónico de 1 in de diámetro tiene una frecuencia natural de vibración de 12 Hz. ¿A qué velocidad del viento en pies por segundo silbará el cable? En estas condiciones, ¿cuál será la resistencia media por unidad de longitud?

P5.53 El desprendimiento de torbellinos puede utilizarse para medir el caudal que fluye por un tubo (Figura 6.34). Un cuerpo romo perpendicular a la corriente genera torbellinos cuya frecuencia de desprendimiento es detectada por un sensor situado aguas abajo. Supongamos que el diámetro del tubo es de 5 cm y que el cuerpo romo es un cilindro de diámetro 8 mm. Si el sensor

www.elsolucionario.net

detecta 5400 pulsos por minuto, estime el caudal de agua en m³/h. ¿Cómo respondería el medidor si se usasen otros líquidos?

P5.54 Una red de pescar está hecha con cuerdas de 1 mm de diámetro anudadas en cuadrados de 2 × 2 cm. Estime la potencia necesaria para remolcar una red de 300 ft² de este tipo a una velocidad de 3 nudos en agua de mar a 20 °C. Suponga que el plano de la red es perpendicular a la corriente incidente.

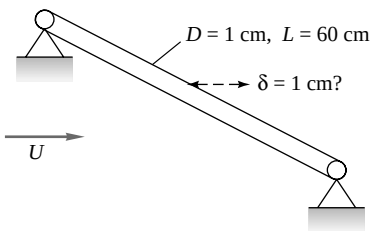
P5.55 La antena de un coche comienza a vibrar fuertemente a 8 Hz cuando el vehículo alcanza una velocidad de 45 mi/h circulando por una carretera llena de surcos, que pueden aproximarse por una curva sinusoidal de amplitud 2 cm y longitud de onda λ = 2,5 m. El diámetro de la antena es de 4 mm. ¿La vibración de la antena, se debe a la carretera o al desprendimiento de torbellinos?

P5.56 La fuerza de resistencia que actúa sobre un cilindro de sección cuadrada sometido a un flujo transversal es sensiblemente mayor a la que sufre un cilindro redondo de tamaño comparable. Los resultados de ensayar un cilindro cuadrado de lado b = 2 cm en un túnel hidrodinámico son los siguientes:

V, m/s	1,0	2,0	3,0	4,0
Resistencia, N/(m de profundidad)	21	85	191	335

(*a*) Utilice estos datos para predecir la fuerza por unidad de longitud que sufre una chimenea larga de sección cuadrada y lado b = 55 cm sometida a un viento transversal de 6 m/s, en aire a 20 °C. (*b*) ¿Presenta alguna incertidumbre esta estimación?

P5.57 La barra de acero al carbono 1040 simplemente apoyada de la Figura P5.57 está sometida a un flujo lateral de aire a 20 °C y 1 atm. ¿Cuál debe ser la velocidad de la corriente U para que el centro de la viga sufra una deflexión de 1 cm?



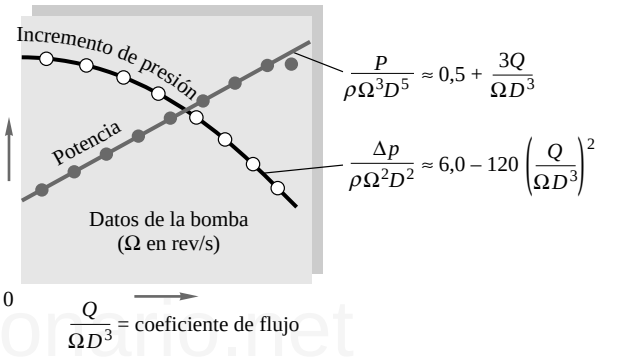
P5.57

P5.58 Consideremos de nuevo la barra de acero del Problema P5.57. ¿A qué velocidad de la corriente de aire U comenzará a vibrar la barra en resonancia con su primer modo de vibración (media onda senoidal)? *Consejo*: Consulte el apartado «Vibración lateral de una viga» en un libro de vibraciones [34].

P5.59 Modifique el Problema P5.55 como sigue. Si la antena es de acero, con L = 60 cm, y la velocidad del coche es de 45 mi/h, ¿cuál será el diámetro de la antena para el cual la frecuencia natural de vibración será igual a la frecuencia de desprendimiento de los torbellinos haciendo que la antena entre en resonancia?

P5.60 Queremos conocer la resistencia de un dirigible que se moverá en aire a 20 °C a 6 m/s. Se ensaya en agua a 20 °C un modelo a escala un treintavo: ¿cuál debe ser la velocidad del agua? A esta velocidad, si la resistencia del modelo en el agua es de 2700 N, ¿cuál será la resistencia del prototipo y la potencia que se necesitará para propulsarlo?

P5.61 Si se desprecia el efecto de la viscosidad, la Figura P5.61 muestra resultados típicos para el flujo en una bomba obtenidos del ensayo de un modelo con agua (véase el Ejemplo 5.3). El incremento de presión disminuye y la potencia necesaria aumenta al aumentar el coeficiente adimensional de flujo. Las expresiones analíticas se obtuvieron del ajuste de los datos experimentales. Supongamos que se construye una bomba similar de 12 cm de diámetro con el objeto de mover un caudal de 25 m³/h de gasolina a 20 °C. Si la velocidad de giro de la bomba es de 30 rev/s, determine (*a*) el incremento de presión y (*b*) la potencia necesaria.



P5.61

P5.62 Un prototipo de una bomba de agua tiene un impulsor de 2 ft de diámetro y está diseñada para bombear 12 ft³/s a 750 rpm. Se ensaya un modelo de 1 ft de diámetro en aire a 20 °C a 1800 rpm, resultando despreciables los efectos del número de Reynolds. En condiciones semejantes, ¿cuál será el caudal del modelo en ft³/s? Si el modelo consume una potencia de 0,082 hp, ¿qué potencia requerirá el prototipo?

***P5.63** La caída de presión por unidad de longitud $\Delta p/L$ en una tubería de paredes lisas es función exclusivamente de la velocidad media V, el diámetro D y las propiedades ρ y μ del fluido. Los siguientes datos corresponden al flujo de agua a 20 °C en una tubería de 8 cm de diámetro y 50 m de longitud:

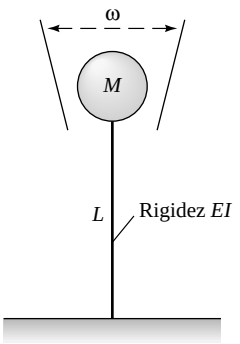
Q, m³/s	0,005	0,01	0,015	0,020
Δp, Pa	5800	20.300	42.100	70.800

Compruebe que estos datos se encuentran ligeramente fuera del rango de la Figura 5.10. Ajuste una curva a los datos anteriores usando una ley potencial. Utilice estos datos para estimar la caída de presión en una tubería lisa de 5 cm de diámetro y 200 m de largo por la que circula queroseno con un caudal de 50 m³/h.

P5.64 La frecuencia natural ω de vibración de una masa M situada en el extremo de una barra, como muestra la

www.elsolucionario.net

Figura P5.64, sólo depende de M y de la rigidez EI y la longitud L de la barra. Un ensayo con una masa de 2 kg situada en el extremo de una barra de acero al carbono 1040 de 12 mm de diámetro y 40 cm de largo proporciona una frecuencia natural de 0,9 Hz. Utilice estos datos para predecir la frecuencia natural de una masa de 1 kg situada en el extremo de una barra de aleación de aluminio 2024 del mismo tamaño.



P5.64

P5.65 La velocidad u de un fluido en movimiento turbulento muy cerca de una pared varía sólo con la distancia y a la pared, el esfuerzo en la pared τ_w y las propiedades ρ y μ del fluido. En el túnel aerodinámico de la Universidad de Rhode Island se obtuvieron los siguientes datos, correspondientes a una corriente de aire, ρ = 0,0023 slug/ft^3, $\mu = 3{,}81 \times 10^{-7}$ slug/(ft · s) y τ_w = 0,029 lbf/ft^2:

y, in	0,021	0,035	0,055	0,080	0,12	0,16
u, ft/s	50,6	54,2	57,6	59,7	63,5	65,9

(*a*) Represente la velocidad u adimensional en función de la distancia y adimensional, y obtenga una ley potencial que ajuste los datos apropiadamente. (*b*) Si se aumenta la velocidad del túnel hasta u = 90 ft/s en y = 0,11 in, estime el nuevo valor del esfuerzo en la pared, en lbf/ft^2.

P5.66 Cuando un torpedo se mueve a 8 m de profundidad en agua del mar (a 20 °C) se produce cavitación a una velocidad de 21 m/s, siendo la presión atmosférica de 101 kPa. Si los efectos de los números de Reynolds y Froude son despreciables, ¿a qué velocidad se producirá la cavitación cuando se mueva a una profundidad de 20 m? ¿A qué profundidad se evitaría la cavitación si la velocidad fuese de 30 m/s?

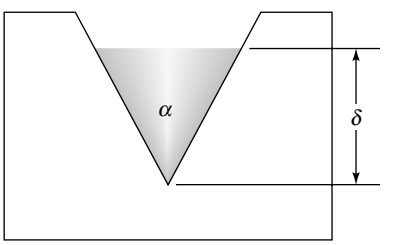
P5.67 Un estudiante necesita medir la resistencia de un prototipo de dimensión característica d_p que se mueve a una velocidad U_p en aire en condiciones atmosféricas estándar. Para ello construye un modelo de dimensión característica d_m, tal que el cociente d_p/d_m es un cierto factor f. Entonces mide la resistencia del modelo en condiciones dinámicamente semejantes (también en aire en condiciones atmosféricas estándar). El estudiante afirma que la resistencia del prototipo será idéntica a la del modelo. ¿Es correcta esta afirmación? Explíquelo.

P5.68 Consideremos el flujo alrededor de un objeto muy pequeño inmerso en un fluido viscoso. El análisis de las ecuaciones del movimiento pone de manifiesto que los términos convectivos son despreciables frente a los términos viscosos y de presión. En este tipo de flujos, denominados *flujos lentos*, la densidad del fluido desaparece de las ecuaciones. Los únicos parámetros importantes que aparecen en el problema son la velocidad U del movimiento, la viscosidad μ del fluido y la longitud característica del cuerpo. En el caso de cuerpos tridimensionales, como las esferas, el análisis de los flujos lentos proporciona muy buenos resultados. Sin embargo, los resultados son peores cuando el análisis se aplica a cuerpos bidimensionales, como un cilindro circular, pues aunque el diámetro sea muy pequeño la longitud del cilindro en la dirección perpendicular al papel es infinita cuando se considera un flujo bidimensional. Veamos si el análisis dimensional nos puede ayudar. (*a*) Usando el Teorema Pi de Buckingham, genere una expresión para la resistencia bidimensional $D_{2\text{-}D}$ en función de los demás parámetros del problema. Utilice el diámetro del cilindro d como longitud característica. Tenga en cuenta que la resistencia bidimensional tiene dimensiones de fuerza por unidad de longitud en lugar de unidades de fuerza sin más. (*b*) ¿Es el resultado físicamente verosímil? Si no es así, explique por qué. (*c*) Lo que ocurre es que en el análisis de los flujos lentos alrededor de cuerpos bidimensionales *no se puede* despreciar la densidad del fluido. Repita el análisis dimensional incluyendo ahora la densidad ρ como parámetro. Halle la relación adimensional entre los parámetros de este problema.

P5.69 Un dispositivo muy sencillo para medir el flujo de una corriente o un canal consiste en un vertedero triangular de ángulo α, como muestra la Figura P5.69. El caudal Q depende sólo de α, la aceleración de la gravedad g y la altura δ del nivel del agua sobre el vértice inferior del vertedero aguas arriba del mismo. Del ensayo de un dispositivo de este tipo, con ángulo α = 55°, se obtienen los siguientes resultados:

δ, cm	10	20	30	40
Q, m^3/s	8	47	126	263

(*a*) Halle una correlación adimensional para los datos. (*b*) Utilice los datos del modelo para predecir el flujo a través de un vertedero prototipo, también con ángulo α = 55°, cuando el nivel del agua δ es de 3,2 m.



P5.69

www.elsolucionario.net

P5.70 Un cuerpo con forma de diamante, de longitud característica 9 in, ensayado en un túnel aerodinámico en condiciones estándar a nivel del mar, presenta la siguiente resistencia:

V, ft/s	30	38	48	56	61
F, lbf	1,25	1,95	3,02	4,05	4,81

Utilice estos datos para predecir la resistencia de un cuerpo semejante de 15 in orientado de forma semejante que se mueve en agua a 20 °C con una velocidad de 2,2 m/s.

P5.71 La caída de presión en un medidor de caudal tipo venturi (Figura P3.165) sólo depende de la densidad del fluido, la velocidad del flujo aguas arriba de la contracción y la relación de diámetros del medidor. Se ensaya un modelo de un medidor tipo venturi en agua a 20 °C y se mide una caída de presión de 5 kPa cuando la velocidad del flujo aguas arriba es de 4 m/s. Se quiere utilizar un prototipo geométricamente semejante para medir un caudal de 9 m^3/min de gasolina a 20 °C. Si el prototipo está calibrado para funcionar con una caída de presión de 15 kPa, ¿cuál debe ser el diámetro del tubo aguas arriba de la contracción?

P5.72 Un modelo a escala un quinceavo de un paracaídas tiene una resistencia de 450 lbf cuando se ensaya en un túnel de agua a 20 ft/s. Si los efectos del número de Reynolds son despreciables, determine la velocidad límite de caída de una paracaidista que utiliza el prototipo a 5000 ft de altura estándar si ella y su equipo pesan 160 lbf. Considere despreciable el coeficiente de resistencia de la mujer.

P5.73 La potencia P generada por un cierto diseño de aerogenerador depende de su diámetro D, la densidad del aire ρ, la velocidad del viento V, la velocidad de giro Ω y el número de palas n. (*a*) Escriba esta relación en forma adimensional. Un modelo de 50 cm de diámetro del aerogenerador, que gira a 4800 rpm, desarrolla 2,7 kW a nivel del mar cuando V = 40 m/s. (*b*) ¿Qué potencia desarrollará un prototipo geométrica y dinámicamente semejante de 5 m de diámetro con vientos de 12 m/s a 2000 m de altura estándar? (*c*) ¿Cuál es la velocidad de giro apropiada para el prototipo?

P5.74 Un modelo a escala un décimo de un ala supersónica se ensaya a 700 m/s en una corriente de aire a 20 °C y 1 atm de presión, obteniéndose un momento de cabeceo de 0,25 kN · m. Si los efectos del número de Reynolds son despreciables, ¿cuál será el momento de cabeceo del prototipo volando al mismo número de Mach a una altura estándar de 8 km?

P5.75 Se diseña un avión para volar a 240 m/s a 10 km de altura estándar. Si se ensaya un modelo a escala un doceavo en un túnel aerodinámico presurizado a una temperatura de 20 °C, ¿cuál deberá ser la presión del túnel en atm para reproducir correctamente los números de Reynolds y de Mach?

***P5.76** Se ensaya el modelo de un barco de 2 ft de largo en un canal hidrodinámico de agua dulce. La resistencia total se descompone en resistencia de «fricción» (efecto del número de Reynolds) y resistencia de «onda» (efecto del número de Froude). Los datos del modelo son los siguientes:

Velocidad, ft/s	0,8	1,6	2,4	3,2	4,0	4,8
Resistencia de fricción, lbf	0,016	0,057	0,122	0,208	0,315	0,441
Resistencia de onda, lbf	0,002	0,021	0,083	0,253	0,509	0,597

El barco prototipo tiene 150 ft de largo. Estime la resistencia total a la velocidad de crucero de 15 nudos en agua del mar a 20 °C.

P5.77 Se ensaya un modelo a escala un treintavo de un vertedero conservando el número de Froude. La velocidad media del flujo en el modelo es de 0,6 m/s y el caudal de 0,05 m^3/s. ¿Cuál será la velocidad y el caudal en el prototipo? Si la fuerza medida en cierta parte del modelo es de 1,5 N, ¿cuál será la fuerza correspondiente en el prototipo?

P5.78 En un vertedero de 10 m de longitud la velocidad característica es de 3 m/s. Se construye un pequeño modelo conservando el número de Froude. ¿Cuál es la mínima relación de escala del modelo que garantiza que el número de Weber del modelo sea 100 como mínimo? En ambos casos el fluido es agua a 20 °C.

P5.79 En un estuario de la costa Este de EE.UU. la marea lunar semidiurna tiene un periodo de 12,42 h con unas corrientes de 80 cm/s aproximadamente. Si se construye un modelo a escala un quinientosavo en el que las mareas se simulan utilizando un sistema de bombeo y almacenaje, ¿cuál debe ser el período de las mareas del modelo y qué velocidades de las corrientes se pueden esperar?

P5.80 Se diseña un barco prototipo de 35 m de largo para navegar a una velocidad de crucero de 11 m/s (alrededor de 21 nudos). Para medir su resistencia se ensaya un modelo de 1 m de largo en un canal hidrodinámico. Suponiendo constante el número de Froude, determine (*a*) la velocidad del modelo, (*b*) el cociente entre la resistencia del prototipo y del modelo y (*c*) el cociente entre la potencia requerida por el prototipo y el modelo.

P5.81 Se diseña un avión de 55 m de longitud total para volar a 680 m/s a 8000 m de altura estándar. Si se ensaya un modelo a escala un treintavo en un túnel de viento presurizado que funciona con helio a 20 °C, ¿cuál debe ser la presión del túnel en atm? Incluso a estas (altas) presiones, no se consigue la semejanza dinámica exacta. ¿Por qué?

P5.82 Un barco prototipo tiene 400 ft de largo y una superficie mojada de 30.000 ft^2. Se ensaya un modelo a escala un ochentavo en un canal hidrodinámico, conservando el número de Froude, a las velocidades de 1,3, 2,0 y 2,7 nudos (1 nudo = 1,689 ft/s). La resistencia de fricción medida en el modelo a estas velocidades es de 0,11, 0,24 y 0,41 lbf, respectivamente. ¿A qué velocidades del prototipo corresponden? ¿Cuál es la resistencia de fricción del prototipo a estas velocidades si corregimos, por extrapolación, las diferencias en los números de Reynolds?

www.elsolucionario.net

P5.83 Un modelo a escala un cuarentavo de la hélice de un barco se ensaya en un canal hidrodinámico a 1200 rpm proporcionando una potencia de 1,4 ft · lbf/s. Conservando el número de Froude del modelo y el prototipo, ¿cuáles deberán ser las revoluciones por minuto y la potencia suministrada por el prototipo en condiciones de semejanza dinámica?

P5.84 Sobre los pilones de una plataforma petrolífera oceánica se espera encontrar corrientes de 150 cm/s y olas de 3 m de altura con un periodo de 12 s. Si se ensaya en un canal un modelo a escala un quinceavo, ¿cuáles deben ser, para el modelo, la velocidad de la corriente y la altura de las olas?

P5.85 Resuelva el Problema P5.49 usando la representación modificada para la resistencia de la esfera de la Figura 5.11.

P5.86 Resuelva el Problema P5.49 considerando que el fluido de trabajo es glicerina a 20 °C y usando la representación modificada para la resistencia de la esfera de la Figura 5.11.

P5.87 En el Problema P5.61 sería difícil obtener V, pues interviene en los tres grupos adimensionales que aparecen en el flujo en una bomba. Supongamos que en el Problema 5.61 desconocemos el valor de V pero conocemos los datos $D = 12$ cm y $Q = 25$ m^3/h. Sabiendo que el fluido de trabajo es gasolina a 20 °C, reescale los coeficientes, usando los datos del Problema P5.61, para obtener una representación de la potencia adimensional en función de la velocidad de giro adimensional. Utilice esta representación para hallar la máxima velocidad de giro V para la cual la potencia necesaria está por debajo de 300 W.

P5.88 Modifique el Problema P5.61 como sigue. Sean $V = 32$ rev/s y $Q = 24$ m^3/h la velocidad de giro y el caudal en una bomba geométricamente semejante. ¿Cuál es el diámetro máximo si la potencia no puede superar los 340 W? Resuelva este problema reescalando los datos de la Figura P5.61 para obtener una representación de la potencia adimensional en función del diámetro adimensional. Utilice esta representación para hallar directamente el diámetro deseado.

P5.89 Sabiendo que Ωp es proporcional a L, reescale los datos del Ejemplo 5.7 con el objeto de representar el valor adimensional de Ωp en función del diámetro adimensional. Utilice esta figura para hallar el diámetro requerido en el primer caso de la tabla de datos del Ejemplo 5.7 si queremos aumentar la caída de presión hasta 10 kPa manteniendo el mismo caudal, longitud y fluido de trabajo.

P5.90 Sabiendo que Ωp es proporcional a L, reescale los datos del Ejemplo 5.7 con el objeto de representar el valor adimensional de Ωp en función de la viscosidad adimensional. Utilice esta figura para hallar la viscosidad requerida en el primer caso de la tabla de datos del Ejemplo 5.7 si queremos aumentar la caída de presión hasta 10 kPa manteniendo el mismo caudal, longitud y fluido de trabajo.

P5.91 Represente el valor adimensional de Ωp en función de la viscosidad adimensional, como se describe en el Problema P5.90. Suponga que $L = 200$ m, $Q = 60$ m^3/h y que el fluido es queroseno a 20 °C. Utilice la figura para hallar el tamaño más pequeño que puede tener el tubo si queremos que la caída de presiones sea 220 kPa como máximo.

Problemas conceptuales

C5.1 En el 98 por 100 de las aplicaciones del análisis dimensional, el «factor de reducción» j, por el cual el número n de variables dimensionales se reduce a $n - j$ grupos adimensionales, es exactamente igual al número de dimensiones que aparecen en el problema (M, L, T, Q). Sólo en una ocasión (Ejemplo 5.5) no fue así. Explique en palabras por qué.

C5.2 Considere la siguiente ecuación: 1 billete de dólar Ξ 6 in. ¿Es esta relación dimensionalmente inconsistente? ¿Satisface el principio de homogeneidad dimensional? ¿Por qué?

C5.3 Al aplicar el análisis dimensional, ¿qué reglas se deben seguir para elegir las variables dimensionalmente independientes?

C5.4 En una edición anterior de este libro, el autor hacía la siguiente pregunta en el pie de la Figura 5.1: «¿Cuál de las tres figuras proporciona una representación más efectiva?» ¿Por qué carecía de sentido hacer dicha pregunta?

C5.5 En este capítulo se discute la dificultad de mantener constantes simultáneamente los números de Mach y de Reynolds (en un avión) y los números de Froude y de Reynolds (en un barco). Dé un ejemplo de un flujo donde podrían combinarse los efectos de los números de Mach y de Froude. ¿Habría problemas de escala manteniendo el fluido de trabajo?

C5.6 ¿Qué particularidad presentaría un modelo muy pequeño de un vertedero (Figura P5.32) que dificultaría la extrapolación de los datos del ensayo sobre el modelo al prototipo?

C5.7 ¿Qué más está estudiando este trimestre? Proponga un ejemplo de una ecuación o fórmula popular tomada de otro curso (termodinámica, resistencia de materiales, o similar) que no satisfaga el principio de homogeneidad dimensional. Explique qué es lo que está mal y si podría modificarse para escribirla en forma homogénea.

C5.8 Algunos centros universitarios (como la Universidad del Estado de Colorado) disponen de túneles de viento para flujos medioambientales que pueden utilizarse para estudiar fenómenos como el flujo del viento alrededor de edificios. ¿Qué detalles del escalado podrían ser importantes en dichos estudios?

C5.9 Si la relación de escala del modelo es $\alpha = L_m/L_p$, como en la Ecuación (5.31), y el número de Weber es importante, ¿qué relación debe existir entre la tensión superficial del modelo y del prototipo para que exista semejanza dinámica?

www.elsolucionario.net

C5.10 Para obtener el potencial de velocidades de un flujo incompresible de los analizados en el Capítulo 4 debemos resolver la ecuación $\nabla^2\phi = 0$, imponiendo los valores conocidos de $E\phi/En$ en el contorno. ¿Qué parámetros adimensionales gobiernan este tipo de movimientos?

Problemas del examen de fundamentos de ingeniería

FE5.1 Conocidos los parámetros (U, L, g, ρ, μ) que afectan a cierto flujo de un líquido, el cociente $V^2/(Lg)$ se denomina
(a) altura (o carga) de velocidad, (b) carga de Bernoulli, (c) número de Froude, (d) energía cinética, (e) energía de impacto

FE5.2 Un barco de 150 m de largo, diseñado para navegar a 18 nudos, se ensaya en un canal hidrodinámico usando un modelo de 3 m de largo. La velocidad apropiada del modelo es de
(a) 0,19 m/s, (b) 0,35 m/s, (c) 1,31 m/s, (d) 2,55 m/s, (e) 8,35 m/s

FE5.3 Un barco de 150 m de largo, diseñado para navegar a 18 nudos, se ensaya en un canal hidrodinámico usando un modelo de 3 m de largo. Si la resistencia de onda del modelo es de 2,2 N, el valor estimado de la resistencia de onda del barco a escala real es de
(a) 5500 N, (b) 8700 N, (c) 38.900 N, (d) 61.800 N, (e) 275.000 N

FE5.4 El flujo en un estuario está dominado por la marea lunar semidiurna, que tiene un periodo de 12,42 h. Si se ensaya un modelo a escala 1:500 del estuario, ¿cuál deberá ser el periodo de las mareas en el modelo?
(a) 4,0 s, (b) 1,5 min, (c) 17 min, (d) 33 min, (e) 64 min

FE5.5 Un balón de rugby, diseñado para ser lanzado a 60 mi/h en aire a nivel del mar ($\rho = 1{,}22$ kg/m^3, $\mu = 1{,}78 \times 10^{-5}$ N · s/m^2), se ensaya utilizando un modelo a escala un cuarto en un túnel de agua ($\rho = 998$ kg/m^3, $\mu = 0{,}0010$ N · s/m^2). ¿Cuál debe ser la velocidad del agua para que exista semejanza dinámica?
(a) 7,5 mi/h, (b) 15,0 mi/h, (c) 15,6 mi/h, (d) 16,5 mi/h, (e) 30 mi/h

FE5.6 Un balón de rugby, diseñado para ser lanzado a 60 mi/h en aire a nivel del mar ($\rho = 1{,}22$ kg/m^3, $\mu = 1{,}78 \times 10^{-5}$ N · s/m^2), se ensaya utilizando un modelo a escala un cuarto en un túnel de agua ($\rho = 998$ kg/m^3, $\mu = 0{,}0010$ N · s/m^2). ¿Cuál es el cociente entre las fuerzas en el prototipo y las fuerzas en el modelo?
(a) 3,86:1, (b) 16:1, (c) 32:1, (d) 56:1, (e) 64:1

FE5.7 Considérese el flujo de un líquido de densidad ρ, viscosidad μ y velocidad U sobre un modelo muy pequeño de un vertedero de longitud característica L, tal que los efectos de la tensión superficial del líquido Υ son importantes. En este caso el parámetro $\rho U^2L/\Upsilon$ es importante y recibe el nombre de
(a) altura capilar, (b) número de Froude, (c) número de Prandtl, (d) número de Weber, (e) número de Bond

FE5.8 Si una corriente que fluye con velocidad U alrededor de un cuerpo de longitud L produce una fuerza F sobre el cuerpo que sólo depende de U, L y de la viscosidad del fluido μ, entonces F debe ser proporcional a
(a) $\rho UL/\mu$, (b) ρU^2L^2, (c) $\mu U/L$, (d) μUL, (e) UL/μ

FE5.9 En ensayos en túneles de viento supersónicos, si se usan gases diferentes, la semejanza dinámica exige que el modelo y el prototipo tengan el mismo número de Mach e igual
(a) número de Euler, (b) velocidad del sonido, (c) entalpía de remanso, (d) número de Froude, (e) relación de calores específicos

FE5.10 El número de Reynolds de una esfera de 1 ft de diámetro que se mueve a 2,3 mi/h en agua del mar (densidad relativa 1,027, viscosidad $1{,}07 \times 10^{-3}$ N · s/m^2) es aproximadamente
(a) 300, (b) 3000, (c) 30.000, (d) 300.000, (e) 3.000.000

Problemas extensos

PE5.1 La estimación de la resistencia de fricción en un tubo es una de las tareas más habituales en la ingeniería de fluidos. En el caso del flujo turbulento en tuberías largas de pared rugosa, el esfuerzo en la pared τ_w es función de la densidad ρ, la viscosidad μ, la velocidad media V, el diámetro de la tubería d y el tamaño de la rugosidad ε. Así, en forma funcional, podemos escribir $\tau_w = f(\rho, \mu, V, d, \varepsilon)$. ($a$) Usando el análisis dimensional, escriba esta función en forma adimensional. (b) Una cierta tubería tiene $d = 5$ cm y $\varepsilon = 0{,}25$ mm. Cuando fluye agua a 20 °C, las medidas experimentales proporcionan los siguientes valores del esfuerzo en la pared:

Q, gal/min	1,5	3,0	6,0	9,0	12,0	14,0
τ_w, Pa	0,05	0,18	0,37	0,64	0,86	1,25

Represente estos datos usando la expresión adimensional obtenida en el apartado (a) y proponga una fórmula de ajuste. ¿Muestra la figura la relación funcional del apartado (a) por completo?

PE5.2 Cuando el fluido que sale por una tobera, como muestra la Figura P3.49, es un gas en lugar de agua, los efectos de compresibilidad pueden ser importantes, especialmente si la presión aguas arriba p_1 es alta y el

www.elsolucionario.net

diámetro de salida d_2 es pequeño. En este caso, la diferencia $p_1 - p_2$ deja de ser un parámetro determinante, y el flujo másico m alcanza un valor máximo que depende de p_1 y d_2 así como de la temperatura absoluta de la corriente aguas arriba T_1 y la constante del gas R. Así, en forma funcional, $\dot{m} = f(p_1, d_2, T_1, R)$. (*a*) Usando el análisis dimensional, escriba esta función en forma adimensional. (*b*) Una cierta tubería tiene un diámetro de $d_2 = 1$ mm. Para el flujo de aire, las medidas proporcionan los siguientes valores del flujo másico a través de la tobera:

T_1, K	300	300	300	500	800
p_1, kPa	200	250	300	300	300
m, kg/s	0,037	0,046	0,055	0,043	0,034

Represente estos datos usando la expresión adimensional obtenida en el apartado (*a*). ¿Muestra la figura la relación funcional del apartado (*a*) por completo?

PE5.3 Consideremos el problema del flujo completamente desarrollado en una película de aceite vertical que escurre por una placa (véase Figura P4.80) como un ejercicio de análisis dimensional. Supongamos que la velocidad vertical es función exclusivamente de la distancia a la placa, las propiedades del fluido, la gravedad y el espesor de la película. Esto es, $w = f(x, \rho, \mu, g, \delta)$. (*a*) Utilice el teorema pi para escribir esta función en forma adimensional. (*b*) Verifique que la solución exacta del Problema P4.80 es consistente con el resultado del apartado (*a*).

PE5.4 El modelo 4013 de bomba centrífuga de Taco Inc. tiene un impulsor de diámetro $D = 12{,}95$ in. Cuando bombea agua a 20 °C a $\Omega = 1160$ rpm, los valores experimentales del caudal Q y del incremento de presión Δp dados por el fabricante son los siguientes:

Q, gal/min	200	300	400	500	600	700
Δp, lb/in^2	36	35	34	32	29	23

(*a*) Suponiendo que $\Delta p = f(\rho, Q, D, \Omega)$, utilice el teorema pi para escribir esta función en forma adimensional y use el resultado para representar los datos en forma adimensional. (*b*) Se quiere utilizar la misma bomba para bombear un caudal de 400 gal/min de gasolina a 20 °C a 900 rpm. De acuerdo con la correlación adimensional obtenida más arriba, ¿qué incremento de presión Δp cabe esperar, en lbf/in^2?

PE5.5 ¿Pueden las vibraciones de la antena de radio de un automóvil entrar en resonancia debido al desprendimiento de torbellinos? Considérese una antena de longitud L y diámetro D. De acuerdo con la teoría de vibraciones de vigas (véase Kelly [34], pág. 401), la frecuencia natural del primer modo de vibración de una viga cilíndrica circular empotrada es $\omega_n = 3{,}516[EI/(\rho AL^4)]^{1/2}$, donde E es el módulo de elasticidad, I es el momento de inercia de la sección, ρ es la densidad del material de la viga y A es el área de la sección. (*a*) Demuestre que ω_n es proporcional al radio de la antena R. (*b*) Si la antena es de acero, con $L = 60$ cm y $D = 4$ mm, estime la frecuencia natural de vibración, en Hz. (*c*) Compare esta frecuencia con la frecuencia de desprendimiento de los torbellinos cuando el coche se mueve a 65 mi/h.

Proyectos de diseño

D5.1 Nos proporcionan los siguientes datos experimentales, obtenidos por el profesor Robert Kirchhoff y sus estudiantes en la Universidad de Massachusetts, relativos a la velocidad de giro de un anemómetro de dos copas. El anemómetro se construyó usando dos bolas de ping-pong ($d = 1{,}5$ in) partidas por la mitad y orientadas en direcciones opuestas, pegadas a una barra delgada ($\frac{1}{4}$ in) fijada a su vez a un eje central. (Véase el diagrama de la Figura P7.91.) Se utilizaron cuatro barras, de longitudes $l = 0{,}212$, 0,322, 0,458 y 0,574 ft. Los datos experimentales, correspondientes a una velocidad del viento U y una velocidad de rotación Ω, son los siguientes:

$l = 0{,}212$		$l = 0{,}322$		$l = 0{,}458$		$l = 0{,}574$	
U, ft/s	**Ω, rpm**	**U, ft/s**	**Ω, rpm**	**U, ft/s**	**Ω, rpm**	**U, ft/s**	**Ω, rpm**
18,95	435	18,95	225	21,10	140	23,21	115
22,20	545	23,19	290	26,77	215	27,60	145
25,90	650	29,15	370	31,37	260	32,07	175
29,94	760	32,79	425	36,05	295	36,05	195
28,45	970	38,45	495	39,03	327	39,60	215

Suponga que la velocidad angular V del aparato es función de la velocidad U del viento, la densidad y viscosidad ρ y μ del aire, la longitud l de la barra y el diámetro d de la copa. Suponga que en todos los casos el aire está a 1 atm y 20 °C. Defina los grupos adimensionales apropiados para este problema y represente los datos en forma adimensional. Comente la posible incertidumbre de los resultados.

Como una aplicación de diseño, suponga que queremos usar la geometría de este anemómetro para construir un anemómetro de gran tamaño ($d = 30$ cm) para medir el viento en un aeropuerto. Si la velocidad del viento alcanza los 25 m/s y queremos que la velocidad de rotación sea en media de $V = 120$ rpm, ¿cuál debería ser la longitud de la barra? ¿Qué posibles limitaciones presenta este diseño? Calcule la velocidad de rotación Ω (en rpm) cuando la velocidad del viento varía entre 0 y 25 m/s.

D5.2 Al igual que ocurre con la resistencia de los cilindros (véase la Figura 5.3*b*), la rugosidad superficial también tiene fuertes efectos en la resistencia de una esfera, al menos en el rango de números de Reynolds $4 \times 10^4 < \mathrm{Re}_D < 3 \times 10^5$. Por esta razón, los hoyuelos

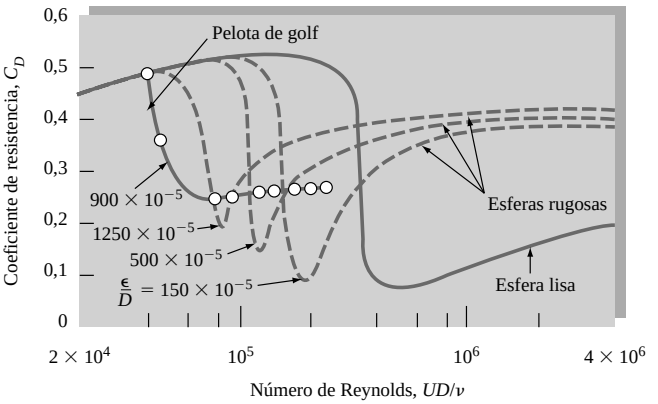
www.elsolucionario.net

de las bolas de golf permiten conseguir golpes más largos. En la Figura D5.2 se muestran algunos datos experimentales correspondientes a esferas rugosas [33] junto con datos característicos de las pelotas de golf. Se puede ver que las esferas rugosas ofrecen menos resistencia que las pelotas de golf en algunas regiones. En el presente estudio despreciaremos el efecto del *giro* de la pelota, que origina fuerzas laterales importantes, lo que se conoce como *efecto Magnus* (véase Figura 8.11), suponiendo que la bola se golpea sin efecto y que verifica las ecuaciones del movimiento correspondientes al movimiento plano (x, z):

$$m\ddot{x} = \Phi F \cos \aleph \quad m\ddot{z} = \Phi F \operatorname{sen} \aleph \Phi W$$

donde $$F = C_D \frac{\Leftarrow \Theta}{2} \frac{}{4} D^2(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \qquad \aleph = \operatorname{tg}^{\Phi 1} \frac{\dot{z}}{\dot{x}}$$

La pelota, cuya curva $C_D(\mathrm{Re}_D)$ se muestra en la Figura D5.2, es golpeada con velocidad inicial V_0 y ángulo θ_0. El peso medio de una pelota de golf es de 46 g y su diámetro de 4,3 cm. Suponiendo que se trata de aire a nivel del mar y tomando un rango modesto pero finito de condiciones iniciales, integre las ecuaciones del movimiento y compare la trayectoria de una «esfera rugosa» con la de una pelota de golf. ¿Puede llegar más lejos una esfera rugosa que una pelota de golf en alguna condición? ¿En qué se diferencia el efecto de la rugosidad entre el golpe blando de un aficionado y un golpe de, digamos, Tiger Woods?



D5.2

Referencias

1. E. Buckingham, «On Physically Similar Systems: Illustrations of the Use of Dimensional Equations», *Phys. Rev.*, vol. 4, núm. 4, 1914, págs. 345-376.
2. J. D. Anderson, *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*, McGraw-Hill, Nueva York, 1995.
3. P. W. Bridgman, *Dimensional Analysis*, Yale University Press, New Haven, CT, 1922, ed. revisada, 1931.
4. H. L. Langhaar, *Dimensional Analysis and the Theory of Models*, Wiley, Nueva York, 1951.
5. E. C. Ipsen, *Units, Dimensions, and Dimensionless Numbers*, McGraw-Hill, Nueva York, 1960.
6. S. J. Kline, *Similitude and Approximation Theory*, McGraw-Hill, Nueva York, 1965.
7. E. S. Taylor, *Dimensional Analysis for Engineers*, Clarendon Press, Oxford, Reino Unido, 1974.
8. G. I. Barenblatt, *Dimensional Analysis*, Gordon and Breach, Nueva York, 1987.
9. L. I. Sedov y A. G. Volkovets, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.
10. T. Szirtes y P. Rozsa, *Applied Dimensional Analysis and Modeling*, McGraw-Hill, Nueva York, 1997.
11. R. Esnault-Pelterie, *Dimensional Analysis and Metrology*, F. Rouge, Lausana, Suiza, 1950.
12. R. Kurth, *Dimensional Analysis and Group Theory in Astrophysics*, Pergamon, Nueva York, 1972.
13. F. J. de-Jong, *Dimensional Analysis for Economists*, North Holland, Amsterdam, 1967.
14. R. Nakon, *Chemical Problem Solving Using Dimensional Analysis*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1990.
15. D. R. Maidment (ed.), *Hydrologic and Hydraulic Modeling Support: With Geographic Information Systems*, Environmental Systems Research Institute, Redlands, CA, 2000.
16. A. M. Curren y L. D. Munday, *Dimensional Analysis for Meds*, 2.ª ed., Delmar Thomson Learning, Albany, NY, 1998.
17. G. P. Craig, *Clinical Calculations Made Easy: Solving Problems Using Dimensional Analysis*, Lippincott Williams and Wilkins, Baltimore, MD, 2001.
18. M. Zlokarnik, *Dimensional Analysis and Scale-Up in Chemical Engineering*, Springer-Verlag, Nueva York, 1991.
19. W. G. Jacoby, *Data Theory and Dimensional Analysis*, Sage, Newbury Park, CA, 1991.
20. B. Schepartz, *Dimensional Analysis in the Biomedical Sciences*, Thomas, Springfield, IL, 1980.
21. A. J. Smith, *Dosage and Solution Calculations: The Dimensional Analysis Way*, Mosby, St. Louis, MO, 1989.
22. J. B. Bassingthwaighte et al., *Fractal Physiology*, Oxford Univ. Press, Nueva York, 1994.
23. K. J. Niklas, *Plant Allometry: The Scaling of Form and Process*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1994.
24. «*Flow of Fluids through Valves, Fittings, and Pipes*», Crane Valve Group, Long Beach, CA, 1957 (actualizado en forma de CDROM; véase <http://www.cranevalves.com>).
25. A. Roshko, «On the Development of Turbulent Wakes from Vortex Streets», *NACA Rep.* 1191, 1954.
26. G. W. Jones, Jr., «Unsteady Lift Forces Generated by Vortex Shedding about a Large, Stationary, Oscillating Cylinder at High Reynolds Numbers», *ASME Symp. Unsteady Flow*, 1968.
27. O. M. Griffin y S. E. Ramberg, «The Vortex Street Wakes of Vibrating Cylinders», *J. Fluid Mech.*, vol. 66, 1974, págs. 553-576.
28. *Encyclopedia of Science and Technology*, 8.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1997.

www.elsolucionario.net

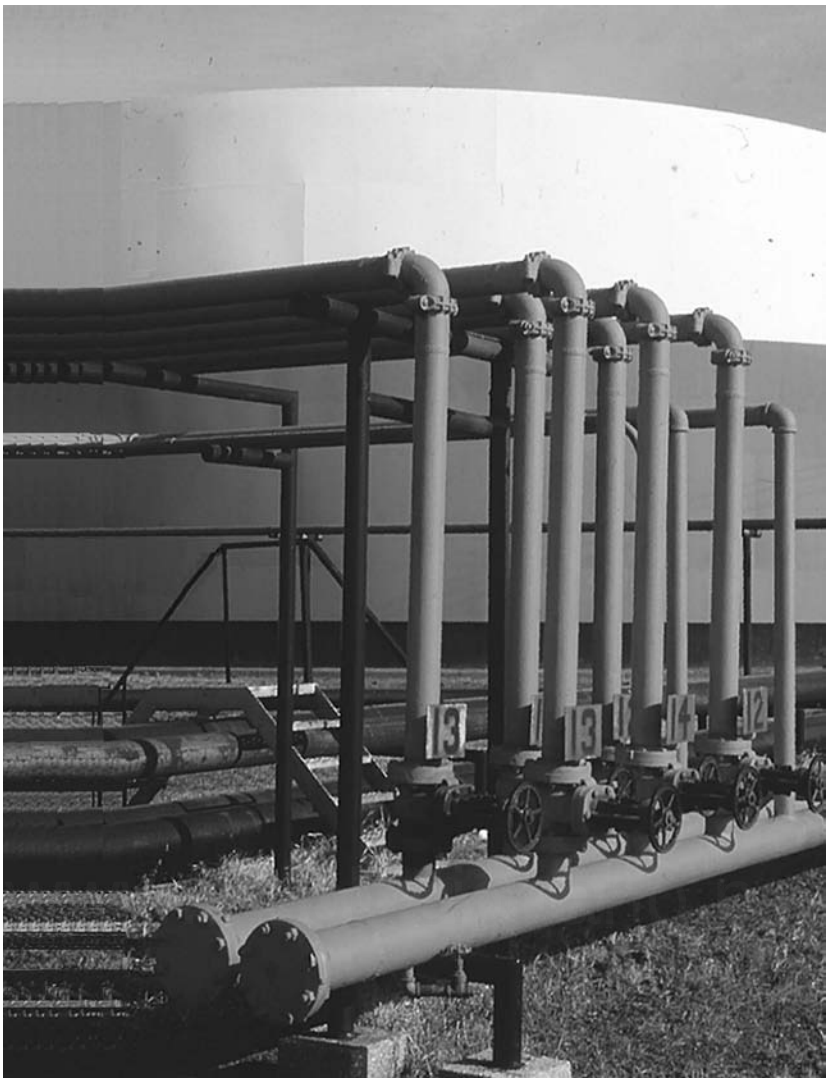
29. H. A. Becker, *Dimensionless Parameters*, Halstead Press (Wiley), Nueva York, 1976.
30. M. S. Yalin, *Theory of Hydraulic Models*, Macmillan, Londres, 1971.
31. J. J. Sharp, *Hydraulic Modeling*, Butterworth, Londres, 1981.
32. R. Ettema, *Hydraulic Modeling: Concepts and Practice*, American Society of Civil Engineers, Reston, VA, 2000.
33. R. D. Blevins, *Applied Fluid Dynamics Handbook*, van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1984.
34. S. G. Kelly, *Fundamentals of Mechanical Vibration*, McGraw-Hill, Nueva York, 1993.
35. B. Chaouat, «Simulations of Channel Flows with Effects of Spanwise Rotation or Wall Injection Using a Reynolds Stress Model», *Journal of Fluids Engineering*, vol. 123, marzo 2001, págs. 2-10.
36. D. J. Schuring, *Scale Models in Engineering*, Pergamon Press, Nueva York, 1977.
37. L. J. Fingersh, «Unsteady Aerodynamics Experiment», *Journal of Solar Energy Engineering*, vol. 123, nov. 2001, pág. 267.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Sistema de tuberías de vapor en una planta geotérmica. Los flujos en tuberías se encuentran en todas partes, a menudo formando conjuntos de grupos o redes. Estas redes se diseñan empleando los principios fundamentales presentados en este capítulo. (*Cortesía del Dr. E. R. Degginger/Color-Pic Inc.*)

www.elsolucionario.net

Capítulo 6
Flujo viscoso en conductos

Motivación. Este capítulo está dedicado por completo a un problema práctico importante de la ingeniería de fluidos: el flujo en conductos con distintas velocidades, distintos fluidos y distintas geometrías. Los sistemas de tuberías se encuentran en casi cualquier diseño ingenieril y por eso han sido estudiados extensamente. En este tema hay muy poca teoría y una enorme cantidad de experimentación.

El problema básico del diseño de tuberías es éste: dada la geometría de la tubería y de los componentes adicionales (como accesorios, válvulas, codos y difusores), más el caudal de diseño y las propiedades del fluido, ¿qué diferencia de presiones se necesita para producir el flujo? Por supuesto, puede enunciarse de una forma alternativa: dada la diferencia de presiones que proporciona una bomba, ¿qué caudal se puede conseguir? Las correlaciones presentadas en este capítulo son adecuadas para resolver la mayoría de estos problemas.

6.1. REGÍMENES EN FUNCIÓN DEL NÚMERO DE REYNOLDS

Ahora que ya hemos obtenido y estudiado las ecuaciones básicas en el Capítulo 4, se podría pensar en la exhibición de una miríada de soluciones elegantes que ilustrasen el abanico de comportamientos de los fluidos, expresando, por supuesto, todos estos edificantes resultados en forma adimensional mediante la nueva herramienta del Capítulo 5, el análisis dimensional.

El hecho es que aún no existe un análisis general del movimiento de los fluidos. Hay varias docenas de soluciones particulares conocidas, hay muchas soluciones aproximadas obtenidas con ordenador, y hay una gran cantidad de datos experimentales. También se dispone de teoría adecuada para el caso en que se desprecien los efectos de viscosidad y compresibilidad (Capítulo 8), pero no hay una teoría general y quizá no la haya nunca. La razón es que a moderados números de Reynolds se produce un cambio profundo y complicado en el comportamiento de los flujos. El movimiento deja de ser suave y ordenado (*laminar*) y se convierte en fluctuante y agitado (*turbulento*). Este proceso de cambio se denomina *transición* hacia la turbulencia. En la Figura 5.3*a* veíamos que la transición en un cilindro o en una esfera ocurre a números de Reynolds en torno a $Re = 3 \times 10^5$, en que aparece una caída brusca de la resistencia. En la transición influyen muchos efectos, por ejemplo, la rugosidad de la pared (Figura 5.3*b*) o las fluctuaciones en la corriente libre, pero el parámetro básico es el número de Reynolds. Hay muy poca teoría y muchos datos experimentales sobre la transición [1 a 3].

La turbulencia puede ser detectada con medidas mediante un instrumento muy pequeño y sensible, como un anemómetro de hilo caliente (Figura 6.29*e*) o con un transductor de presión piezoeléctrico. El flujo parece estacionario en media, pero muestra fluctuaciones rápidas y aleatorias cuando la turbulencia está presente, como indica la Figura 6.1. Si el flujo es laminar, puede haber perturbaciones naturales ocasionales que se amortiguan rápidamente (Figura 6.1*a*). Cuando se inicia la transición aparecen eclosiones de fluctuaciones turbulentas (Figura 6.1*b*) a medida que aumenta el número de Reynolds, debido a la inestabilidad del movimiento laminar. A Re suficientemente altos el flujo fluctúa permanentemente (Figura 6.1*c*) y se denomina *totalmente turbulento*. Las fluctuaciones, con valores típicos entre el 1 y el 20 por 100 de la velocidad media, no son estrictamente periódicas, sino aleatorias y distribuidas en un rango continuo, o espectro, de frecuencias. En un túnel aerodinámico típico a altos números de Reynolds, el rango de frecuencias va de 1 a 10.000 Hz, y el de longitudes de onda de 0,01 a 400 cm.

www.elsolucionario.net

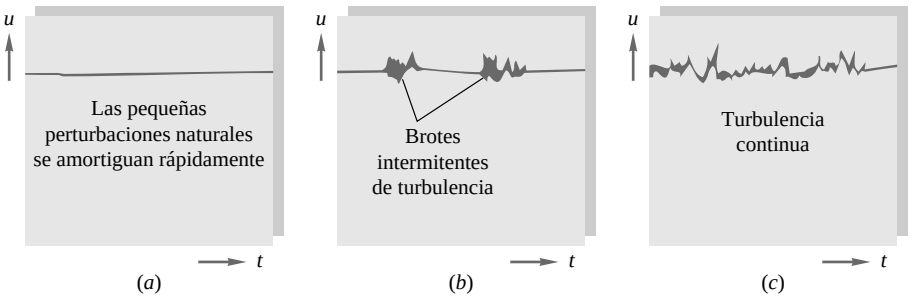


Figura 6.1. Los tres regímenes del flujo viscoso: (*a*) laminar a bajos Re; (*b*) transición a Re intermedios; (*c*) turbulento a altos Re.

EJEMPLO 6.1

El número de Reynolds de transición para el flujo en una tubería circular es $\mathrm{Re}_{d,\mathrm{crit}} \approx 2300$. Para el flujo a través de una tubería de 5 cm de diámetro, ¿a qué velocidad se producirá la transición si el fluido es (*a*) aire y (*b*) agua, ambos a 20 °C?

Solución

Casi todas las fórmulas para el flujo en conductos están basadas en la velocidad *media* $V = Q/A$, no en la velocidad en el centro o en cualquier otro punto. Por lo tanto, la transición se produce a $\rho Vd/\mu \approx 2300$. Conocido d, introducimos los valores de las propiedades de los fluidos a 20 °C de las Tablas A.3 y A.4:

(*a*) Aire:
$$\frac{\rho Vd}{\mu} = \frac{(1{,}205\ \mathrm{kg/m^3})V(0{,}05\ \mathrm{m})}{1{,}80\times10^{-5}\ \mathrm{kg/(m\cdot s)}} = 2300 \quad \text{o} \quad V \approx 0{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(*a*) Agua:
$$\frac{\rho Vd}{\mu} = \frac{(998\ \mathrm{kg/m^3})V(0{,}05\ \mathrm{m})}{0{,}001\ \mathrm{kg/(m\cdot s)}} = 2300 \quad \text{o} \quad V \approx 0{,}046\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Estas velocidades son bajas, por lo que la mayoría de los problemas ingenieriles con agua o aire serán turbulentos en vez de laminares. Podemos esperar flujos laminares en conductos con fluidos más viscosos, tales como aceites lubricantes o glicerina.

En los flujos con superficie libre la turbulencia puede observarse directamente. La Figura 6.2 muestra un chorro de agua a la salida de un tubo. A bajo número de Reynolds (Figura 6.2*a*) es suave y laminar, y el flujo rápido del centro y el flujo lento de las paredes forman dos trayectorias distintas unidas por una película de fluido. A alto número de Reynolds (Figura 6.2*b*) es no estacionario, irregular y turbulento, pero cuando se promedia en el tiempo resulta estacionario y predecible.

¿Cómo se formó la turbulencia en el interior del conducto? El perfil laminar parabólico, que es similar al de la Ecuación (4.146), se hace inestable y, a $\mathrm{Re}_d \approx 2300$, se comienzan a formar «rachas» o «ráfagas» turbulentas de gran intensidad. Una ráfaga tiene una parte delantera que se mueve con mayor velocidad y una parte posterior más lenta, y puede visualizarse mediante experimentos en tubos de cristal. La Figura 6.3 muestra una ráfaga fotografiada por Bandyopadhyay [45]. Cerca de la entrada (Figuras 6.3*a* y *b*) hay una entrefase irregular que separa el flujo laminar y el turbulento, y se pueden observar torbellinos enrollándose. Aguas abajo (Figura 6.3*c*) la ráfaga se hace totalmente turbulenta y activa, y se observan movimientos helicoidales. Lejos aguas abajo (Figura 6.3*d*) la ráfaga tiene forma de cono y es menos activa, con una superficie de separación mal definida. En ocasiones esto se denomina «relaminarización».

Una descripción completa de los aspectos estadísticos de la turbulencia se puede hallar en la Referencia 1, mientras que la teoría y los datos de los efectos de la transición están en las Referencias 2 y 3. En este nivel de introducción destacaremos simplemente que el parámetro primario que afecta a la transición es el número de Reynolds. Si $\mathrm{Re} = UL/\nu$, donde U es la velocidad media y L es la «anchura»,

www.elsolucionario.net

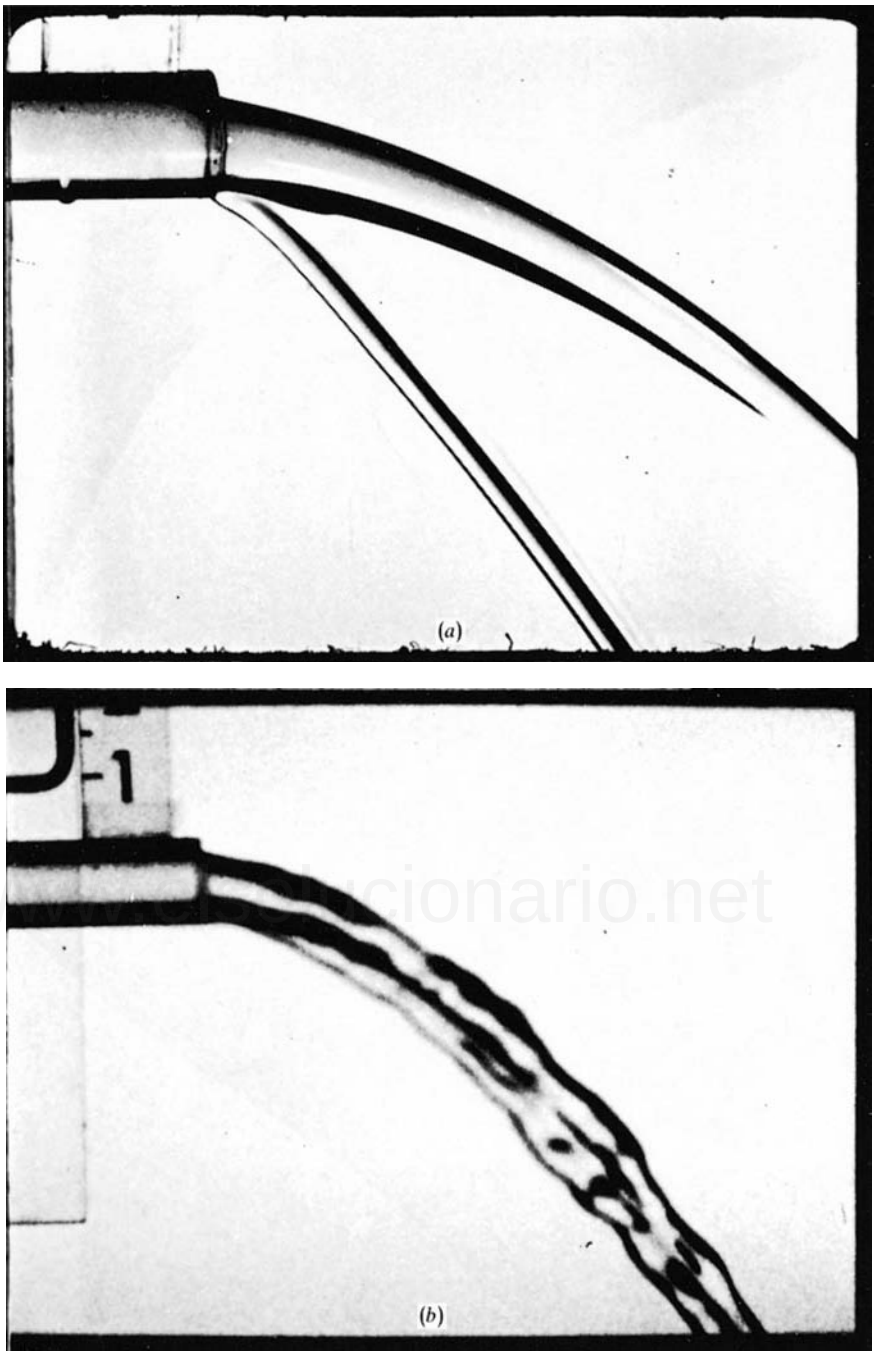


Figura 6.2. Flujo saliendo a velocidad constante de una tubería: (*a*) viscosidad alta, bajo número de Reynolds, flujo laminar; (*b*) viscosidad baja, número de Reynolds elevado, flujo turbulento. (*National Committee for Fluid Mechanics Films, Education Development Center, Inc., © 1972.*)

o longitud característica transversal, de la capa de cortadura, podemos encontrar los siguientes comportamientos:

$0 < Re < 1$: movimiento laminar «lento» altamente viscoso
$1 < Re < 100$: laminar, fuerte dependencia del número de Reynolds
$100 < Re < 10^3$: laminar, es útil la teoría de capa límite
$10^3 < Re < 10^4$: transición a la turbulencia
$10^4 < Re < 10^6$: turbulento, moderada dependencia del número de Reynolds
$10^6 < Re < \div$: turbulento, débil dependencia del número de Reynolds

www.elsolucionario.net

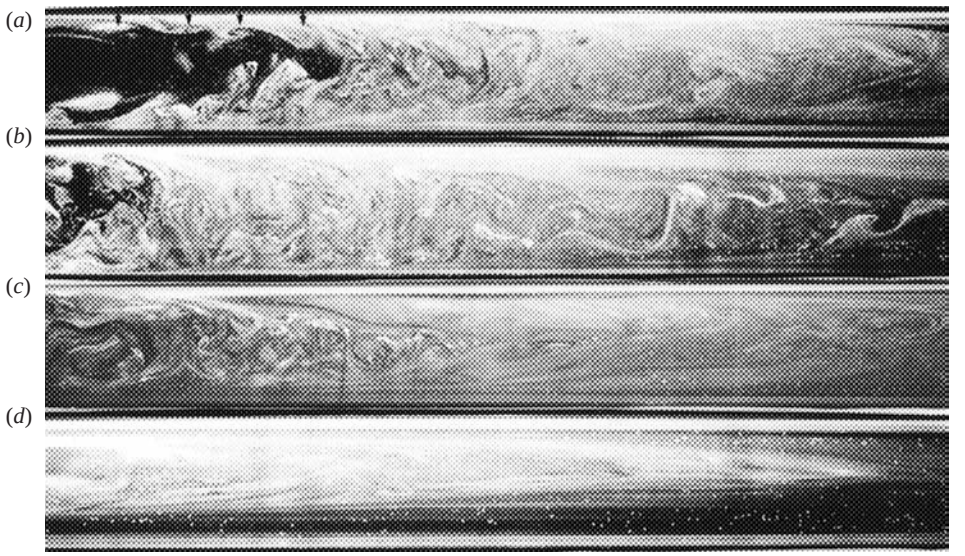


Figura 6.3. Formación de una ráfaga turbulenta en un flujo en un tubo: (*a*) y (*b*) cerca de la entrada; (*c*) un poco aguas abajo; (*d*) lejos aguas abajo. (*Cortesía de Cambridge University Press – P.R. Bandyopadhyay*, «Aspects of the Equilibrium Puff in Transitional Pipe Flow», *Journal of Fluid Mechanics, vol. 163, 1986, págs. 439-458.*)

Estos son rangos indicativos que pueden variar con la geometría del flujo, la rugosidad de la superficie y los niveles de fluctuación de la corriente a la entrada. La mayoría de nuestros análisis versarán sobre flujos laminares o turbulentos, pues normalmente no se deberían diseñar flujos que operen en la región de transición.

Perspectiva histórica

www.elsolucionario.net

Como el movimiento turbulento es más común que el laminar, los experimentalistas han observado la turbulencia durante siglos, aunque sin percibir sus detalles. Antes de 1930 los instrumentos de medida eran muy poco sensibles y no recogían las fluctuaciones rápidas, y los científicos sólo medían valores medios de velocidad, presión, fuerza, etc. Pero la turbulencia puede variar estos valores medios drásticamente, como ocurre, por ejemplo, con la caída brusca del coeficiente de resistencia de la Figura 5.3. En 1839 un ingeniero alemán, G. H. L. Hagen, indicó por primera vez la existencia de *dos* regímenes de flujo viscoso. Midió la caída de presión en un flujo de agua en tubos largos de latón y dedujo la ley

$$\Delta p = (\text{cte})\frac{LQ}{R^4} + \text{efectos de la entrada} \tag{6.1}$$

Ésta es exactamente la ley de semejanza del Ejemplo 5.4, pero Hagen no se dio cuenta de que la constante era proporcional a la viscosidad del fluido.

La ley dejaba de ser válida cuando Q pasaba por encima de cierto límite, esto es, al sobrepasar el número de Reynolds crítico, y Hagen señalaba en su trabajo que debía haber un segundo modo de flujo caracterizado por «fuertes movimientos de agua en los cuales Δp varía como la segunda potencia del caudal...». Admitía que no podía clarificar las razones del cambio.

Un ejemplo típico de los datos de Hagen se muestra en la Figura 6.4. La presión varía linealmente con $V = Q/A$ hasta 1,1 ft/s (0,34 m/s), punto en el que hay un cambio brusco. Para valores de aproximadamente V = 2,2 ft/s (0,67 m/s), la diferencia de presiones varía casi cuadráticamente con V. La expresión real $\Delta p \propto V^{1,75}$ parece imposible sobre la base del análisis dimensional, pero se obtiene fácilmente cuando se analizan los datos adimensionales de flujo en tuberías (Figura 5.10).

En 1883 Osborne Reynolds, un profesor de ingeniería británico, demostró que el cambio dependía del parámetro $\rho Vd/\mu$, ahora denominado número de Reynolds en su honor. Introduciendo un hilo de tinta en el flujo, Reynolds observó la transición y la turbulencia. Sus esquemas sobre el comportamiento del flujo [4] se muestran en la Figura 6.5.

www.elsolucionario.net

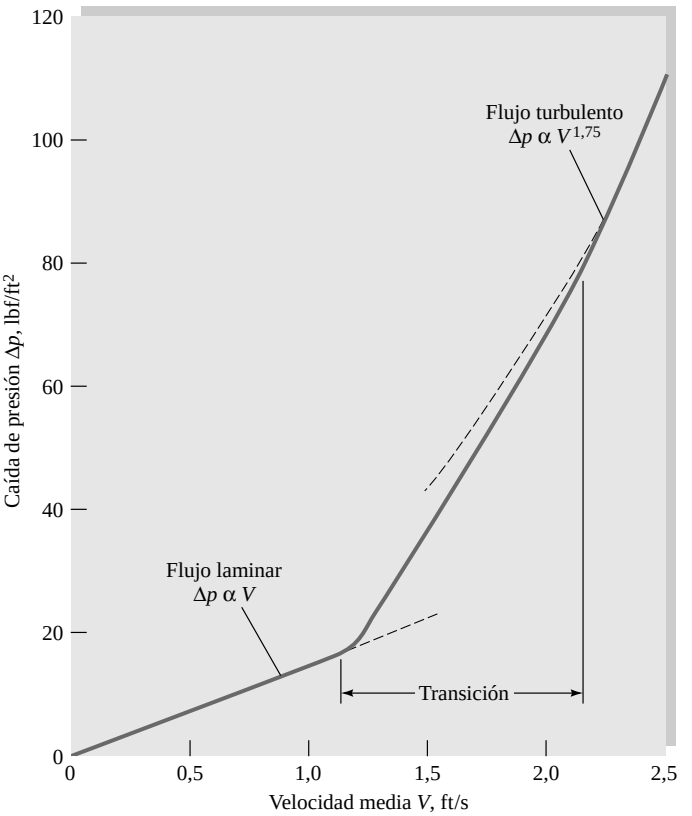


Figura 6.4. Evidencia experimental de la transición en un flujo de agua por un tubo liso de $\frac{1}{4}$ in de diámetro y 10 ft de largo.

www.elsolucionario.net

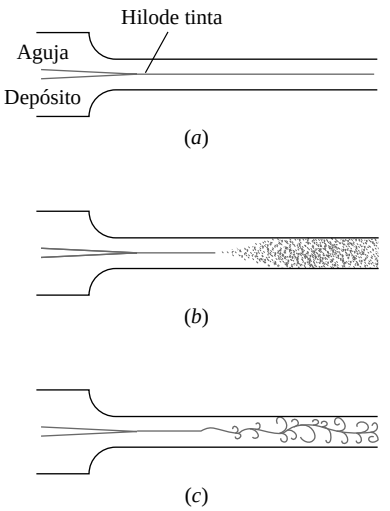


Figura 6.5. Esquemas de Reynolds sobre la transición en tubos: (*a*) baja velocidad, movimiento laminar; (*b*) alta velocidad, movimiento turbulento; (*c*) fotografia instantánea del flujo en la condición (*b*). (*De la Referencia 4.*)

Si examinamos los datos de Hagen y calculamos el número de Reynolds para $V = 1{,}1$ ft/s = 0,34 m/s, obtenemos $\mathrm{Re}_d = 2100$. El flujo se hacía completamente turbulento para $V = 2{,}2$ ft/s = 0,67 m/s, a $\mathrm{Re}_d = 4200$. El valor de diseño aceptado para transición en tubos es

$$\mathrm{Re}_{d,\mathrm{crít}} \Xi 2300 \tag{6.2}$$

www.elsolucionario.net

Este valor es fiable para tubos comerciales (Figura 6.13), aunque teniendo especial cuidado en redondear la entrada, poner paredes lisas, y con la corriente de entrada libre de perturbaciones, el $\mathrm{Re}_{d,\mathrm{crít}}$ puede llevarse a valores muy superiores.

La transición también acontece en el flujo alrededor de cuerpos como la esfera y el cilindro de la Figura 5.3. Ludwig Prandtl, profesor alemán de mecánica y matemática aplicada, demostró en 1914 que la delgada capa límite que rodea al cuerpo podía pasar de laminar a turbulenta. Por tanto, el coeficiente de resistencia aparecía como función del número de Reynolds [Ecuación (5.2)].

Actualmente existen teorías y experimentos sobre la inestabilidad del flujo laminar que explican por qué un flujo se hace turbulento. La Referencia 5 es un texto avanzado sobre el tema.

La teoría del flujo laminar está bien desarrollada y se conocen muchas soluciones [2, 3], pero no hay análisis que puedan simular las fluctuaciones aleatorias a pequeña escala del flujo turbulento.[1] Por ello, gran parte de la teoría que existe sobre el flujo turbulento es semiempírica, basada en análisis dimensional y razonamientos físicos; se refiere sólo a las propiedades medias y a las varianzas de las fluctuaciones, pero no a sus variaciones rápidas. La «teoría» del flujo turbulento que se presenta en los Capítulos 6 y 7 es increiblemente burda, aunque también sorprendentemente efectiva. Intentaremos una descripción racional que sitúe al análisis del flujo turbulento sobre una base física firme.

6.2. FLUJOS INTERNOS Y FLUJOS EXTERNOS

Tanto el flujo laminar como el turbulento pueden ser internos, o sea, «confinados» por paredes, o externos y libres. En este capítulo estudiaremos los flujos internos y en el Capítulo 7 los flujos externos.

Un flujo interno está confinado por paredes, y las regiones fluidas sometidas a los efectos viscosos crecerán y se encontrarán hasta ocupar todo el flujo. La Figura 6.6 muestra el flujo interno en un conducto largo. Hay una *región de entrada* donde la corriente no viscosa inicial converge y entra en el conducto. Las capas límites viscosas crecen aguas abajo, frenando el flujo axial $u(r, x)$ en la pared y acelerando el núcleo central para mantener el requisito de continuidad, que en un flujo incompresible es

www.elsolucionario.net

$$Q = \int u\, dA = \text{cte} \tag{6.3}$$

A una distancia finita de la entrada, las capas límite se unen y el núcleo no viscoso desaparece. El flujo en el tubo es entonces completamente viscoso, y la velocidad axial se va ajustando hasta $x = L_e$ en que ya no cambia prácticamente con x y se dice que el flujo está *completamente desarrollado*, $u \equiv u(r)$ sólo. Aguas abajo de $x = L_e$ el perfil de velocidad es constante, el esfuerzo en la pared es constante y la presión disminuye linealmente con x, tanto en flujo laminar como turbulento. Todos estos detalles se muestran en la Figura 6.6.

El análisis dimensional indica que el número de Reynolds es el único parámetro que determina la longitud de entrada. Si

$$L_e = f(d, V, \rho, \mu) \qquad V = \frac{Q}{A}$$

tenemos

$$\frac{L_e}{d} = g\left(\frac{\rho V d}{\mu}\right) = g(\mathrm{Re}) \tag{6.4}$$

Para flujo laminar [2, 3], la correlación aceptada es

$$\frac{L_e}{d} = 0{,}06\,\mathrm{Re} \qquad \text{laminar} \tag{6.5}$$

La longitud máxima de entrada laminar, a $\mathrm{Re}_{d,\mathrm{crít}} = 2300$, es $L_e = 138d$, que es la máxima posible.

---

[1] Sin embargo, la Simulación Numérica Directa (DNS, *Direct Numerical Simulation*) de la turbulencia a bajos números de Reynolds es ahora bastante habitual [32].

www.elsolucionario.net

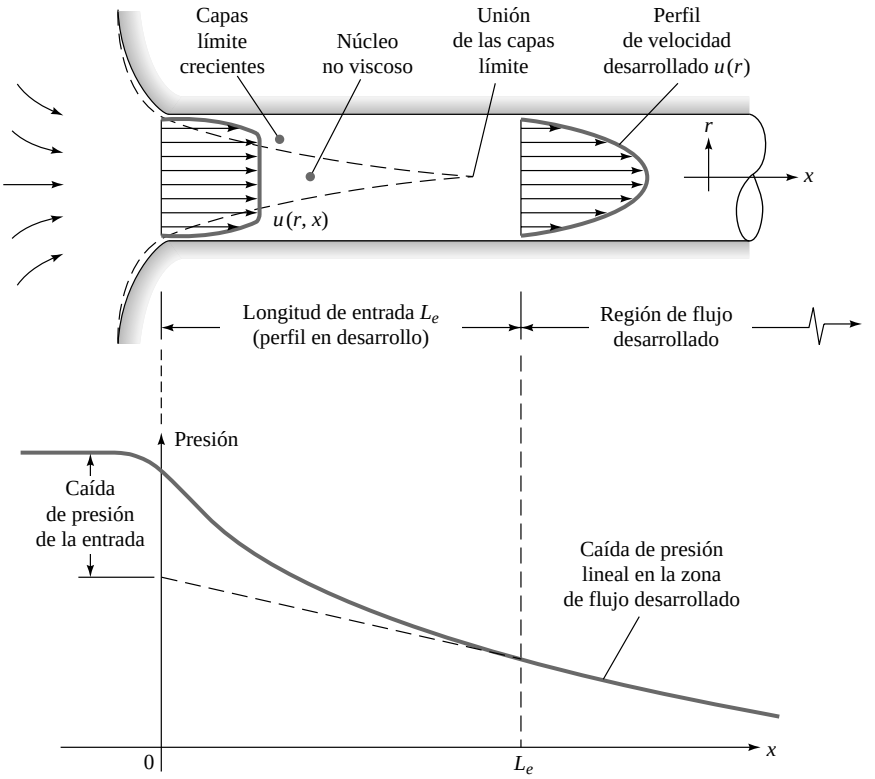


Figura 6.6. Desarrollo de los perfiles de velocidad y variación de la presión en la entrada de un conducto.

En flujo turbulento las capas límite crecen más de prisa y la longitud de entrada L_e es relativamente más corta, siguiendo la expresión aproximada para paredes lisas:

$$\frac{L_e}{d} \Xi 4,4\,\mathrm{Re}_d^{1/6} \quad \text{turbulento} \tag{6.6}$$

Algunas longitudes de entrada en régimen turbulento son, pues:

Re_d	4000	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
L_e/d	18	20	30	44	65	95

Ciertamente 44 diámetros puede parecer una longitud «larga», pero las aplicaciones típicas con tubos tienen L/d de 1000 o más, en cuyo caso los efectos de la entrada son despreciables y se puede hacer un análisis simple del flujo completamente desarrollado. Esto es posible para flujos laminares y turbulentos, incluyendo paredes rugosas y secciones transversales no circulares.

EJEMPLO 6.2

Un tubo de 0,5 pulgadas de diámetro y 60 ft de largo lleva 5 galones/min de agua a 20 °C. ¿Qué fracción del tubo corresponde a la longitud de entrada?

Solución

Hacemos la conversión

$$Q = (5\ \text{gal/min})\frac{0,00223\ \text{ft}^3/\text{s}}{1\ \text{gal/min}} \Phi 0,0111\ \text{ft}^3/\text{s}$$

www.elsolucionario.net

La velocidad media es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}0111 \text{ ft}^3/\text{s}}{(\Theta 4)[(0{,}5/12) \text{ ft}]^2} = 8{,}17 \text{ ft/s}$$

De la Tabla 1.4 tomamos para agua $\nu = 1{,}01 \times 10^{-6}$ m²/s = $1{,}09 \times 10^{-5}$ ft²/s. Por tanto, el número de Reynolds es

$$\text{Re}_d = \frac{Vd}{\nu} = \frac{(8{,}17 \text{ ft/s})[(0{,}5/12) \text{ ft}]}{1{,}09 \times 10^{\Phi 5} \text{ ft}^2/\text{s}} = 31.300$$

Este valor es mayor de 4000; por tanto, el flujo es totalmente turbulento y se debe tomar la Ecuación (6.6) para la longitud de la entrada:

$$\frac{L_e}{d} \Xi 4{,}4 \text{Re}_d^{1/6} = (4{,}4)(31.300)^{1/6} = 25$$

El tubo tiene L/d = (60 ft)/[(0,5/12) ft] = 1440. La región de entrada corresponde, pues, a la siguiente fracción:

$$\frac{L_e}{L} = \frac{25}{1440} = 0{,}017 = 1{,}7\% \qquad \textit{Resp.}$$

Es un porcentaje muy pequeño, de modo que podemos considerar que el flujo está completamente desarrollado.

Una longitud corta puede sernos útil si se desea mantener un núcleo no viscoso. Por ejemplo, un túnel aerodinámico «largo» sería ridículo, ya que el flujo sería viscoso en todas partes, lo cual invalidaría la simulación de condiciones de corriente libre. Un túnel aerodinámico típico de baja velocidad tiene una sección de ensayos de 1 m de diámetro y 5 m de largo, con V = 30 m/s. Tomando $\nu_{\text{aire}} = 1{,}51 \times 10^{-5}$ m²/s de la Tabla 1.4, tenemos $\text{Re}_d = 1{,}99 \times 10^6$ y, de la Ecuación (6.6), $L_e/d \Xi 49$. La sección de ensayos tiene L/d = 5, que es mucho menor que la longitud de desarrollo del flujo. Al final de la sección de ensayos la capa límite tendrá un espesor de 10 cm y quedarán 80 cm de flujo no viscoso para poder ensayar los modelos.

Un flujo externo, o corriente exterior, no tiene paredes confinantes y es libre de expandirse a pesar de que puedan crecer las capas viscosas de los cuerpos inmersos en él. Por ello, lejos de los cuerpos el flujo es prácticamente no viscoso y nuestra técnica analítica, discutida en el Capítulo 7, intentará acoplar la solución no viscosa lejana con la solución de capa límite calculada para la región cercana a la pared. En un flujo externo no hay nada equivalente al flujo completamente desarrollado.

6.3. PÉRDIDA DE CARGA; EL COEFICIENTE DE FRICCIÓN

Cuando se aplican las fórmulas del flujo en conductos a problemas prácticos resulta muy útil realizar un análisis de volumen de control. Considere el flujo estacionario incompresible entre las secciones 1 y 2 del tubo inclinado de sección constante de la Figura 6.7. La ecuación de continuidad unidimensional, Ecuación (3.23), queda

$$Q_1 = Q_2 = \text{cte} \quad \text{o} \quad V_1 = V_2 = V$$

ya que el tubo es de sección constante. La ecuación de la energía para flujo estacionario (3.71) se reduce a

$$\left[\frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{V^2}{2g} + z\right]_1 = \left[\frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{V^2}{2g} + z\right]_2 + h_f \tag{6.7}$$

ya que no hay trabajo de partes móviles (bombas o turbinas) ni transferencia de calor entre 1 y 2. Si el flujo está completamente desarrollado, el perfil de velocidades es el mismo en 1 y 2. En este caso, el factor de

www.elsolucionario.net

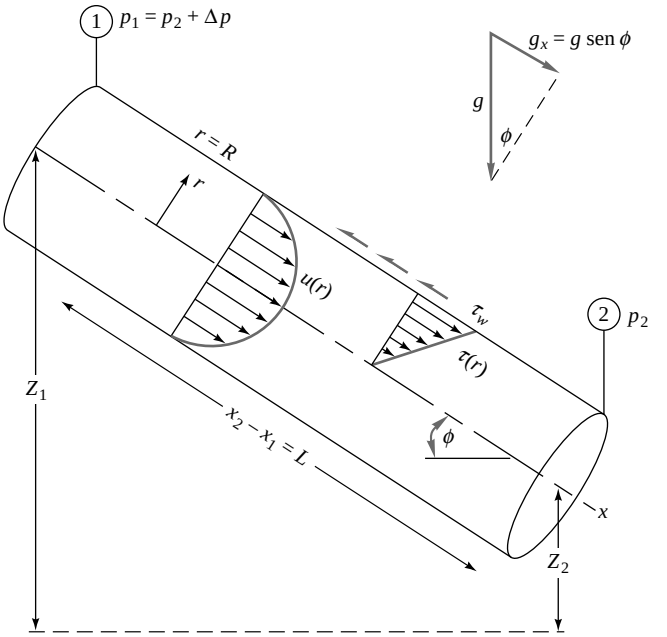


Figura 6.7. Volumen de control para el flujo estacionario, completamente desarrollado, entre dos secciones de un tubo inclinado.

corrección de energía cinética $\alpha_1 = \alpha_2$ y, como $V_1 = V_2$, la Ecuación (6.7) proporciona la pérdida de carga en función de la caída de presión y la variación de altura:

$$h_f = (z_1 - z_2) + \left(\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g}\right) = -\Delta z + \frac{-\Delta p}{\rho g} \tag{6.8}$$

La pérdida de carga es igual a la suma de las variaciones de presión y altura, o sea, a la variación de la línea de altura motriz (LAM).

Finalmente, apliquemos la ecuación de cantidad de movimiento (3.40) al volumen de control de la Figura 6.7, teniendo en cuenta como fuerzas aplicadas las de presión, gravedad y fricción en la pared:

$$\sum F_x = -\Delta p(\pi R^2) + \rho g(\pi R^2) L \operatorname{sen} \phi - \tau_w (2\pi R) L = \dot{m}(V_2 - V_1) = 0 \tag{6.9a}$$

Reordenando los términos de la ecuación encontramos una relación entre la pérdida de carga y el esfuerzo de cortadura en la pared:

$$-\Delta z + \frac{-\Delta p}{\rho g} = h_f = \frac{2\tau_w}{\rho g}\frac{L}{R} = \frac{4\tau_w}{\rho g}\frac{L}{d} \tag{6.9b}$$

donde, de la geometría de la Figura 6.7, hemos sustituido $-\Delta z = L \operatorname{sen} \phi$. Obsérvese que, independientemente de si la tubería está horizontal o inclinada, la pérdida de carga es proporcional al esfuerzo de cortadura en la pared en el tubo.

¿Cómo podríamos correlacionar la pérdida de carga en los problemas de flujo en conductos? La respuesta la obtuvo hace un siglo y medio Julius Weisbach, profesor alemán que en 1850 publicó el primer texto moderno sobre hidrodinámica. La Ecuación (6.9*b*) muestra que h_f es proporcional a (L/d), y datos como los de Hagen en la Figura 6.6 muestran que, para flujo turbulento, h_f es aproximadamente proporcional a V^2. La correlación propuesta, aún tan efectiva como en 1850, es

$$\boxed{h_f = f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} \quad \text{donde} \quad f = f(\mathrm{Re}_d, \frac{\varepsilon}{d}, \text{ forma del conducto})} \tag{6.10}$$

www.elsolucionario.net

El parámetro adimensional f se denomina *coeficiente de fricción de Darcy*, en honor a Henry Darcy (1803-1858), ingeniero francés cuyos trabajos de 1857 sobre flujo en tubos expusieron por primera vez el efecto de la rugosidad en la fricción. El parámetro ε es la altura de la rugosidad de la pared, que es importante en el flujo turbulento en conductos (pero no en el laminar). En la Ecuación (6.10) hemos añadido el efecto de la «forma del conducto» para recordar que los conductos de sección cuadrada, triangular y, en general, no circular tienen coeficientes de fricción algo distintos a los circulares. En las secciones siguientes se discuten datos y correlaciones teóricas para coeficientes de fricción reales.

Igualando las Ecuaciones (6.9) y (6.10) podemos encontrar una forma alternativa para el coeficiente de fricción:

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} \tag{6.11}$$

Para conductos no circulares debemos interpretar τ_w como el valor medio en el perímetro del conducto. Por esta razón la Ecuación (6.10) se prefiere como definición única del coeficiente de fricción de Darcy.

6.4. FLUJO LAMINAR COMPLETAMENTE DESARROLLADO EN CONDUCTOS CIRCULARES

Se pueden obtener soluciones analíticas para el flujo laminar en conductos tanto circulares como no circulares. Considere un flujo de *Poiseuille* completamente desarrollado en un conducto circular de diámetro d y radio R. Los resultados analíticos de este problema se dieron en la Sección 4.11. Revisemos esas fórmulas aquí:

$$u = u_{máx}\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right] \quad \text{donde} \quad u_{máx} = -\frac{dp}{dx}\frac{R^2}{4\mu} \quad \text{y} \quad -\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{L}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{u_{máx}}{2} = \frac{\Delta p}{L}\frac{R^2}{8\mu}$$

$$Q = \int u\,dA = \pi R^2 V = \frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\Delta p}{L} \tag{6.12}$$

$$\tau_w = \left|\mu \frac{du}{dr}\right|_{r=R} = \frac{4\mu V}{R} = \frac{8\mu V}{d} = \frac{R}{2}\frac{\Delta p}{L}$$

$$h_f = \frac{32\mu L V}{\rho g d^2} = \frac{128\mu L Q}{\pi \rho g d^4}$$

El perfil de velocidades parabólico tiene una velocidad media V que es igual a la mitad de la velocidad máxima. Δp es la *caída* de presión en un conducto de longitud L; es decir, (dp/dx) es negativo. Estas fórmulas son válidas mientras el número de Reynolds del conducto, $\mathrm{Re}_d = \rho V d/\mu$, es menor que 2300 aproximadamente. Se observa que τ_w es proporcional a V (véase Figura 6.6) y, lo que es más importante, que es independiente de la densidad, ya que la aceleración del fluido es nula. Nada de esto es cierto en flujos turbulentos.

Conocidos los esfuerzos de cortadura en la pared, es fácil determinar el coeficiente de fricción de un flujo de Poiseuille:

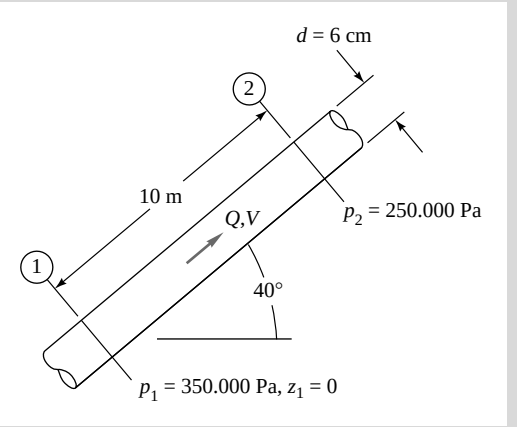
$$f_{\text{lam}} = \frac{8\tau_{w,\text{lam}}}{\rho V^2} = \frac{8(8\mu V/D)}{\rho V^2} = \frac{64}{\rho V d/\mu} = \frac{64}{\mathrm{Re}_d} \tag{6.13}$$

En los flujos laminares, el coeficiente de fricción del conducto es inversamente proporcional al número de Reynolds. Esta famosa fórmula es efectiva, pero a menudo las relaciones algebraicas de las Ecuaciones (6.12) son más útiles para resolver problemas.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 6.3

Un flujo de aceite con $\rho = 900$ kg/m^3 y $\nu = 0{,}0002$ m^2/s circula hacia arriba por el tubo inclinado de la Figura E6.3. La presión y la altura de las Secciones 1 y 2 son conocidas, y éstas distan 10 m una de otra. Suponiendo flujo laminar estacionario, (*a*) verifique que el flujo es hacia arriba, (*b*) calcule h_f entre 1 y 2, y calcule (*c*) Q, (*d*) V y (*e*) Re_d. ¿Es laminar el flujo?



E6.3

Solución

Apartado (*a*)

Para su uso posterior, calculemos

$$\mu = \rho\nu = (900 \text{ kg/m}^3)(0{,}0002 \text{ m}^2/\text{s}) = 0{,}18 \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$$

$$z_2 = \text{OL sen } 40° = (10 \text{ m})(0{,}643) = 6{,}43 \text{ m}$$

El flujo va en el sentido en que disminuye la LAM; por tanto, calculándola en cada sección:

$$\text{LAM}_1 = z_1 + \frac{p_1}{\cancel{\gamma}g} = 0 + \frac{350.000}{900(9{,}807)} = 39{,}65 \text{ m}$$

$$\text{LAM}_2 = z_2 + \frac{p_2}{\cancel{\gamma}g} = 6{,}43 + \frac{250.000}{900(9{,}807)} = 34{,}75 \text{ m}$$

La LAM está más baja en la sección 2; luego el flujo va de 1 a 2. *Resp.* (*a*)

Apartado (*b*)

La pérdida de carga es la variación en la LAM:

$$h_f = \text{LAM}_1 - \text{LAM}_2 = 39{,}65 \text{ m} - 34{,}75 \text{ m} = 4{,}9 \text{ m}$$ *Resp.* (*b*)

Una pérdida equivalente a la mitad de la longitud del conducto es una pérdida muy elevada.

Apartado (*c*)

El valor de Q se puede deducir de varias fórmulas, por ejemplo, de la Ecuación (6.12):

$$Q = \frac{\pi\cancel{\gamma}gd^4h_f}{128\mu L} = \frac{\pi(900)(9{,}807)(0{,}06)^4(4{,}9)}{128(0{,}18)(10)} = 0{,}0076 \text{ m}^3/\text{s}$$ *Resp.* (*c*)

www.elsolucionario.net

Apartado (*d*)

Dividiendo Q entre el área tenemos la velocidad media:

$$V = \frac{Q}{\Theta R^2} = \frac{0,0076}{\Theta(0,03)^2} = 2,7 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}\ (d)$$

Apartado (*e*)

Conocida V, el número de Reynolds es

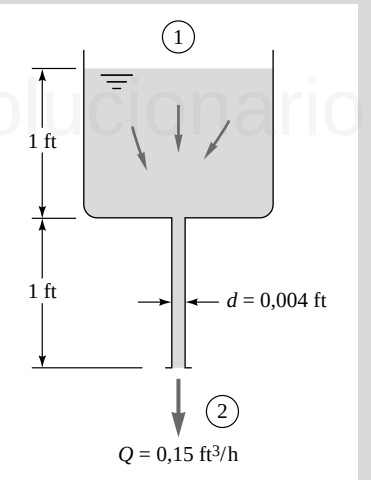
$$\text{Re}_d = \frac{Vd}{v} = \frac{2,7(0,06)}{0,0002} = 810 \qquad \textit{Resp.}\ (e)$$

Este valor es menor que el de la transición $\text{Re}_d = 2300$, por lo cual es seguro que estamos en régimen laminar.

Nótese que por haber utilizado sólo unidades SI (metros, segundos, kilogramos, newtons) en todas las variables, no se ha necesitado ningún factor de conversión en los cálculos.

EJEMPLO 6.4

Un líquido de peso específico $\rho g = 58$ lbf/ft^3 fluye por gravedad desde un depósito de 1 ft a través de un capilar de 1 ft de longitud con un caudal de 0,15 ft^3/h, como se muestra en la Figura E6.4. Las Secciones 1 y 2 están a la presión atmosférica. Despreciando los efectos de la entrada, calcule la viscosidad del líquido.



E6.4

Solución

- *Diagrama del sistema*. La Figura E6.4 muestra $L = 1$ ft, $d = 0,004$ ft y $Q = 0,15$ ft^3/h.
- *Consideraciones*. Flujo laminar incompresible completamente desarrollado (Poiseuille). Las Secciones 1 y 2 están a la presión atmosférica. Velocidad despreciable en la superficie, $V_1 \Xi 0$.
- *Procedimiento*. Usamos las ecuaciones de la continuidad y de la energía para calcular la pérdida de carga y la viscosidad.
- *Valores de las propiedades*. Dado $\rho g = 58$ lbf/ft^3, calculamos $\rho = 58/32,2 = 1,80$ slug/ft^3 por si fuera necesario.
- *Paso 1*. La velocidad V_2 se puede calcular a partir del caudal y el diámetro del capilar empleando la ecuación de la continuidad:

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{(\Theta/4)d^2} = \frac{(0,15/3600)\text{ft}^3/\text{s}}{(\Theta 4)(0,004\text{ ft})^2} = 3,32 \text{ ft/s}$$

www.elsolucionario.net

Escribimos la ecuación de la energía entre las secciones 1 y 2, cancelamos términos, y calculamos la pérdida de carga:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + z_2 + h_f$$

o $$h_f = z_1 - z_2 - \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} = 2{,}0 \text{ ft} - 0 \text{ ft} - \frac{(2{,}0)(3{,}32 \text{ ft/s})^2}{2(32{,}2 \text{ ft/s}^2)} = 1{,}66 \text{ ft}$$

- *Comentario*. Hemos introducido $\alpha_2 = 2{,}0$ para flujo laminar en conductos de la Ecuación (3.73). Si olvidamos α_2 obtenemos $h_f = 1{,}83$ ft, un error del 10 por 100.
- *Paso 2*. Conocida la pérdida de carga, la viscosidad se obtiene de la Ecuación (6.12) para flujo laminar:

$$h_f = 1{,}66 \text{ ft} = \frac{32\mu LV}{(\rho g)d^2} = \frac{32\mu(1{,}0 \text{ ft})(3{,}32 \text{ ft/s})}{(58 \text{ lbf/ft}^3)(0{,}004 \text{ ft})^2} \quad \text{despejando} \quad \mu = 1{,}45 \times 10^{-5} \frac{\text{slug}}{\text{ft} \cdot \text{s}} \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios*. No hemos necesitado el valor de ρ, la fórmula sólo contiene el valor de ρg. Téngase en cuenta también que en esta fórmula L es la *longitud del capilar*, igual a 1 ft, no la diferencia de alturas.
- *Comprobación final*. Calculamos el número de Reynolds para comprobar si es menor que 2300 y el flujo es laminar:

$$\text{Re}_d = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{(1{,}80 \text{ slug/ft}^3)(3{,}32 \text{ ft/s})(0{,}004 \text{ ft})}{(1{,}45 \times 10^{-5} \text{ slug/ft} \cdot \text{s})} \approx 1650 \quad \text{Sí, es laminar}$$

- *Comentarios*. Al final tampoco necesitamos ρ para calcular Re_d. *Comentario inesperado*. Para esta pérdida de carga hay una *segunda* solución en régimen turbulento, como mostraremos en el Ejemplo 6.8.

www.elsolucionario.net

6.5. MODELIZACIÓN DE LA TURBULENCIA

A lo largo de este capítulo vamos a suponer densidad y viscosidad constantes, sin efectos térmicos, de forma que las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento son suficientes para poder determinar la velocidad y la presión:

Continuidad: $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Cantidad de movimiento: $$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \qquad (6.14)$$

sujetas a la condición de no deslizamiento en la pared y con condiciones de entrada y salida conocidas. (Dejaremos los flujos con superficie libre para el Capítulo 10).

No trabajaremos con la ecuación diferencial de la energía, Ecuación (4.53), en este capítulo, aunque es muy importante tanto para los problemas de transferencia de calor como para la comprensión general del flujo en conductos. La presión realiza un trabajo para mover el flujo a través del conducto. ¿En qué se emplea esta energía? Los esfuerzos cortantes en la pared no realizan trabajo, puesto que la velocidad en la pared es nula. La respuesta es que existe un balance entre el trabajo de las fuerzas de presión y la disipación viscosa en el interior del flujo. La integral de la función de disipación Φ, Ecuación (4.50), extendida a todo el flujo será igual al trabajo de las fuerzas de presión. Un ejemplo de este balance de energía en los flujos viscosos se da en el Problema PE6.7.

Tanto los flujos laminares como los turbulentos satisfacen las Ecuaciones (6.14). En flujo laminar, en que no hay fluctuaciones aleatorias, podemos abordar y resolver movimientos con una gran variedad de geometrías [2, 3], dejando, por supuesto, muchas para los problemas.

www.elsolucionario.net

Concepto de media temporal de Reynolds

En un flujo turbulento, debido a las fluctuaciones, cada término de presión o velocidad de las Ecuaciones (6.14) varía rápida y aleatoriamente en función de la posición y del tiempo. Actualmente nuestras matemáticas no pueden manejar estas variables fluctuantes. No se conoce una pareja de funciones aleatorias $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ y $p(x, y, z, t)$ que pueda ser solución de las Ecuaciones (6.14). Además, nuestra atención como ingenieros está dirigida hacia los valores promediados o *medios* de velocidad, presión, esfuerzo cortante, etc., en los flujos a altos números de Reynolds (turbulentos). Esta filosofía llevó a Osborne Reynolds en 1895 a reescribir las Ecuaciones (6.14) en términos de las medias temporales de las diversas variables turbulentas.

La media temporal $\bar{u}$ de una función turbulenta $u(x, y, z, t)$ se define como

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt \tag{6.15}$$

donde T es un período de promediado que debe ser mayor que cualquier período significativo de las fluctuaciones. Los valores medios de la velocidad y la presión se ilustran en la Figura 6.8. Para flujos turbulentos comunes de agua o gases un período $T \Xi 5$ s es en principio adecuado.

La *fluctuación* u' se define como la desviación de u de su valor medio

$$u' = u - \bar{u} \tag{6.16}$$

como muestra la Figura 6.8. Por definición, la media de la fluctuación es cero:

$$\overline{u'} = \frac{1}{T}\int_0^T (u - \bar{u})\,dt = \bar{u} - \bar{u} = 0 \tag{6.17}$$

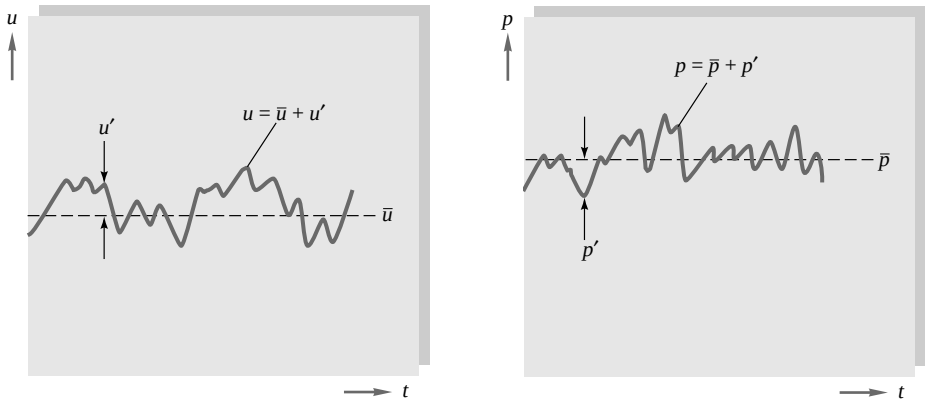
Sin embargo, la media del cuadrado de la fluctuación no es cero y es una medida de la *intensidad* de la turbulencia:

$$\overline{u'^2} = \frac{1}{T}\int_0^T u'^2\,dt > 0 \tag{6.18}$$

En general, ninguno de los productos de la forma $\overline{u'v'}$, $\overline{u'p'}$ es cero en un flujo turbulento.

La idea de Reynolds fue separar cada propiedad en sus medias más las fluctuaciones correspondientes:

$$u = \bar{u} + u' \quad v = \bar{v} + v' \quad w = \bar{w} + w' \quad p = \bar{p} + p' \tag{6.19}$$



(*a*) (*b*)

Figura 6.8. Definición de media y fluctuación en un flujo turbulento: (*a*) velocidad; (*b*) presión.

www.elsolucionario.net

Sustituyamos esto en las Ecuaciones (6.14) y tomemos las medias temporales. La ecuación de continuidad se reduce a

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \tag{6.20}$$

que es idéntica a la expresión laminar.

Sin embargo, después de tomar la media temporal, cada componente de la ecuación de cantidad de movimiento (6.14*b*) contendrá, además de los valores medios de las variables, los valores medios de tres productos, o *correlaciones*, de las fluctuaciones de velocidad. La más importante de éstas es la ecuación en la dirección del movimiento principal, dirección x, que toma la forma

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} = \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'^2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \rho \overline{u'w'}\right] \tag{6.21}$$

Los tres términos de correlaciones $-\rho\overline{u'^2}$, $-\rho\overline{u'v'}$, $-\rho\overline{u'w'}$ se denominan *esfuerzos turbulentos* porque tienen esas dimensiones y aparecen conjuntamente con los esfuerzos (laminares) newtonianos $\mu(\partial\bar{u}/\partial x)$, etc. Realmente son términos de aceleración convectiva (que es por lo que aparece la densidad), no esfuerzos, pero tienen el mismo efecto matemático y se denominan así en la literatura de forma universal.

Los esfuerzos turbulentos son *a priori* incógnitas que deben relacionarse experimentalmente con las condiciones y la geometría del flujo, como se detalla en las Referencias 1 a 3. Afortunadamente, en flujos en conductos y en capas límite, los esfuerzos $-\rho\overline{u'v'}$ asociados con la dirección y normal a la pared son dominantes, y la ecuación de cantidad de movimiento longitudinal puede ser aproximada fielmente por la expresión más sencilla

www.elsolucionario.net

$$\rho \frac{d\bar{u}}{dt} \approx \rho g_x + \frac{\partial \tau}{\partial y} \tag{6.22}$$

donde

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} = \tau_{\text{lam}} + \tau_{\text{turb}} \tag{6.23}$$

La Figura 6.9 muestra la distribución de τ_{lam} y τ_{turb} tomadas de medidas típicas a través de una capa límite turbulenta cerca de la pared. Los esfuerzos viscosos son dominantes cerca de la pared (*región interior o de*

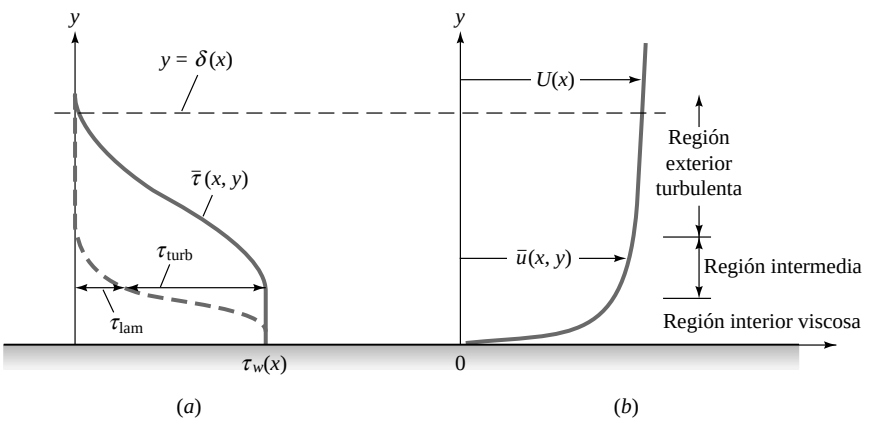


Figura 6.9. Distribuciones típicas de velocidad y esfuerzo cortante en un flujo turbulento cerca de la pared: (*a*) esfuerzo cortante; (*b*) velocidad.

www.elsolucionario.net

la pared) y los esfuerzos turbulentos lo son en la *región exterior*. Entre ambas existe una región de transición, denominada *región intermedia* o *de solape*, donde tanto los esfuerzos viscosos como los turbulentos son importantes. Estas tres regiones están indicadas en la Figura 6.9.

En la región exterior τ_{turb} es dos o tres órdenes de magnitud mayor que τ_{lam}, y en la región de la pared ocurre lo contrario. Estos datos experimentales nos permiten establecer un modelo, simple pero efectivo, de la distribución $\bar{u}(y)$ a través de la capa límite turbulenta.

Ley de la capa logarítmica

Hemos visto en la Figura 6.8 que en el flujo turbulento próximo a la pared hay tres regiones:

1. Región interior: esfuerzos viscosos dominantes.
2. Región exterior: esfuerzos turbulentos dominantes.
3. Región intermedia: ambos tipos de esfuerzos son importantes.

A partir de ahora suprimiremos el superrayado de la velocidad $\bar{u}$. Sea τ_w el esfuerzo cortante en la pared y sean δ y U el espesor y la velocidad en el borde de la región exterior, $y = \delta$.

Para la región interior, Prandtl dedujo en 1930 que u debía ser independiente del espesor de la capa límite:

$$u = f(\mu, \tau_w, \rho, y) \tag{6.24}$$

Por análisis dimensional, esto es equivalente a

$$u^+ = \frac{\mu}{u^*} = F\left(\frac{yu^*}{\nu}\right) \qquad u^* = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2} \tag{6.25}$$

www.elsolucionario.net

La Ecuación (6.25) se denomina *ley de la pared*, y la magnitud u^* recibe el nombre de *velocidad de fricción* porque tiene dimensiones de $\{LT^{-1}\}$, aunque no es realmente una velocidad del flujo.

Subsecuentemente, Kármán dedujo en 1933 que en la región exterior u debía ser independiente de la viscosidad y su diferencia con la velocidad de la corriente libre U debía depender del espesor δ y de las otras propiedades:

$$(U - u)_{exterior} = g(\delta, \tau_w, \rho, y) \tag{6.26}$$

De nuevo, por análisis dimensional reescribimos esta ecuación en la forma

$$\frac{U - u}{u^*} = G\left(\frac{y}{\delta}\right) \tag{6.27}$$

donde u^* tiene el mismo significado que en la Ecuación (6.25). La Ecuación (6.27) se denomina *ley del defecto de velocidad* para la región exterior.

Tanto la ley de la pared (6.25) como la ley del defecto de velocidad (6.27) se cumplen con buena aproximación en una amplia gama de flujos turbulentos en conductos y capas límite [1 a 3]. Las dos son diferentes, aunque deben acoplarse suavemente en la región intermedia. En 1937, C. B. Millikan demostró que esto sólo podía ocurrir si la velocidad en esta zona variaba de forma logarítmica con y:

$$\boxed{\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{yu^*}{\nu} + B \qquad \text{región intermedia}} \tag{6.28}$$

Para una amplia gama de flujos las constantes adimensionales κ y B valen aproximadamente $\kappa \approx 0{,}41$ y $B \approx 5{,}0$. La Ecuación (6.28) corresponde a la llamada *capa logarítmica*.

www.elsolucionario.net

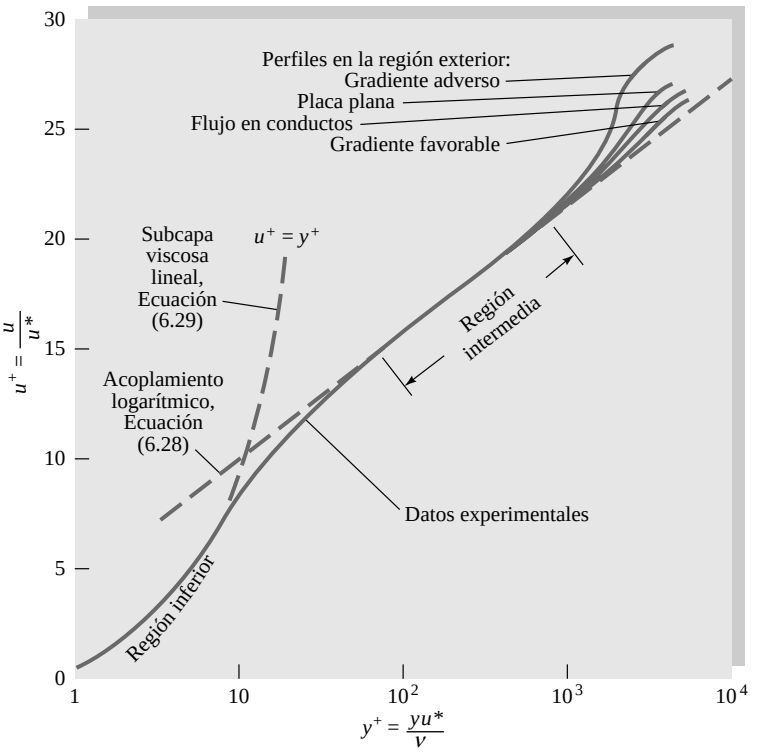


Figura 6.10. Verificación experimental de las leyes interior, exterior y de acoplamiento en el perfil de velocidad en un flujo turbulento parietal.

Así pues, mediante razonamientos de análisis dimensional e intuición física podemos inferir que una representación de u en función de ln y en una capa límite turbulenta mostraría un aspecto curvo tanto cerca de la pared como en la región exterior, y sería una recta en la región intermedia o capa logarítmica de solape. La Figura 6.10 muestra dicha función. Los cuatro perfiles de la región exterior que se muestran tienden suavemente a la ley logarítmica en la región intermedia, y la diferencia entre ellos se debe a las diferencias en el gradiente de presiones exterior. La ley de la pared es única y obedece a la relación lineal viscosa

$$u^+ = \frac{u}{u^*} = \frac{yu^*}{\nu} = y^+ \tag{6.29}$$

desde la pared hasta aproximadamente $y^+ = 5$, desviándose después para alcanzar la recta logarítmica para valores de y^+ en torno a 30.

Se crea o no, la Figura 6.10, que no es sino el resultado de una hábil correlación de perfiles de velocidad, es la base de toda la «teoría» existente sobre la capa límite turbulenta. Nótese que no se ha resuelto ninguna ecuación, sino que simplemente se ha expresado la componente longitudinal de la velocidad en forma eficaz para posteriores desarrollos.

En la Figura 6.10 hay una sorpresa inesperada: la ley logarítmica (6.28), en lugar de corresponder a un intervalo corto de acoplamiento, es válida en casi toda la capa límite salvo en la región exterior cuando hay un gradiente de presiones adverso muy fuerte (como en un difusor). La región interior no suele ocupar más de un 2 por 100 del espesor y suele despreciarse. Así, podemos utilizar la Ecuación (6.28) como una aproximación excelente para resolver casi todos los problemas que se presentan en este capítulo y el siguiente. En las Referencias 2 y 3 se pueden encontrar muchas aplicaciones adicionales.

Modelos avanzados de turbulencia

La modelización de la turbulencia es un campo muy activo. Se han publicado muchos artículos intentando simular de forma más precisa los esfuerzos turbulentos de la Ecuación (6.21) y sus componentes y y z. Es-

www.elsolucionario.net

tas investigaciones, que se pueden encontrar en libros avanzados [13, 19], quedan fuera de los objetivos de este libro, donde nos limitaremos a utilizar la ley logarítmica para resolver problemas de flujo en conductos y capas límite. Por ejemplo, L. Prandtl, que inventó la teoría de capa límite en 1904, posteriormente propuso un modelo de *viscosidad turbulenta* para los esfuerzos de Reynolds de la Ecuación (6.23):

$$-\rho\overline{u'v'} = \tau_{\text{turb}} = \mu_t \frac{du}{dy} \quad \text{donde} \quad \mu_t = l^2 \left|\frac{du}{dy}\right| \tag{6.30}$$

El término μ_t, que es una propiedad del *flujo*, no del fluido, recibe el nombre de *viscosidad turbulenta* y puede modelarse de distintas formas. La más popular es la Ecuación (6.30), donde l es la *longitud de mezcla* de los torbellinos turbulentos (análoga al camino libre medio de la teoría cinética molecular). Cerca de una pared sólida, l es aproximadamente proporcional a la distancia a la pared, y Kármán sugirió:

$$l = \kappa y \quad \text{donde} \quad \kappa = \text{constante de Kármán} = 0{,}41 \tag{6.31}$$

En el Problema P6.40 deberá demostrar que las Ecuaciones (6.30) y (6.31) conducen a la ley logarítmica (6.28) cerca de la pared.

Los modelos de turbulencia modernos aproximan flujos turbulentos tridimensionales y emplean ecuaciones en derivadas parciales adicionales para magnitudes como la energía cinética turbulenta, la disipación turbulenta y las seis componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds. Para más detalles, consúltense las Referencias 13 y 19.

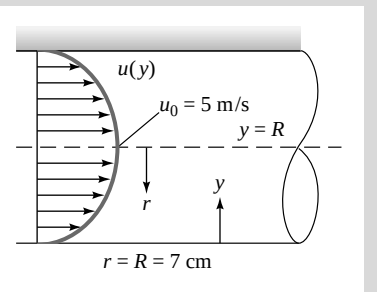
EJEMPLO 6.5

Un flujo de aire a 20 °C circula por un tubo de 14 cm de diámetro en régimen completamente desarrollado. La velocidad en el eje es $u_0 = 5$ m/s. Estime a partir de la Figura 6.10 (*a*) la velocidad de fricción u^* y (*b*) el esfuerzo en la pared τ_w.

www.elsolucionario.net

Solución

- *Diagrama del sistema*. La Figura E6.5 muestra un flujo turbulento en un tubo con $u_0 = 5$ m/s y $R = 7$ cm.
- *Consideraciones*. La Figura 6.10 muestra que la ley logarítmica, Ecuación (6.28), es válida prácticamente hasta el centro del tubo.



E6.5

- *Procedimiento*. Usamos la Ecuación (6.28) para estimar la velocidad de fricción u^*.
- *Valores de las propiedades*. Para el aire a 20 °C, $\rho = 1{,}205$ kg/m^3 y $\nu = 1{,}51 \times 10^{-5}$ m^2/s.
- *Resolución*. Introducimos todos los datos en la Ecuación (6.28) en $y = R$ (el centro del tubo). La única incógnita es u^*:

$$\frac{u_0}{u^*} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{Ru^*}{\nu} + B \quad \text{o} \quad \frac{5{,}0 \text{ m/s}}{u^*} = \frac{1}{0{,}41}\ln\left[\frac{(0{,}07 \text{ m})u^*}{1{,}51\times10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}}\right] + 5$$

www.elsolucionario.net

Aunque el logaritmo complica la ecuación, se puede iterar a mano para obtener el valor de u^*. O también se puede utilizar el Resolvedor de Ecuaciones de Ingeniería (EES, *Engineering Equation Solver*) y escribir un único comando para la Ecuación (6.28):

```
5,0/ustar = (1/0,41)*ln(0,07*ustar/1,51E-5)+5
```

Cualquier estimación inicial, por ejemplo, $u^* = 1$, servirá. Inmediatamente EES devuelve la solución correcta:

$$u^* = 0{,}228 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

$$\tau_w = \rho u^{*2} = (1{,}205)(0{,}228)^2 = 0{,}062 \text{ Pa} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

- *Comentarios*. ¡La ley logarítmica lo resolvió todo! Ésta es una técnica muy potente, utilizar una correlación experimental de velocidades para aproximar un flujo turbulento genérico. Se puede comprobar que el número de Reynolds Re_d es aproximadamente 40.000, lo que claramente corresponde a flujo turbulento.

6.6. FLUJO TURBULENTO EN CONDUCTOS CIRCULARES

En el flujo turbulento en conductos no necesitamos resolver ninguna ecuación diferencial, sino simplemente utilizar la ley logarítmica, como en el Ejemplo 6.5. Supongamos que la Ecuación (6.28) representa fiablemente el perfil de velocidad medida $u(r)$ a través del conducto

$$\frac{u(r)}{u^*} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{(R-r)u^*}{\nu} + B \tag{6.32}$$

donde hemos sustituido y por $R - r$. La velocidad media para este perfil será:

$$\begin{aligned} V = \frac{Q}{A} &= \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R u^*\left[\frac{1}{\kappa}\ln\frac{(R-r)u^*}{\nu} + B\right]2\pi r\,dr \\ &= \frac{1}{2}u^*\left[\frac{2}{\kappa}\ln\frac{Ru^*}{\nu} + 2B - \frac{3}{\kappa}\right] \end{aligned} \tag{6.33}$$

Introduciendo $\kappa = 0{,}41$ y $B = 5{,}0$ obtenemos, numéricamente,

$$\frac{V}{u^*} = 2{,}44\ln\frac{Ru^*}{\nu} + 1{,}34 \tag{6.34}$$

Esto parece de interés marginal hasta que nos damos cuenta de que V/u^* está relacionado directamente con el coeficiente de fricción de Darcy:

$$\frac{V}{u^*} = \left[\frac{\rho V^2}{\tau_w}\right]^{1/2} = \left[\frac{8}{f}\right]^{1/2} \tag{6.35}$$

Además, el argumento del logaritmo de (6.34) es equivalente a

$$\frac{Ru^*}{\nu} = \frac{\frac{1}{2}Vd}{\nu}\frac{u^*}{V} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}_d\left[\frac{f}{8}\right]^{1/2} \tag{6.36}$$

Introduciendo (6.35) y (6.36) en la Ecuación (6.34), cambiando el logaritmo a base decimal y reordenando, tenemos

$$\frac{1}{f^{1/2}} = 1{,}99\log(\mathrm{Re}_d\, f^{1/2}) - 1{,}02 \tag{6.37}$$

www.elsolucionario.net

En otras palabras, calculando la velocidad media del flujo por integración del perfil logarítmico, hemos obtenido una relación entre el coeficiente de fricción y el número de Reynolds para el flujo turbulento en un conducto. Prandtl dedujo la Ecuación (6.37) en 1935 y varió ligeramente las constantes para ajustarlas mejor a los datos experimentales:

$$\frac{1}{f^{1/2}} = 2,0 \log(\mathrm{Re}_d\, f^{1/2}) - 0,8 \tag{6.38}$$

Ésta es la expresión comúnmente aceptada para tubos de paredes lisas. A continuación se indican algunos valores numéricos:

Re_d	4000	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
f	0,0399	0,0309	0,0180	0,0116	0,0081	0,0059

Vemos que f sólo disminuye en un factor de 5 al multiplicar el número de Reynolds por 10.000. Si se desea conocer f a partir de Re_d, la Ecuación (6.38) es demasiado complicada. En la literatura hay muchas aproximaciones alternativas para calcular f de forma explícita a partir de Re_d:

$$f = \begin{cases} 0,316\,\mathrm{Re}_d^{-1/4} & 4000 < \mathrm{Re}_d < 10^5 \quad \text{H. Blasius (1911)} \\ \left[1,8 \log \dfrac{\mathrm{Re}_d}{6,9}\right]^{-2} & \text{Referencia 9} \end{cases} \tag{6.39}$$

Blasius, discípulo de Prandtl, presentó con su fórmula la primera correlación entre fricción en conductos y número de Reynolds. Aunque esta fórmula tiene un rango limitado, basta para cubrir los datos experimentales de Hagen de 1839. En un conducto horizontal, la Ecuación (6.39) indica

$$h_f = \frac{\Delta p}{\rho g} = f \frac{L}{d} \frac{V^2}{2g} = 0,316 \left[\frac{\mu}{\rho V d}\right]^{1/4} \frac{L}{d} \frac{V^2}{2g}$$

o

$$\Delta p = 0,158 L \rho^{3/4} \mu^{1/4} d^{-5/4} V^{7/4} \tag{6.40}$$

en movimiento turbulento a bajos números de Reynolds. Esto explica por qué en los datos de Hagen la caída de presión iba como la potencia 1,75 de la velocidad, Figura 6.4. Nótese que Δp sólo varía ligeramente con la viscosidad, lo cual es característico de los movimientos turbulentos. Escribiendo $Q = \frac{1}{4}\pi d^2 V$, la Ecuación (6.40) queda en la forma

$$\Delta p = 0,241 L \rho^{3/4} \mu^{1/4} d^{-4,75} Q^{1,75} \tag{6.41}$$

Para un caudal Q dado, la presión disminuye con el diámetro más aún que en régimen laminar, Ecuación (6.12). Por ello, la forma más fácil de reducir la presión de bombeo es poner tubos de mayor diámetro, aunque por supuesto son más caros. Duplicar el diámetro para un Q dado disminuye Δp aproximadamente en un factor de 27. Compárese la Ecuación (6.40) con el Ejemplo 5.7 y la Figura 5.10.

La velocidad máxima en flujo turbulento en conductos viene dada por la Ecuación (6.32) particularizada en $r = 0$:

$$\frac{u_{\text{máx}}}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{Ru^*}{\nu} + B \tag{6.42}$$

www.elsolucionario.net

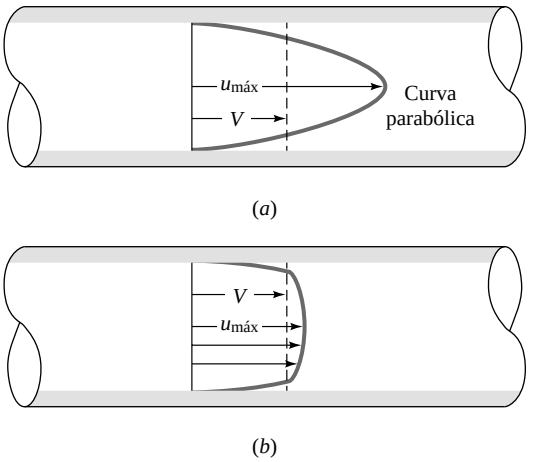


Figura 6.11. Comparación de los perfiles de velocidad en dos flujos, laminar y turbulento, con el mismo caudal: (*a*) flujo laminar; (*b*) flujo turbulento.

Combinando ésta con la Ecuación (6.33), obtenemos una fórmula que relaciona la velocidad media con la máxima:

$$\frac{V}{u_{máx}} \Xi (1+1{,}3\sqrt{f})^{\Phi 1} \tag{6.43}$$

Algunos de los valores numéricos son:

www.elsolucionario.net

Re_d	4000	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$V/u_{máx}$	0,794	0,814	0,852	0,877	0,895	0,909

El cociente varía con el número de Reynolds y es mucho mayor que el valor 0,5 del régimen laminar, Ecuación (6.12). Por ello, el perfil de velocidad turbulento es muy plano en el centro y cae bruscamente a cero en la pared, como muestra la Figura 6.11.

Efecto de la rugosidad de la pared

Hasta los experimentos de Coulomb [6] en 1800 no se supo que la rugosidad de la pared influía en la resistencia de fricción. Sucede que este efecto es despreciable en flujo laminar y las fórmulas obtenidas en esta sección para régimen laminar son válidas incluso con paredes rugosas. Sin embargo, el flujo turbulento sí que se ve afectado por la rugosidad. En la Figura 6.10 la parte lineal de la subcapa viscosa sólo llega a $y^+ = yu^*/\nu = 5$. Así, medido con el diámetro, su espesor y_s es sólo

$$\frac{y_s}{d} = \frac{5\nu/u^*}{d} = \frac{14{,}1}{Re_d\, f^{1/2}} \tag{6.44}$$

Por ejemplo, a $Re_d = 10^5$, $f = 0{,}0180$, e $y_s/d = 0{,}001$. Una rugosidad de la pared de alrededor de $0{,}001d$ destruye dicha subcapa y produce cambios importantes en la ley de la pared de la Figura 6.10.

Las medidas de $u(y)$ en flujo turbulento con paredes rugosas por Nikuradse [7], discípulo de Prandtl, muestran, Figura 6.12*a*, que una rugosidad con altura ϵ desplaza al perfil logarítmico de la pared en una cantidad aproximadamente igual a $\ln \varepsilon^+$, donde $\varepsilon^+ = \varepsilon u^*/\nu$. La pendiente de la ley logarítmica permanece invariable, $1/\kappa$, pero el desplazamiento disminuye la constante B en $\Delta B \Xi (1/\kappa) \ln \varepsilon^+$.

www.elsolucionario.net

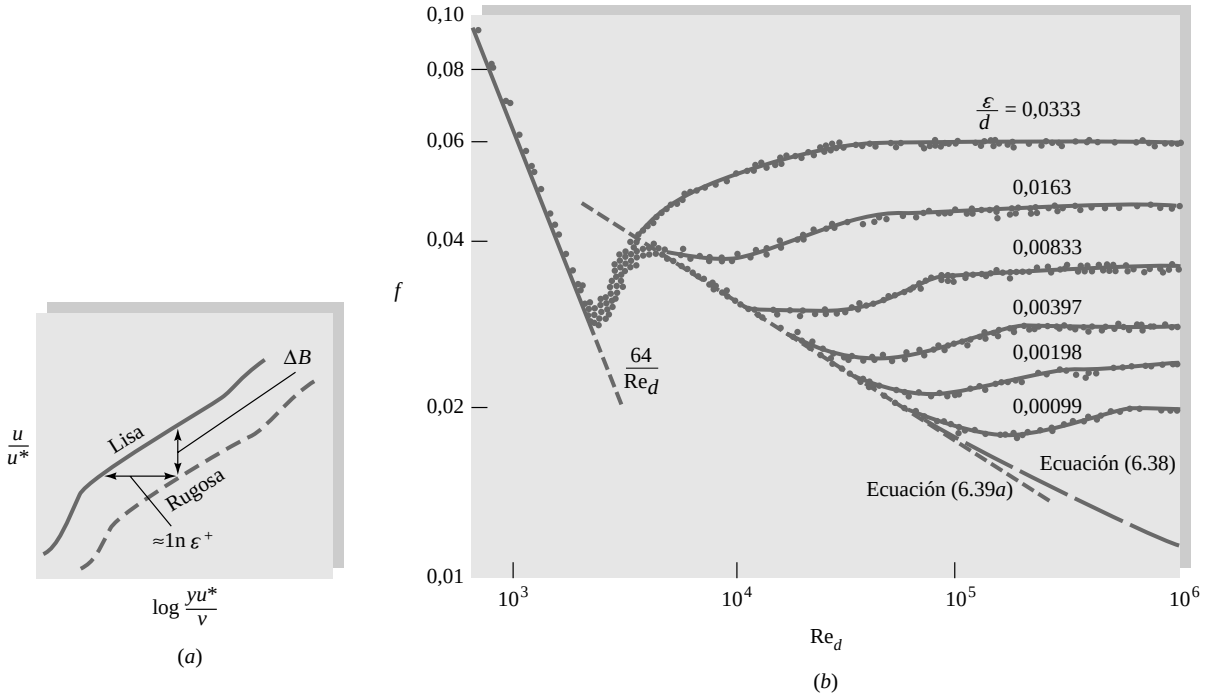


Figura 6.12. Efecto de la rugosidad de la pared en los perfiles de velocidad turbulentos: (*a*) desplazamiento de la ley logarítmica hacia abajo y a la derecha; (*b*) los experimentos con rugosidad producida por granos de arena realizados por Nikuradse [7] muestran un aumento sistemático del coeficiente de fricción turbulento con la rugosidad relativa.

Nikuradse [7] simuló la rugosidad pegando granos de arena de tamaño uniforme en las paredes interiores de tubos, midiendo la caída de presión y el caudal y correlando el coeficiente de fricción con el número de Reynolds, como se muestra en la Figura 6.12*b*. Podemos ver que el coeficiente de fricción laminar permanece inalterado, mientras que el coeficiente de fricción turbulento aumenta monótonamente con la rugosidad ε/d a partir de un cierto instante. Para un valor de ε/d fijo, el coeficiente de fricción se hace constante (flujo *dominado por la rugosidad*) para números de Reynolds suficientemente altos. Los cambios en el comportamiento se dan en valores fijos de $\varepsilon^+ = \varepsilon u^*/\nu$, lo que permite definir los siguientes tres regímenes de rugosidad:

$\frac{\varepsilon u^*}{\nu} < 5$: paredes *hidrodinámicamente lisas*, sin efecto de la rugosidad en la fricción.

$5 \le \frac{\varepsilon u^*}{\nu} \le 70$: rugosidad *de transición*, moderado efecto del número de Reynolds.

$\frac{\varepsilon u^*}{\nu} > 70$: flujo *dominado por la rugosidad*, la subcapa viscosa no existe y la fricción es independiente del número de Reynolds.

En flujo dominado por la rugosidad, $\varepsilon^+ > 70$, los datos de la Figura 6.12*a* siguen la línea

$$\Delta B \equiv \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\varepsilon}{k_s} + 3{,}5 \tag{6.45}$$

y la ley logarítmica queda modificada en la forma

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B + \Delta B = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\varepsilon} + 8{,}5 \tag{6.46}$$

www.elsolucionario.net

donde no aparece la viscosidad, y por ello el flujo dominado por la rugosidad es independiente del número de Reynolds. Si integramos la Ecuación (6.46) para obtener la velocidad medida en el conducto, obtenemos

$$\frac{V}{u^*} = 2,44 \ln \frac{d}{\varepsilon} + 3,2$$

o

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2,0 \log \frac{\varepsilon/d}{3,7} \qquad \text{flujo dominado por la rugosidad} \tag{6.47}$$

No hay efecto del número de Reynolds; por eso la pérdida de carga varía en este caso exactamente con el cuadrado de la velocidad. Algunos valores numéricos del coeficiente de fricción son:

ε/d	0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,05
f	0,00806	0,0120	0,0196	0,0379	0,0716

El coeficiente de fricción aumenta en un factor de 9 cuando la rugosidad se multiplica por 5000. El la región de transición los granos de arena se comportan de forma diferente a las superficies rugosas comerciales, por lo que la Figura 6.12*b* ha sido sustituida en la actualidad por el Diagrama de Moody.

Diagrama de Moody

Para cubrir el rango de transición, C. F. Colebrook [9] combinó en 1939 las relaciones de paredes lisas [Ecuación (6.38)] y flujo dominado por la rugosidad [Ecuación (6.47)] en una fórmula única:

www.elsolucionario.net

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2,0 \log \left[\frac{\varepsilon/d}{3,7} + \frac{2,51}{\mathrm{Re}_d f^{1/2}} \right] \tag{6.48}$$

Esta fórmula se considera aceptable para el cálculo de la fricción turbulenta. En 1944 fue dibujada por L. F. Moody [8] en lo que ahora denominamos *diagrama de Moody* de pérdida de carga (Figura 6.13). Este diagrama es probablemente la figura más útil y conocida de la Mecánica de Fluidos. Es fiable si se aceptan errores inferiores al 15 por 100 en cálculos de diseño sobre el rango completo mostrado en la Figura 6.13. Puede ser utilizada para conductos circulares y no circulares (Sección 6.6) y también para flujos en canales abiertos (Capítulo 10). Incluso puede adaptarse para el cálculo aproximado de capas límites turbulentas (Capítulo 7).

Obtener f a partir del Re_d en la Ecuación (6.48) es complicado, aunque no lo es tanto si se usa el programa EES. Una expresión alternativa proporcionada por Haaland [33],

$$\frac{1}{f^{1/2}} \approx -1,8 \log \left\{ \frac{6,9}{\mathrm{Re}_d} + \left[\frac{\varepsilon/d}{3,7} \right]^{1,11} \right\} \tag{6.49}$$

tiene un error inferior al 2 por 100 respecto a la Ecuación (6.48)

La zona sombreada del diagrama de Moody indica el rango de transición de flujo laminar a flujo turbulento. No existen coeficientes de fricción fiables para este rango, $2000 < \mathrm{Re}_d < 4000$. Nótese que las curvas de rugosidad constante son horizontales en el régimen dominado por la rugosidad, a la derecha de la línea de puntos.

La Tabla 6.1 muestra los valores recomendados de rugosidad para tubos comerciales, obtenidos a partir de ensayos.

www.elsolucionario.net

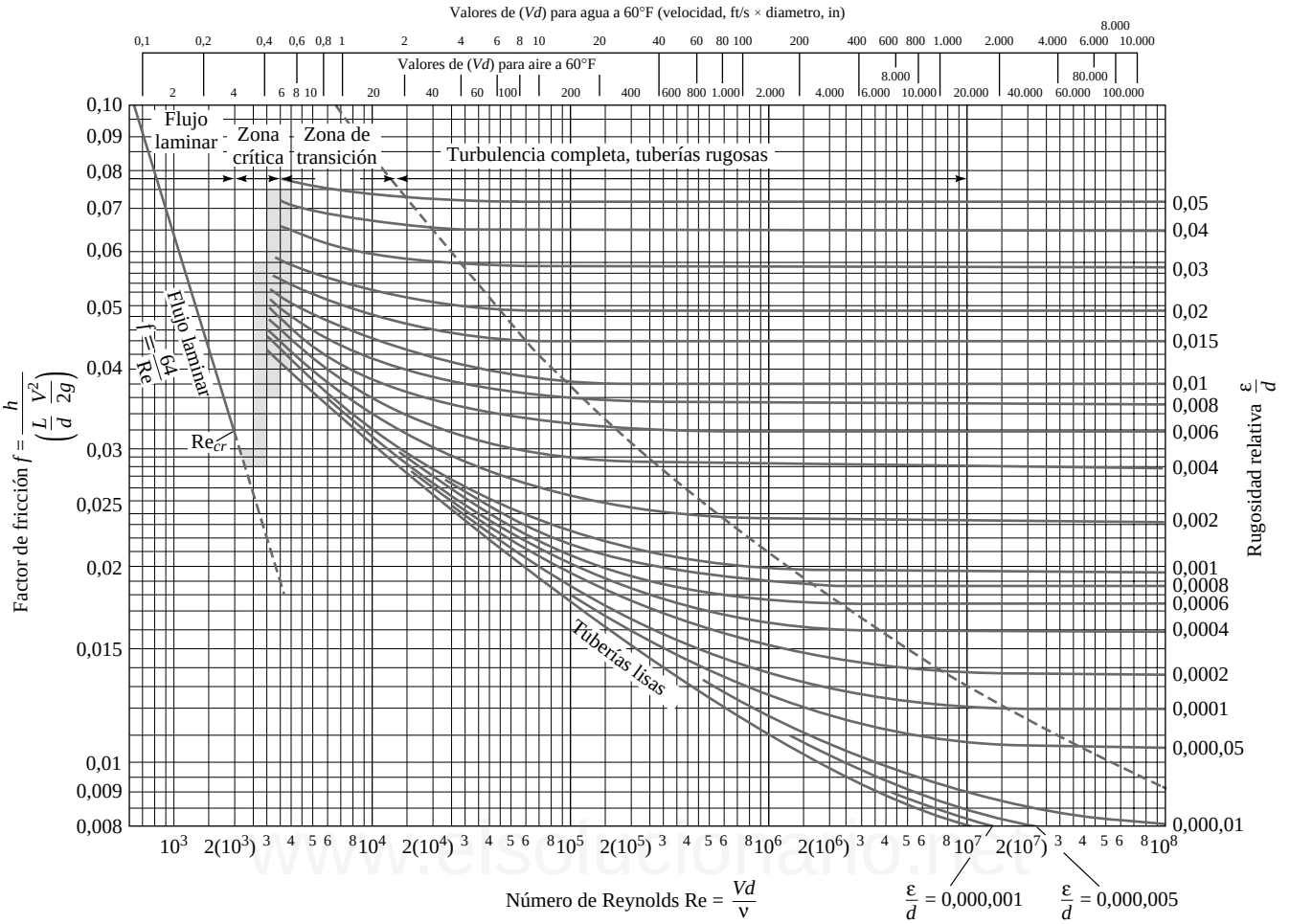


Figura 6.13. Diagrama de Moody para el coeficiente de fricción en conductos de paredes lisas y rugosas. Este cuadro es idéntico a la Ecuación (6.48) para flujos turbulentos. (*De la Referencia 8, con permiso de ASME.*)

Tabla 6.1. Valores recomendados de rugosidad para conductos comerciales.

		ε		
Material	**Condición**	**ft**	**mm**	**Incertidumbre, %**
Acero	Lámina metálica, nueva	0,00016	0,05	±60
	Inoxidable	0,000007	0,02	±50
	Comercial, nuevo	0,00015	0,046	±30
	Estriado	0,01	3,0	±70
	Oxidado	0,007	2,0	±50
Hierro	Fundido, nuevo	0,00085	0,26	±50
	Forjado, nuevo	0,00015	0,046	±20
	Galvanizado, nuevo	0,0005	0,15	±40
	Fundido asfáltico	0,0004	0,12	±50
Latón	Laminado	0,000007	0,002	±50
Plástico	Tubo laminado	0,000005	0,0015	±60
Vidrio	—	Liso	Liso	
Hormigón	Liso	0,00013	0,04	±60
	Rugoso	0,007	2,0	±50
Caucho	Liso	0,000033	0,01	±60
Madera	En duelas	0,0016	0,5	±40

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 6.6[2]

Calcule la pérdida de carga y la caída de presión en un tubo horizontal de 6 in de diámetro y 200 ft de longitud de hierro fundido asfáltico, por el que circula agua a una velocidad media de 6 ft/s.

Solución

- *Diagrama del sistema*. Véase la Figura 6.7 para un tubo horizontal, con $\Delta z = 0$ y h_f proporcional a Δp.
- *Consideraciones*. Flujo turbulento, tubo de hierro fundido asfáltico, $d = 0{,}5$ ft, $L = 200$ ft.
- *Procedimiento*. Calculamos Re_d y ε/d; entramos en el diagrama de Moody, Figura 6.13; obtenemos f, después h_f y Δp.
- *Valores de las propiedades*. De la Tabla A.3 para el agua, pasando a unidades inglesas, $\rho = 998/515{,}38 = 1{,}94$ slug/ft^3, $\mu = 0{,}001/47{,}88 = 2{,}09 \times 10^{-5}$ slug/(ft · s).
- *Paso 1*. Calculamos Re_d y la rugosidad relativa. Como apoyo, Moody introdujo valores de «Vd» para el agua y el aire en la parte superior del diagrama para calcular Re_d. Calculémoslos nosotros mismos:

$$\mathrm{Re}_d = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{(1{,}94 \text{ slug/ft}^3)(6 \text{ ft/s})(0{,}5 \text{ ft})}{2{,}09 \times 10^{-5} \text{ slug/ft} \cdot \text{s}} \approx 279.000 \quad \text{(turbulento)}$$

De la Tabla 6.1, para hierro fundido asfáltico, $\varepsilon = 0{,}0004$ ft. Por lo tanto,

$$\varepsilon/d = (0{,}0004 \text{ ft})/(0{,}5 \text{ ft}) = 0{,}0008$$

- *Paso 2*. Calculamos el coeficiente de fricción entrando en el diagrama de Moody o con la Ecuación (6.48). Si se emplea el diagrama de Moody, Figura 6.13, se necesita un poco de práctica. Buscamos la línea de $\varepsilon/d = 0{,}0008$ en el lado derecho del diagrama y la seguimos hacia la izquierda hasta la línea vertical de $\mathrm{Re}_d = 2{,}79 \times 10^5$. Leemos, aproximadamente, $f \approx 0{,}02$ [o calculamos $f = 0{,}0198$ con la Ecuación (6.48), quizás usando EES].
- *Paso 3*. Calculamos h_f con la Ecuación (6.10) y Δp con la Ecuación (6.8) para un tubo horizontal:

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{V^2}{2g} = (0{,}02)\left(\frac{200 \text{ ft}}{0{,}5 \text{ ft}}\right)\frac{(6 \text{ ft/s})^2}{2(32{,}2 \text{ ft/s}^2)} \approx 4{,}5 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\Delta p = \rho g h_f = (1{,}94 \text{ slug/ft}^3)(32{,}2 \text{ ft/s}^2)(4{,}5 \text{ ft}) \approx 280 \text{ lbf/ft}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios*. En su artículo Moody [8] indicaba que este cálculo, incluso para un tubo nuevo, sólo era preciso con un error de alrededor del ±10 por 100.

EJEMPLO 6.7

Un flujo de aceite, $\rho = 900$ kg/m^3 y $\nu = 0{,}00001$ m^2/s, circula con un caudal de 0,2 m^3/s a través de un tubo de hierro fundido de 200 mm de diámetro y 500 m de longitud. Determine (*a*) la pérdida de carga y (*b*) la caída de presión si el tubo tiene una pendiente hacia abajo de 10° en el sentido del flujo.

Solución

Calculemos primero la velocidad media:

$$V = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{0{,}2 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(0{,}1 \text{ m})^2} = 6{,}4 \text{ m/s}$$

El número de Reynolds en este caso es

$$\mathrm{Re}_d = \frac{Vd}{\nu} = \frac{(6{,}4 \text{ m/s})(0{,}2 \text{ m})}{0{,}00001 \text{ m}^2/\text{s}} = 128.000$$

[2] Este ejemplo fue propuesto por Moody en su artículo en 1944 [8].

www.elsolucionario.net

De la Tabla 6.1 tenemos que, para hierro fundido, $\varepsilon = 0{,}26$ mm. Entonces,

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0{,}26 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} = 0{,}0013$$

Entramos en el diagrama de Moody por el lado derecho con $\varepsilon/d = 0{,}0013$ (hay que interpolar) y nos desplazamos hacia la derecha hasta Re = 128.000. Leemos $f \approx 0{,}0225$ [con la Ecuación (6.48) habríamos obtenido un valor de $f = 0{,}0227$]. La pérdida de carga es

$$h_f = f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} = (0{,}0225)\frac{500 \text{ m}}{0{,}2 \text{ m}}\frac{(6{,}4 \text{ m/s})^2}{2(9{,}8 \text{ m/s}^2)} = 117 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

De la Ecuación (6.9) para tubos inclinados tenemos

$$h_f = \frac{\Delta p}{\gamma} + z_1 - z_2 = \frac{\Delta p}{\gamma} + L \text{ sen } 10°$$

$$\Delta p = \rho g[h_f - (500 \text{ m}) \text{ sen } 10°] = \rho g(117 \text{ m} - 87 \text{ m})$$

o

$$= (900 \text{ kg/m}^3)(9{,}81 \text{ m/s}^2)(30 \text{ m}) = 265.000 \text{ kg/(m} \cdot \text{s}^2) = 265.000 \text{ Pa} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

EJEMPLO 6.8

Repita el Ejemplo 6.4 para ver si es posible que haya una solución turbulenta, suponiendo paredes lisas.

Solución

www.elsolucionario.net

En el Ejemplo 6.4 estimamos una pérdida de carga $h_f \approx 1{,}66$ ft suponiendo flujo laminar ($\alpha \approx 2{,}0$). Para esta condición el coeficiente de fricción es

$$f = h_f\frac{d}{L}\frac{2g}{V^2} = (1{,}66 \text{ ft})\frac{(0{,}004 \text{ ft})(2)(32{,}2 \text{ ft/s}^2)}{(1{,}0 \text{ ft})(3{,}32 \text{ ft/s})^2} \approx 0{,}0388$$

Suponiendo flujo laminar, $\text{Re}_d = 64/f = 64/0{,}0388 \approx 1650$, como mostramos en el Ejemplo 6.4. Sin embargo, el diagrama de Moody (Figura 6.13) nos indica que también podemos tener $f = 0{,}0388$ con flujo *turbulento*. Para paredes lisas, leemos $f = 0{,}0388$ con un valor aproximado de $\text{Re}_d \approx 4500$. Si el flujo fuera turbulento, deberíamos cambiar el factor de energía cinética por $\alpha \approx 1{,}06$ [Ecuación (3.73)], por lo que corregimos $h_f \approx 1{,}82$ ft y $f \approx 0{,}0425$. Conocido f podemos estimar el número de Reynolds a partir de las fórmulas:

$$\text{Re}_d \approx 3250 \quad [\text{Ecuación (6.38)}] \qquad \text{o} \qquad \text{Re}_d \approx 3400 \quad [\text{Ecuación (6.39}b\text{)}]$$

De modo que el flujo *podría* haber sido turbulento, en cuyo caso la viscosidad del fluido hubiera sido

$$\mu = \frac{\rho V d}{\text{Re}_d} = \frac{1{,}80(3{,}32)(0{,}004)}{3300} = 7{,}2 \times 10^{-6} \text{ slug/(ft} \cdot \text{s)} \qquad \textit{Resp.}$$

Esto es alrededor de un 55 por 100 menor que nuestra estimación laminar del Ejemplo 6.5. Si se quiere evitar esta duplicidad de soluciones, al poner el problema conviene elegir números de Reynolds inferiores a 1000.

6.7. TRES TIPOS DE PROBLEMAS SOBRE FLUJO EN TUBOS

El diagrama de Moody (Figura 6.13) puede ser utilizado para resolver prácticamente todos los problemas sobre flujos con fricción en conductos. Sin embargo, muchos de los problemas necesitan iteraciones y re-

www.elsolucionario.net

petición de cálculos porque el diagrama de Moody es esencialmente un *diagrama de pérdidas de carga*. Se suponen conocidas todas las demás variables, se calcula Re_d, entrando en el diagrama se obtiene f y con él determinamos h_f. Éste es uno de los tres problemas fundamentales que encontramos en los cálculos de flujos en conductos:

1. Dados d, L y V o Q, ρ, μ y g, calcular la pérdida de carga h_f (problema de pérdida de carga).
2. Dados d, L, h_f, ρ, μ y g, calcular la velocidad V o el caudal Q (problema de flujo volumétrico o caudal).
3. Dados Q, L, h_f, ρ, μ y g, calcular el diámetro d del tubo (problema de dimensionado).

El problema 1 es el único a cuya solución se ajusta bien el diagrama de Moody. Para calcular la velocidad (problema 2) o el diámetro (problema 3) tenemos que iterar, ya que V y d aparecen en ordenadas y en abscisas en el diagrama.

Hay dos alternativas a los problemas iterativos 2 y 3: (*a*) preparar un diagrama de Moody modificado apropiado para nuestro problema (véanse los Problemas P6.68 y P6.73) o (*b*) emplear un programa de resolución de ecuaciones, por ejemplo EES [47], que proporcione directamente la solución una vez introducidos los datos. Los Ejemplos 6.9 y 6.11 muestran cómo resolver estos problemas utilizando EES.

Problemas tipo 2: cálculo del caudal

A pesar de que la velocidad (o caudal) aparece tanto en ordenadas como en abscisas en el diagrama de Moody, la iteración para flujo turbulento es rápida porque f varía lentamente con Re_d. Alternativamente, en el espíritu del Ejemplo 5.7, podríamos tomar (ρ, μ, d) como nuevas variables dimensionalmente independientes para expresar la pérdida de carga adimensional en función de la *velocidad* adimensional. El resultado es[3]

$$\Re = \mathrm{fcn}(\mathrm{Re}_d) \quad \text{donde} \quad \Re = \frac{gd^3h_f}{Lv^2} = \frac{f\,\mathrm{Re}_d^2}{2} \tag{6.50}$$

www.elsolucionario.net

En el Ejemplo 5.7 ya hicimos este cálculo, que proporcionó la sencilla correlación $\zeta \cong 0{,}155\ \mathrm{Re}_d^{1{,}75}$, válida para flujos turbulentos con paredes lisas y $\mathrm{Re}_d < 10^5$.

Una fórmula válida para todos los flujos turbulentos se obtiene escribiendo la interpolación de Colerbrook, Ecuación (6.48), en la forma de la Ecuación (6.50):

$$\mathrm{Re}_d = (8\Re)^{1/2} \log\left[\frac{\varepsilon/d}{3{,}7} + \frac{1{,}775}{\sqrt{\Re}}\right] \qquad \Re = \frac{gd^3h_f}{Lv^2} \tag{6.51}$$

Dado ζ, esta expresión nos permite calcular Re_d (y de ahí la velocidad) directamente. Ilustraremos estos dos planteamientos con el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6.9

A través de un tubo de 30 cm de diámetro y 100 m de longitud fluye petróleo, con $\rho = 950$ kg/m^3 y $\nu = 0{,}000002$ m^2/s, con una pérdida de carga de 8 m. La rugosidad relativa es $\varepsilon/d = 0{,}0002$. Calcule la velocidad media y el caudal.

Solución directa

Primero calculamos la pérdida de carga adimensional:

$$\Re = \frac{gd^3h_f}{Lv^2} = \frac{(9{,}81\ \mathrm{m/s^2})(0{,}3\ \mathrm{m})^3(8{,}0\ \mathrm{m})}{(100\ \mathrm{m})(2\times10^{-5}\ \mathrm{m^2/s})^2} = 5{,}30\times10^7$$

[3] El parámetro ζ fue sugerido por H. Rouse en 1942.

www.elsolucionario.net

Ahora entramos en la Ecuación (6.51) para calcular el número de Reynolds:

$$\mathrm{Re}_d = \Phi[8(5{,}3\times10^7)]^{1/2}\log\left[\frac{0{,}0002}{3{,}7}+\frac{1{,}775}{\sqrt{5{,}3\times10^7}}\right] = 72.600$$

La velocidad y el caudal se obtienen del número de Reynolds:

$$V = \frac{v\,\mathrm{Re}_d}{d} = \frac{(2\times10^{-5}\ \mathrm{m^2/s})(72.600)}{0{,}3\ \mathrm{m}} \cong 4{,}84\ \mathrm{m/s}$$

$$Q = V\frac{\Theta}{4}d^2 = 4{,}84\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\left(\frac{\Theta}{4}(0{,}3\ \mathrm{m})^2\right) \cong 0{,}342\ \mathrm{m^3/s} \qquad \textit{Resp.}$$

No se requiere iteración, pero el cálculo falla si existen pérdidas adicionales. Nótese que no nos hemos molestado en calcular el coeficiente de fricción.

Solución iterativa

En la expresión para el coeficiente de fricción conocemos todos los parámetros excepto V:

$$f = h_f\frac{d}{L}\frac{2g}{V^2} = (8\ \mathrm{m})\left(\frac{0{,}3\ \mathrm{m}}{100\ \mathrm{m}}\right)\left(\frac{2(9{,}81\ \mathrm{m/s^2})}{V^2}\right) \quad \text{o} \quad fV^2 \cong 0{,}471 \ \text{(unidades SI)}$$

Para comenzar sólo necesitamos una estimación inicial para f, después calculamos $V = \sqrt{0{,}471/f}$, determinamos Re_d, obtenemos una mejor estimación para f con el diagrama de Moody y repetimos. El proceso converge bastante rápido. Una buena estimación inicial es el valor en el «régimen dominado por la rugosidad» con $\varepsilon/d = 0{,}0002$, o $f \cong 0{,}014$ de la Figura 6.13. La iteración se muestra a continuación:

Estimamos $f \cong 0{,}014$, después calculamos $V = \sqrt{0{,}471/0{,}014} = 5{,}80$ m/s y $\mathrm{Re}_d = Vd/\nu \cong 87.000$.
Con $\mathrm{Re}_d = 87.000$ y $\varepsilon/d = 0{,}0002$, calculamos $f_{\text{nuevo}} \cong 0{,}0195$ [Ecuación (6.48)].
A partir del nuevo $f \cong 0{,}0195$, $V = \sqrt{0{,}471/0{,}0195} = 4{,}91$ m/s y $\mathrm{Re}_d = Vd/\nu \cong 73.700$. Con $\mathrm{Re}_d = 73.700$ y $\varepsilon/d = 0{,}0002$, calculamos $f_{\text{nuevo}} \cong 0{,}0201$ [Ecuación (6.48)].
Con la mejor estimación $f \cong 0{,}0201$, $V = \sqrt{0{,}471/0{,}0201} = 4{,}84$ m/s y $\mathrm{Re}_d = Vd/\nu \cong 72.600$. Con $\mathrm{Re}_d = 72.600$ y $\varepsilon/d = 0{,}0002$, calculamos $f_{\text{nuevo}} \cong 0{,}0201$ [Ecuación (6.48)].

Hemos conseguido convergencia hasta la tercera cifra significativa. Por lo tanto, nuestra solución iterativa es

$$V = 4{,}84\ \mathrm{m/s}$$

$$Q = V\left(\frac{\Theta}{4}\right)d^2 = (4{,}84)\left(\frac{\Theta}{4}\right)(0{,}3)^2 \cong 0{,}342\ \mathrm{m^3/s} \qquad \textit{Resp.}$$

El procedimiento iterativo no es demasiado pesado y es muy sencillo, por lo que es utilizado de forma rutinaria por los ingenieros. Por supuesto, este procedimiento repetitivo es ideal para ser implementado en un ordenador.

Solución con EES

Con EES, sólo tenemos que introducir los datos y las ecuaciones pertinentes, dejando al programa hacer el resto. Por supuesto, deberán usarse las unidades adecuadas. En este ejemplo, introducimos los datos en unidades SI:

```
rho=950   nu=2E-5   d=0,3   L=100   epsod=0,0002   hf=8,0   g=9,81
```

Las ecuaciones apropiadas son la fórmula de Moody (6.48) junto con la definición de número de Reynolds, del caudal en función de la velocidad, y la fórmula de Darcy para la pérdida de carga (6.10):

www.elsolucionario.net


```
Re=V*d/nu
 Q=V*pi*d^2/4
 F=(-2,0*log10(epsod/3,7+2,51/Re/f^0,5))^(-2)
hf=f*L/d*V^2/2/g
```

EES interpreta «pi» como 3,141593. Pulsamos «SOLVE» en el menú correspondiente. Si se han cometido errores, EES informará de que el sistema no puede ser resuelto e intentará explicar por qué. En caso contrario, el programa realizara la iteración, y EES nos proporcionara la solución correcta:

```
Q=0,342    V=4,84    f=0,0201    Re=72585
```

Las unidades aparecen en una lista aparte como [m, kg, s, N]. Este elegante procedimiento para resolver un problema ingenieril sólo tiene una pega: que el usuario no comprueba la solución. Por ejemplo, ¿se han introducido los datos correctamente? ¿Es el número de Reynolds turbulento?

EJEMPLO 6.10

Repita el ejemplo de Moody, Ejemplo 6.6, suponiendo conocida la pérdida de carga h_f = 4,5 ft y desconocida la velocidad (6,0 ft/s).

Solución directa

Calculamos el parámetro ζ, y obtenemos el número de Reynolds de la Ecuación (6.51):

$$\mathcal{R} = \frac{gd^3h_f}{Lv^2} = \frac{(32{,}2\ \text{ft/s}^2)(0{,}5\ \text{ft})^3(4{,}5\ \text{ft})}{(200\ \text{ft})(1{,}1\times10^{-5}\ \text{ft}^2/\text{s})^2} = 7{,}48\times10^8$$

www.elsolucionario.net

De la Ecuación (6,51)
$$\text{Re}_d = [8(7{,}48\times10^8)]^{1/2}\log\left|\frac{0{,}0008}{3{,}7} + \frac{1{,}775}{\sqrt{7{,}48\times10^8}}\right| = 274.800$$

Por tanto,
$$V = \nu\frac{\text{Re}_d}{d} = \frac{(1{,}1\times10^{-5})(274.800)}{0{,}5} = 6{,}05\ \text{ft/s} \qquad \textit{Resp.}$$

El resultado no es exactamente 6,0 ft/s porque la pérdida de carga de 4,5 ft fue redondeada en el Ejemplo 6.6.

Solución iterativa

Como en la Ecuación (6.10), el coeficiente de fricción depende de la velocidad:

$$f = h_f\frac{d}{L}\frac{2g}{V^2} = (4{,}5\ \text{ft})\frac{0{,}5\ \text{ft}}{200\ \text{ft}}\left|\frac{2(32{,}2\text{ft/s}^2)}{V^2}\right| = \frac{0{,}7245}{V^2}$$

o
$$V = \sqrt{0{,}7245/f}$$

Conociendo ε/d = 0,0008, podemos estimar f e iterar hasta que converja la velocidad. Comenzamos con la estimación para flujo dominado por la rugosidad $f = 0{,}019$ de la Figura 6.13. Las correspondientes iteraciones son

$$f_1 = 0{,}019: \quad V_1 = \sqrt{0{,}7245/f_1} = 6{,}18\ \text{ft/s} \quad \text{Re}_{d1} = \frac{Vd}{\nu} = 280.700$$
$$f_2 = 0{,}01987: \quad V_2 = 6{,}05\ \text{ft/s} \quad \text{Re}_{d_2} = 274.900$$
$$f_3 = 0{,}01982: \quad V_3 = 6{,}046\ \text{ft/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Los cálculos convergen bastante rápido al mismo resultado obtenido con la solución directa.

www.elsolucionario.net

Problema tipo 3: cálculo del diámetro del conducto

El diagrama de Moody es especialmente complicado cuando se desconoce el diámetro d del tubo, ya que éste aparece en los tres parámetros Re_d, ε/d y f. Además depende de que se conozca la velocidad media V o el caudal Q. No se pueden conocer ambos, porque tendríamos $d = (4Q/\pi V)^{1/2}$.

Supongamos conocido el flujo volumétrico Q. Nótese que esto nos obliga a redefinir el número de Reynolds en función de Q:

$$\mathrm{Re}_d = \frac{Vd}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d\nu} \tag{6.52}$$

Entonces, si tomamos (Q, ρ, μ) como variables dimensionalmente independientes para adimensionalizar el problema (para eliminar d), obtenemos la relación funcional

$$\mathrm{Re}_d = \frac{4Q}{\pi d\nu} = \mathrm{fcn}\left(\frac{gh_f}{L\nu^5}, \frac{\varepsilon}{Q}\right) \tag{6.53}$$

de donde podremos despejar d cuando conozcamos el término de la derecha. Desafortunadamente, el autor no conoce ninguna *fórmula* para esta relación, ni es capaz de reordenar los términos de la Ecuación (6.48) en la forma explícita de la Ecuación (6.53). Podríamos recalcular y *representar* la relación. Pero aquí parece razonable renunciar a representar la relación o a trabajar con una fórmula de ajuste y sencillamente plantear el problema como una iteración en términos de las variables del diagrama de Moody. En ese caso debemos expresar el coeficiente de fricción en función del caudal:

$$f = h_f \frac{d}{L}\frac{2g}{V^2} = \frac{\pi^2}{8}\frac{gh_f d^5}{LQ^2} \tag{6.54}$$

www.elsolucionario.net

Los dos ejemplos siguientes ilustran el procedimiento de iteración.

EJEMPLO 6.11

Repita el Ejemplo 6.9 suponiendo que $Q = 0{,}342\ \mathrm{m^2/s}$ y $\varepsilon = 0{,}06$ mm son datos conocidos, pero d (30 cm) es desconocido. Tome $L = 100$ m, $\rho = 950\ \mathrm{kg/m^3}$, $\nu = 2 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$ y $h_f = 8$ m.

Solución iterativa

Primero escribimos el diámetro en función del coeficiente de fricción:

$$f = \frac{\pi^2}{8}\frac{(9{,}81\ \mathrm{m/s^2})(8\ \mathrm{m})d^5}{(100\ \mathrm{m})(0{,}342\ \mathrm{m^3/s})^2} = 8{,}28d^5 \quad \text{o} \quad d \approx 0{,}655 f^{1/5} \tag{1}$$

en unidades SI. También escribimos el número de Reynolds y la rugosidad relativa en función del diámetro:

$$\mathrm{Re}_d = \frac{4(0{,}342\ \mathrm{m^3/s})}{\pi(2\times10^{-5}\ \mathrm{m^2/s})d} = \frac{21.800}{d} \tag{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{6\times10^{-5}\ \mathrm{m}}{d} \tag{3}$$

Estimamos f, empleando la Ecuación (1) calculamos d, después obtenemos Re_d de (2) y ε/d de (3) y volvemos a entrar en el diagrama de Moody o en la Ecuación (6.48) para obtener una mejor estimación de f. Repetimos hasta la convergencia (bastante rápida). Al no tener ninguna estimación inicial del f, el autor ha utilizado el valor $f \approx 0{,}03$ (más o menos en el medio de la región turbulenta del diagrama de Moody). Se obtienen los siguientes resultados:

www.elsolucionario.net

$$f = 0{,}03 \qquad d = 0{,}655(0{,}03)^{1/5} = 0{,}325 \text{ m}$$

$$\text{Re}_d = \frac{21.800}{0{,}325} = 67.000 \qquad \frac{\varepsilon}{d} = 1{,}85 \times 10^{-4}$$

Ecuación (6.48): $f_{\text{nuevo}} = 0{,}0203$ luego $d_{\text{nuevo}} = 0{,}301$ m

$$\text{Re}_{d,\text{nuevo}} = 72.500 \qquad \frac{\varepsilon}{d} = 2{,}0 \times 10^{-4}$$

Ecuación (6.48): $f_{\text{mejor}} = 0{,}0201$ y $d = 0{,}300$ m *Resp.*

El procedimiento ha convergido al resultado correcto de 30 cm dado en el Ejemplo 6.9.

Solución con EES

Para resolver con EES, introducimos los datos y las ecuaciones adecuadas. El diámetro es la incógnita. Por supuesto, debemos usar las unidades adecuadas. Para este ejemplo es aconsejable emplear unidades SI:

```
rho=950    nu=2E-5    L=100    eps=6E-5    hf=8,0    g=9,81    Q=0,342
```

Las ecuaciones son la fórmula de Moody, la definición de número de Reynolds, el caudal en función de la velocidad, la fórmula de pérdida de carga de Darcy y la rugosidad relativa:

```
Re=V*d/nu
 Q=V*pi*d^2/4
 F=(-2,0*log10(epsod/3,7+2,51/Re/f^0,5))^(-2)
hf=f*L/d*V^2/2/g
epsod=eps/d
```

www.elsolucionario.net

Pulsamos «SOLVE» en el menú. Al contrario que en el Ejemplo 6.9, esta vez EES informa de que el sistema *no puede* ser resuelto, con error «logarithm of a negative number» (logaritmo de número negativo). El motivo es que hemos permitido que EES suponga que f puede ser un número negativo. En el menú «Variable Info» cambiamos los límites para f de forma que no pueda ser negativo. De esta forma EES proporciona la solución:

```
d=0,300    V=4,84    f=0,0201    Re=72.585
```

Las unidades son [m, kg, s, N]. Como siempre, al usar este programa el usuario debe de comprobar la coherencia ingenieril de los resultados. Por ejemplo, ¿el número de Reynolds es turbulento? (Sí.)

EJEMPLO 6.12

Repita el problema propuesto por Moody, Ejemplo 6.6, para calcular la rugosidad de la pared ε en el caso de que el resto de datos sean conocidos: $V = 6$ ft/s, $d = 0{,}5$ ft, $L = 200$ ft, $\rho = 1{,}94$ slug/ft^3, $\mu = 2{,}09 \times 10^{-5}$ slug/(ft · s), $h_f = 4{,}5$ ft.

Solución

- *Solución analítica*. Esto no es tan complicado como cuando d es incógnita, porque ϵ sólo aparece en un parámetro, ε/d. Podemos calcular inmediatamente Q, Re_d y el coeficiente de fricción:

$$Q = VA = V\frac{\pi}{4}d^2 = (6{,}0 \text{ ft/s})\frac{\pi}{4}(0{,}25 \text{ ft})^2 = 1{,}18 \text{ ft}^3/\text{s}$$

$$\text{Re}_d = \frac{\rho Vd}{\mu} = \frac{(1{,}94 \text{ slug/ft}^3)(6 \text{ ft/s})(0{,}5 \text{ ft})}{2{,}09 \times 10^{-5} \text{ slug/(ft} \cdot \text{s)}} = 278.500$$

$$f = \frac{h_f}{(L/d)(V^2/2g)} = \frac{4{,}5 \text{ ft}}{(200 \text{ ft}/0{,}5 \text{ ft})[(6 \text{ ft/s})^2/2/(32{,}2 \text{ ft/s}^2)]} = 0{,}0201$$

www.elsolucionario.net

Conocidos f y Re_d, entramos en el diagrama de Moody o resolvemos la Ecuación (6.48) para la rugosidad relativa:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0\log_{10}\left[\frac{\varepsilon/d}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{\mathrm{Re}_d\sqrt{f}}\right] \quad \text{o} \quad \frac{1}{\sqrt{0{,}0201}} = -2{,}0\log_{10}\left[\frac{\varepsilon/d}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{278.500\sqrt{0{,}0201}}\right]$$

Después de un poco de álgebra, despejamos $\varepsilon/d = 0{,}000871$ o $\varepsilon \equiv 0{,}000435$ ft. *Resp.*

- *Solución con EES.* Simplemente introducimos los datos, en unidades del sistema británico (ft, s, lbf, slugs):

```
rho=1,94    mu=2,09E-5    d=0,5    V=6,0    L=200    hf=8,0    g=32,2
```

Después introducimos las mismas cinco ecuaciones del Ejemplo 6.11:

```
Re=V*d/nu
 Q=V*pi*d^2/4
 F=(-2,0*log10(epsod/3,7+2,51/Re/f^0,5))^(-2)
hf=f*L/d*V^2/2/g
epsod=eps/d
```

Con cualquier estimación razonable de $\varepsilon > 0$, EES devuelve el resultado $\varepsilon \equiv 0{,}000435$ ft. *Resp.*

- *Comentarios:* Calcular la rugosidad no es tan complicado como calcular el diámetro. Las diferencias entre el valor $\varepsilon = 0{,}00040$ ft proporcionado por Moody y el obtenido en este ejemplo se deben a que hemos redondeado h_f a 4,5 ft.

Respecto a los problemas de dimensionado de tubos, debemos indicar que los tubos comerciales sólo se fabrican con ciertos diámetros específicos. La Tabla 6.2 da una lista de los diámetros existentes para tubos de agua estándar en Estados Unidos. Si en el cálculo de un diámetro obtenemos un valor intermedio, debemos escoger el tamaño inmediatamente superior.

www.elsolucionario.net

Tabla 6.2. Diámetro nominal y real de tuberías de acero forjado clase 40*.

Diámetro nominal, in	Diámetro real, in
$\frac{1}{8}$	0,269
$\frac{1}{4}$	0,364
$\frac{3}{8}$	0,493
$\frac{1}{2}$	0,622
$\frac{3}{4}$	0,824
1	1,049
$1\frac{1}{2}$	1,610
2	2,067
$2\frac{1}{2}$	2,469
3	3,068

* Los diámetros nominal y real difieren en menos de un 1 por 100 por encima de 4 in.

6.8. FLUJO EN CONDUCTOS NO CIRCULARES[4]

Si el conducto no tiene sección circular, el análisis del flujo completamente desarrollado es análogo al de tubos circulares, aunque algo más complicado algebraicamente. En flujo laminar las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento se pueden resolver en forma exacta. En flujos turbulentos se puede hacer uso del perfil logarítmico o, aún mejor y más simple, del diámetro hidráulico, que es una aproximación excelente.

[4] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

Diámetro hidráulico

En un conducto de sección no circular podemos seguir utilizando el volumen de control de la Figura 6.7, pero el área transversal A no es πR^2, ni el perímetro mojado $\mathcal{P}$ (sometido a esfuerzos de fricción) es $2\pi R$. La ecuación de cantidad de movimiento (6.9*a*) queda entonces

$$\Delta p A + \rho g A \Delta L \operatorname{sen} \theta - \tau_w \mathcal{P} \Delta L = 0$$

o

$$h_f = \frac{\Delta p}{\rho g} + \Delta z = \frac{\tau_w}{\rho g} \frac{\Delta L}{A/\mathcal{P}} \tag{6.55}$$

Esta expresión es idéntica a la Ecuación (6.9*b*) salvo que (1) el esfuerzo en la pared es aquí un valor medio integrado a lo largo del perímetro mojado y (2) aparece una escala de longitud $A/\mathcal{P}$ en lugar del radio del conducto R. Por esta razón se dice que un conducto de sección no circular tiene un *radio hidráulico* R_h definido por

$$R_h = \frac{A}{\mathcal{P}} = \frac{\text{área sección transversal}}{\text{perímetro mojado}} \tag{6.56}$$

Este concepto es muy utilizado en flujo en canales abiertos (Capítulo 10), donde la sección del canal no es casi nunca circular. Si por comparación con la Ecuación (6.11) para flujo en tubos definimos el coeficiente de fricción en función del esfuerzo medio,

$$f_{\text{CNC}} = \frac{8\tau_w}{\rho V^2} \tag{6.57}$$

donde CNC significa conducto no circular y, como es usual, $V = Q/A$, la Ecuación (6.55) queda

$$h_f = f \frac{L}{4R_h} \frac{V^2}{2g} = f \frac{L}{D_h} \frac{V^2}{2g} \tag{6.58}$$

Esta expresión es equivalente a la Ecuación (6.10) excepto en que d está sustituido por $4R_h$. Por eso se define habitualmente el *diámetro hidráulico* como

$$D_h = \frac{4A}{\mathcal{P}} = \frac{4 \times \text{área}}{\text{perímetro mojado}} = 4R_h \tag{6.59}$$

Debemos resaltar que el perímetro mojado está determinado por todas las superficies sometidas a esfuerzos de fricción. Por ejemplo, en un anillo circular se deben incluir el perímetro interior y el exterior. El hecho de que D_h sea igual a $4R_h$ es simplemente esto: una nota de sentido del humor ingenieril. En el caso degenerado de conductos circulares, $D_h = 4\pi R^2/(2\pi R) = 2R$, como debe ser.

Debemos esperar, por tanto, a partir del análisis dimensional que el coeficiente de fricción basado en el diámetro hidráulico, como en la Ecuación (6.58), sea función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa basados también en el diámetro hidráulico

$$f = F\left(\frac{VD_h}{\nu}, \frac{\varepsilon}{D_h}\right) \tag{6.60}$$

y realmente así ocurre. Pero no podemos esperar que el diagrama de Moody (Figura 6.13) sea válido con esta nueva escala de longitud. Y estrictamente no lo es, aunque da resultados sorprendentemente precisos:

www.elsolucionario.net

$$f \Xi \begin{cases} \dfrac{64}{\mathrm{Re}_{D_h}} & \pm 40\% \quad \text{flujo laminar} \\ f_{\text{Moody}}\left[\mathrm{Re}_{D_h}, \dfrac{\varepsilon}{D_h}\right] & \pm 15\% \quad \text{flujo turbulento} \end{cases} \tag{6.61}$$

Examinemos ahora algunos casos particulares.

Flujo entre placas paralelas

Probablemente el flujo más sencillo en un conducto no circular es el flujo completamente desarrollado entre placas paralelas separadas una distancia 2*h*, como en la Figura 6.14. Tal y como se indica, éste es el caso límite de flujo en un canal rectangular muy ancho, $b \gg h$, por lo que el flujo es básicamente bidimensional, $u = u(y)$ solamente. El diámetro hidráulico es

$$D_h = \frac{4A}{\mathcal{P}} = \lim_{b\to\infty} \frac{4(2bh)}{2b + 4h} = 4h \tag{6.62}$$

o sea, dos veces la distancia de separación entre placas. El gradiente de presión es constante $(-dp/dx) = \Delta p/L$, donde L es la longitud de canal en la dirección del eje *x*.

Solución para flujo laminar

La solución para flujo laminar fue presentada en la Sección 4.11, en relación con la Figura 4.16*b*. Revisemos esos resultados:

www.elsolucionario.net

$$u = u_{\text{máx}}\left[1 - \frac{y^2}{h^2}\right] \quad \text{donde} \quad u_{\text{máx}} = \frac{h^2}{2\mu}\frac{\Delta p}{L}$$

$$Q = \frac{bh^3}{3\mu}\frac{\Delta p}{L}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{h^2}{3\mu}\frac{\Delta p}{L} = \frac{2}{3}u_{\text{máx}} \tag{6.63}$$

$$\tau_w = \mu\left|\frac{du}{dy}\right|_{y=h} = h\frac{\Delta p}{L} = \frac{3\mu V}{h}$$

$$h_f = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{3\mu L V}{\gamma h^2}$$

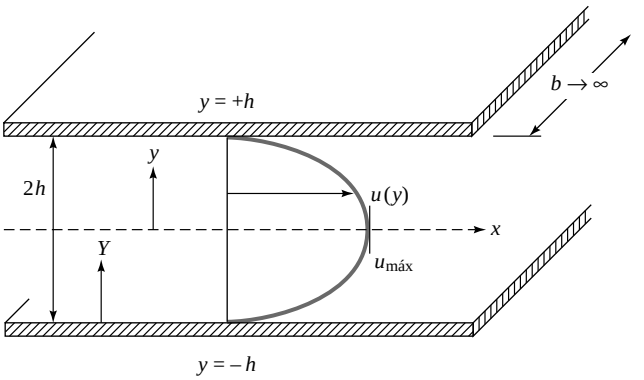


Figura 6.14. Flujo completamente desarrollado entre placas paralelas.

www.elsolucionario.net

Ahora empleamos la pérdida de carga para determinar el coeficiente de fricción laminar:

$$f_{\text{lam}} = \frac{h_f}{(L/D_h)(V^2/2g)} = \frac{96\mu}{\rho V(4h)} = \frac{96}{\text{Re}_{D_h}} \tag{6.64}$$

Así, si no hubiésemos podido utilizar la teoría laminar y hubiéramos tomado como aproximación $f \approx 64/\text{Re}_{D_h}$, hubiésemos subestimando este valor en un 33 por 100. La aproximación del diámetro hidráulico es demasiado burda para flujos laminares en conductos no circulares, como previene la Ecuación (6.61).

La solución laminar, en el caso general, se hace inestable para valores de $\text{Re}_{D_h} \approx 2000$, igual que ocurre en el flujo en tubos; aparece la transición y el flujo se hace turbulento.

Solución para flujo turbulento

En el caso de flujo entre placas paralelas, podemos emplear de nuevo la ley logarítmica, Ecuación (6.28), como aproximación válida en todo el campo fluido, tomando la coordenada Y de la Figura 6.14, medida desde la pared, en lugar de y:

$$\frac{u(Y)}{u^*} \approx \frac{1}{\kappa}\ln\frac{Yu^*}{\nu} + B \qquad 0 < Y < h \tag{6.65}$$

Esta distribución se parece mucho al perfil turbulento aplanado del flujo en conductos de la Figura 6.11*b*, y la velocidad media es

$$V = \frac{1}{h}\int_0^h u\,dY = u^*\left[\frac{1}{\kappa}\ln\frac{hu^*}{\nu} + B - \frac{1}{\kappa}\right] \tag{6.66}$$

www.elsolucionario.net

Recordando que $V/u^* = (8/f)^{1/2}$, vemos que la Ecuación (6.66) es equivalente a una ley de fricción entre placas paralelas. Reagrupando e introduciendo los valores numéricos de las constantes, tenemos

$$\frac{1}{f^{1/2}} \approx 2{,}0\ \log\ (\text{Re}_{D_h} f^{1/2}) - 1{,}19 \tag{6.67}$$

donde hemos introducido el diámetro hidráulico $D_h = 4h$. La expresión es notablemente parecida a la Ecuación (6.38) de fricción en tubos. Por tanto, podemos concluir que el uso del diámetro hidráulico en este movimiento turbulento es muy apropiado. Lo mismo sucede con otras formas de secciones no circulares.

La Ecuación (6.67) puede reescribirse en forma aún más parecida a la correspondiente a flujo en tubos:

$$\frac{1}{f^{1/2}} \approx 2{,}0\ \log\ (0{,}64\,\text{Re}_{D_h} f^{1/2}) - 0{,}8 \tag{6.68}$$

Vemos que la fricción turbulenta se puede predecir de un modo aún más preciso utilizando un diámetro efectivo D_{ef} igual a 0,64 veces el diámetro hidráulico. El efecto en f es bastante menor, un 10 por 100 como máximo. Este resultado se puede comparar con la expresión laminar, Ecuación (6.64), que predice

Placas paralelas:
$$D_{\text{ef}} = \frac{64}{96}D_h = \frac{2}{3}D_h \tag{6.69}$$

Esta gran semejanza (0,64 D_h frente a 0,667 D_h) aparece muy a menudo en flujos en conductos no circulares y podemos considerarla como regla general para el cálculo de la fricción o de la pérdida de carga en conductos:

www.elsolucionario.net

$$D_{\text{ef}} = D_h = \frac{4A}{\mathcal{P}} \qquad \text{fiabilidad razonable}$$

$$D_{\text{ef}} \text{ (teoría laminar)} \qquad \text{gran precisión} \tag{6.70}$$

Jones [10] ha demostrado que el empleo del diámetro efectivo laminar hace colapsar todos los datos disponibles de conductos rectangulares de cualquier cociente altura-anchura sobre la línea correspondiente del diagrama de Moody. Recomendamos esta idea para todos los conductos de sección no circular.

EJEMPLO 6.13

Un flujo con velocidad media de 6 ft/s circula entre dos placas paralelas horizontales separadas una distancia 2,4 in. Calcule la pérdida de carga y la caída de presión por cada 100 ft de longitud si el fluido tiene ρ = 1,9 slugs/ft^3 y (*a*) ν = 0,00002 ft^2/s y (*b*) ν = 0,002 ft^2/s. Suponga paredes lisas.

Solución

Apartado (*a*)

La viscosidad es $\mu = \rho\nu = 3{,}8 \times 10^{-5}$ slug/(ft · s). La separación es $2h$ = 2,4 in = 0,2 ft y $D_h = 4h$ = 0,4 ft. El número de Reynolds es

$$\text{Re}_{D_h} = \frac{VD_h}{\nu} = \frac{(6{,}0 \text{ ft/s})(0{,}4 \text{ ft})}{0{,}00002 \text{ ft}^2/\text{s}} = 120.000$$

El flujo es turbulento. Mirando en el diagrama de Moody (Figura 6.13) tenemos, aproximadamente, con paredes lisas:

$$f \approx 0{,}0173 \qquad h_f \approx f\frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2g} = 0{,}0173\frac{100}{0{,}4}\frac{(6{,}0)^2}{2(32{,}2)} \approx 2{,}42 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Como no hay variaciones de altura,

$$\Delta p = \rho g h_f = 1{,}9(32{,}2)(2{,}42) = 148 \text{ lbf/ft}^2 \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Éstas son la pérdida de carga y la caída de presión cada 100 ft de canal. Para mayor exactitud tomamos $D_{\text{ef}} = \frac{2}{3} D_h$ de la teoría laminar; en ese caso,

$$\text{Re}_{\text{ef}} = \frac{2}{3}(120.000) = 80.000$$

y del diagrama de Moody obtenemos $f \approx 0{,}0189$ para paredes lisas. Por ello una mejor estimación de nuestras incógnitas es

$$h_f = 0{,}0189\frac{100}{0{,}4}\frac{(6{,}0)^2}{2(32{,}2)} = 2{,}64 \text{ ft}$$

y $$\Delta p = 1{,}9(32{,}2)(2{,}64) = 161 \text{ lbf/ft}^2 \qquad \textit{Mejor resp.}\ (a)$$

Que predice valores un 9 por 100 superiores.

Apartado (*b*)

Calculamos $\mu = \rho\nu$ = 0,0038 slug/(ft · s). El número de Reynolds es 6,0(0,4)/0,002 = 1200; por tanto, el flujo es laminar, ya que Re es menor que 2300.

Podemos utilizar la expresión laminar correspondiente, Ecuación (6.64):

$$f_{\text{lam}} = \frac{96}{\text{Re}_{D_h}} = \frac{96}{1200} = 0{,}08$$

www.elsolucionario.net

de donde $$h_f = 0{,}08\frac{100}{0{,}4}\frac{(6{,}0)^2}{2(32{,}2)} = 11{,}2 \text{ ft}$$

y $$\Delta p = 1{,}9(32{,}2)(11{,}2) = 684 \text{ lbf/ft}^2 \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

También podemos dejar a un lado el número de Reynolds e ir directamente a la expresión apropiada para flujo laminar, Ecuación (6.63):

$$V = \frac{h^2}{3\mu}\frac{\Delta p}{L}$$

o $$\Delta p = \frac{3(6{,}0 \text{ ft/s})[0{,}0038 \text{ slug/(ft}\cdot\text{s)}](100 \text{ ft})}{(0{,}1 \text{ ft})^2} = 684 \text{ slugs/(ft}\cdot\text{s}^2) = 684 \text{ lbf/ft}^2$$

y $$h_f = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{684}{1{,}9(32{,}2)} = 11{,}2 \text{ ft}$$

Éste es uno de los (quizá inesperados) casos en que la fricción laminar es mayor que la turbulenta.

Flujo a través de una sección anular

Consideremos un flujo laminar estacionario en un conducto de sección anular entre dos cilindros concéntricos, como en la Figura 6.15. No hay deslizamiento ni en el radio interior ($r = b$) ni en el exterior ($r = a$). Para $u = u(r)$ la ecuación que gobierna el movimiento es la Ecuación (D.7)

www.elsolucionario.net

$$\frac{d}{dr}\left(r\mu\frac{du}{dr}\right) = Kr \qquad K = \frac{d}{dx}(p + \gamma z) \tag{6.71}$$

Integrando dos veces:

$$u = \frac{1}{4}r^2\frac{K}{\mu} + C_1 \ln r + C_2$$

Las constantes se determinan con las dos condiciones de no deslizamiento:

$$u(r = a) = 0 = \frac{1}{4}a^2\frac{K}{\mu} + C_1 \ln a + C_2$$

$$u(r = b) = 0 = \frac{1}{4}b^2\frac{K}{\mu} + C_1 \ln b + C_2$$

El perfil de velocidades es

$$u = \frac{1}{4\mu}\left(-\frac{d}{dx}(p + \gamma z)\right)\left(a^2 - r^2 + \frac{a^2 - b^2}{\ln(b/a)}\ln\frac{a}{r}\right) \tag{6.72}$$

El flujo volumétrico viene dado por

$$Q = \int_b^a u\, 2\pi r\, dr = \frac{\pi}{8\mu}\left(-\frac{d}{dx}(p + \gamma z)\right)\left(a^4 - b^4 + \frac{(a^2 - b^2)^2}{\ln(b/a)}\right) \tag{6.73}$$

www.elsolucionario.net

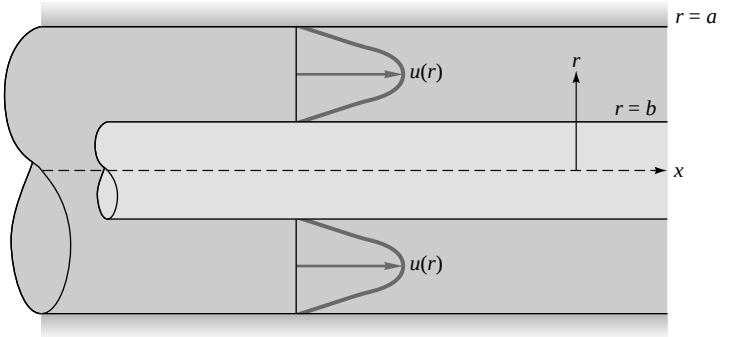


Figura 6.15. Flujo completamente desarrollado entre cilindros concéntricos.

El perfil de velocidades $u(r)$ se asemeja a una parábola apoyada sobre un círculo formando como una rosquilla, como muestra la Figura 6.15.

Basar el coeficiente de fricción en el esfuerzo en la pared es confuso porque hay dos valores, siendo el interior más grande que el exterior. Es mejor definir f en función de la pérdida de carga, como en la Ecuación (6.58),

$$f = h_f \frac{D_h}{L}\frac{2g}{V^2} \quad \text{donde} \quad V = \frac{Q}{\Theta(a^2 \Phi b^2)} \tag{6.74}$$

El diámetro hidráulico es en este caso

$$D_h = \frac{4\Theta(a^2 \Phi b^2)}{2\Theta(a+b)} = 2(a \Phi b) \tag{6.75}$$

www.elsolucionario.net

O sea, dos veces la holgura, muy similar al resultado del doble de la distancia entre placas paralelas [Ecuación (6.62)].

Sustituyendo h_f, D_h y V en la Ecuación (6.74) hallamos el coeficiente de fricción para flujo laminar entre cilindros concéntricos, que tiene la forma

$$f = \frac{64\Re}{\text{Re}_{D_h}} \qquad \Re = \frac{(a \Phi b)^2 (a^2 \Phi b^2)}{a^4 \Phi b^4 \Phi (a^2 \Phi b^2)^2 / \ln\ (a/b)} \tag{6.76}$$

El parámetro adimensional ζ es una especie de factor de corrección del diámetro hidráulico. Podemos reescribir la Ecuación (6.76) como

Cilindros concéntricos:
$$f = \frac{64}{\text{Re}_{\text{ef}}} \qquad \text{Re}_{\text{ef}} = \frac{1}{\Re}\text{Re}_{D_h} \tag{6.77}$$

La Tabla 6.3 muestra algunos valores numéricos de $f\ \text{Re}_{D_h}$ y $D_{\text{ef}}/D_h = 1/\zeta$. De nuevo, el flujo laminar en un conducto anular se hace inestable a $\text{Re}_{D_h} \Xi 2000$.

En el caso de flujo turbulento a través de una sección anular, el análisis podría hacerse empalmando dos perfiles logarítmicos procedentes de ambas paredes cilíndricas. Vamos a omitir estos pasos tratando de obtener directamente el coeficiente de fricción. De acuerdo con la regla general propuesta en la Ecuación (6.61), la fricción turbulenta se puede predecir con una precisión excelente si se sustituye en el diagrama de Moody d por $D_{\text{ef}} = 2(a - b)/\zeta$, con los valores de la Tabla 6.3.[5] Esta idea también es aplicable a la rugosidad

[5] Jones y Leung [44] señalan que los datos sobre flujo en conductos anulares también se ajustan al concepto de diámetro efectivo laminar.

www.elsolucionario.net

Tabla 6.3. Coeficientes de fricción laminar para flujo entre cilindros concéntricos.

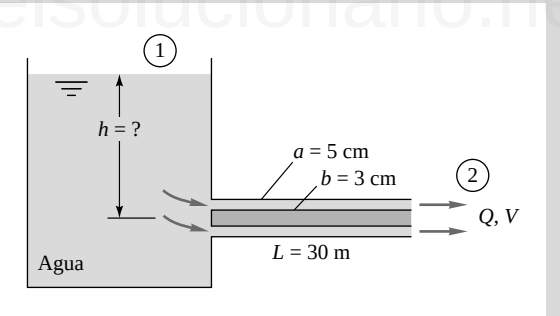
b/a	$f\,\mathrm{Re}_{D_h}$	$D_{ef}/D_h = 1/\zeta$
0,0	64,0	1,000
0,00001	70,09	0,913
0,0001	71,78	0,892
0,001	74,68	0,857
0,01	80,11	0,799
0,05	86,27	0,742
0,1	89,37	0,716
0,2	92,35	0,693
0,4	94,71	0,676
0,6	95,59	0,670
0,8	95,92	0,667
1,0	96,0	0,667

(sustituyendo ε/d por ε/D_{ef}). Para un diseño rápido con una fiabilidad de alrededor del 10 por 100, se puede usar el diámetro hidráulico $D_h = 2(a - b)$.

EJEMPLO 6.14

¿Cuál debe ser el nivel h del depósito para mantener un caudal de 0,01 m³/s a través del conducto anular de acero de 30 m de largo mostrado en la Figura E6.14? Desprecie los efectos de entrada y tome para el agua $\rho = 1000$ kg/m³ y $\nu = 1{,}02 \times 10^{-6}$ m²/s.

www.elsolucionario.net



E6.14

Solución

- *Consideraciones*. Flujo completamente desarrollado en un conducto anular, despreciamos otras pérdidas localizadas.
- *Procedimiento*. Determinamos el número de Reynolds, después determinamos f, h_f y h.
- *Valores de las propiedades*. Del enunciado, $\rho = 1000$ kg/m³ y $\nu = 1{,}02 \times 10^{-6}$ m²/s.
- *Paso 1*. Calculamos la velocidad, el diámetro hidráulico y el número de Reynolds:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}01\ \mathrm{m^3/s}}{\pi[(0{,}05\ \mathrm{m})^2 - (0{,}03\ \mathrm{m})^2]} = 1{,}99\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$D_h = 2(a - b) = 2(0{,}05\ \mathrm{m} - 0{,}03\ \mathrm{m}) = 0{,}04\ \mathrm{m}$$

$$\mathrm{Re}_{D_h} = \frac{VD_h}{\nu} = \frac{(1{,}99\ \mathrm{m/s})(0{,}04\ \mathrm{m})}{1{,}02 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}} = 78.000 \quad \text{(flujo turbulento)}$$

www.elsolucionario.net

- *Paso 2*. Aplicamos la ecuación de la energía para flujo estacionario entre las secciones 1 y 2:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + z_2 + h_f$$

o

$$h = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_f = \frac{V_2^2}{2g}\left(\alpha_2 + f\frac{L}{D_h}\right) \tag{1}$$

Téngase en cuenta que $z_1 = h$. Para flujos turbulentos, de la Ecuación (3.43*c*), estimamos $\alpha_2 \approx 1{,}03$.

- *Paso 3*. Determinamos la rugosidad relativa y el coeficiente de fricción. De la Tabla 6.1, para un tubo comercial de acero (nuevo), $\varepsilon = 0{,}046$ mm, de modo que

$$\frac{\varepsilon}{D_h} = \frac{0{,}046 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 0{,}00115$$

Para obtener una estimación razonable del coeficiente de fricción, usamos Re_{D_h} en la Ecuación (6.48):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \approx -2{,}0 \log_{10}\left(\frac{0{,}00115}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{78.000\sqrt{f}}\right) \quad \text{resolviendo } f \approx 0{,}0232$$

Para una mejor aproximación podemos tomar $D_{ef} = D_h/\zeta$. De la Tabla 6.3, para $b/a = 3/5$, $1/\zeta = 0{,}67$. Por tanto, $D_{ef} = 0{,}67$ (40 mm) = 26,8 mm, luego $\text{Re}_{Def} = 52.300$, $\varepsilon/D_{ef} = 0{,}00172$ y $f_{ef} \approx 0{,}0257$. Empleando la última estimación, obtenemos la altura del depósito usando la Ecuación (1):

$$h = \frac{V_2^2}{2g}\left(\alpha_2 + f_{ef}\frac{L}{D_h}\right) = \frac{(1{,}99 \text{ m/s})^2}{2(9{,}81 \text{ m}^2/\text{s})}\left[1{,}03 + 0{,}0257\frac{30 \text{ m}}{0{,}04 \text{ m}}\right] \approx 4{,}1 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

www.elsolucionario.net

- *Comentarios*. Obsérvese que *no* hemos sustituido D_h por D_{ef} en el término fL/D_h de la pérdida de carga, que proviene de la ecuación de cantidad de movimiento y *requiere* un diámetro hidráulico. Si hubiésemos empleado la aproximación más sencilla para el coeficiente de fricción, $f \approx 0{,}0232$, hubiéramos obtenido $h \approx 3{,}72$, alrededor de un 9 por 100 inferior.

Otras secciones no circulares

En principio, es posible resolver analíticamente el problema del flujo en régimen laminar en conductos de sección de forma arbitraria, para obtener la distribución de velocidades, el caudal y el coeficiente de fricción. Esto se debe a que cualquier sección se puede convertir en un círculo utilizando los métodos de la variable compleja, y se dispone además de otras herramientas analíticas muy poderosas. Gran cantidad de ejemplos se pueden encontrar en White [3, págs. 119 a 122], Berker [11] y Olson y Wright [12, págs. 315-317]. La Referencia 34 está dedicada por completo al problema del flujo laminar en conductos.

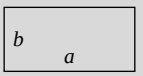
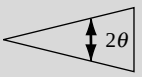
Sin embargo, en general, la mayoría de las secciones no habituales tienen un interés estrictamente académico y no comercial. Aquí indicaremos, en la Tabla 6.4, sólo datos de las secciones rectangular y en triángulo isósceles, dejando que el lector busque las demás en las referencias.

Si en un conducto de sección poco común no se dispone de teoría laminar, el flujo turbulento se puede analizar con el diagrama de Moody sustituyendo d por D_h. Si por el contrario se conocen los resultados laminares, como los de la Tabla 6.4, se debe utilizar $D_{ef} = [64/(f\text{Re})]D_h$ en lugar de d para la geometría del caso particular.

En flujo laminar en secciones triangulares y rectangulares la fricción en la pared varía mucho, siendo máxima cerca de los puntos medios de los lados y cero en los rincones. En flujo turbulento a través de las mismas secciones el esfuerzo es prácticamente constante a lo largo de las paredes y cae bruscamente a cero en los rincones. Esto es debido al fenómeno turbulento de *flujo secundario*, por el que las velocidades transversales medias v y w no son nulas. La Figura 6.16 representa algunas configuraciones de flujo secundario,

www.elsolucionario.net

Tabla 6.4. Constantes de fricción laminar f Re para conductos rectangulares y triangulares.

Rectangular		Triángulo isósceles	
			
b/a	$f\,\mathrm{Re}_{D_h}$	θ, grados	$f\,\mathrm{Re}_{D_h}$
0,0	96,00	0	48,0
0,05	89,91	10	51,6
0,1	84,68	20	52,9
0,125	82,34	30	53,3
0,167	78,81	40	52,9
0,25	72,93	50	52,0
0,4	65,47	60	51,1
0,5	62,19	70	49,5
0,75	57,89	80	48,3
1,0	56,91	90	48,0

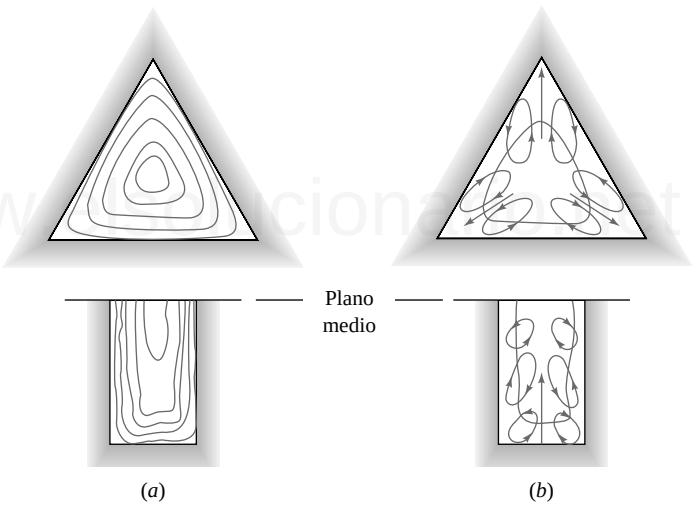


Figura 6.16. Ilustración de los flujos secundarios en conductos no circulares: (*a*) líneas de igual velocidad axial; (*b*) movimiento celular en el flujo secundario. (*Según J. Nikuradse, tesis, Göttingen, 1926.*)

tal como las esquematizó Nikuradse en su tesis de 1926. Las «células» de flujo secundario llevan el flujo medio hacia las esquinas, de modo que las líneas de igual velocidad axial son semejantes a la propia sección y el esfuerzo en las paredes es prácticamente constante. Éste es el motivo de por qué el concepto de diámetro hidráulico es tan útil en flujo turbulento. El flujo laminar en un conducto recto de sección no circular no tiene flujo secundario. La predicción teórica fiable de flujo secundario turbulento aún está por conseguir, aunque los modelos numéricos suelen dar resultados exitosos [36].

EJEMPLO 6.15

Por un conducto horizontal cuadrado de 9×9 in y 100 ft de largo fluye aire, con $\rho = 0{,}00237$ slug/ft^3 y $\nu = 0{,}000157$ ft^2/s, a razón de 25 ft^3/s. Calcule la caída de presión si $\varepsilon = 0{,}0003$ ft.

www.elsolucionario.net

Solución

Calculamos la velocidad media y el diámetro hidráulico:

$$V = \frac{25\ \text{ft}^3/\text{s}}{(0,75\ \text{ft})^2} = 44,4\ \text{ft/s}$$

$$D_h = \frac{4A}{\mathcal{P}} = \frac{4(81\ \text{in}^2)}{36\ \text{in}} = 9\ \text{in} = 0,75\ \text{ft}$$

De la Tabla 6.4, con $b/a = 1,0$, obtenemos el diámetro efectivo

$$D_{\text{ef}} = \frac{64}{56,91} D_h = 0,843\ \text{ft}$$

de donde

$$\text{Re}_{\text{ef}} = \frac{VD_{\text{ef}}}{\nu} = \frac{44,4(0,843)}{0,000157} = 239.000$$

$$\frac{\varepsilon}{D_{\text{ef}}} = \frac{0,0003}{0,843} = 0,000356$$

En el diagrama de Moody leemos $f = 0,0177$. La caída de presión es, pues,

$$\Delta p = \rho g h_f = \rho g \left[f \frac{L}{D_h} \frac{V^2}{2g} \right] = 0,00237(32,2) \left[0,0177 \frac{100}{0,75} \frac{44,4^2}{2(32,2)} \right],$$

o

$$\Delta p = 5,5\ \text{lbf/ft}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

La caída de presión en flujos de aire suele ser pequeña debido a la baja densidad del mismo.

6.9. PÉRDIDAS LOCALIZADAS EN SISTEMAS DE TUBERÍAS[6]

En cualquier sistema de tuberías, además de la pérdida de carga por fricción a lo largo de aquéllas, existen *pérdidas menores o localizadas* debidas a

1. Entrada o salida de tuberías.
2. Ensanchamiento o contracción brusca.
3. Curvas, codos, «tes» y otros accesorios.
4. Válvulas, abiertas o parcialmente cerradas.
5. Ensanchamiento o contracciones graduales.

Las pérdidas no tienen por qué ser pequeñas; por ejemplo, una válvula parcialmente cerrada puede producir una caída de presión mayor que una tubería muy larga.

Como la configuración del flujo en estos elementos es muy compleja, la teoría existente es muy pobre. Habitualmente las pérdidas se miden experimentalmente y se correlacionan con los parámetros del flujo. Los datos, especialmente en válvulas, dependen además del diseño de cada fabricante, de modo que los valores que se indican en esta sección son simples estimaciones medias [15, 16, 35, 43, 46].

Las pérdidas localizadas vienen dadas generalmente como cociente entre la pérdida de carga $h_m = \Delta p/(\rho g)$ a través del elemento y la altura cinética o de velocidad $V^2/(2g)$ del sistema de tuberías:

$$\text{Coeficiente de pérdida } K = \frac{h_m}{V^2/(2g)} = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} \tag{6.78}$$

[6] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

Aunque K es adimensional, desafortunadamente no aparece en la literatura correlacionado con el número de Reynolds y la rugosidad relativa, sino con el tamaño de la tubería. La mayor parte de los datos disponibles son relativos a flujo turbulento.

Una tubería puede tener varias pérdidas localizadas. Como todos los términos están referidos a $V^2/(2g)$, se puede efectuar la suma de todos ellos si el diámetro de la tubería es constante:

$$h_{\text{tot}} = h_f + \Sigma h_m = \frac{V^2}{2g}\left(f\frac{L}{d} + \Sigma K\right) \tag{6.79}$$

Nótese, sin embargo, que si el diámetro cambia, las pérdidas hay que sumarlas separadamente, ya que V^2 cambiará también. La longitud L de la Ecuación (6.79) es la longitud total de la tubería medida a lo largo de su eje.

Existe una gran variedad de diseños de válvulas para uso comercial. La Figura 6.17 muestra cinco diseños típicos: (*a*) la de *compuerta*, con un vástago que se desliza hacia abajo y obstruye la sección; (*b*) la de *globo*, que cierra un orificio en un tabique interno; (*c*) la de *ángulo*, similar a la de globo pero en un codo de 90°; (*d*) la válvula de *retención* o *anti-retorno*, que sólo permite el flujo en un sentido; (*e*) la de *disco*, que cierra la sección con una compuerta circular. La válvula de globo, con un flujo muy tortuoso, tiene las pérdidas más elevadas cuando está abierta. El manual de Skousen [35] es una referencia excelente para encontrar detalles acerca de éstas y otras válvulas.

La Tabla 6.5 muestra los coeficientes de pérdida de carga K para cuatro tipos comunes de válvulas, tres codos y una «te». Los elementos pueden estar roscados o acoplados, de ahí las dos listas. Vemos que K disminuye generalmente al aumentar el tamaño de la tubería, lo cual es consistente con el aumento del número de Reynolds y la disminución de la rugosidad relativa. Volvemos a insistir en que los valores de la Tabla 6.5 son *pérdidas promediadas entre distintos fabricantes*, por lo que los errores pueden ser de hasta un 50 por 100.

www.elsolucionario.net

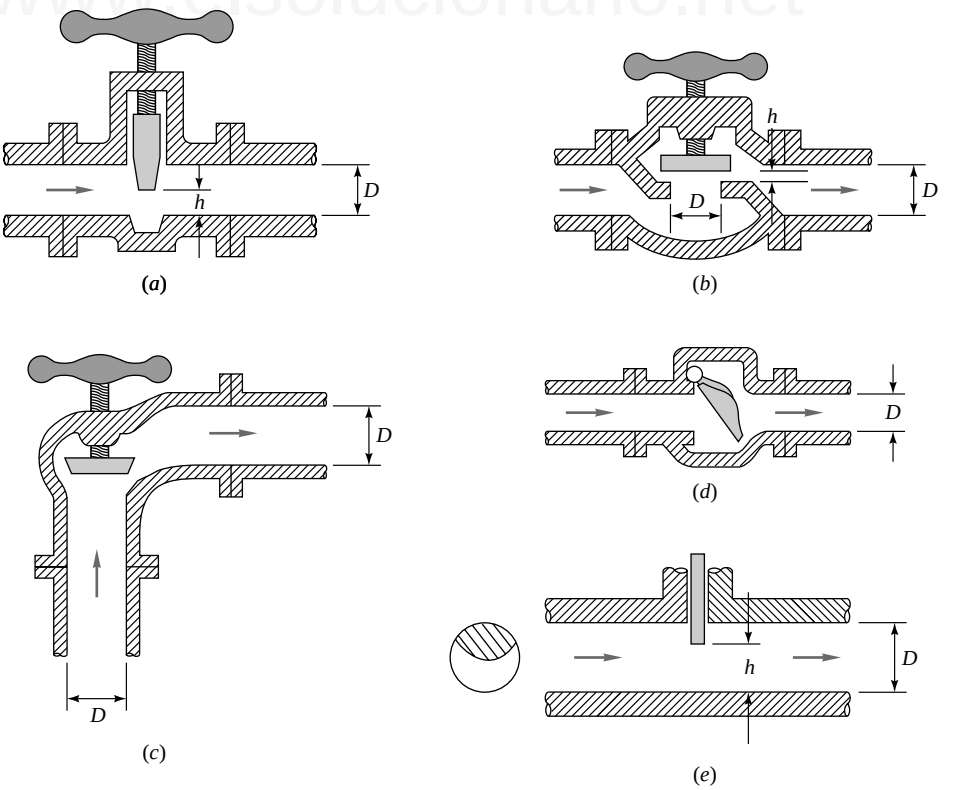


Figura 6.17. Geometrías típicas de válvulas comerciales: (a) válvula de compuerta; (*b*) válvula de globo; (*c*) válvula de ángulo; (*d*) válvula de retención o anti-retorno; (*e*) válvula de disco.

www.elsolucionario.net

Tabla 6.5. Coeficientes de pérdida $K = h_m/[V^2/(2g)]$ para válvulas abiertas, codos y «tes».

	Diámetro nominal, in								
	Roscado				Acoplado				
	½	1	2	4	1	2	4	8	20
Válvulas (abiertas):									
Globo	14	8,2	6,9	5,7	13	8,5	6,0	5,8	5,5
Compuerta	0,30	0,24	0,16	0,11	0,80	0,35	0,16	0,07	0,03
De retención	5,1	2,9	2,1	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
De ángulo	9,0	4,7	2,0	1,0	4,5	2,4	2,0	2,0	2,0
Codos:									
45° normal	0,39	0,32	0,30	0,29					
45° suave					0,21	0,20	0,19	0,16	0,14
90° normal	2,0	1,5	0,95	0,64	0,50	0,39	0,30	0,26	0,21
90° suave	1,0	0,72	0,41	0,23	0,40	0,30	0,19	0,15	0,10
180° normal	2,0	1,5	0,95	0,64	0,41	0,35	0,30	0,25	0,20
180° suave					0,40	0,30	0,21	0,15	0,10
«Tes»:									
Flujo directo	0,90	0,90	0,90	0,90	0,24	0,19	0,14	0,10	0,07
Flujo lateral	2,4	1,8	1,4	1,1	1,0	0,80	0,64	0,58	0,41

Además, la mayor parte de los datos de la Tabla 6.5 son relativamente viejos [15, 16] y por lo tanto basados en los accesorios fabricados en la década de 1950. Los accesorios modernos, forjados y moldeados, pueden tener coeficientes de pérdida distintos, a menudo inferiores a los presentados en la Tabla 6.5. Por ejemplo, en la Figura 6.18*a* se muestran resultados recientes [48] para codos de 90° acoplados relativamente cortos (radio de giro/diámetro del codo = 1,2). El diámetro del codo era de 1,69 in. Obsérvese en primer lugar que K está representado en función del número de Reynolds, en vez de en función de los diámetros (dimensionales), como en la Tabla 6.5, por lo que la Figura 6.18*a* es más general. Además, nótese que los va-

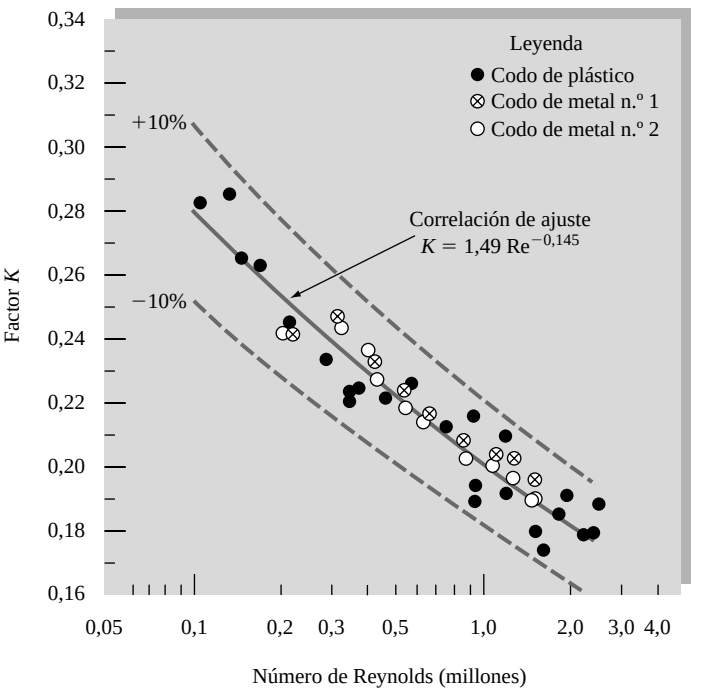


Figura 6.18a. Coeficientes de pérdida en codos de 90°, mediciones recientes. Estos valores son inferiores a los proporcionados en la Tabla 6.5. (*De la Referencia 48, cortesía de R. D. Coffield.*)

www.elsolucionario.net

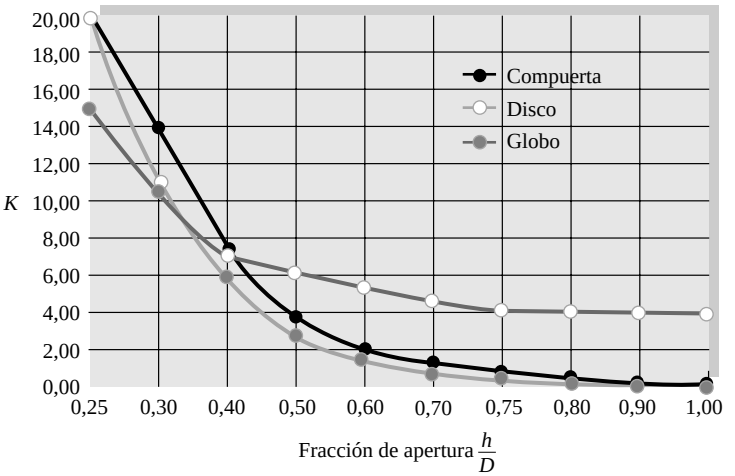


Figura 6.18b. Coeficientes de pérdida promediados para válvulas parcialmente abiertas (véanse los esquemas de la Figura 6.17).

lores de K de 0,23 ± 0,05 son bastante inferiores a los valores para codos de 90° de la Tabla 6.5, indicando paredes más lisas y mejores diseños. Se podría concluir que (1) los datos de la Tabla 6.5 son posiblemente conservadores y (2) los coeficientes de pérdida son muy dependientes del diseño y los parámetros de fabricación, por lo que la Tabla 6.5 debe verse sólo como una guía indicativa.

Los valores de los coeficientes de pérdida de carga de la Tabla 6.5 son para válvulas totalmente abiertas. Cuando las válvulas están parcialmente abiertas, las pérdidas pueden ser mucho mayores. La Figura 6.18*b* proporciona valores medios de las pérdidas para tres válvulas en función del «porcentaje de apertura», definido como el cociente h/D (consúltese la geometría en la Figura 6.17). De nuevo debemos advertir que los posibles errores pueden ser hasta del 50 por 100. De todos los elementos mencionados, las válvulas son las más sensibles a los detalles de diseño y fabricación debido a su complejidad geométrica. Si se necesitan datos más fiables hay que recurrir a la información del fabricante [35].

La válvula de *mariposa* de la Figura 6.19*a* consta de un disco montado sobre un eje que, al cerrarse, se apoya en un anillo circular cerca de la superficie del conducto, sellando el mismo. Un simple giro de 90° abre por completo la válvula, por lo que este diseño es perfecto para válvulas de control de cierre y apertura rápidos, como ocurre en sistemas de protección antiincendios y en la industria de la energía eléctrica. Sin embargo, se necesita aplicar momentos importantes para cerrar las válvulas, y las pérdidas son muy elevadas cuando la válvula está casi cerrada.

La Figura 6.19*b* muestra coeficientes de pérdida para una válvula de mariposa en función del ángulo de apertura θ para flujo en condiciones turbulentas ($\theta = 0$ indica válvula cerrada). Las pérdidas son inmensas cuando la apertura es pequeña, pero K decae casi exponencialmente con el ángulo de apertura. Los valores de los distintos fabricantes difieren hasta en un factor de 2. Téngase en cuenta que, como de costumbre, en la Figura 6.19*b* K está basado en la velocidad media del *conducto* $V = Q/A$, no en la elevada velocidad del flujo al pasar por el estrecho orificio de la válvula.

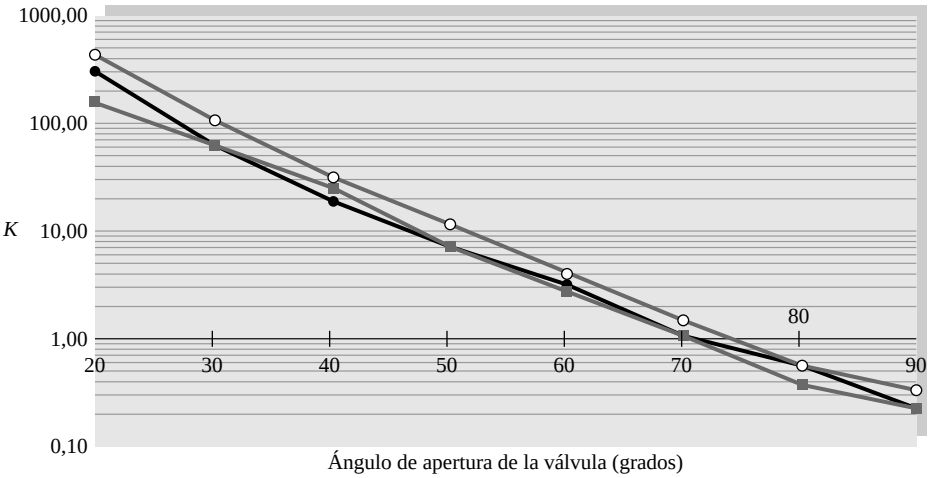
Las curvas o codos, como los de la Figura 6.20, producen siempre una pérdida de carga mayor que la de fricción de Moody en un conducto recto, debido a la separación del flujo en las paredes y a la formación de flujos secundarios inducidos por la aceleración centrípeta. Los coeficientes K de la Figura 6.20, calculados a partir de los datos de Ito [49], se refieren a las pérdidas *totales*, incluyendo los efectos de fricción de Moody.[7] Las pérdidas debidas a separación y flujo secundario disminuyen con R/d, mientras que las pérdidas de Moody aumentan al aumentar la longitud del codo. Las curvas de la Figura 6.20 muestran un mínimo en el punto en el que estos dos efectos se igualan. Ito [49] proporciona una curva de ajuste para el codo de 90° en un flujo turbulento:

$$\text{Codo de } 90°\text{: } K = 0{,}388 \left(\frac{R}{d}\right)^{0{,}84} \mathrm{Re}_D^{-0{,}17} \quad \text{donde} \quad \beta = 0{,}95 + 4{,}42 \left(\frac{R}{d}\right)^{-1{,}96} \quad \text{B1} \qquad (6.80a)$$

[7] En ediciones previas la Figura 6.20 indicaba que las pérdidas de fricción de Moody debían ser añadidas a K por separado. Esto es incorrecto, ya que K_{codo} ya incluye las pérdidas de Moody, por lo que el autor pide disculpas por el error.

www.elsolucionario.net

(*a*)



(*b*)

Figura 6.19. Actuaciones de válvulas de mariposa: (*a*) geometría típica (*cortesía de Tyco Engineered Products and Services*); (*b*) coeficientes de pérdida de tres fabricantes.

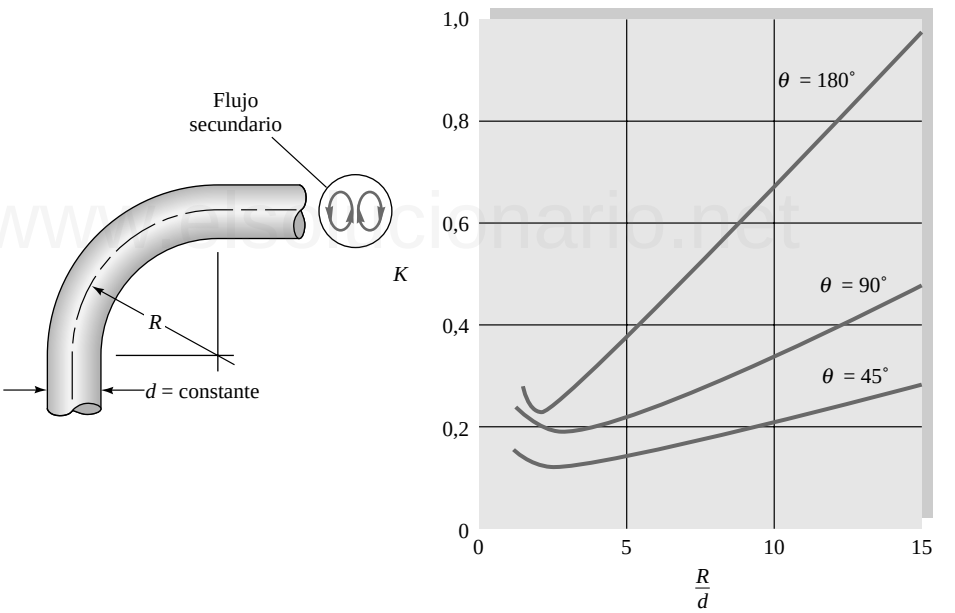


Figura 6.20. Coeficientes de resistencia para codos de 45°, 90° y 180° con paredes lisas, a Re_d = 200.000, según Ito [49].

La fórmula incluye el efecto del número de Reynolds, que es igual a 200.000 en la Figura 6.20.

Como se observa en la Figura 6.21, las pérdidas en la entrada dependen mucho de la geometría, mientras que las de salida no. Los bordes vivos y los tramos de tubo que penetran en los depósitos provocan la separación del flujo y por ello grandes pérdidas. Un ligero redondeado de los bordes arregla gran parte del problema y una entrada muy suave ($r = 0{,}2d$) tiene pérdidas prácticamente despreciables, $K = 0{,}05$. En una salida sumergida, sin embargo, el flujo simplemente deja el conducto y se introduce en el depósito receptor, donde pierde toda su altura cinética debido a la disipación viscosa. Por tanto, $K = 1{,}0$ en todas las *salidas sumergidas*, independientemente de su geometría.

Si la entrada es desde un depósito finito, la denominamos *contracción brusca* (CB) entre dos áreas distintas del conducto. Si la salida es a un conducto mayor, la denominamos *ensanchamiento brusco* (EB). Las pérdidas de ambos están indicadas en la Figura 6.22. En el ensanchamiento brusco el esfuerzo cortante en

www.elsolucionario.net

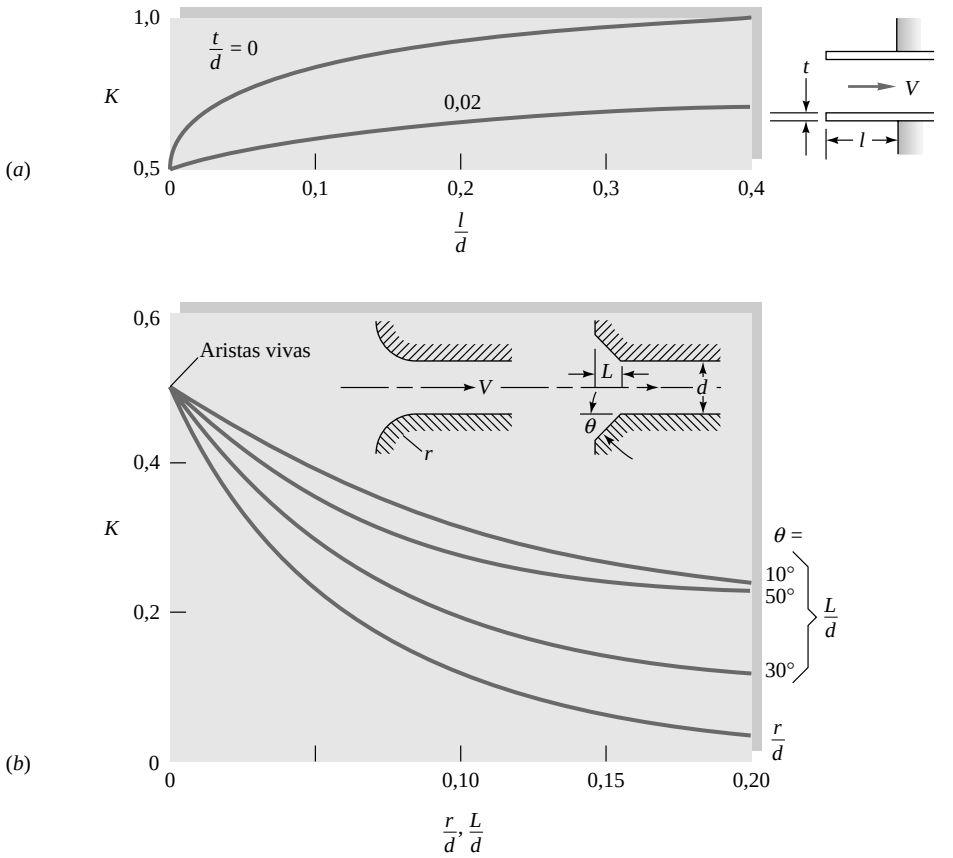


Figura 6.21. Coeficientes de pérdida de carga en entradas y salidas: (*a*) entradas que sobresalen; (*b*) entradas redondeadas y biseladas. Los coeficientes de pérdida para salidas son $K \equiv 1{,}0$ para todas las configuraciones (sobresalientes, afiladas, biseladas o redondeadas). (*De la Referencia 37.*)

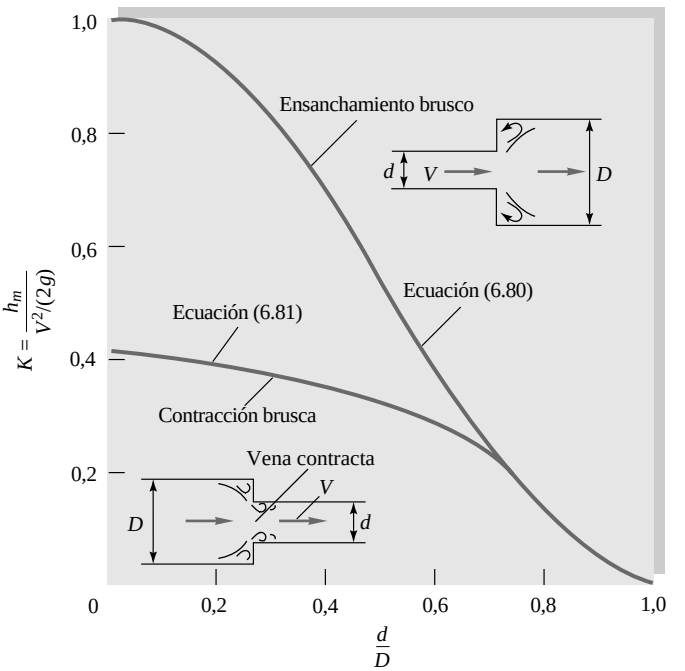


Figura 6.22. Pérdidas en ensanchamientos y contracciones bruscas. Nótese que las pérdidas están basadas en la velocidad del fluido en el tubo de menor diámetro.

www.elsolucionario.net

la zona del rincón con recirculación, o zona de aguas muertas, es despreciable, de modo que un análisis del volumen de control entre la sección de ensanchamiento y el final de la zona de separación da una pérdida teórica de

$$K_{\text{EB}} = \left[1 - \frac{d^2}{D^2}\right]^2 = \frac{h_m}{V^2/(2g)} \tag{6.80}$$

Nótese que K está basado en la velocidad del conducto pequeño. La Ecuación (6.80) concuerda muy bien con los experimentos.

En la contracción brusca, sin embargo, la separación del flujo produce una contracción de la corriente hasta un diámetro mínimo $d_{\text{mín}}$ denominado *vena contracta*, como se esquematiza en la Figura 6.22. Debido a que la teoría de la vena contracta no está apenas desarrollada, los coeficientes de pérdida de carga son experimentales y siguen la fórmula

$$K_{\text{CB}} \approx 0{,}42\left[1 - \frac{d^2}{D^2}\right] \tag{6.81}$$

hasta el valor $d/D = 0{,}76$, por encima del cual coinciden con la expresión de ensanchamiento brusco, Ecuación (6.80).

Si el ensanchamiento o la contracción son graduales, las pérdidas son muy diferentes. La Figura 6.23 muestra las pérdidas a través de un ensanchamiento cónico o *difusor* [14]. Hay cierta dispersión en los datos, dependiendo de las condiciones de las capas límite aguas arriba. Una capa límite delgada, con un perfil como el de la Figura 6.6, da pérdidas pequeñas. Como la finalidad del difusor es aumentar la presión estática del flujo, los datos vienen en forma de coeficiente de recuperación de presión:

$$C_p = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2}\rho V_1^2} \tag{6.82}$$

www.elsolucionario.net

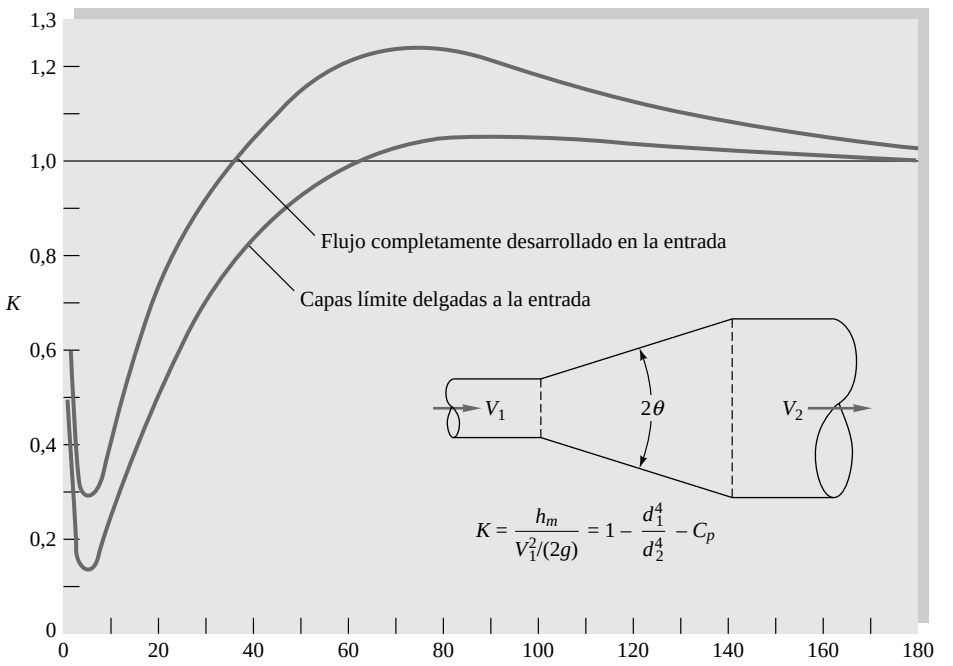


Figura 6.23. Pérdidas en un ensanchamiento cónico gradual.

www.elsolucionario.net

El coeficiente de pérdida de carga se relaciona con aquél de esta forma

$$K = \frac{h_m}{V^2/(2g)} = 1 - \left(\frac{d_1^4}{d_2^4}\right) - C_p \tag{6.83}$$

Para una relación de áreas dada, cuanto mayor sea el coeficiente de recuperación de presión menores serán las pérdidas; así, un C_p elevado significa que el difusor está bien diseñado. En la Figura 6.23 se ve que la mínima pérdida (máxima recuperación) tiene lugar para 2θ aproximadamente igual a 5°. Ángulos menores dan una elevada pérdida de ficción de Moody debido a su longitud excesiva. Para ángulos de 40 a 60° y mayores, las pérdidas son tan altas que es preferible utilizar un ensanchamiento brusco. Este efecto inesperado es debido a la separación del flujo en difusores de ángulos grandes, como veremos al estudiar las capas límite. La Referencia 14 incluye gran cantidad de datos de difusores.

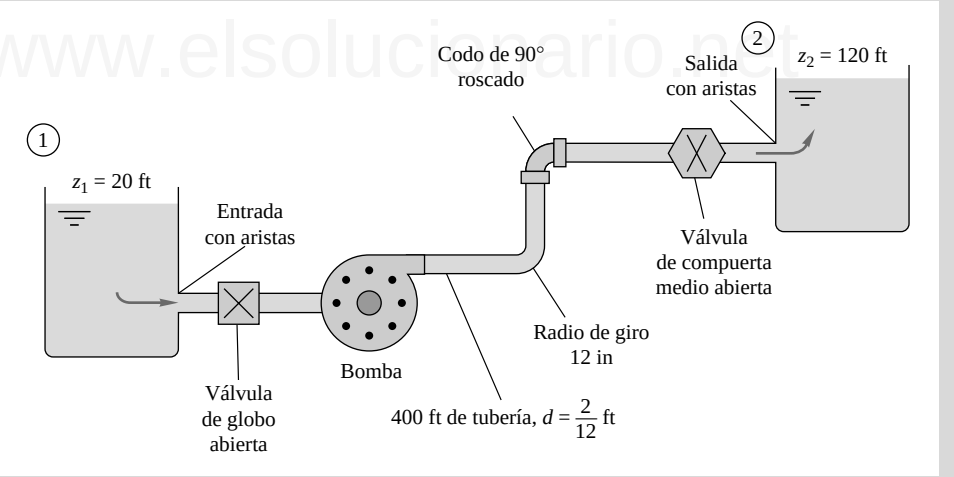
En una *contracción* gradual la pérdida es muy pequeña, como muestran los siguientes valores experimentales [15]:

Ángulo de contracción 2θ, grados	30	45	60
K en contracciones graduales	0,02	0,04	0,07

Las Referencias 15, 16, 43 y 46 contienen información adicional sobre pérdidas localizadas.

EJEMPLO 6.16

Entre dos depósitos se bombea agua, ρ = 1,94 slugs/ft^3 y ν = 0,000011 ft^2/s, a razón de 0,2 ft^3/s a través de una tubería de 2 in de diámetro y 400 ft de longitud con varios elementos intermedios, como se muestra en la Figura E6.16. La rugosidad relativa del tubo es ε/d = 0,001. Calcule la potencia requerida para el bombeo.



E6.16

Solución

La ecuación de la energía para el flujo estacionario entre las superficies 1 y 2 de los dos depósitos es

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \left[\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2\right] + h_f + \sum h_m - h_b$$

donde h_b es el incremento de carga debido a la bomba. Como $p_1 = p_2$ y $V_1 = V_2 \approx 0$, despejando h_b tenemos:

$$h_b = z_2 - z_1 + h_f + \sum h_m = 120 \text{ ft} - 20 \text{ ft} + \frac{V^2}{2g}\left(f\frac{L}{d} + \sum K\right) \tag{1}$$

www.elsolucionario.net

La velocidad media asociada al caudal es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0{,}2 \text{ ft}^3/\text{s}}{\frac{1}{4}\pi(\frac{2}{12} \text{ ft})^2} = 9{,}17 \text{ ft/s}$$

Hagamos ahora una lista de los coeficientes de las pérdidas localizadas:

Pérdida	***K***
Entrada con bordes vivos (Figura 6.21)	0,5
Válvula de globo abierta (2 in, Tabla 6.5)	6,9
Curva de 12 in (Figura 6.20)	0,25
Codo normal de 90° (Tabla 6.5)	0,95
Válvula de compuerta semiabierta (de la Figura 6.18*b*)	2,7
Salida brusca (Figura 6.21)	1,0
	$\Sigma K = 12{,}3$

Calculemos el número de Reynolds y el coeficiente de fricción:

$$\text{Re}_d = \frac{Vd}{\nu} = \frac{9{,}17(\frac{2}{12})}{0{,}000011} = 139.000$$

Con $\varepsilon/d = 0{,}001$, el diagrama de Moody nos da $f = 0{,}0216$. Sustituyendo en la Ecuación (1):

$$h_b = 100 \text{ ft} + \frac{(9{,}17 \text{ ft/s})^2}{2(32{,}2 \text{ ft/s}^2)}\left[0{,}0216\frac{(400)}{\frac{2}{12}} + 12{,}3\right]$$
$$= 100 \text{ ft} + 84 \text{ ft} = 184 \text{ ft} \quad \text{carga de la bomba}$$

La bomba debe comunicar al agua una potencia de

$$P = \rho g Q h_b = [1{,}94(32{,}2) \text{ lbf/ft}^3](0{,}2 \text{ ft}^3/\text{s})(184 \text{ ft}) = 2300 \text{ ft} \cdot \text{lbf/s}$$

Utilizando el factor de conversión 1 hp = 550 (ft · lbf)/s, tenemos

$$P = \frac{2300}{550} = 4{,}2 \text{ hp} \qquad \textit{Resp.}$$

Suponiendo un rendimiento aproximado del 70 al 80 por 100, la potencia consumida por la bomba será de unos 6 hp.

6.10. SISTEMAS DE TUBERÍAS[8]

Una vez que se saben hacer los cálculos de una tubería, se saben hacer los de todas; pero cuando los sistemas tienen varias, hay que tener en cuenta ciertas reglas para facilitar los cálculos. El parecido entre estas reglas y las de los circuitos eléctricos no es en absoluto simple coincidencia.

La Figura 6.24 muestra tres ejemplos de sistemas de tuberías.

[8] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

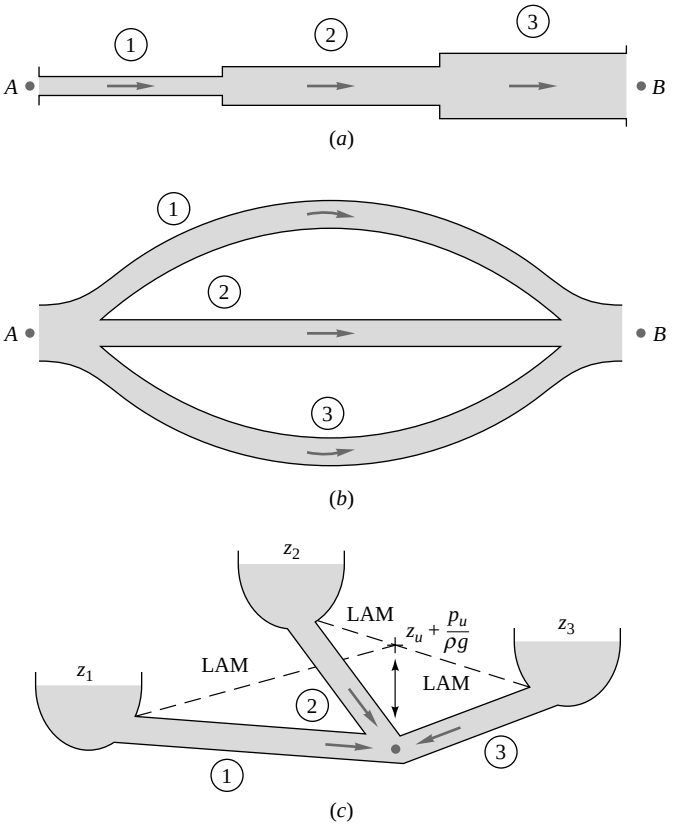


Figura 6.24. Ejemplos de sistemas con varias tuberías: (*a*) conductos en serie; (*b*) en paralelo; (*c*) problema de la unión de tres depósitos.

www.elsolucionario.net

Tuberías en serie

El primero es un sistema de tres (o más) tuberías en serie. La regla 1 es que el caudal en todas las tuberías es el mismo:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \text{constante}$$

o

$$V_1 d_1^2 = V_2 d_2^2 = V_3 d_3^2 \tag{6.84}$$

La regla 2 es que la pérdida de carga total es igual a la suma de las pérdidas en cada tramo:

$$\Delta h_{A\to B} = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 \tag{6.85}$$

Estas últimas se componen de pérdidas por fricción y pérdidas localizadas, por lo que podemos escribir

$$\Delta h_{A\to B} = \frac{V_1^2}{2g}\left(f\frac{L_1}{d_1} + \Sigma K_1\right) + \frac{V_2^2}{2g}\left(f\frac{L_2}{d_2} + \Sigma K_2\right) + \frac{V_3^2}{2g}\left(f\frac{L_3}{d_3} + \Sigma K_3\right) \tag{6.86}$$

y así sucesivamente para cualquier número de tuberías en serie. Como V_2 y V_3 son proporcionales a V_1 según la Ecuación (6.84), la Ecuación (6.86) toma la forma

$$\Delta h_{A\to B} = \frac{V_1^2}{2g}(K_0 + K_1 f_1 + K_2 f_2 + K_3 f_3) \tag{6.87}$$

www.elsolucionario.net

donde α_i son constantes adimensionales. Si se conoce el caudal, todo el segundo miembro es conocido y podemos calcular la pérdida de carga. Si lo que se conoce es esta última, hay que iterar, ya que f_1, f_2 y f_3 dependen de V a través del número de Reynolds. Se suele comenzar calculando f_1, f_2 y f_3 como si el flujo estuviera dominado por la rugosidad y la solución para V_1 converge a la primera o segunda iteración. El programa EES es ideal para este tipo de problemas.

EJEMPLO 6.17

Se tiene un sistema de tres tuberías como el de la Figura 6.24*a*. La caída de presión total es $p_A - p_B = 150.000$ Pa, y la diferencia del nivel $z_A - z_B = 5$ m. Los datos de los tubos son

Tubo	*l*, m	*d*, cm	*ε*, mm	*ε*/*d*
1	100	8	0,24	0,003
2	150	6	0,12	0,002
3	80	4	0,20	0,005

El fluido es agua, $\rho = 1000$ kg/m^3 y $\nu = 1{,}02 \times 10^{-6}$ m^2/s. Calcule el caudal Q en m^3/h.

Solución

La pérdida de carga total en el sistema es

$$h_{A-B} = \frac{p_A - p_B}{\rho g} + z_A - z_B = \frac{150.000}{1000(9{,}81)} + 5 \text{ m} = 20{,}3 \text{ m}$$

De la ecuación de continuidad (6.84) las velocidades son

$$V_2 = \frac{d_1^2}{d_2^2} V_1 = \frac{16}{9} V_1 \qquad V_3 = \frac{d_1^2}{d_3^2} V_1 = 4V_1$$

y

$$\text{Re}_2 = \frac{V_2 d_2}{V_1 d_1} \text{Re}_1 = \frac{4}{3} \text{Re}_1 \qquad \text{Re}_3 = 2\,\text{Re}_1$$

Despreciando las pérdidas localizadas y sustituyendo en la Ecuación (6.86), tenemos

$$h_{A-B} = \frac{V_1^2}{2g}\left[1250 f_1 + 2500\left(\frac{16}{9}\right)^2 f_2 + 2000(4)^2 f_3\right]$$

o

$$20{,}3 \text{ m} = \frac{V_1^2}{2g}(1250 f_1 + 7900 f_2 + 32.000 f_3) \qquad (1)$$

Ésta es la forma que adopta en este caso la Ecuación (6.87). Parece estar dominada por la pérdida en el tercer tubo, $32.000 f_3$. Comenzamos por estimar f_1, f_2 y f_3 para flujo dominado por la rugosidad en el diagrama de Moody:

$$f_1 = 0{,}0262 \qquad f_2 = 0{,}0234 \qquad f_3 = 0{,}0304$$

Sustituyendo en (1) hallamos $V_1^2 = 2g(20{,}3)(33 + 185 + 973)$. Por tanto, la primera estimación proporciona $V_1 = 0{,}58$ m/s, de donde

$$\text{Re}_1 = 45.400 \qquad \text{Re}_2 = 60.500 \qquad \text{Re}_3 = 90.800$$

Del diagrama de Moody obtenemos

$$f_1 = 0{,}0288 \qquad f_2 = 0{,}0260 \qquad f_3 = 0{,}0314$$

www.elsolucionario.net

Sustituyendo en (1) tenemos una mejor aproximación:

$$V_1 = 0{,}565 \text{ m/s} \qquad Q = \tfrac{1}{4}\pi d_1^2 V_1 = 2{,}84 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

o $$Q = 10{,}2 \text{ m}^3/\text{h} \qquad \textit{Resp.}$$

Una segunda iteración proporcionaría Q = 10,22 m³/h, un cambio despreciable.

Tuberías en Paralelo

El segundo sistema de tuberías, que se muestra en la Figura 6.24*b*, tiene las tuberías *en paralelo*. Ahora las pérdidas son las mismas para todos los tubos y el caudal total es la suma de los caudales individuales:

$$\Delta h_{A\to B} = \Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h_3 \tag{6.88a}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \tag{6.88b}$$

Si se conoce la pérdida de carga total, es muy sencillo calcular el caudal Q_i de cada tubería y sumarlos para obtener el caudal total, como se verá en el Ejemplo 6.18. El problema inverso, dado Q calcular h_f, requiere iteración, pues hay que determinar cómo se divide el caudal entre las distintas ramas. En cada tubería h_f viene dado por la relación de Moody $h_f = f(L/d)(V^2/2g) = fQ^2/C$, donde $C = \Theta^2 g d^5/8L$. Por tanto, cada tubería tiene una resistencia no lineal casi cuadrática, y la pérdida de carga está relacionada con el caudal total por la ecuación

$$h_f = \frac{Q^2}{\left(\Sigma\sqrt{C_i/f_i}\right)^2} \quad \text{donde } C_i = \frac{\Theta^2 g d_i^5}{8L_i} \tag{6.89}$$

www.elsolucionario.net

Dado que f_i depende del número de Reynolds y de la rugosidad relativa, comenzamos con la Ecuación (6.89) estimando valores iniciales de f_i (se recomiendan los valores del flujo dominado por la rugosidad) y calculamos una primera estimación de h_f. Para cada tubería obtenemos una estimación del caudal $Q_i \approx (C_i h_f/f_i)^{1/2}$ y por lo tanto un nuevo número de Reynolds y una mejor estimación de f_i. Volvemos a utilizar la Ecuación (6.89) hasta la convergencia.

Conviene indicar que ambos tipos de problemas de tuberías en paralelo (tanto calcular ΣQ como h_f) se resuelven fácilmente utilizando EES si se proporcionan las estimaciones iniciales apropiadas.

EJEMPLO 6.18

Suponga que los tres tubos del Ejemplo 6.17 están en paralelo con una pérdida de carga total de 20,3 m. Calcule el caudal total Q, despreciando las pérdidas localizadas.

Solución

De la Ecuación (6.88*a*) podemos obtener cada V separadamente:

$$20{,}3 \text{ m} = \frac{V_1^2}{2g}1250\,f_1 = \frac{V_2^2}{2g}2500\,f_2 = \frac{V_3^2}{2g}2000\,f_3 \tag{1}$$

Supongamos que el flujo del tubo 1 está dominado por la rugosidad: $f_1 = 0{,}0262$, $V_1 = 3{,}49$ m/s; de ahí $\text{Re}_1 = V_1 d_1/\nu = 273.000$. En el diagrama de Moody leemos $f_1 = 0{,}0267$; recalculamos $V_1 = 3{,}46$ m/s, $Q_1 = 6{,}25$ m³/h. [Este problema se puede resolver también utilizando la Ecuación (6.51).]

Supongamos ahora que se trata del tubo 2: $f_2 \approx 0{,}0234$, $V_2 \approx 2{,}61$ m/s; entonces $\text{Re}_2 = 153.000$, de donde $f_2 = 0{,}0246$, $V_2 = 2{,}55$ m/s, $Q_2 = 25{,}9$ m³/h.

www.elsolucionario.net

Finalmente hagamos lo mismo con el 3: $f_3 \Xi 0{,}0304$, $V_3 \Xi 2{,}56$ m/s; entonces $\mathrm{Re}_3 = 100.000$, y de aquí $f_3 = 0{,}0313$, $V_3 = 2{,}52$ m/s, $Q_3 = 11{,}4$ m³/h.

La convergencia es satisfactoria. El caudal total es

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 62{,}5 + 25{,}9 + 11{,}4 = 99{,}8 \text{ m}^3/\text{h} \qquad \textit{Resp.}$$

Este sistema de tres tubos lleva diez veces más caudal en paralelo que en serie.

Este ejemplo es ideal para el programa EES. Introducimos los datos de los tubos (L_i, d_i, ε_i); las propiedades del fluido (ρ, μ); las definiciones $Q_i = (\Theta/4)d_i^2 V_i$, $\mathrm{Re}_i = \rho V d_i/\mu$ y $h_f = f_i(L_i/d_i)(V_i^2/2g)$; junto con la fórmula de Colebrook (6.48) para cada coeficiente de fricción f_i. No necesitamos emplear conceptos de resistencia del tipo de la Ecuación (6.89). Especificando que $f_i > 0$ y $\mathrm{Re}_i > 4000$, EES devuelve rápidamente $h_f = 20{,}3$ m cuando se especifica $Q = \mathrm{Z}Q_i = (99{,}8/3600)$ m³/s. Por el contrario, si se introduce $h_f = 20{,}3$ m, EES proporciona $Q = 99{,}8$ m³/h.

Tres depósitos interconectados

Consideremos el tercer ejemplo correspondiente a tres *depósitos interconectados*, Figura 6.24*c*. Si suponemos que todos los caudales se dirigen hacia el punto de unión, debe cumplirse

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \tag{6.90}$$

que implica obviamente que alguno de ellos debe ir en sentido inverso al indicado. Las variaciones de presión deben ser tales que la presión estática p_u en la unión debe ser única. En otras palabras, en la unión de las tres tuberías la LAM tiene una altura única

$$h_u = z_u + \frac{p_u}{\rho g}$$

www.elsolucionario.net

donde p_u es, por simplicidad, la presión manométrica en ese punto. La pérdida de carga en cada rama, suponiendo que $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ (manométrica) en la superficie de los depósitos, debe ser tal que

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{V_1^2}{2g}\frac{f_1 L_1}{d_1} = z_1 - h_u \\ h_2 &= \frac{V_2^2}{2g}\frac{f_2 L_2}{d_2} = z_2 - h_u \\ h_3 &= \frac{V_3^2}{2g}\frac{f_3 L_3}{d_3} = z_3 - h_u \end{aligned} \tag{6.91}$$

Suponemos un valor de h_u y calculamos V_1, V_2 y V_3 por medio de las Ecuaciones (6.91), y de aquéllas Q_1, Q_2 y Q_3, iterando hasta que se cumpla la Ecuación (6.90). Si hemos puesto h_u muy alto, la suma $Q_1 + Q_2 + Q_3$ será *negativa* y tendremos que bajar h_u, y viceversa.

EJEMPLO 6.19

Tomemos los tres tubos del Ejemplo 6.17 y supongamos que conectan tres depósitos cuyos niveles están en

$$z_1 = 20 \text{ m} \qquad z_2 = 100 \text{ m} \qquad z_3 = 40 \text{ m}$$

Calcule los caudales que circulan por cada tubo, despreciando las pérdidas localizadas.

www.elsolucionario.net

Solución

Como estimación inicial, supongamos que h_u está a nivel de la superficie del depósito 3, $z_3 = h_u = 40$ m. Esto nos ahorra un cálculo ($Q_3 = 0$) y nos permite obtener lo siguiente:

Depósito	h_u, m	$z_i - h_u$, m	f_i	V_i, m/s	Q_i, m³/h	L/d_i
1	40	–20	0,0267	–3,43	–62,1	1250
2	40	60	0,0241	4,42	45,0	2500
3	40	0	—	0	0	2000
					$\Sigma Q = -17,1$	

Como la suma de caudales es negativa, debemos bajar h_u. Reduciendo h_u a 30 m tendremos:

Depósito	h_u, m	$z_i - h_u$, m	f_i	V_i, m/s	Q_i, m³/h
1	30	–10	0,0269	–2,42	–43,7
2	30	70	0,0241	4,78	48,6
3	30	10	0,0317	1,76	8,0
					$\Sigma Q = 12,9$

Ahora ΣQ es positivo, y podemos interpolar linealmente con el caso anterior para obtener $h_u \Xi 34,3$ m. La tabla final es:

Depósito	h_u, m	$z_i - h_u$, m	f_i	V_i, m/s	Q_i, m³/h
1	34,3	–14,3	0,0268	–2,90	–52,4
2	34,3	65,7	0,0241	4,63	47,1
3	34,3	5,7	0,0321	1,32	6,0
					$\Sigma Q = 0,7$

Este resultado es suficientemente bueno; vemos que al depósito 1 le llegan 52,4 m³/h, 47,1 m³/h procedentes del 2 y 6,0 m³/h procedentes del 3.

Una iteración más nos daría $h_u = 34,53$ m, con $Q_1 = -52,8$ m³/h, $Q_2 = 47,0$ m³/h y $Q_3 = 5,8$ m³/h, de modo que $\Sigma Q = 0$. Pedagógicamente hablando, habríamos agotado el tema.

Redes de tuberías

La *red de tuberías* de la Figura 6.25 es un caso extremo de sistema de tuberías. Éste puede ser el sistema de alimentación de agua de un apartamento o de una ciudad. El procedimiento de trabajo es algebraicamente complejo, pero también sigue las tres reglas básicas:

1. La suma de flujos en cualquier nudo debe ser cero.
2. La pérdida de carga total alrededor de cualquier bucle cerrado debe ser cero. En otras palabras, la LAM en cada nudo tiene una altura única.
3. Todas las pérdidas deben satisfacer el diagrama de Moody o las correlaciones experimentales de las pérdidas localizadas.

Aplicando estas reglas básicas a cada nudo y a cada bucle se obtiene un conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas que permite determinar los caudales en cada tubo y la LAM (o la presión) de cada nudo. Como las ecuaciones no son lineales, la solución debe obtenerse por iteración; la técnica de iteración más antigua fue desarrollada por Hardy Cross en 1936 [17]. La resolución por ordenador de sistemas de tuberías

www.elsolucionario.net

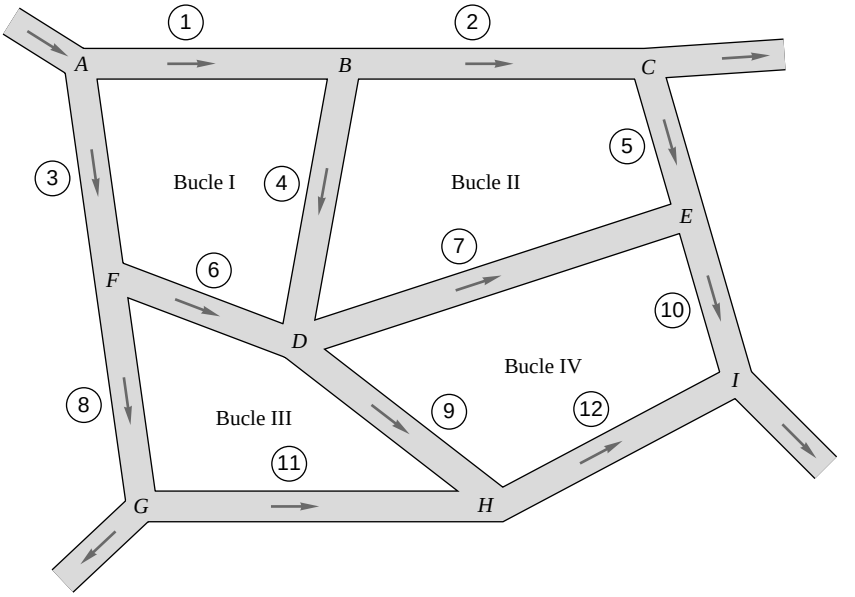


Figura 6.25. Esquema de una red de tuberías.

es una técnica muy común en la actualidad, que se detalla en libros especializados como la Referencia 18. El análisis de redes de tuberías es muy útil para los sistemas de distribución de agua si se dispone de datos precisos de las pérdidas del sistema.

6.11. EXPERIMENTACIÓN DE FLUJOS EN CONDUCTOS: ACTUACIONES DE UN DIFUSOR

El diagrama de Moody es tan útil para el movimiento en tubos de cualquier sección, con cualquier rugosidad y cualquier caudal, que podemos deslumbrarnos y pensar que la predicción de este tipo de flujos está a nuestro alcance. No es así. La teoría sólo es fiable para conductos de sección constante. Si la sección varía, las propiedades del flujo se deben determinar experimentalmente. Como se ha mencionado ya varias veces, la experimentación es una parte vital de la Mecánica de Fluidos.

En la literatura se pueden encontrar miles de trabajos sobre datos experimentales de flujos viscosos concretos, internos y externos. Ya hemos visto varios ejemplos:

1. Desprendimiento de torbellinos de un cilindro (Figura 5.2).
2. Resistencia de una esfera y un cilindro (Figura 5.3).
3. Modelo hidráulico de los aliviaderos de una presa (Figura 5.9).
4. Flujo en tubos con paredes rugosas (Figura 6.12).
5. Flujo secundario en conductos (Figura 6.16).
6. Coeficientes de pérdidas localizadas (Sección 6.9).

En el Capítulo 7 se analizarán muchas configuraciones experimentales en flujos externos, especialmente en la Sección 7.6. Aquí mostraremos datos de un tipo de flujo interno en particular: el difusor.

Actuaciones de un difusor

Un difusor es un ensanchamiento o aumento de área cuya finalidad es reducir la velocidad para recuperar la pérdida de presión del flujo; la geometría de un difusor se muestra en las Figuras 6.26*a* y 6.26*b*. Rouse e Ince [6] indican que podría haber sido inventado por los romanos (hacia el año 100 d.C.) al construir sus sistemas de abastecimiento de agua, en los que el agua fluía de modo continuo y se facturaba por el tamaño del

www.elsolucionario.net

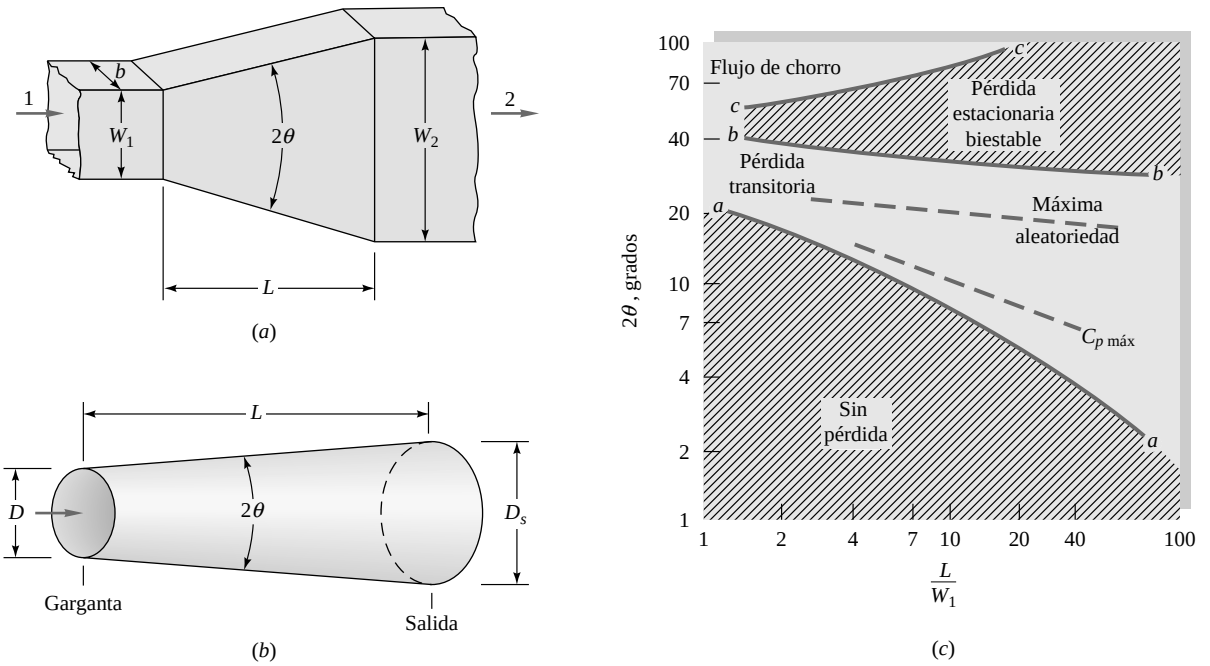


Figura 6.26. Geometría de los difusores y regímenes típicos de flujo: (*a*) difusor de paredes planas; (*b*) difusor cónico; (*c*) diagrama de estabilidad de un difusor de paredes planas. (*De la Referencia 14, con permiso de Creare, Inc.*)

conducto. Los clientes ingeniosos descubrieron que podían aumentar el caudal sin que ello supusiera un gasto extra ensanchando la sección de salida del conducto.

Los ingenieros han diseñado muchos difusores para aumentar la presión y reducir la energía cinética del flujo, pero hasta alrededor de 1950 el diseño de difusores era una combinación de arte, suerte y una buena dosis de experimentación. Cambios pequeños en los parámetros de diseño producían grandes variaciones en las actuaciones. La ecuación de Bernoulli no era fiable.

Despreciando pérdidas y efectos gravitatorios, la ecuación de Bernoulli indica que

$$p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 = p_0 = \text{cte} \tag{6.92}$$

donde p_0 es la presión de remanso, o de estancamiento, que alcanzaría el fluido si se decelerase sin pérdidas hasta $V = 0$.

El parámetro básico de un difusor es el *coeficiente de recuperación* C_p, definido como

$$C_p = \frac{p_s \Phi p_g}{p_{0g} \Phi p_g} \tag{6.93}$$

donde los subíndices *s* y *g* significan salida y garganta (o entrada), respectivamente. Valores altos de C_p indican mejor rendimiento.

Considérese el difusor de paredes planas de la Figura 6.26*a*, donde la sección 1 es la entrada y la 2 la salida. La ecuación de Bernoulli (6.92) nos diría

$$p_{01} = p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2 = p_{02}$$

o

$$C_{p,\text{sin fric}} = 1 \Phi \left[\frac{V_2}{V_1}\right]^2 \tag{6.94}$$

La ecuación de continuidad, por su parte, requiere que

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \tag{6.95}$$

www.elsolucionario.net

Combinando (6.94) y (6.95), podemos escribir las actuaciones en función de la *relación de áreas* A_2/A_1, que es un parámetro básico en el diseño de difusores:

$$C_{p,\text{sin fric}} = 1 - (A_2/A_1)^{-2} \tag{6.96}$$

Un diseño típico tiene $A_2/A_1 = 5{:}1$, para el cual la Ecuación (6.96) predice $C_p = 0{,}96$, una recuperación casi total. Pero en la realidad los valores de C_p para esta relación de áreas [14] son 0,86 como máximo y pueden llegar a ser sólo de 0,24.

La razón básica de esta discrepancia es la separación del flujo, como se muestra en la Figura 6.27. El aumento de presión en el difusor representa un gradiente adverso (Sección 7.5), que produce la separación de la capa límite de la pared y una reducción apreciable de las actuaciones. La Mecánica de Fluidos Computacional (CFD, *Computational Fluid Dynamics*) puede en la actualidad predecir este comportamiento (véase, por ejemplo, Referencia 20).

Una complicación adicional a la separación de la capa límite es que la configuración del flujo en un difusor es muy variable, y era considerada misteriosa y errática hasta que en 1955 Kline descubrió la estructura de estas configuraciones mediante técnicas de visualización en un canal de agua.

Fox y Kline [21] publicaron en 1962 un *diagrama completo de estabilidad* de las configuraciones del flujo en difusores, diagrama que se muestra en la Figura 6.26*c*. Hay cuatro regímenes básicos. Por debajo de la línea *aa* el flujo es estacionario, sin separación, y con actuaciones moderadamente buenas. Nótese que incluso en un difusor muy corto se produce la separación, o entrada en pérdida, si el semiángulo es mayor de 10°.

Entre las líneas *aa* y *bb* aparece separación de la capa límite con entrada en pérdida transitoria y flujo marcadamente no estacionario. Las mejores actuaciones, máximo C_p, se obtienen en este régimen. La tercera configuración, entre las líneas *bb* y *cc*, es una entrada en pérdida permanente, biestable, de una pared solamente. La entrada en pérdida puede saltar de una pared a otra, y las actuaciones son pobres.

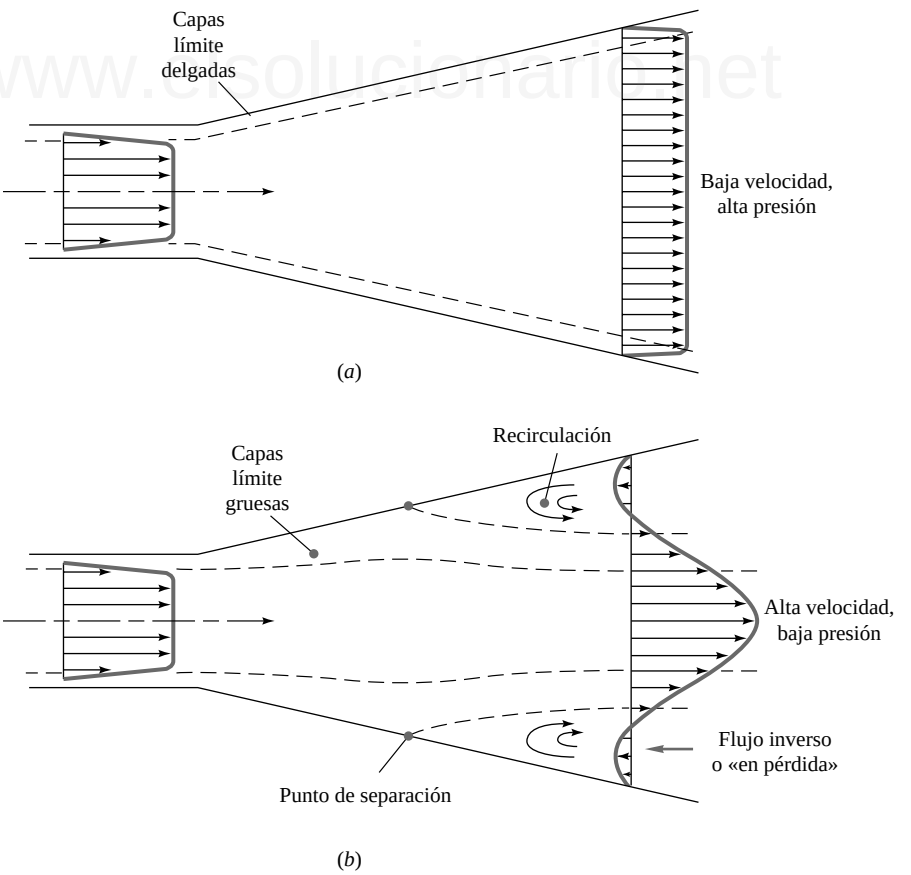


Figura 6.27. Actuaciones de un difusor: (*a*) configuración ideal con actuaciones óptimas; (*b*) situación real, con separación de la capa límite y actuaciones mediocres.

www.elsolucionario.net

La cuarta configuración, por encima de la línea *cc*, es un *flujo de tipo chorro*, con separación de la corriente tan acusada que el flujo ignora las paredes y pasa entre las zonas de recirculación con área casi constante. Las actuaciones son muy pobres en esta región.

El análisis dimensional de un difusor cónico o de paredes planas muestra que C_p debe depender de los siguientes parámetros:

1. Dos cualesquiera de los siguientes parámetros geométricos:
   a. Relación de áreas A_2/A_1 o $(D_s/D)^2$.
   b. Ángulo de divergencia 2θ.
   c. Esbeltez L/W_1 o L/D.
2. Número de Reynolds en la entrada $\mathrm{Re}_g = V_1 W_1/\nu$ o $V_1 D/\nu$.
3. Número de Mach en la entrada $\mathrm{Ma}_g = V_1/a_1$.
4. *Coeficiente de bloqueo* de la capa límite en la entrada $B_g = A_{CL}/A_1$, donde A_{CL} es el área bloqueada por el flujo lento de la capa límite en la entrada (valores típicos de B_g oscilan de 0,03 a 0,12).

Un difusor con paredes planas necesitaría un parámetro geométrico adicional para describir su sección transversal:

5. Alargamiento b/W_1.

Incluso con esta lista tan extensa se han omitido cinco efectos que pueden ser importantes: nivel de turbulencia en la entrada, torsión de la corriente, vorticidad en la entrada, pulsaciones superpuestas en el flujo y obstrucciones aguas abajo, que aparecen en muchas aplicaciones prácticas con máquinas.

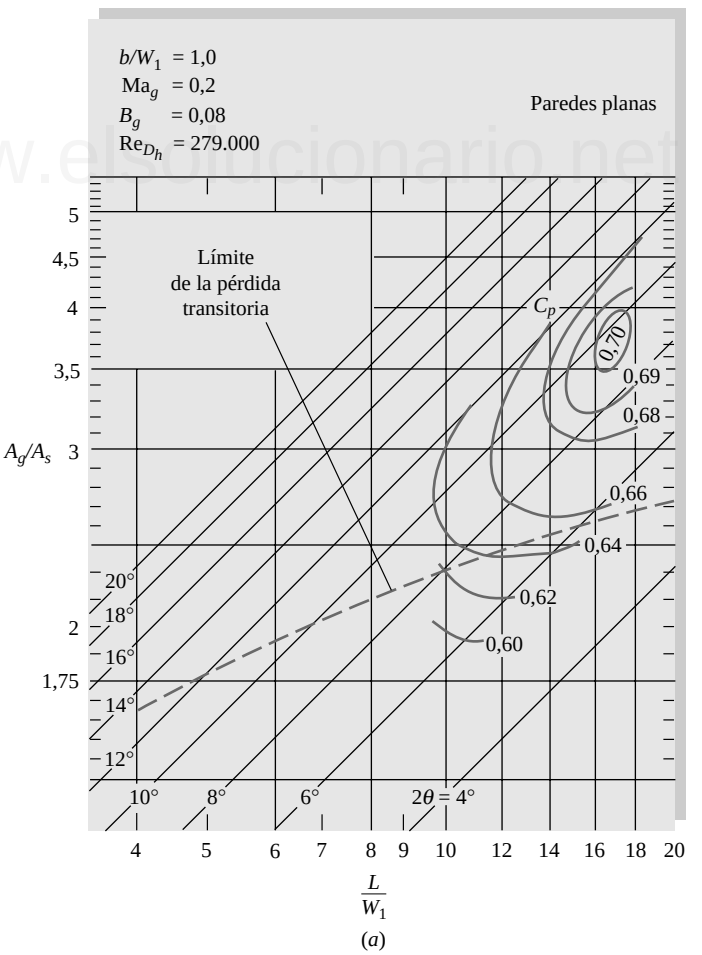
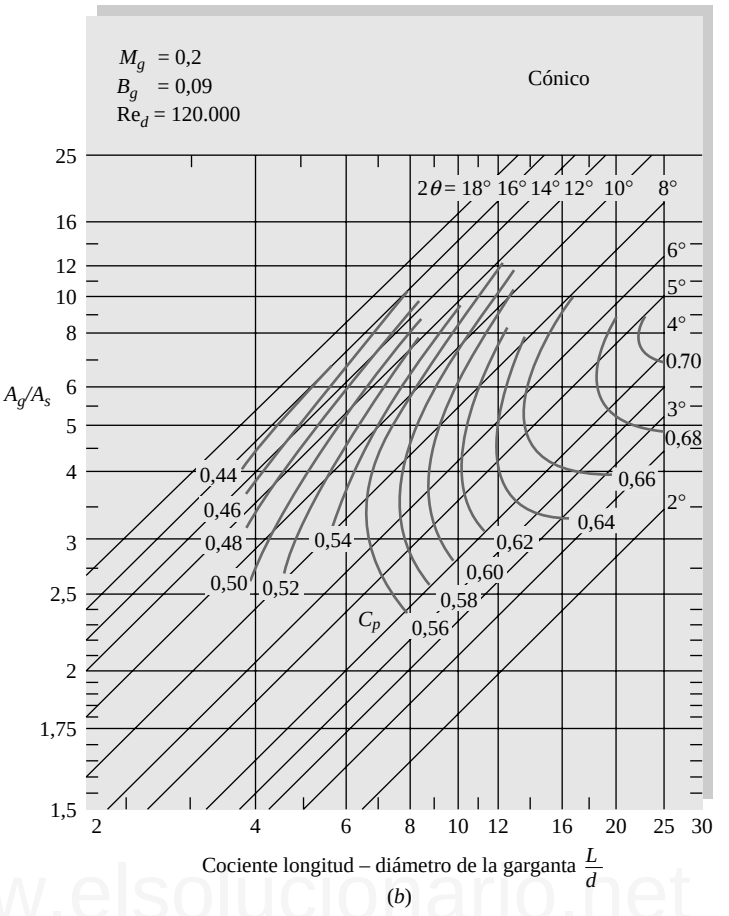


Figura 6.28a. Diagramas típicos de actuación de difusores cónicos y de paredes planas en condiciones similares de operación: (*a*) paredes planas. (*De la Referencia 14, con permiso de Creare, Inc.*)

www.elsolucionario.net



www.elsolucionario.net

Figura 6.28b. Diagramas típicos de actuación de difusores cónicos y de paredes planas en condiciones similares de operación: (*b*) cónico (*De la Referencia 14, con permiso de Creare, Inc.*)

Los tres parámetros más importantes son A_2/A_1, θ y B_g. La Figura 6.28 muestra diagramas típicos de actuaciones. Para el caso de un bloqueo del 8 al 9 por 100, ambos tipos de difusores tienen el mismo máximo de actuaciones, C_p = 0,70, pero con ángulos de divergencia distintos (9° en el plano y 4,5° en el cónico). Ambos tipos se separan del comportamiento ideal de Bernoulli, que da máximos de C_p = 0,93 para el de paredes planas y 0,99 para el cónico, sobre todo por el efecto de bloqueo.

Con los datos de la Referencia 14 podemos ver, en general, que las actuaciones disminuyen con el bloqueo y son aproximadamente las mismas para los difusores cónicos y de paredes planas, como muestra la Tabla 6.6. En todos los casos, el mejor difusor cónico es de un 10 a un 80 por 100 más largo que el mejor de paredes planas. Por tanto, si la longitud está limitada en el diseño, se debe emplear uno de estos últimos por sus mejores actuaciones.

Tabla 6.6. Datos de actuaciones óptimas de difusores [4].

Bloqueo a la entrada	Paredes planas		Cónico	
B_g	$C_{p,\text{máx}}$	L/W_1	$C_{p,\text{máx}}$	L/d
0,02	0,86	18	0,83	20
0,04	0,80	18	0,78	22
0,06	0,75	19	0,74	24
0,08	0,70	20	0,71	26
0,10	0,66	18	0,68	28
0,12	0,63	16	0,65	30

www.elsolucionario.net

El diseño experimental de un difusor es un ejemplo excelente de intento de minimizar los efectos indeseables de un gradiente de presión adverso y la separación del flujo.

6.12. MEDIDORES EN FLUIDOS

Casi todos los problemas prácticos con fluidos en ingeniería están relacionados con una medida precisa del flujo. Hay necesidad de medir propiedades *locales* (velocidad, presión, temperatura, densidad, viscosidad, nivel de turbulencia), *integradas* (flujo másico y flujo volumétrico) y *globales* (visualización de todo el campo fluido). En esta sección vamos a concentrar nuestra atención en las medidas de velocidad y gasto volumétrico, o caudal.

La medida de la presión se ha discutido en la Sección 2.10. La medida de otras propiedades termodinámicas, como densidad, temperatura y viscosidad, quedan más allá del alcance de este libro, y están recogidas en libros especializados como las Referencias 22 y 23. Las técnicas de visualización global para flujos a baja velocidad se analizaron en la Sección 1.9, y las técnicas ópticas especiales utilizadas en flujos a alta velocidad se pueden encontrar en la Referencia 21 del Capítulo 1. Las medidas de flujo en canales abiertos y otros flujos con superficie libre se estudian en el Capítulo 10.

Medidores de velocidad local

La velocidad media de una región pequeña, o puntual, puede ser medida mediante diversos principios físicos, ordenados aquí en orden creciente de complejidad y sofisticación:

1. Trayectoria de partículas flotantes o de flotabilidad neutra.
2. Dispositivos mecánicos giratorios:
   a. Anemómetro de copas.
   b. Rotor de Savonius.
   c. Molinete.
   d. Medidor de turbina.
3. Tubo pitot (Figura 6.30).
4. Medidor electromagnético.
5. Hilos y placas calientes.
6. Anemómetro de láser por efecto Doppler (LDA, *Laser-Doppler Anemometer*).

Algunos de ellos se muestran en la Figura 6.29.

Partículas flotantes o de flotabilidad neutra. Una estimación simple, pero efectiva, de la velocidad del flujo se puede obtener mediante la introducción de partículas en el mismo. Por ejemplo, virutas en la superficie libre de un canal, pequeñas partículas esféricas mezcladas con un líquido, o burbujas de hidrógeno. A veces el movimiento de los gases se puede estimar a través de las partículas de polvo que llevan. Pero se debe comprobar si las partículas se mueven realmente con el flujo. Las boyas se utilizan a menudo para seguir el movimiento de las aguas oceánicas y se pueden diseñar para que se muevan a la velocidad de la superficie, del fondo o de cualquier profundidad [24]. Muchos mapas oficiales de mareas [25] se han obtenido estudiando el movimiento de boyas amarradas. Con un gran número de éstas se puede determinar la configuración del flujo.

Sensores giratorios. Los dispositivos giratorios de las Figuras 6.29*a* a *d* se pueden usar en gases o en líquidos, siendo su velocidad de rotación aproximadamente proporcional a la velocidad del fluido. El anemómetro de copas (Figura 6.29*a*) y el rotor de Savonius (Figura 6.29*b*) siempre giran en el mismo sentido, independientemente de la dirección del flujo. Son muy populares en aplicaciones atmosféricas y oceánicas, y se pueden acoplar a una veleta para alinearlos con el flujo. El medidor de turbina (Figura 6.29*c*) y el molinete (Figura 6.29*d*) deben de estar alineados, con el flujo incidente paralelo al eje de rotación. Pueden detectar flujo inverso, porque entonces girarán en sentido contrario. Todos estos medidores pueden conectarse a contadores que registran la cantidad de vueltas o a sensores electromagnéticos para obtener tanto medidas

www.elsolucionario.net

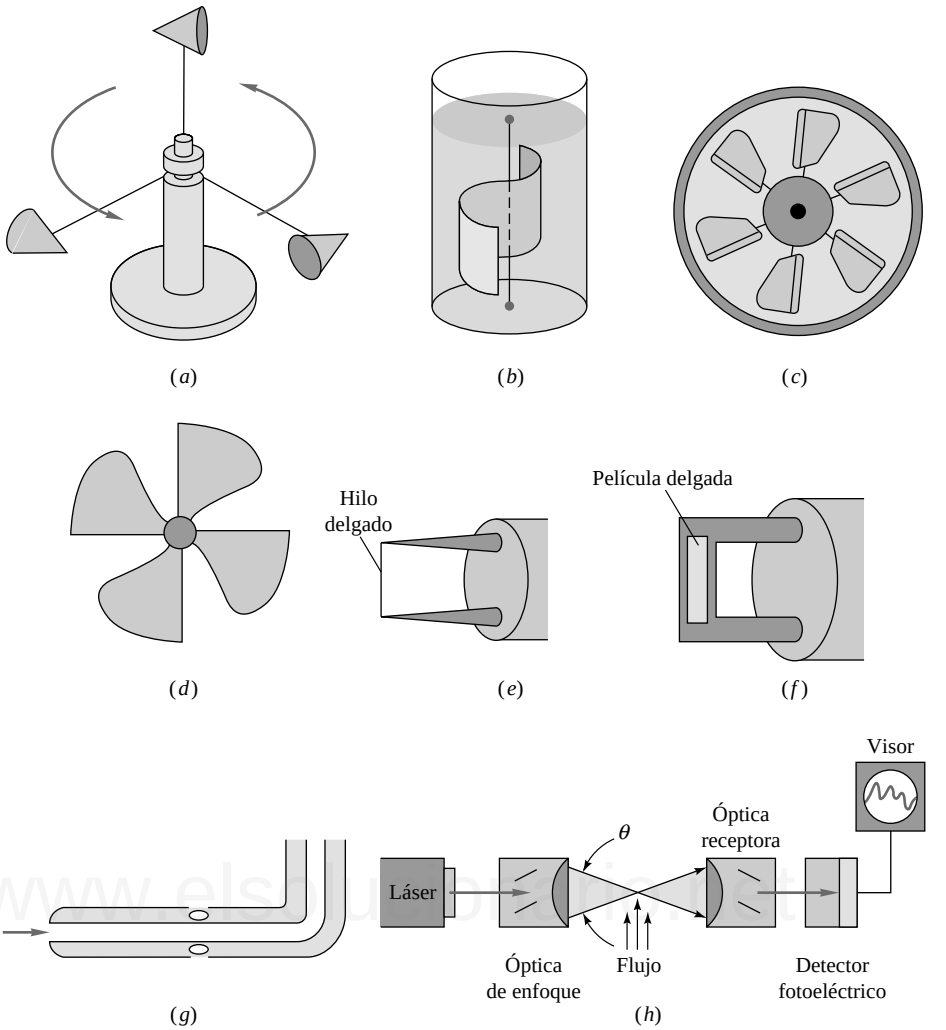


Figura 6.29. Ocho medidores de velocidad típicos: (*a*) anemómetro de tazas; (*b*) rotor de Savonius; (*c*) medidor de turbina montado en un conducto; (*d*) molinete; (*e*) anemómetro de hilo caliente; (*f*) anemómetro de placa caliente; (*g*) tubo pitot; (*h*) anemómetro láser-doppler.

analógicas como digitales de la velocidad. Todos tienen la desventaja de que son relativamente grandes y no dan, por tanto, una medida «puntual».

Tubo pitot. Un tubo esbelto alineado con el flujo (Figuras 6.29*g* y 6.30) puede medir la velocidad local a partir de diferencias de presión. Por unos orificios laterales se mide la presión estática p_s de la corriente y a través del orificio frontal se mide la presión de remanso p_0, obtenida al decelerar la corriente incidente hasta el reposo. En vez de medir p_s y p_0 por separado, se suele medir su diferencia directamente, como se muestra en la Figura 6.30.

Por encima de $\mathrm{Re}_D > 1000$, donde D es el diámetro del tubo, el flujo alrededor del tubo de pitot tiene un comportamiento no viscoso y podemos aplicar la ecuación de Bernoulli (3.77) con gran precisión. Para flujo incompresible,

$$p_s + \tfrac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z_s \Xi p_0 + \tfrac{1}{2}\rho(0)^2 + \rho g z_0$$

Suponiendo que la diferencia de alturas $\rho g(z_s - z_0)$ es despreciable, la ecuación se reduce a:

$$V \Xi \left[2 \frac{(p_0 \Phi p_s}{\Leftarrow} \right]^{1/2} \tag{6.97}$$

www.elsolucionario.net

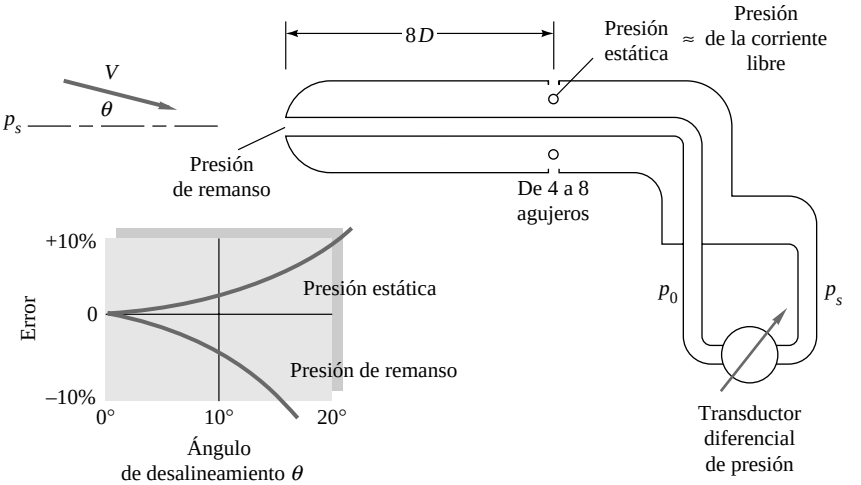


Figura 6.30. Tubo de pitot combinando medida de la presión estática y de remanso en una corriente fluida.

Ésta es la *fórmula de Pitot*, en honor al ingeniero francés Henri de Pitot, que diseñó el instrumento en 1732.

El principal inconveniente de este dispositivo es que el tubo debe estar alineado con la corriente, cuya dirección puede no ser conocida. Para ángulos de desalineamiento mayores de 5°, esto produce errores sustanciales en las medidas de p_0 y en p_s, como muestra la Figura 6.30. El tubo pitot es muy útil en líquidos y gases; en gases, si el número de Mach de la corriente es alto (Capítulo 9), se debe introducir un término de corrección por compresibilidad. Debido a la lentitud de respuesta de los tubos llenos de líquido que transmiten la presión a los sensores, el pitot no es útil en flujos no estacionarios. Por su pequeño tamaño, la medida es puntual y puede usarse incluso para medir flujo sanguíneo en arterias y venas. No es adecuado para bajas velocidades en gases debido a las pequeñas diferencias de presión que aparecen. Por ejemplo, si $V = 1$ ft/s (0,3 m/s) de aire en condiciones estándar, de la Ecuación (6.97) obtenemos que $p_0 - p$ es igual a sólo 0,001 lbf/ft^2 (0,048 Pa). Este valor está más allá de la resolución de los sensores de presión normales.

Medidor electromagnético. Si se aplica un campo magnético a un fluido conductor, el movimiento del fluido inducirá una diferencia de potencial entre dos electrodos situados dentro o en las proximidades del flujo. Los electrodos se pueden construir fuselados o puestos en la pared, de modo que no perturben apenas al flujo. La señal es muy fuerte en líquidos muy conductores, como los metales líquidos. El agua de mar también da buena señal, y estos medidores se usan corrientemente en oceanografía. Incluso se puede medir en agua dulce de baja conductividad, amplificando la señal y aislando los electrodos. Hay equipos comerciales para la mayor parte de los líquidos, pero son relativamente costosos. Los medidores electromagnéticos se tratan en la Referencia 26.

Anemómetro de hilo caliente. Para medir fluctuaciones rápidas del flujo, como las que hay en la capa límite turbulenta, un dispositivo ideal es un hilo muy fino ($d = 0{,}01$ mm o menor) caliente sostenido entre dos puntas, como en la Figura 6.29*e*. La idea procede de un trabajo de L. V. King, de 1914, sobre la pérdida de calor de cilindros esbeltos. Si se suministra energía eléctrica para calentar el cilindro, la pérdida de calor se puede relacionar con la velocidad según la *ley de King*

$$Q = I^2R \Xi a + b(\rho V)^n \tag{6.98}$$

donde $n \Xi \frac{1}{3}$ a muy bajos números de Reynolds e igual a $\frac{1}{2}$ a altos números de Reynolds. Habitualmente el hilo caliente trabaja en el rango de altos números de Reynolds, pero debe ser calibrado para hallar a, b y n en cada situación. El anemómetro puede trabajar con intensidad constante I, de modo que su resistencia R es una medida de la velocidad V, o con resistencia del hilo constante R (temperatura constante), e I como medida de la velocidad. En cualquier caso, la salida no es una función lineal de V, y el equipo debe disponer de un *linealizador* para proporcionar los datos de velocidad de un modo conveniente. Se dispone de muchas variedades de equipos comerciales de hilo caliente, así como diseños para montarlos uno mismo [27]. Se pueden encontrar discusiones detalladas excelentes sobre el tema en la Referencia 28.

www.elsolucionario.net

Debido a su fragilidad, el hilo caliente no es adecuado para líquidos, cuya elevada densidad y partículas transportadas pueden dañarlo y romperlo. La alternativa, igual de sensible pero de mayor rigidez, es el anemómetro de placa o película caliente, Figura 6.29*f*. Sobre un soporte de cierto espesor con forma cónica, cilíndrica o en cuña se deposita una placa metálica delgada, habitualmente de platino. El funcionamiento es análogo al del hilo caliente. El cono da la mejor respuesta, pero está sujeto a errores por deslizamiento.

Los hilos calientes se pueden agrupar para medir varias componentes de la velocidad.

Anemómetro láser-doppler. En este caso el láser proporciona un haz de luz muy intensa, coherente y monocromática que pasa a través del fluido. Cuando la luz es dispersada por una partícula arrastrada por el flujo, un observador fijo a tierra detectará una variación en la frecuencia de la luz dispersada respecto a la original, por el efecto *doppler*. La variación de la frecuencia Δf es proporcional a la velocidad de la partícula. El láser no perturba al flujo en absoluto.

La Figura 6.29*h* muestra la disposición común de doble haz del LDA. La óptica de emisión divide al láser en dos haces que se cruzan después con un ángulo θ. Su intersección, que es el volumen de medida o resolución espacial, es un elipsoide de unos 0,5 mm de largo y 0,1 mm de diámetro. Las partículas que pasan por esta intersección dispersan la luz de los haces; la luz dispersada pasa, a través de la óptica de recepción, a un fotodetector que convierte la luz en señal eléctrica. Un analizador de señales convierte la frecuencia eléctrica en voltaje que puede ser presentado en un indicador o almacenado. Si λ es la longitud de onda del láser, la velocidad medida viene dada por

$$V = \frac{\lambda \Delta f}{2 \operatorname{sen}(\theta/2)} \tag{6.99}$$

Utilizando más de un fotodetector o con otros modos de operación se puede medir más de una componente de la velocidad. Con este sistema se puede medir en líquidos y gases siempre que haya partículas en el flujo. En los líquidos normales las impurezas sirven como partículas dispersantes, pero los gases deben ser sembrados. Las partículas pueden ser tan pequeñas como la longitud de onda de la luz. Aunque el volumen de medida no es tan pequeño como un hilo caliente, el LDA es capaz de medir fluctuaciones turbulentas.

www.elsolucionario.net

Las ventajas del LDA son:

1. No perturba el flujo.
2. Alta resolución espacial del campo fluido.
3. Se obtiene directamente la velocidad independientemente de las demás propiedades fluidas.
4. La señal es lineal con la velocidad.
5. No necesita calibración.

Las desventajas son que tanto la instalación del flujo como el fluido deben ser transparentes y su elevado coste (un sistema básico como el de la Figura 6.29*h* tiene un precio mínimo de unos 50.000 dólares).

Una vez puesto a punto, un LDA puede medir el campo fluido con detalle minucioso. Para apreciar todo el poder del LDA, véase, por ejemplo, el asombroso detalle de los perfiles tridimensionales de velocidad medidos por Eckardt [29] en un compresor centrífugo de alta velocidad. En las Referencias 38 a 39 pueden encontrarse discusiones más extensas sobre el LDA.

EJEMPLO 6.20

El tubo de Pitot de la Figura 6.30 usa mercurio como fluido manométrico. Cuando se introduce en un flujo de agua, la lectura del manómetro es h = 8,4 in. Despreciando errores de desalineamiento y otros, ¿cuál es la velocidad del fluido V en ft/s?

Solución

A partir de la relación del manómetro con dos fluidos, Ecuación (2.33), con $z_A = z_2$, la relación entre la diferencia de presiones y la altura h es:

$$p_0 - p_s = (\rho_{\text{mercurio}} - \rho_{\text{agua}})gh$$

www.elsolucionario.net

Tomando el peso específico del mercurio y del agua de la Tabla 2.1, tenemos

$$p_0 - p_s = (846 - 62{,}4 \text{ lbf/ft}^3)\frac{8{,}4}{12}\text{ ft} = 549 \text{ lbf/ft}^2$$

La densidad del agua es 62,4/32,2 = 1,94 slugs/ft^3. Introduciendo estos valores en la fórmula de Pitot (6.97), obtenemos

$$V = \left(\frac{2(549 \text{ lbf/ft}^2)}{1{,}94 \text{ slugs/ft}^3}\right)^{1/2} = 23{,}8 \text{ ft/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Como se trata de un flujo de baja velocidad, no se necesita corrección por compresibilidad.

Medidores de Caudal

A menudo es deseable medir la masa o el volumen que pasa por un conducto. Una medida fiable del flujo es vital para facturarle a un cliente el suministro de un líquido o de un gas. Los diversos dispositivos que realizan tales medidas se analizan con gran detalle en el texto de la ASME sobre medidores [30]. Estos dispositivos son de dos clases, instrumentos mecánicos e instrumentos de pérdida de carga.

Los instrumentos mecánicos miden realmente la masa o el volumen del fluido atrapándolo y midiéndolo. Los diversos tipos de medida son:

1. Medida de masa
   a. Depósitos con báscula
   b. Trampas basculantes
2. Medida de volumen
   a. Depósitos calibrados
   b. Pistones con movimiento alternativo
   c. Anillos ranurados giratorios
   d. Disco giratorio
   e. Máquinas de paletas deslizantes
   f. Máquinas de engranajes o lóbulos
   g. Membranas pulsantes
   h. Compartimentos sellados

Los tres últimos son adecuados para medidas con gases.

Los instrumentos de medida con pérdida de carga obstruyen el flujo y provocan una caída de presión que nos da la medida del flujo:

1. Dispositivo de contracción de vena fluida (tipo Bernoulli)
   a. Orificio en placa delgada
   b. Tobera
   c. Tubo venturi
2. Dispositivos de pérdida por fricción
   a. Tubo capilar
   b. Tapón poroso

Generalmente, los medidores por fricción producen una pérdida de carga muy grande y no recuperable, y obstruyen demasiado el flujo para ser útiles.

Otros seis tipos de dispositivos muy utilizados y basados en principios físicos distintos son:

1. Medidor de turbina
2. Medidor por desprendimiento de torbellinos

www.elsolucionario.net

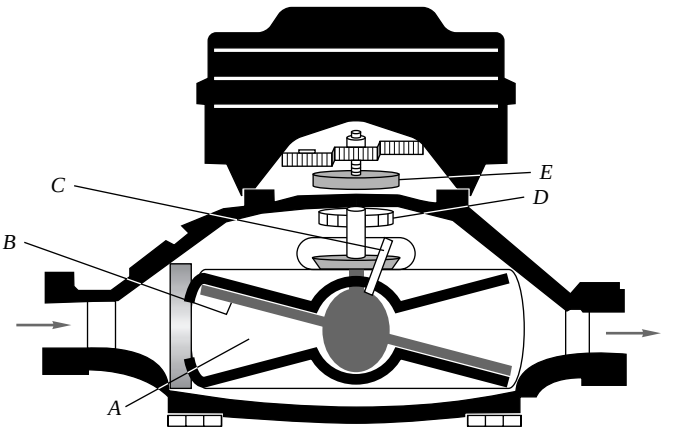


Figura 6.31. Corte transversal de un medidor de disco giratorio. A: cámara de medición; B: disco; C: huso giratorio; D: imán arrastrado; E: contador magnético. (*Cortesía de Badger Meter, Inc. Milwaukee, Wisconsin.*)

3. Medidor de flujo ultrasónico
4. Rotámetro
5. Medidor de gasto másico de Coriolis
6. Medidor de flujo laminar

Medidor de disco giratorio. Para medir *volúmenes* líquidos, en vez de flujos volumétricos, los dispositivos más usados son el medidor de disco giratorio y el medidor de turbina. La Figura 6.31 muestra un corte transversal de un *medidor de disco giratorio*, ampliamente utilizado en sistemas de suministro de agua y gasolina. Se trata de un mecanismo ingenioso que describimos brevemente a continuación. La cámara de medida es una porción de esfera que contiene un disco que puede rotar formando un cierto ángulo con la corriente. El fluido hace que el disco adquiera un movimiento de *nutación* (rotación excéntrica), y en cada revolución el disco deja pasar una determinada cantidad de fluido a través de la cámara. El volumen total de fluido se calcula contando el número de vueltas que da el disco.

Medidor de turbina. Este dispositivo, denominado en ocasiones *medidor de hélice*, consiste en una hélice que gira libremente instalada en una tubería. En la Figura 6.32*a* se muestra un diseño típico. Se colocan enderezadores del flujo aguas arriba del rotor, y la rotación se mide mediante impulsos eléctricos o magnéticos provocados por el paso de un punto determinado del rotor. La rotación del dispositivo es aproximadamente proporcional al volumen de fluido que lo atraviesa.

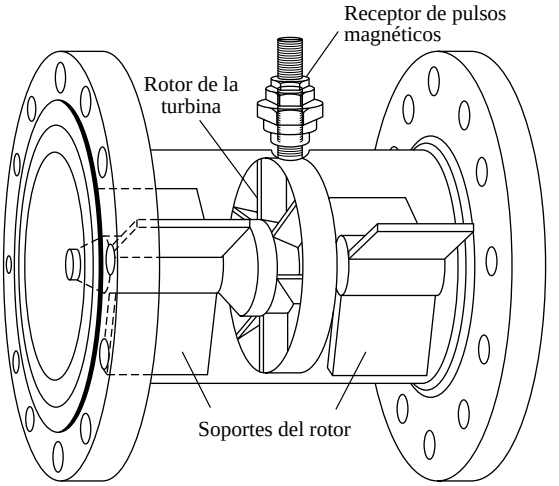
Al igual que en el disco giratorio, la principal ventaja del medidor de turbina es que cada impulso equivale a un valor finito de volumen de fluido, y los impulsos son señales digitales que se pueden sumar con facilidad. Existen incluso medidores de turbina para líquidos con dos palas que producen un número constante de impulsos por unidad de volumen en un rango de caudales 1:5 con un error inferior al 0,25 por 100. Los medidores para gases necesitan más palas para producir el par de giro necesario y tienen una precisión del 1 por 100.

Puesto que los medidores de turbina son muy específicos, es absolutamente necesario calibrarlos para el flujo que vamos a medir. La Figura 6.32*b* muestra una curva de calibración típica. Algunos investigadores han intentado establecer curvas universales de calibración con escaso éxito debido a las variaciones de fabricación de los dispositivos.

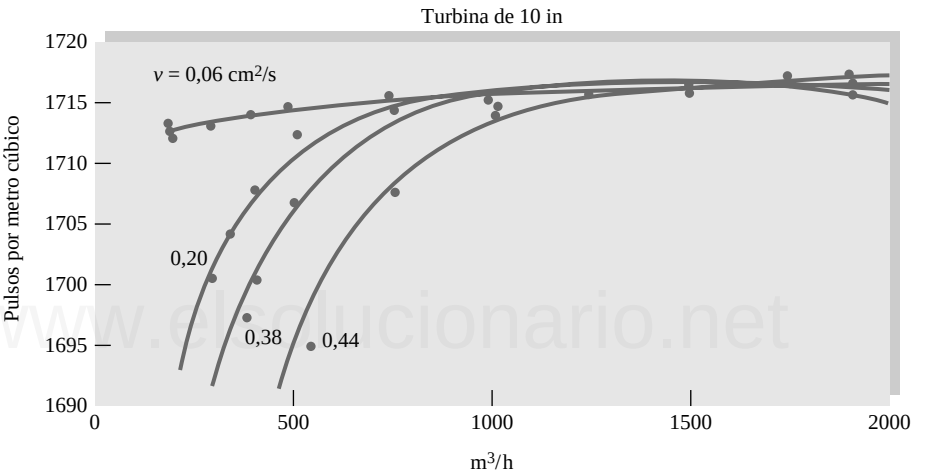
Los medidores de turbina también se pueden emplear en flujos no confinados, como vientos o corrientes oceánicas. Pueden ser muy compactos, midiendo en dos o tres direcciones. La Figura 6.33 ilustra un dispositivo de mano para medir la velocidad del viento que emplea una turbina de siete palas con una salida digital calibrada. La precisión de este dispositivo es del 2 por 100.

Medidor por desprendimiento de torbellinos. Recordamos de la Figura 5.2 que un cuerpo romo en presencia de una corriente uniforme desprende torbellinos (vórtices) alternos con un número de Strouhal

www.elsolucionario.net



(*a*)



(*b*)

Figura 6.32. El medidor de turbina está muy extendido en las industrias de suministro de petróleo, agua y gas: (*a*) diseño básico; (*b*) curva de calibración típica para petróleo crudo. (*Daniel Industries, Houston, TX.*)

Figura 6.33. Un medidor de turbina de mano para determinar la velocidad del viento. (*Cortesía de Nielsen-Kellerman Company.*)

www.elsolucionario.net

casi uniforme, St = fL/U, donde U es la velocidad incidente y L es un espesor característico del cuerpo. Dado que L y St son constantes, la frecuencia de desprendimiento es proporcional a la velocidad:

$$f = (\text{cte})(U) \tag{6.100}$$

Este medidor de caudal consta de un elemento generador de torbellinos que se introduce en el interior del conducto y mide la frecuencia de desprendimiento mediante un sensor de presión, ultrasónico o de transferencia de calor. En la Figura 6.34 se muestra un diseño típico.

Las ventajas de este medidor son las siguientes:

1. Ausencia de partes móviles.
2. Precisión del 1 por 100 en un rango de caudales muy amplio (100:1).
3. Posibilidad de medir fluidos muy fríos o muy calientes.
4. Longitud de conducto necesaria muy corta.
5. La calibración no depende de la densidad o la viscosidad del fluido.

Para más detalles, consúltese la Referencia 40.

Medidor ultrasónico. El medidor ultrasónico funciona de forma análoga al anemómetro láser de la Figura 6.29*h* pero empleando ondas sonoras. En la Figura 6.35 se muestran dos ejemplos. El medidor de flujo por pulsos se muestra en la Figura 6.35*a*. El transductor piezoeléctrico *A* situado aguas arriba se excita y produce un breve pulso sónico que viaja aguas abajo hasta el transductor *B*. La llegada del pulso a *B* hace que *A* genere un nuevo impulso, lo que da lugar a una frecuencia de impulsos regular f_A. El mismo proceso se repite en dirección contraria, de *B* hacia *A*, lo que da lugar a una nueva frecuencia f_B. La diferencia $f_A - f_B$ es proporcional al flujo volumétrico. La Figura 6.35*b* muestra un dispositivo tipo doppler, en el que las ondas sonoras emitidas en *T* son dispersadas por partículas o contaminantes en el flujo y son recibidas en *R*. La comparación de las dos señales muestra una frecuencia doppler que es proporcional al caudal. Los medidores ultrasónicos son no intrusivos y pueden acoplarse directamente a las tuberías *in situ* (véase Figura 6.35*c*). Su precisión es del orden del 1 al 2 por 100, aunque puede disminuir hasta el 5 por 100 debido a irregularidades del perfil de velocidades, temperatura del fluido o número de Reynolds. Para más detalles, consúltese la Referencia 41.

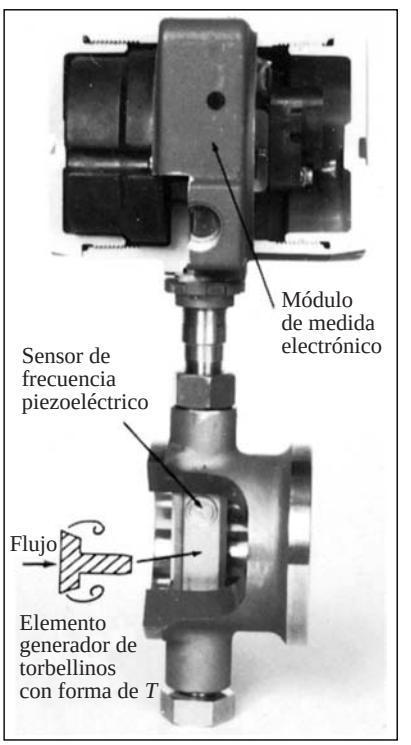


Figura 6.34. Medidor por desprendimiento de torbellinos. (*Cortesía de Invensys p/c*)

www.elsolucionario.net

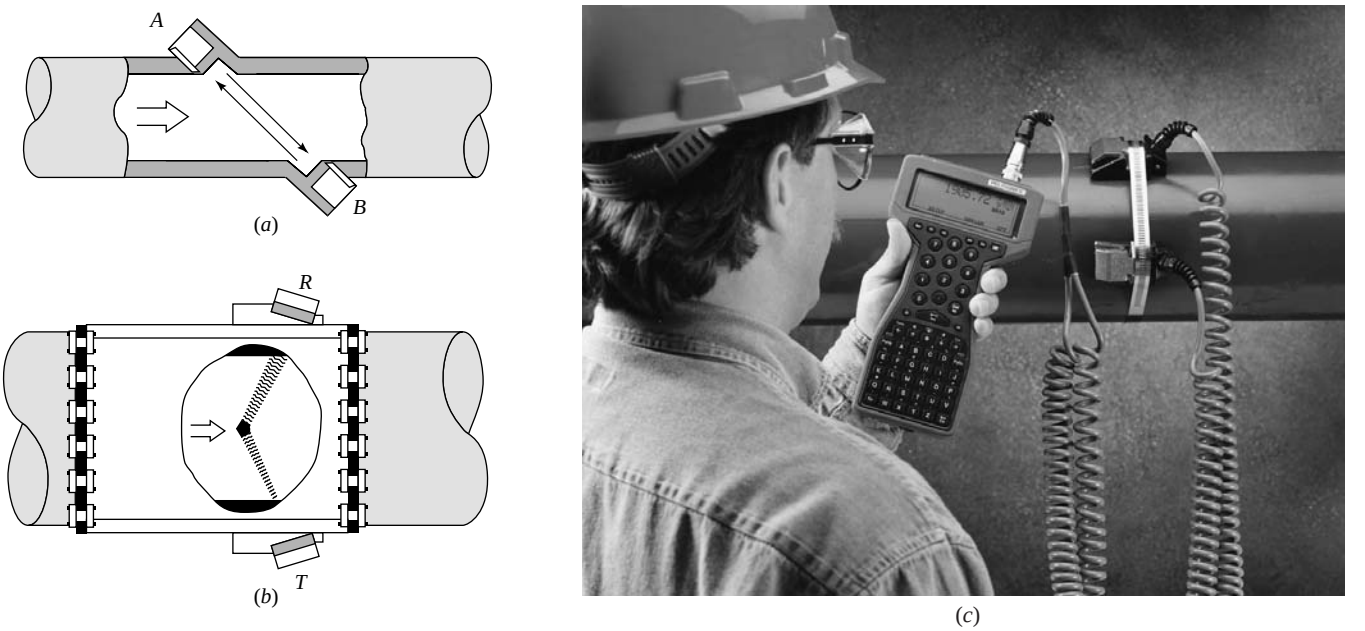


Figura 6.35. Medidores de caudal ultrasónicos: (*a*) tipo pulsos; (*b*) tipo doppler (*de la Referencia 41*); (*c*) una instalación portátil no intrusiva. (*Cortesía de Thermo Polysonics, Houston, TX.*)

Rotámetro. El *rotámetro* transparente de área variable de la Figura 6.36 tiene un flotador que, bajo la acción del flujo, se eleva en el tubo tronco-cónico vertical hasta alcanzar una cierta posición de equilibrio que depende del caudal. Un cálculo sencillo de las fuerzas sobre el flotador proporciona la siguiente expresión:

$$Q = C_d A_a \left[\frac{2W_{\text{neto}}}{A_{\text{flotador}} \rho_{\text{fluido}}} \right]^{1/2} \tag{6.101}$$

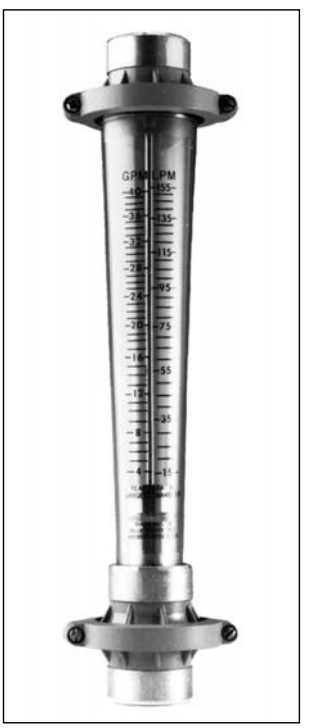


Figura 6.36. Rotámetro comercial. El flotador asciende por el tronco del cono hasta la posición de equilibrio, que proporciona una medida del caudal del flujo. (*Cortesía de Blue White Industries, Huntington Beach, CA.*)

www.elsolucionario.net

donde W_{neto} es el peso neto del flotador en el fluido, $A_a = A_{tubo} - A_{flotador}$ es el área de la sección anular entre el flotador y el tubo, y C_d es un coeficiente de descarga adimensional de orden unidad para el flujo anular confinado. Para ángulos del cono muy pequeños, A_a varía casi linealmente con la posición del flotador, y el cono puede calibrarse y marcarse con una escala de flujo volumétrico, como en la Figura 6.36. El rotámetro proporciona así una medida fácilmente visible del caudal. La escala puede cambiarse con distintos tamaños de flotadores. Obviamente, el tubo debe estar vertical, y el dispositivo no proporciona medidas precisas en flujos con altas concentraciones de burbujas o partículas.

Medidor de gasto másico de Coriolis. La mayor parte de los medidores comerciales miden el gasto *volumétrico*, y el gasto másico se calcula después multiplicando por la densidad nominal del fluido. Una alternativa atractiva es utilizar un medidor de gasto *másico*, que funciona bajo los principios de la aceleración de Coriolis asociada a un sistema de coordenadas no inercial [recuerde la Figura 3.12 y el término de Coriolis $2\Omega \times V$ de la Ecuación (3.48)]. La salida del sensor es directamente proporcional al flujo másico.

La Figura 6.37 representa esquemáticamente un medidor de tipo Coriolis listo para ser instalado en un sistema de tuberías. El flujo entra en una configuración de dos conductos con dos bucles, que se excita electromagnéticamente para que vibre con una frecuencia natural elevada (amplitud < 1 mm y frecuencia > 100 Hz). El flujo hacia arriba produce un movimiento del bucle hacia el interior, y el flujo hacia abajo produce un movimiento del bucle hacia el exterior, ambos debidos a la aceleración de Coriolis. Sensores en ambos extremos registran la diferencia de fase de estos movimientos, que es proporcional al gasto másico. La precisión alcanzada es aproximadamente del ±0,2 por 100.

Medidor de flujo laminar. En la mayoría de los medidores de caudal comerciales el flujo a través del dispositivo es turbulento y la variación del caudal con la caída de presión no es lineal. Sin embargo, sabemos que en el flujo laminar en conductos Q crece casi linealmente con Δp, como muestra la Ecuación (6.12): $Q = [\Theta R^4/(8\mu L)]\,\Delta p$. Así, un elemento de medición que funcione con flujo laminar resultará bastante atractivo, ya que su calibración será casi lineal. Para asegurar condiciones laminares en lo que de otra forma sería un flujo turbulento, todo o parte del fluido se debe hacer pasar por pequeños conductos de modo que cada uno de ellos tenga un número de Reynolds bajo (laminar). El diseño en panal de abeja es el más popular.

www.elsolucionario.net

En la Figura 6.38 se fuerza al fluido a pasar a través de un anillo estrecho para conseguir un flujo laminar. La teoría predice $Q \propto \Delta p$, como en la Ecuación (6.73). Sin embargo, el flujo es muy sensible a las variaciones del área de la sección: por ejemplo, si la holgura del anillo se reduce a la mitad, la diferencia de presión aumenta en un factor mayor que ocho, luego se requiere una calibración del instrumento muy cuidadosa. En la Figura 6.38 el concepto de flujo laminar se ha integrado en un sistema de medición completo, con control de temperatura, medida de la diferencia de presión y un microprocesador incorporado. La precisión del dispositivo es del ±0,2 por 100.

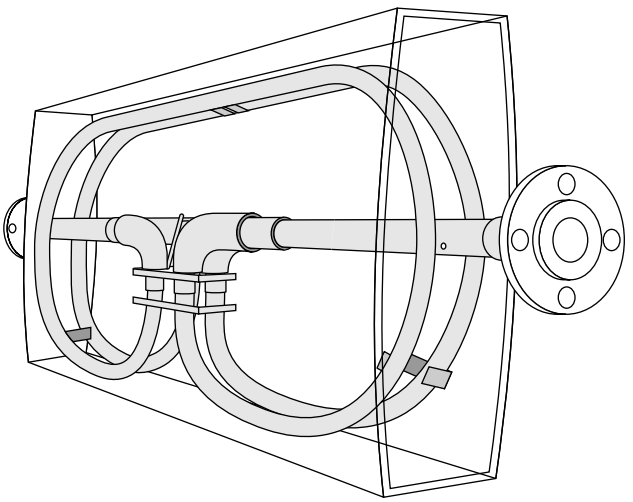


Figura 6.37. Medidor de gasto másico de Coriolis. (*Cortesía de ABB Instrumentation, Inc.*)

www.elsolucionario.net

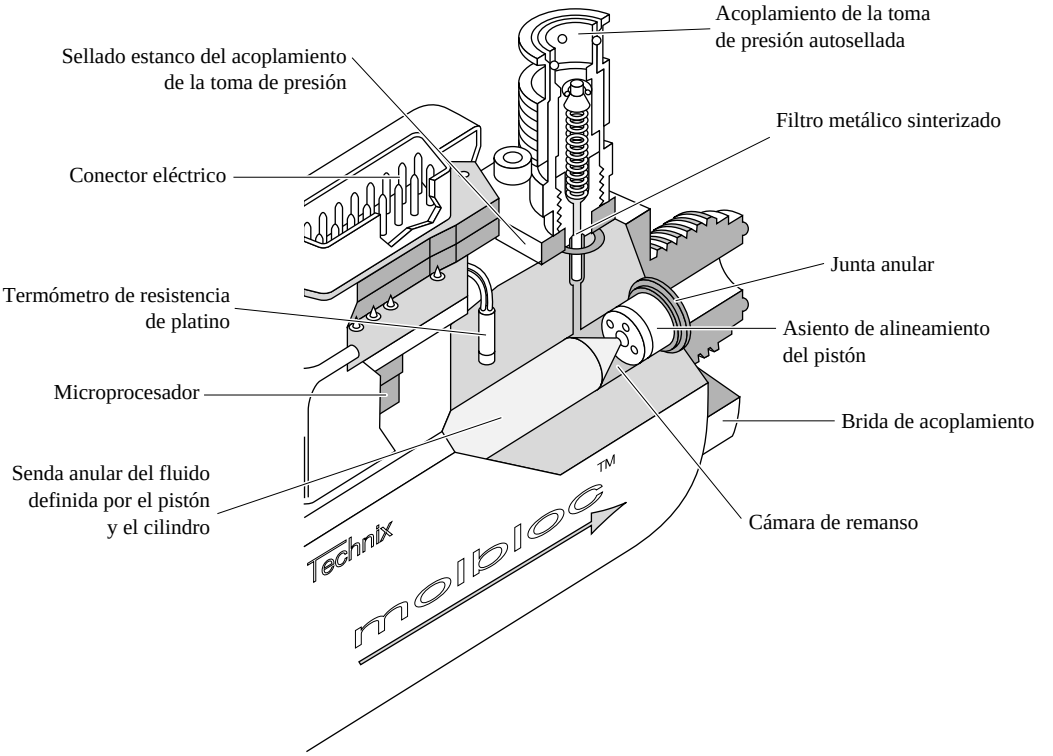


Figura 6.38. Sistema completo de medida basado en un medidor de flujo laminar (en este caso, un conducto anular de pequeña holgura). El caudal es prácticamente porporcional a la caída de presión. (*Cortesía de Martin Girad, DH Intruments, Inc.*)

www.elsolucionario.net

Teoría de la obstrucción de Bernoulli. Consideremos la obstrucción genérica del flujo mostrada en la Figura 6.39. El flujo que circula por el conducto de diámetro D es obligado a pasar por un estrechamiento de diámetro d; el cociente β es un parámetro clave:

$$\beta = \frac{d}{D} \tag{6.102}$$

Después de la obstrucción el flujo puede seguir estrechándose aún más hasta una vena contracta de diámetro $D_2 < d$, como se indica. Apliquemos las ecuaciones de continuidad y Bernoulli a un flujo estacionario y sin fricción para estimar la variación de presión:

Continuidad: $$Q = \frac{\pi}{4} D^2 V_1 = \frac{\pi}{4} D_2^2 V_2$$

Bernoulli: $$p_0 = p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho V_2^2$$

Eliminando V_1, podemos poner V_2 o Q en función de la caida de presión $p_1 - p_2$:

$$\frac{Q}{A_2} = V_2 = \left[\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - D_2^4 / D^4)}\right]^{1/2} \tag{6.103}$$

Esta expresión no es completamente exacta porque hemos despreciado la fricción en el conducto, donde sabemos que es importante. Tampoco queremos adentrarnos en el problema de medir la vena contracta, D_2/d, que habría que introducir en (6.103). Por tanto, suponemos que $D_2/D = \beta$ y calibramos el dispositivo para obtener la relación

www.elsolucionario.net

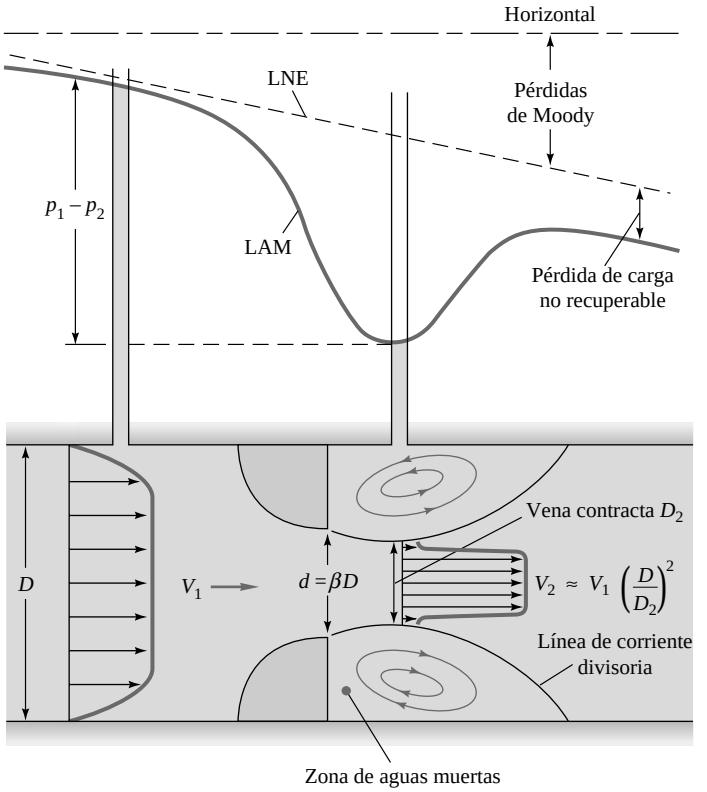


Figura 6.39. Variaciones de velocidad y presión en un medidor de flujo por obstrucción, tipo Bernoulli.

www.elsolucionario.net

$$Q = A_g V_g = C_d A_g \left[\frac{2(p_1 - p_2)/\rho}{1 - \beta^4}\right]^{1/2} \tag{6.104}$$

donde el subíndice *g* indica garganta de la obstrucción. El *coeficiente de descarga* C_d adimensional tiene en cuenta los posibles errores del análisis aproximado. Por análisis dimensional en un diseño dado esperamos que

$$C_d = f(\beta, \mathrm{Re}_D) \quad \text{donde} \quad \mathrm{Re}_D = \frac{V_1 D}{\nu} \tag{6.105}$$

El cociente geométrico de la Ecuación (6.104) en que aparece β se denomina *factor de velocidad*:

$$E = (1 - \beta^4)^{-1/2} \tag{6.106}$$

También se pueden agrupar C_d y E en la Ecuación (6.104) para formar un único *coeficiente de flujo* α:

$$\alpha = C_d E = \frac{C_d}{(1 - \beta^4)^{1/2}} \tag{6.107}$$

Así la Ecuación (6.104) se puede reescribir en la forma equivalente:

$$Q = \alpha A_g \left[\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}\right]^{1/2} \tag{6.108}$$

www.elsolucionario.net

Obviamente, el coeficiente de flujo depende de los mismos parámetros:

$$\alpha = f(\beta, \mathrm{Re}_D) \tag{6.109}$$

A veces se utiliza el número de Reynolds de la garganta en lugar del número de Reynolds común:

$$\mathrm{Re}_d = \frac{V_g d}{\nu} = \frac{\mathrm{Re}_D}{\epsilon} \tag{6.110}$$

Como se suponen conocidos los parámetros de diseño, la solución al problema de la medida del flujo es hallar la dependencia de α en la Ecuación (6.109) o de C_d en la Ecuación (6.105).

El flujo másico está ligado a Q por

$$\dot{m} = \rho Q \tag{6.111}$$

y, por tanto, está relacionado con los demás parámetros por las mismas fórmulas.

La Figura 6.40 muestra los tres dispositivos básicos recomendados por la Organización Internacional de Normalización (ISO, *International Organization for Standardization*) [31]: orificio en placa delgada, tobera y tubo venturi.

Orificio en placa delgada. Este dispositivo, mostrado en la Figura 6.40*b*, suele tener un β entre 0,2 y 0,8, aunque el diámetro d no debe ser menor de 12,5 mm. Para medir p_1 y p_2 se utilizan tres tipos de tomas:

1. Tomas de presión en los rincones que forma la placa con el tubo.
2. Tomas D: $\frac{1}{2}D$: una situada D aguas arriba y otra $\frac{1}{2}D$ aguas abajo en la pared del conducto.

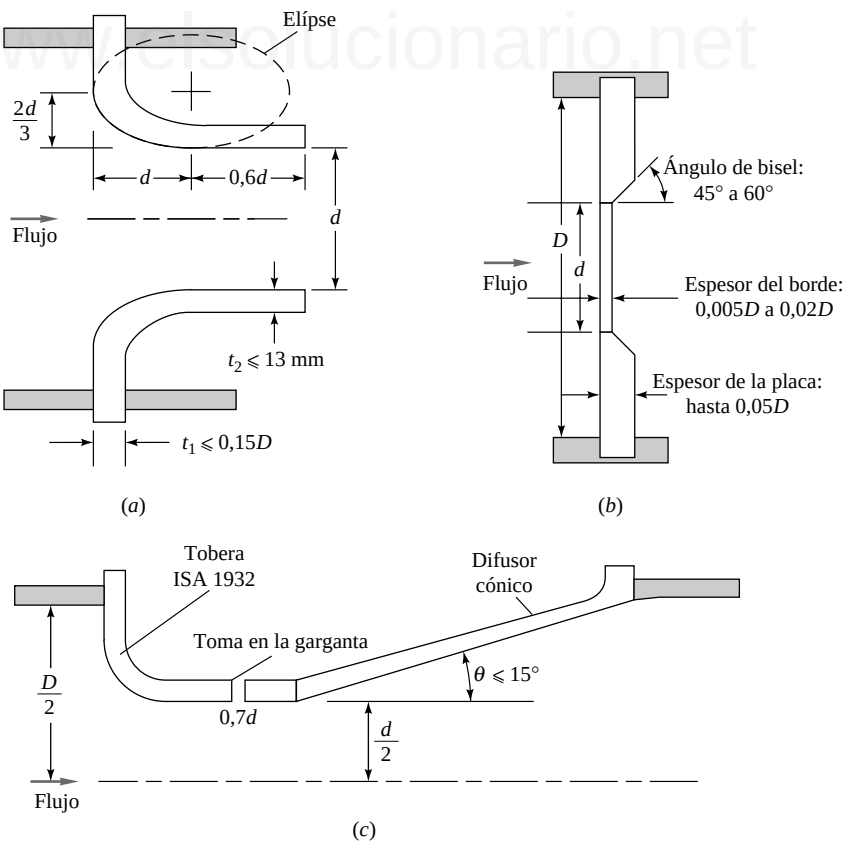


Figura 6.40. Configuraciones usuales de los tres medidores de caudal por obstrucción de tipo Bernoulli típicos: (*a*) tobera suave; (*b*) orificio en placa delgada; (*c*) venturi. (*De la Referencia 31, con permiso de ISO.*)

www.elsolucionario.net

3. Tomas con rebajes: 1 in (25 mm) aguas arriba y 1 in (25 mm) aguas abajo de la placa, independientemente del diámetro D.

Los tipos 1 y 2 son geométricamente semejantes, mientras que las tomas del tipo 3 no lo son y, por tanto, deben ser correlacionadas por separado para cada tamaño de conducto en que se utilizan [30, 31].

La Figura 6.41 muestra el coeficiente de descarga de un orificio con tomas tipo 2, o sea, D: $\frac{1}{2}D$, en el rango de números de Reynolds de $\mathrm{Re}_D = 10^4$ a 10^7 de uso más común. Aunque los diseñadores disponen de diagramas detallados como el de la Figura 6.41 [30], la ASME recomienda el uso de las fórmulas desarrolladas a partir del ajuste de datos experimentales por la ISO [31]. La forma básica de estas curvas de ajuste es [42]

$$C_d = f(\beta) + 91{,}71\beta^{2{,}5}\,\mathrm{Re}_D^{-0{,}75} + \frac{0{,}09\beta^4}{1-\beta^4}F_1 - 0{,}0337\beta^3 F_2 \tag{6.112}$$

donde $$f(\beta) = 0{,}5959 + 0{,}0312\beta^{2{,}1} - 0{,}184\beta^8$$

Los factores F_1 y F_2 de la correlación varían con la posición de las tomas:

Tomas en las esquinas: $$F_1 = 0 \quad F_2 = 0 \tag{6.113a}$$

Tomas D: $\frac{1}{2}D$: $$F_2 = 0{,}4333 \quad F_2 = 0{,}47 \tag{6.113b}$$

Tomas con rebaje: $$F_2 = \frac{1}{D\ (\text{in})} \quad F_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{D\ (\text{in})} & D > 2{,}3 \text{ in} \\ 0{,}4333 & 2{,}0 \le D \le 2{,}3 \text{ in} \end{cases} \tag{6.113c}$$

www.elsolucionario.net

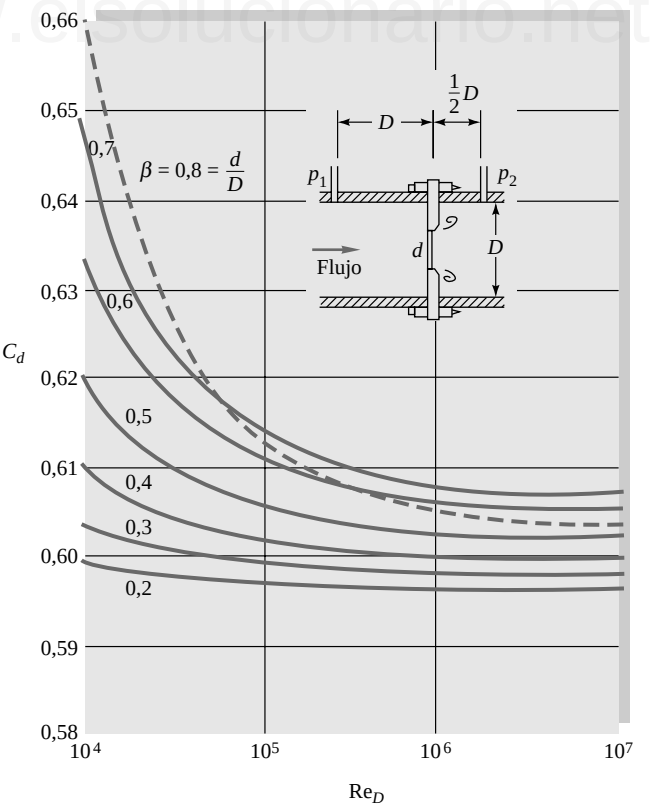


Figura 6.41. Coeficiente de descarga para un orificio en placa delgada con tomas tipo D: $\frac{1}{2}D$, representado a partir de las Ecuaciones (6.112) y (6.113*b*).

www.elsolucionario.net

Nótese que en las expresiones para tomas con rebaje (6.113*c*), por no ser geométricamente semejantes, los diámetros han sido expresados en pulgadas (in). Las constantes cambiarán si se emplean otras unidades. Ya prevenimos al lector con anterioridad sobre el uso de fórmulas dimensionales en el Ejemplo 1.4 y en la Ecuación (5.17), e incluimos la Ecuación (6.113*c*) únicamente porque el uso de tomas con rebaje está muy extendido en los EE.UU.

Toberas. Las toberas son de dos tipos, las de radio grande (o curvatura suave), que se muestran en la Figura 6.40*a*, y las de radio pequeño (que no se muestran), denominadas toberas ISA 1932 [30, 31]. La tobera, con su entrada suave, redondeada y convergente, elimina prácticamente la vena contracta y da coeficientes de descarga próximos a la unidad. Las pérdidas no recuperables siguen siendo grandes, ya que no hay difusor para la expansión gradual posterior.

La correlación recomendada por la ISO para el coeficiente de descarga de las toberas de curvatura suave es

$$C_d = 0{,}9965 - 0{,}00653\beta^{1/2}\left(\frac{10^6}{\mathrm{Re}_D}\right)^{1/2} = 0{,}9965 - 0{,}00653\left(\frac{10^6}{\mathrm{Re}_D}\right)^{1/2} \tag{6.114}$$

La segunda expresión es independiente de β y aparece representada en la Figura 6.42. Para toberas de radio pequeño, ISA 1932, se recomienda una correlación semejante:

$$C_d = 0{,}9900 - 0{,}2262\beta^{4{,}1} + (0{,}000215 - 0{,}001125\beta + 0{,}00249\beta^{4{,}7})\left(\frac{10^6}{\mathrm{Re}_D}\right)^{1{,}15} \tag{6.115}$$

Las toberas tienen valores de β entre 0,2 y 0,8.

Medidor venturi. El tercero y último de los medidores por obstrucción indicados es el venturi, llamado así en honor a Giovanni Venturi (1746-1822), físico italiano que estudió por primera vez las contracciones y expansiones cónicas. El medidor venturi original, o *clásico*, fue inventado por el ingeniero norteamericano Clemens Herschel en 1898. Consiste en una contracción cónica de 21°, una garganta recta de diámetro *d* y longitud *d*, y una expansión cónica entre 7 y l5°. El coeficiente de descarga es casi la unidad y las pérdidas no recuperables son muy pequeñas. Los tubos venturi de este tipo ya no se usan apenas.

Las toberas venturi modernas, Figura 6.40*c*, consisten en una tobera de entrada tipo ISA 1932 y una expansión cónica de semiángulo no mayor de l5°. Están ideadas para trabajar en el rango de números de Reynolds entre $1{,}5 \times 10^5$ y 2×10^6. Su coeficiente de descarga, que se muestra en la Figura 6.43, viene dado por la correspondiente expresión ISO

$$C_d = 0{,}9858 - 0{,}196\beta^{4{,}5} \tag{6.116}$$

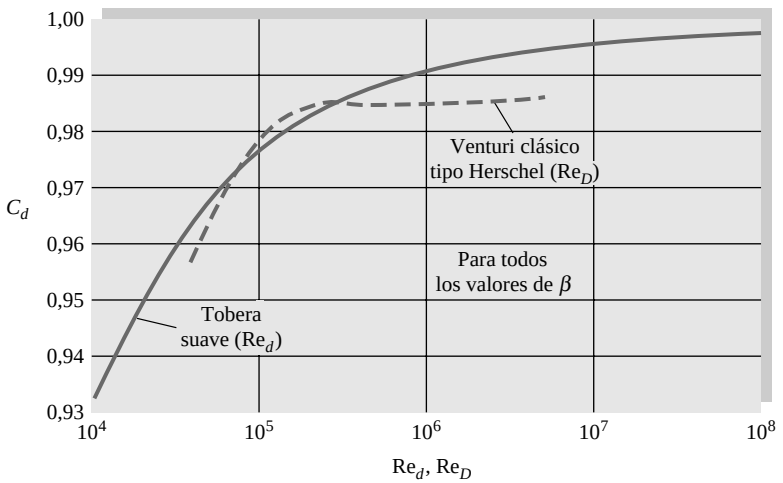


Figura 6.42. Coeficiente de descarga de los venturi actuales (con tobera suave) y el modelo clásico de Herschel.

www.elsolucionario.net

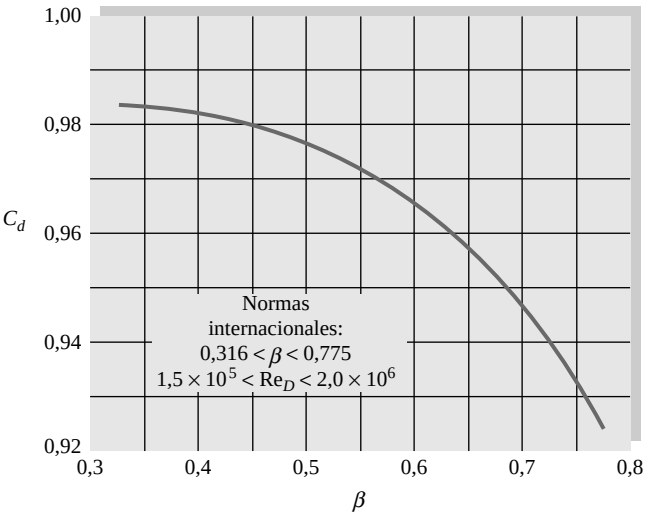


Figura 6.43. Coeficiente de descarga para un venturi típico.

Esta fórmula es independiente de Re_D en el rango indicado. El coeficiente de descarga del venturi de Herschel varía con Re_D pero no con β, como muestra la Figura 6.42. Ambos tienen unas pérdidas netas muy pequeñas.

La elección del medidor depende de las pérdidas y del coste y puede ser ilustrada con la siguiente tabla:

Tipo de medidor	Pérdida de carga	Coste
Orificio	Grande	Pequeño
Tobera	Media	Medio
Venturi	Pequeña	Grande

Como ocurre a menudo, el producto de las pérdidas por el coste inicial es aproximadamente constante.

Las pérdidas no recuperables de los tres tipos de medidores, expresadas como fracción de la altura cinética en la garganta $V_g^2/(2g)$, se muestran en la Figura 6.44. El orificio tiene las mayores pérdidas y el venturi las menores, como se había indicado. El orificio y la tobera se asemejan a válvulas parcialmente cerradas como las de la Figura 6.18*b*, mientras que el venturi constituye una pérdida local bastante pequeña. Cuando se expresa la pérdida como una fracción de la *caída de presión*, el orificio y la tobera tienen casi las mismas pérdidas, como ilustra el Ejemplo 6.21.

Los demás dispositivos mencionados en esta sección pueden servir también de medidores de flujo si se construyen adecuadamente. Por ejemplo, un hilo caliente instalado en un tubo puede ser calibrado para medir flujo volumétrico en lugar de velocidad puntual. Este tipo de medidores, así como otros medidores modificados, están disponibles en el mercado. Para más detalles véase la Referencia 30.

Factor de corrección para flujos compresibles de gases. Las fórmulas para obstrucciones de tipo orificio/venturi/tobera de esta sección suponen flujo incompresible. Si el fluido es un gas, y el cociente de presiones (p_2/p_1) no es próximo a la unidad, se requiere un factor de corrección por compresibilidad. La Ecuación (6.104) puede ser escrita en función del gasto másico y la densidad aguas arriba ρ_1:

$$\dot{m} = C_d Y A_g \sqrt{\frac{2\rho_1(p_1 - p_2)}{1 - \epsilon^4}} \quad \text{donde} \quad \epsilon = \frac{d}{D} \tag{6.117}$$

El *coeficiente de expansión* adimensional Y es una función del cociente de presiones, β, y del tipo de medidor. En la Figura 6.45 se presentan algunos valores. El orificio, con su contracción tipo chorro, tiene un coeficiente distinto al venturi o a la tobera, que están diseñados para eliminar la contracción.

www.elsolucionario.net

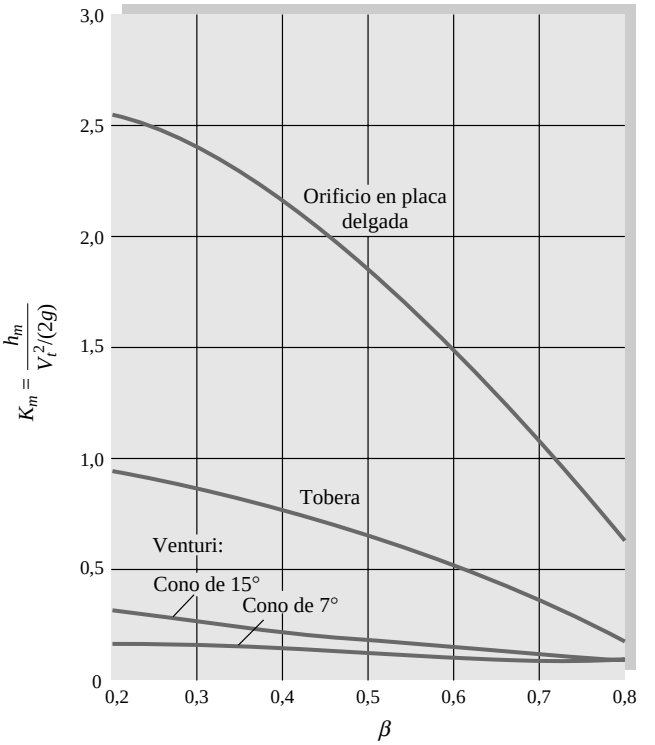


Figura 6.44. Pérdidas no recuperables en medidores de caudal por obstrucción, tipo Bernoulli. (*Tomado de la Referencia 30.*)

www.elsolucionario.net

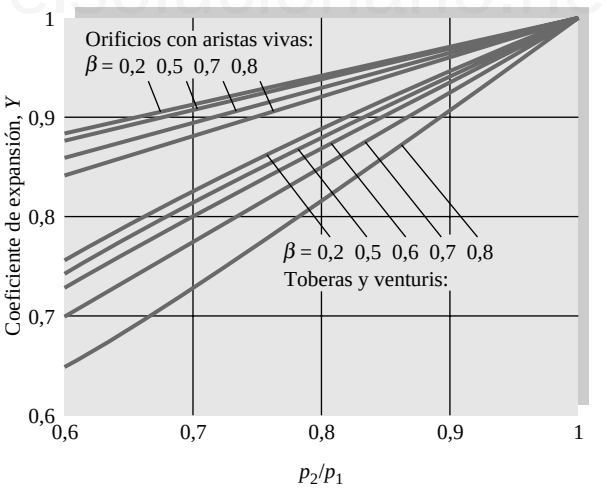


Figura 6.45. Coeficiente de expansión Y para flujo compresible en medidores de caudal.

EJEMPLO 6.21

Queremos medir el flujo volumétrico de agua (ρ = 1000 kg/m^3 y $\nu = 1{,}02 \times 10^{-6}$ m^2/s) que circula por una tubería de 200 mm de diámetro a una velocidad media de 2,0 m/s. Si el sensor de presión diferencial escogido mide fiablemente el rango $p_1 - p_2$ = 50.000 Pa, ¿qué tamaño de medidor será el idóneo para instalar (*a*) un orificio con tomas D: $\frac{1}{2}D$, (*b*) una tobera de radio grande, o (*c*) un venturi? ¿Cuáles serán las pérdidas de carga no recuperables en cada caso?

www.elsolucionario.net

Solución iterativa

La incógnita es el coeficiente β del medidor. Como el coeficiente de descarga es una función complicada de β, es necesario recurrir a la iteración. Los datos son $D = 0{,}2$ m y $V_1 = 2{,}0$ m/s. El número de Reynolds será entonces

$$\mathrm{Re}_D = \frac{V_1 D}{\nu} = \frac{(2{,}0)(0{,}2)}{1{,}02 \times 10^{-6}} = 392.000$$

En los tres casos [(*a*) a (*c*)] la fórmula generalizada (6.108) es válida:

$$V_g = \frac{V_1}{\epsilon^2} = \frac{1}{\left[\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}\right]^{1/2}} \qquad \frac{1}{\alpha} = \frac{C_d}{(1 - \epsilon^4)^{1/2}} \tag{1}$$

donde los datos conocidos son $V_1 = 2{,}0$ m/s, $\rho = 1000$ kg/m^3 y $\Delta p = 50.000$ Pa. Introduciendo estos datos en la Ecuación (1) obtenemos una relación entre β y α:

$$\frac{2{,}0}{\epsilon^2} = \frac{1}{\left[\frac{2(50.000)}{1000}\right]^{1/2}} \quad \text{o} \quad \epsilon^2 = \frac{0{,}2}{\alpha} \tag{2}$$

Las incógnitas son β (o α) y C_d. Los apartados (*a*) a (*c*) dependen de la fórmula o la gráfica seleccionada para $C_d = \mathrm{fcn}(\mathrm{Re}_D, \beta)$. Podemos realizar la estimación inicial $\beta \approx 0{,}5$ e iterar hasta la convergencia de la solución.

Apartado (*a*)

Para el caso de tomas D: $\frac{1}{2}D$, empleamos la Ecuación (6.112) o la Figura 6.41. La secuencia de iteraciones es

$$\beta_1 \approx 0{,}5,\ C_{d1} \approx 0{,}604,\ \alpha_1 \approx 0{,}624,\ \beta_2 \approx 0{,}566,\ C_{d2} \approx 0{,}606,\ \alpha_2 \approx 0{,}640,\ \beta_3 = 0{,}559$$

Tenemos una solución con tres cifras significativas. El diámetro del orificio es

$$d = \beta D = 112 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}\ (a).$$

Apartado (*b*)

Para la tobera de radio grande empleamos la Ecuación (6.114) o la Figura 6.42. La secuencia de iteraciones es

$$\beta_1 \approx 0{,}5,\ C_{d1} \approx 0{,}9891,\ \alpha_1 \approx 1{,}022,\ \beta_2 \approx 0{,}442,\ C_{d2} \approx 0{,}9896,\ \alpha_2 \approx 1{,}009,\ \beta_3 = 0{,}445$$

La solución tiene tres cifras significativas. El diámetro de la tobera es

$$d = \beta D = 89 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

Apartado (*c*)

Para el venturi, empleamos la Ecuación (6.116) o la Figura 6.43. La secuencia de iteraciones es

$$\beta_1 \approx 0{,}5,\ C_{d1} \approx 0{,}977,\ \alpha_1 \approx 1{,}009,\ \beta_2 \approx 0{,}445,\ C_{d2} \approx 0{,}9807,\ \alpha_2 \approx 1{,}0004,\ \beta_3 = 0{,}447$$

La solución tiene tres cifras significativas. El diámetro del venturi es

$$d = \beta D = 89 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}\ (c)$$

Comentarios: Los sensores tienen tamaños similares, pero sus pérdidas de carga no son iguales. De la Figura 6.44 leemos el valor de K para los tres dispositivos y calculamos:

$$h_{m,\text{orificio}} \approx 3{,}5 \text{ m} \qquad h_{m,\text{tobera}} \approx 3{,}6 \text{ m} \qquad h_{m,\text{venturi}} \approx 0{,}8 \text{ m}$$

Las pérdidas del venturi son solamente un 22 por 100 de las del orificio o la tobera.

www.elsolucionario.net

Solución con EES

La iteración presentada en este ejemplo es perfecta para EES. Introducimos los datos en unidades SI:

```
Rho=1000    Nu=1,02E-6    D=0,2    V=2,0    DeltaP=50000
```

Después escribimos las fórmulas para el número de Reynolds, velocidad en la garganta y el coeficiente de flujo:

```
Re=V*D/Nu
Vg=V/Beta^2
Alpha=Cd/(1-Beta^4)^0,5
Vg=Alpha*SQRT(2*DeltaP/Rho)
```

Finalmente, introducimos la fórmula adecuada para el coeficiente de descarga. Por ejemplo, para la tobera:

```
Cd=0,9965-0,00653*Beta^0,5*(1E6/Re)^0,5
```

Cuando intentamos resolver las ecuaciones EES se queja de que estamos intentando dividir división por cero. Tenemos que limitar los valores de α y C_d para que no sean negativos, y reducir el intervalo de β a sus límites prácticos $0{,}2 < \beta < 0{,}9$. Entonces EES devuelve los resultados correctos para la tobera:

```
Alpha=1,0096    Cd=0,9895    Beta=0,4451
```

EJEMPLO 6.22

Una tobera de curvatura suave de 6 cm de diámetro se emplea para medir un flujo de aire en un conducto de 10 cm de diámetro. Las condiciones aguas arriba son $p_1 = 200$ kPa y $T_1 = 100$ °C. Si la caída de presión en la tobera es de 60 kPa, estime el flujo volumétrico en m³/s.

www.elsolucionario.net

Solución

- *Consideraciones*. La presión cae un 30 por 100, por lo que necesitamos usar el factor de compresibilidad Y.
- *Procedimiento*. Calculamos ρ_1 y C_d y aplicamos la Ecuación (6.117) con $\beta = 6/10 = 0{,}6$
- *Valores de las propiedades*. Dados p_1 y T_1, $\rho_1 = p_1/RT_1 = (200.000)/[287(100 + 273)] = 1{,}87$ kg/m³. La presión aguas abajo es $p_2 = 200 - 60 = 140$ kPa, luego $p_2/p_1 = 0{,}7$. A 100 °C la Tabla A.2 indica que la viscosidad del aire es $2{,}17 \times 10^{-5}$ kg/(m · s)
- *Resolución*. Aplicamos la Ecuación (6.117) con una estimación inicial para $C_d \approx 0{,}98$, obtenida de la Figura 6.42. En la Figura 6.45 leemos $Y \approx 0{,}80$ para una tobera con $p_2/p_1 = 0{,}7$ y $\beta = 0{,}6$. Por tanto,

$$\dot{m} = C_d Y A_g \sqrt{\frac{2\rho_1(p_1 - p_2)}{1 - \beta^4}} \approx (0{,}98)(0{,}80)\frac{\pi}{4}(0{,}06\text{ m})^2\sqrt{\frac{2(1{,}87\text{ kg/m}^3)(60.000\text{ Pa})}{1-(0{,}6)}} \approx 1{,}13\frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

A continuación estimamos Re_d, expresándolo en función del gasto másico:

$$\text{Re}_d = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{4\dot{m}}{\pi\mu d} = \frac{4(1{,}13\text{ kg/s})}{\pi(2{,}17\times10^{-5}\text{ kg/(m}\cdot\text{s)})(0{,}06\text{ m})} \approx 1{,}11\times10^{6}$$

Volviendo a la Figura 6.42, podemos leer un valor más aproximado, $C_d \approx 0{,}99$. Así, nuestra estimación final es

$$\dot{m} \approx 1{,}14\text{ kg/s} \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios*. La Figura 6.45 no es simplemente un «gráfico» para que los ingenieros lo usen de vez en cuando. Está basada en la teoría del flujo compresible del Capítulo 9, en el que podríamos tomar este ejemplo como *teoría*.

www.elsolucionario.net

Resumen

Este capítulo ha estado dedicado a los flujos internos en tuberías y conductos, que probablemente sean los problemas más habituales de la Mecánica de Fluidos en ingeniería. Estos flujos son muy sensibles al número de Reynolds y pasan de laminares a turbulentos cuando éste aumenta.

Se han discutido los distintos regímenes en función del número de Reynolds, y se ha presentado una visión semiempírica del modelado de la turbulencia. Después, el capítulo aborda de forma detallada el análisis del flujo a través de un conducto recto de sección circular, para llegar al famoso diagrama de Moody (Figura 6.13) para el coeficiente de fricción. A continuación se discute la resolución de los problemas del caudal y del dimensionado de conductos utilizando el diagrama de Moody, así como su aplicación a la resolución de flujos en conductos no circulares utilizando el «diámetro hidráulico». Para tener en cuenta las pérdidas localizadas debidas a válvulas, codos, accesorios y otros dispositivos se utilizan coeficientes de pérdida adicionales, que deben añadirse al coeficiente de fricción del diagrama de Moody. Se discutieron brevemente los sistemas de múltiples tuberías, cuya resolución resulta algebraicamente bastante compleja, recomendándose el uso del ordenador.

Los difusores se incorporan en los conductos para mejorar la recuperación de presión en la salida del sistema. Su comportamiento fue presentado con datos experimentales, ya que la teoría de difusores reales aún no está bien desarrollada. El capítulo termina con una discusión sobre medidores de caudal, principalmente el tubo de pitot y los medidores por obstrucción, tipo Bernoulli. Estos medidores también requieren una calibración experimental muy cuidadosa.

Problemas

La mayoría de los problemas propuestos aquí son bastante sencillos. Los más difíciles, o de final abierto, están marcados con un asterisco. Para resolver los problemas marcados von un icono EES se recomienda el uso del Resolvedor de Ecuaciones de Ingeniería (EES, *Engineering Equation Solver*), mientras que los problemas señalados con un disquete pueden requerir el uso de un ordenador. Los problemas estándar de fin de capítulo P6.1 a P6.162 (ordenados por temas en la lista de abajo) están seguidos por los problemas conceptuales C6.1 a C6.5, los problemas del examen de fundamentos de ingeniería (FE, *Fundamentals of Engineering*) FE6.1 a FE6.15, los problemas extensos PE6.1 a PE6.7 y los proyectos de diseño D6.1 y D6.2.

Distribución de los problemas

Sección	Tema	Problemas
6.1	Regímenes en función del número de Reynolds	P6.1-P6.5
6.2	Flujos internos y externos	P6.6-P6.8
6.3	Pérdida de carga, coeficiente de fricción	P6.9-P6.11
6.4	Flujo laminar en conductos circulares	P6.12-P6.33
6.5	Modelización de turbulencia	P6.34-P6.41
6.6	Flujo turbulento en conductos circulares	P6.42-P6.62
6.7	Problemas de caudal y de dimensionado de tuberías	P6.63-P6.85
6.8	Conductos no circulares	P6.86-P6.99
6.9	Pérdidas localizadas	P6.100-P6.110
6.10	Sistemas de tuberías en serie y en paralelo	P6.111-P6.120
6.10	Problema de los tres depósitos y sistemas de tuberías	P6.121-P6.130
6.11	Actuación de difusores	P6.131-P6.134
6.12	El tubo de pitot	P6.135-P6.139
6.12	Medidores de caudal: placa con orificio	P6.140-P6.148
6.12	Medidores de caudal: tobera	P6.149-P6.153
6.12	Medidores de caudal: el medidor venturi	P6.154-P6.159
6.12	Medidores de caudal: válvulas de mariposa	P6.160
6.12	Medidores de caudal: corrección por compresibilidad	P6.161-P6.162

P6.1 En el flujo alrededor de una esfera, la capa límite se hace turbulenta alrededor de $\mathrm{Re}_D \approx 2{,}5 \times 10^5$. En estas condiciones, ¿a qué velocidad en mi/h se mueve en el aire una pelota de golf de 1,6 in de diámetro? ¿Influyen en el resultado la presión, temperatura y humedad del aire?

P6.2 Por una tubería horizontal de 4 cm de diámetro fluye aire a 1 atm. (*a*) Obtenga una expresión para $Q_{máx}$, el caudal máximo para el cual el flujo en el conducto sigue siendo laminar, y represente $Q_{máx}$ en función de la temperatura en el intervalo 0 °C ≤ *T* ≤ 500 °C. (*b*) ¿La representación es lineal? En caso contrario, explique por qué.

P6.3 En un ala delgada que se mueve paralelamente a su cuerda, la transición en la capa límite aparece para un cierto número de Reynolds «local» Re_x, donde *x* es la distancia desde el borde de ataque. El número de Reynolds crítico depende de la intensidad de las fluctuaciones turbulentas en la corriente incidente, y es aproximadamente $2{,}8 \times 10^6$ cuando estas fluctuaciones son muy pequeñas. Una correlación semiempírica aplicable en este caso [3, pág. 383] es

$$\mathrm{Re}_{x_{crit}}^{1/2} \approx \frac{100 + (1 + 13{,}25\zeta^2)^{1/2}}{0{,}00392\zeta^2}$$

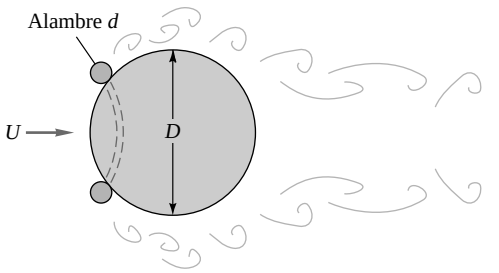
donde ζ es la intensidad de la turbulencia en el túnel en tanto por ciento. Si $V = 20$ m/s en aire a 20 °C, emplee esta fórmula para representar la posición de transición en el ala en función de la intensidad de la turbulencia para valores de ζ entre 0 y 2 por 100. ¿Para qué valor de ζ el valor de x_{crit} ha disminuido un 50 por 100 respecto del valor para $\zeta = 0$?

P6.4 Para el flujo de aceite SAE 30 por un tubo de 5 cm de diámetro, con los datos de la Figura A.1, ¿para qué

www.elsolucionario.net

valor del caudal en m³/h se presentará la transición si el aceite está a (*a*) 20 °C y (*b*) 100 °C?

P6.5 En el flujo alrededor de un cuerpo o sobre una pared, la transición a la turbulencia puede ser inducida colocando un alambre en la capa límite, como se muestra en la Figura P6.5. Si el alambre de la Figura P6.5 se coloca en un punto donde la velocidad es U, producirá la transición si $Ud/\nu = 850$, donde d es el diámetro del alambre [3, pág. 386]. Si el diámetro de la esfera es 20 centímetros y la transición aparece a $Re_D = 90.000$, ¿cuál es el diámetro del alambre en milímetros?



P6.5

P6.6 Un fluido a 20 °C fluye a 850 cm³/s a través de un tubo de 8 cm de diámetro. Determine la longitud de entrada si el fluido es (*a*) hidrógeno, (*b*) aire, (*c*) gasolina, (*d*) agua, (*e*) mercurio o (*f*) glicerina.

P6.7 Se quiere llenar un contenedor de 8 onzas (1 galón = 128 onzas líquidas) de refresco de cola, cuyas propiedades se aproximarán por las del agua pura a 20 °C, empleando un conducto de 5 mm de diámetro. Estime el tiempo mínimo de llenado si el flujo en el tubo debe permanecer laminar. ¿Para qué temperatura del refresco (agua) este tiempo será de 1 min?

P6.8 En el flujo turbulento estacionario de agua a 20 °C por una tubería de 8 cm de diámetro el esfuerzo de cortadura en la pared es de 72 Pa. ¿Cuál es el gradiente de presión (Ep/Ex) si la tubería está en posición (*a*) horizontal y (*b*) vertical con flujo ascendente?

P6.9 Un líquido ligero ($\rho \Xi 950$ kg/m³) fluye por un tubo horizontal liso de 5 cm de diámetro. La presión del fluido medida a intervalos de 1 m es la siguiente:

x, m	0	1	2	3	4	5	6
p, kPa	304	273	255	240	226	213	200

Estime (*a*) la pérdida de carga total, en metros; (*b*) el esfuerzo de cortadura en la pared en una sección de flujo completamente desarrollado, y (*c*) el coeficiente de fricción global.

P6.10 A través de una tubería inclinada de 8 cm de diámetro fluye agua a 20 °C. En las secciones A y B se toman las siguientes medidas: $p_A = 186$ kPa, $V_A = 3{,}2$ m/s, $z_A = 24{,}5$ m, y $p_B = 260$ kPa, $V_B = 3{,}2$ m/s, $z_B = 9{,}1$ m. ¿En qué dirección fluye el líquido? ¿Cuál es la pérdida de carga en metros?

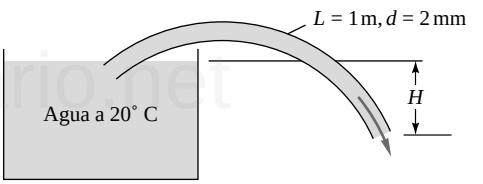
P6.11 Considere el flujo ascendente de agua a 20 °C por una tubería de 6 cm de diámetro. La longitud de la tubería entre los puntos 1 y 2 es de 5 m, y el punto 2 está 3 m más alto que el punto 1. Un manómetro de mercurio, conectado entre 1 y 2, proporciona una lectura de 135 mm, siendo p_1 mayor. (*a*) ¿Cuál es la diferencia de presiones $p_1 - p_2$? (*b*) ¿Cuál es la pérdida de carga en metros? Explique los resultados. (*c*) ¿Cuál es el coeficiente de fricción del flujo?

En los Problemas 6.12 a 6.99, desprecie las pérdidas localizadas.

P6.12 Para medir la viscosidad de aceites se emplea un tubo capilar de 5 mm de diámetro. Cuando el caudal es de 0,071 m³/h, la caída de presión por unidad de longitud es de 375 kPa/m. Estime la viscosidad del fluido. ¿Es el movimiento laminar? ¿Puede estimar la densidad del fluido?

P6.13 Una pajita para refrescos tiene 20 cm de longitud y 2 mm de diámetro. Proporciona un caudal de 3 cm³/s de refresco de cola frío, que aproximaremos como agua a 10 °C. (*a*) ¿Cuál es la pérdida de carga en la pajita? Determine el gradiente de presiones axial si el flujo es (*b*) vertical hacia arriba o (*c*) horizontal. ¿Pueden los pulmones humanos mover esa cantidad de fluido?

P6.14 Se pretende construir un sifón con un tubo de 1 m de longitud y 2 mm de diámetro para sacar agua, como se muestra en la Figura P6.14. ¿Hay algún valor de la altura H para el que el flujo podría no ser laminar? ¿Cuál es el caudal de líquido si $H = 50$ cm? Desprecie la curvatura del tubo.



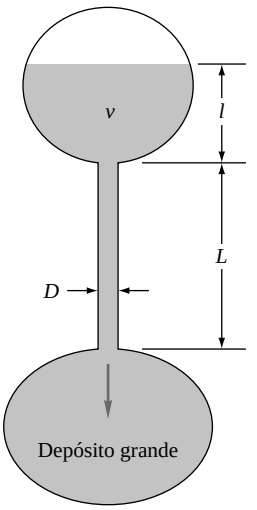
P6.14

P6.15 El Doctor Gordon Holloway y sus alumnos de la Universidad de New Brunswick fueron a un restaurante de comida rápida e intentaron beber batidos de chocolate a través de pajitas de 8 mm de diámetro y 30 cm de longitud. (*a*) Verifique que los pulmones humanos, que proporcionan unos 3000 Pa de presión de vacío, son incapaces de beber el batido a través de una pajita vertical. (*b*) Un estudiante recortó 15 cm de su pajita y comenzó a beber tan contento. ¿Qué caudal de batido se produce con esta estrategia?

P6.16 A través de una tubería horizontal lisa se bombea un caudal de 3,1 m³/s de glicerina a 20 °C. Se desea que (1) el flujo sea laminar y (2) la caída de presión sea inferior a 100 Pa/m. ¿Cuál es el diámetro mínimo del tubo?

P6.17 Un viscosímetro capilar mide el tiempo que necesita un volumen dado de fluido v en fluir a través de un tubo estrecho, como el de la Figura P6.17. El tiempo de tránsito está correlacionado con la viscosidad. Para el sistema mostrado en la Figura P6.17, (*a*) obtenga una expresión aproximada para el tiempo necesario, suponiendo flujo laminar y despreciando pérdidas localizadas. (*b*) Si $L = 12$ cm, $l = 2$ cm, $v = 8$ m³ y el fluido es agua a 20 °C, ¿cuál es el diámetro capilar si el tiempo t es de 6 s?

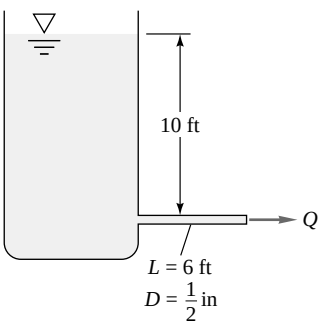
www.elsolucionario.net



P6.17

P6.18 Para determinar la viscosidad de un líquido de densidad relativa S = 0,95 se llena un depósito hasta una profundidad de 12 cm, y después se vacía a través de un tubo vertical de 30 cm de longitud conectado al fondo. El diámetro del tubo es de 2 mm y se mide un caudal de 1,9 cm^3/s. ¿Cuál es la viscosidad estimada? ¿Es laminar el flujo en el interior del tubo?

P6.19 De la tubería de la Figura P6.19 sale un caudal $Q = 35$ ft^3/h de aceite (densidad relativa S = 0,9). ¿Cuál es la viscosidad cinemática del aceite? El flujo, ¿es laminar?

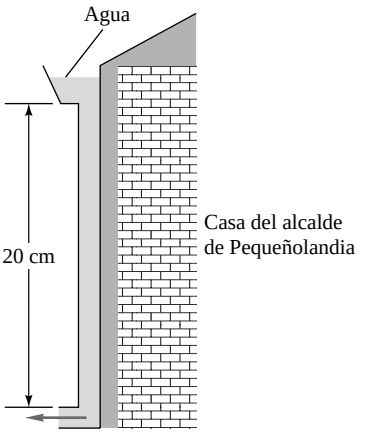


P6.19

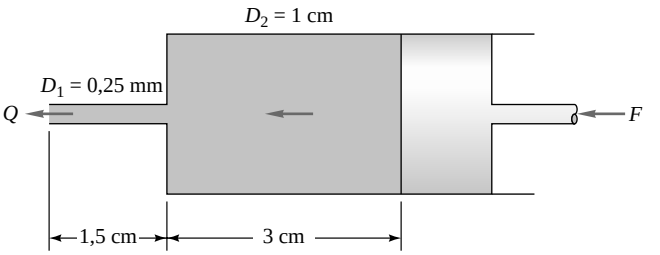
P6.20 En el Problema 6.19, ¿cuál sería el caudal Q si el fluido fuera aceite SAE 30 a 20 °C?

P6.21 En Pequeñolandia las casas tienen menos de un pie de altura ¡y la lluvia es laminar! La tubería de la Figura P6.21 sólo tiene 2 mm de diámetro. (*a*) Cuando el desagüe está lleno, ¿cuál es el caudal que fluye por el tubo? (*b*) El canalón está diseñado con capacidad para una tormenta de 5 mm de lluvia por hora. En esta condición, ¿cuál es el área del tejado más grande que podrá soportar el sistema? (*c*) ¿Cuánto vale Re_d?

P6.22 El movimiento estacionario del pistón de la Figura P6.22 produce un caudal $Q = 0{,}15$ cm^3/s a través de la aguja. El fluido tiene $\rho = 900$ kg/m^3 y $\mu = 0{,}002$ kg/(m · s). ¿Qué fuerza F se debe aplicar para mantener el flujo?



P6.21

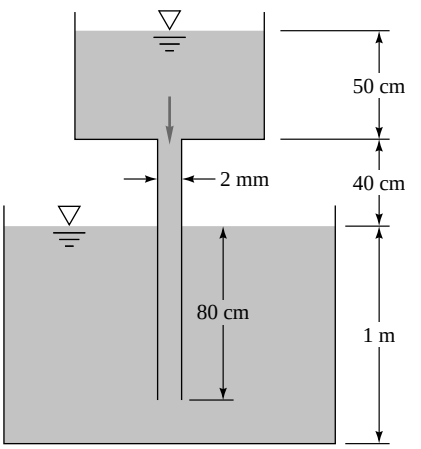


P6.22

P6.23 Por una tubería vertical de 2,5 cm de diámetro fluye aceite SAE 10 a 20 °C. La presión es constante en el fluido. ¿Cuál es el caudal en m^3/h? ¿El flujo es hacia arriba o hacia abajo?

P6.24 Dos depósitos de agua a 20 °C están conectados por un tubo capilar de 4 mm de diámetro y 3,5 m de longitud. La superficie del depósito 1 está 30 cm más alta que la del depósito 2. (*a*) Estime el caudal en m^3/h. ¿Es el flujo laminar? (*b*) ¿Para qué diámetro Re_d será 500?

P6.25 En la configuración mostrada en la Figura P6.25 el fluido es alcohol etílico a 20 °C, y los depósitos son muy anchos. Calcule el caudal expresándolo en m^3/h. ¿Es el flujo laminar?

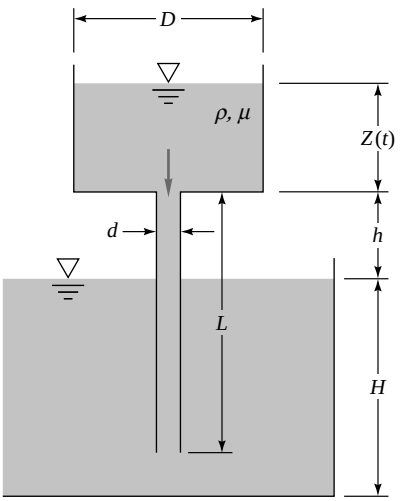


P6.25

www.elsolucionario.net

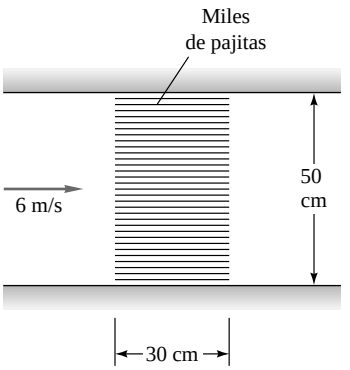
P6.26 Para el sistema de la Figura P6.25, si el fluido tiene una densidad de 920 kg/m³ y el caudal es desconocido, ¿para qué valor de la viscosidad el número de Reynolds será igual al valor crítico 2300?

***P6.27** Abordemos el problema P6.25 con notación simbólica, empleando la Figura P6.27. Todos los parámetros son constantes excepto la profundidad del depósito superior $Z(t)$. Obtenga una expresión para $Q(t)$ en función de $Z(t)$, plantee una ecuación diferencial y calcule el tiempo t_0 que tarda el depósito superior en vaciarse por completo. Suponga flujo casi estacionario.



P6.27

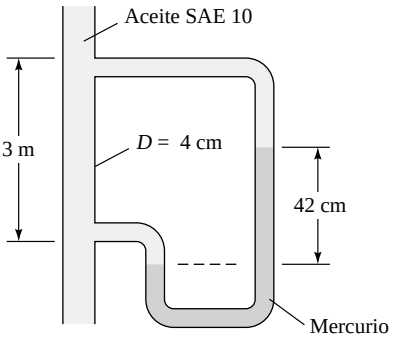
P6.28 Para enderezar y suavizar una corriente de aire en un conducto de 50 cm de diámetro se emplean pajitas de 30 cm de longitud y 4 mm de diámetro empacadas en una configuración de «panal de abeja», como se muestra en la Figura P6.28. Las condiciones a la entrada son 110 kPa y 20 °C, y la velocidad media 6 m/s. Estime la pérdida de carga en el «panal».



P6.28

P6.29 Por una tubería horizontal de 15 m de longitud circula aceite con ρ = 890 kg/m³ y μ = 0,07 kg/(m · s). La potencia necesaria para mantener el caudal es 1 hp. (*a*) ¿Cuál es el diámetro si el flujo está en el punto de transición laminar? En estas condiciones, ¿cuáles son (*b*) Q en m³/h y (*c*) τ_w en kPa?

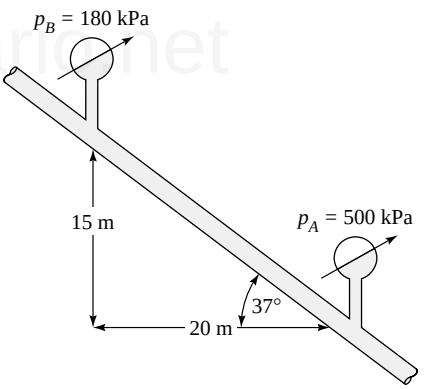
P6.30 Por la tubería vertical de 4 cm de diámetro representada en la Figura P6.30 fluye aceite SAE 10 a 20 °C. La lectura del manómetro de mercurio es h = 42 cm. (*a*) Calcule el caudal en m³/h y (*b*) indique la dirección del flujo.



P6.30

P6.31 Por un tubo vertical de 6 mm de diámetro fluye hacia abajo aceite con ρ = 880 kg/m³ y μ = 0,015 kg/(m · s) por efecto de la gravedad. Estime el caudal en m³/h si (*a*) L = 1 m y (*b*) L = 2 m. (*c*) Verifique que el flujo es laminar.

P6.32 Por el tubo de la Figura P6.32 fluye aceite SAE 30 a 20 °C. La inclinación del tubo es de 37°. Para las medidas de presión indicadas, determine (*a*) si el flujo es ascendente o descendente y (*b*) el caudal en m³/h.



P6.32

P6.33 En el problema P6.32 suponga que se desea añadir una bomba entre las secciones *A* y *B* para mover el fluido hacia arriba desde *A* hasta *B* con un gasto másico de 3 kg/s. Si el rendimiento es del 100 por 100, ¿cuál es la potencia de la bomba?

P6.34 Deduzca la ecuación de cantidad de movimiento promediada en la dirección x (6.21) sustituyendo directamente las expresiones de la Ecuación (6.19) en la ecuación de cantidad de movimiento (6.14). Se recomienda expresar la aceleración convectiva en la forma

$$\frac{du}{dt} = \frac{E}{Ex}(u^2) + \frac{E}{Ey}(uv) + \frac{E}{Ez}(uw)$$

que es correcta debido a la ecuación de continuidad (6.14).

www.elsolucionario.net

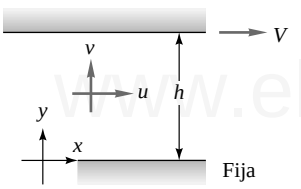
P3.35 Por analogía con la Ecuación (6.21), escriba la ecuación diferencial de cantidad de movimiento turbulenta según (*a*) la dirección *y*, y (*b*) la dirección *z*. ¿Cuántos términos de esfuerzos de Reynolds aparecen en cada ecuación? ¿Cuántos esfuerzos de Reynolds aparecen en total en las tres direcciones?

P6.36 El siguiente perfil de velocidades $u(y)$ fue medido para aire a 75 °F y 1 atm cerca de una pared lisa en el túnel de viento de la Universidad de Rhode Island:

y, in	0,025	0,035	0,047	0,055	0,065
u, ft/s	51,2	54,2	56,8	57,6	59,1

Estime (*a*) el esfuerzo en la pared y (*b*) la velocidad u en $y = 0{,}22$ in.

P6.37 Dos placas infinitas separadas una distancia h están paralelas al plano xz y la superior se mueve con velocidad V como indica la Figura P6.10. Entre las placas hay un fluido con viscosidad μ a presión constante. Despreciando la gravedad y suponiendo flujo turbulento incompresible, utilice la ley logarítmica y las condiciones de contorno adecuadas para obtener una fórmula para los esfuerzos de cortadura adimensionales en la pared en función de la velocidad de la placa. Esquematice la forma típica del perfil $u(y)$.



P6.37

P6.38 Suponga que en la Figura P6.37 $h = 3$ cm, el fluido es agua a 20 °C y el flujo es turbulento, de forma que se puede aplicar la ley logarítmica. Si el esfuerzo de cortadura en la pared es de 15 Pa, ¿cuál es la velocidad V en m/s?

P6.39 Por analogía con el esfuerzo cortante laminar, $\tau = \mu du/dy$, T. V. Boussinesq postuló en 1877 que el esfuerzo turbulento también podía relacionarse con el gradiente de velocidad media $\tau_{turb} = \varepsilon du/dy$, donde ε es la denominada viscosidad turbulenta, mucho mayor que μ. Si la ley logarítmica, Ecuación (6.28), es válida con $\tau_{turb} \Xi \tau_w$, demuestre que $\varepsilon \Xi \kappa \rho u^* y$.

P6.40 Theodore von Kármán propuso en 1930 que el esfuerzo turbulento podía ser representado por $\tau_{turb} = \varepsilon du/dy$, donde $\varepsilon = \rho \kappa^2 y^2 |du/dy|$ es la viscosidad turbulenta basada en la longitud de mezcla y $\kappa \Xi 0{,}41$ es la *constante* de Kármán para la *longitud de mezcla* [2, 3]. Suponiendo que cerca de la pared $\tau_{turb} \Xi \tau_w$, demuestre que la expresión anterior puede ser integrada para obtener la ley logarítmica, Ecuación (6.28).

P6.41 Un flujo de agua a 20 °C circula por un tubo de 9 cm de diámetro en régimen totalmente desarrollado. La velocidad en el eje es de 10 m/s. Calcule (*a*) Q, (*b*) V, (*c*) τ_w y (*d*) Δp para 100 m de longitud.

***P6.42** Comparando las Figuras 6.12*b* y 6.13 está claro que los efectos de la rugosidad de la arena y las rugosidades comerciales (producidas en los procesos de fabricación) no son los mismos. Tome el caso particular de la rugosidad comercial relativa $\varepsilon/d = 0{,}0001$ de la Figura 6.13 y represente el desplazamiento de la ley logarítmica ΔB (Figura 6.12*a*) en función del logaritmo de $\varepsilon^+ = \varepsilon u^*/\nu$. Compare ese gráfico con la Ecuación (6.45).

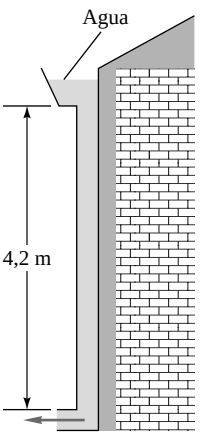
P6.43 Por un conducto de hierro forjado de 1 mi de longitud y 3 in de diámetro fluye agua a 20 °C con un caudal de 250 galones/min. Estime la pérdida de carga y la caída de presión a lo largo del conducto.

P6.44 A través de un tubo de vidrio de 4 m con 7 mm de diámetro circula mercurio a 20 °C con una velocidad media de 5 m/s. Estime la pérdida de carga en m y la caída de presión en kPa.

P6.45 Por un conducto de hierro fundido asfáltico de 6 in fluye aceite, S = 0,88 y $\nu = 4 \times 10^{-5}$ m²/s, a 400 galones/min. El conducto tiene 0,5 mi de longitud con una pendiente de 8° en contra del flujo. Calcule la pérdida de carga y la diferencia de presiones.

P6.46 A través de una tubería de 16 cm de diámetro y 20 km de longitud se bombea queroseno a 20 °C y 0,15 m³/s. Calcule la potencia necesaria si el rendimiento de las bombas es del 85 por 100.

P6.47 El canalón y el tubo liso de la Figura 6.47 recogen el agua del tejado de un edificio. El diámetro del canalón es de 7 cm. (*a*) Estime el caudal de lluvia cuando el desagüe está lleno. (*b*) El desagüe está diseñado para admitir 5 pulgadas de lluvia por hora. En estas condiciones, ¿cuál es el área máxima de tejado que puede soportar el sistema?

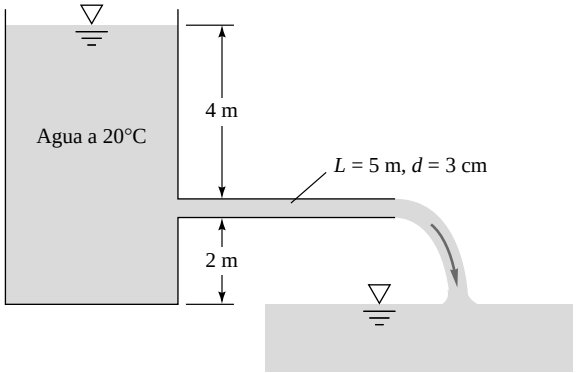


P6.47

P6.48 Considere el flujo turbulento en un tubo y demuestre que, si se cumple la Ecuación (6.33), la posición radial donde la velocidad u es igual a la velocidad media V es exactamente $r = 0{,}777R$, independiente del número de Reynolds.

P6.49 El sistema de tubería/depósito de la Figura P6.49 tiene que dispensar 11 m³/h de agua a 20 °C. ¿Cuál es la rugosidad máxima ε permisible para la tubería?

www.elsolucionario.net

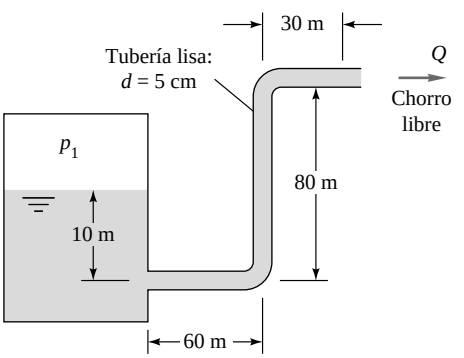


P6.49

P6.50 Por una tubería de hierro fundido con $L = 12$ m y $d = 5$ cm fluye etanol a 20 °C y 125 galones/min. Despreciando los efectos de entrada, estime (*a*) el gradiente de presión (dp/dx), (*b*) el esfuerzo de cortadura en la pared τ_w, y (*c*) el porcentaje de reducción del esfuerzo si las paredes se pulen hasta dejarlas totalmente lisas.

P6.51 La subcapa viscosa (Figura 6.9) es normalmente inferior al 1 por 100 del diámetro del conducto y por lo tanto muy difícil de medir. En un esfuerzo por generar una subcapa suficientemente gruesa como para ser instrumentada, en 1964 la Universidad del estado de Pensilvania construyó una tubería con un flujo de glicerina. Suponga que utilizaron una tubería de paredes lisas de 12 in de diámetro con $V = 60$ ft/s y que la glicerina estaba a 20 °C. Calcule el espesor de la subcapa viscosa y la potencia de bombeo necesaria con un rendimiento del 75 por 100 si $L = 40$ ft.

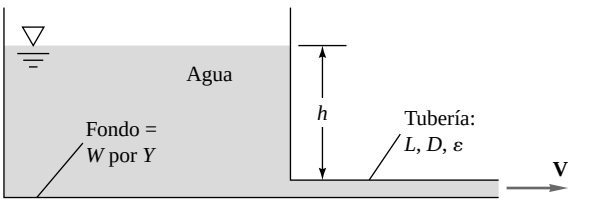
P6.52 El flujo en el conducto de la Figura 6.53 está forzado por el aire presurizado en el depósito. ¿Cuál es la presión manométrica p_1 necesaria para proporcionar un flujo de agua a 20 °C con caudal $Q = 60$ m³/h?



P6.52

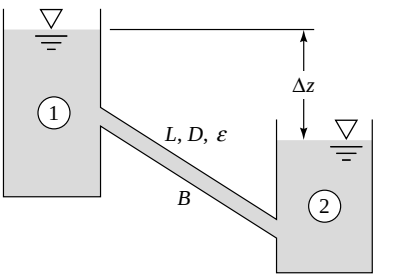
***P6.53** En la Figura P6.52 suponga que $p_1 = 700$ kPa y que el fluido tiene una densidad relativa de 0,68. Si el caudal es 27 m³/h, estime la viscosidad del fluido. ¿Cuál es el fluido de la Tabla A.3 que más se parece?

***P6.54** Una piscina con dimensiones W por Y por h debe vaciarse por gravedad a través de la tubería mostrada en la Figura P6.54. Suponiendo que el coeficiente de fricción medio en la tubería es f_{medio} y despreciando las pérdidas localizadas, obtenga una fórmula para el tiempo de vaciado de la piscina si la profundidad inicial es h_0.



P6.54

P6.55 Los depósitos de la Figura P6.55 contienen agua a 20 °C. Si la tubería es lisa con $L = 4500$ m y $d = 4$ cm, ¿cuál es el caudal en m³/h para $\Delta z = 100$ m?



P6.55

P6.56 Considere una tubería de hierro galvanizado de 4 ft de diámetro como las utilizadas en Alaska para el transporte de crudo. El flujo es de 70 millones de galones diarios, con una densidad de 910 kg/m³ y una viscosidad de 0,01 kg/(m · s) (consúlte la Tabla A.1 para aceite SAE 30 a 100 °C). Cada bomba a lo largo de la línea eleva la presión en 8 MPa, que vuelve a caer debido a la pérdida de carga hasta 400 kPa a la entrada de la siguiente bomba. Calcule (*a*) la distancia entre bombas y (*b*) la potencia necesaria si las bombas tienen un rendimiento del 88 por 100.

P6.57 Aplique el análisis del Problema P6.54 con los siguientes datos. Sean $W = 5$ m, $Y = 8$ m, $h_0 = 2$ m, $L = 15$ m, $D = 5$ cm y $\varepsilon = 0$. (*a*) Fijando $h = 1{,}5$ m y 0,5 m como profundidades representativas, estime el coeficiente de fricción medio. (*b*) Calcule el tiempo necesario para vaciar la piscina.

P6.58 En la Figura P6.55 suponga que la tubería es de hierro fundido con $L = 550$ m y $d = 7$ cm, y que $\Delta z = 100$ m. Si se instala una bomba con un rendimiento del 8 por 100 en el punto *B*, ¿qué potencia sería necesaria para llevar 160 m³/h de agua desde el depósito 2 al 1?

P6.59 Los siguientes datos fueron medidos en una tubería muy dañada de 5 cm de diámetro con una inclinación hacia abajo de 8°, por la que fluía agua a 20 °C: $p_1 = 420$ kPa, $z_1 = 12$ m, $p_2 = 250$ kPa, $z_2 = 3$ m. Estime (*a*) la rugosidad relativa de la tubería y (*b*) el porcentaje de variación en la pérdida de carga si la tubería fuera lisa y tuviese el mismo caudal.

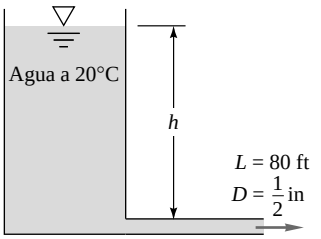
P6.60 J. Nikuradse propuso en 1932 un ley potencial para el flujo medio en un tubo liso en régimen turbulento:

www.elsolucionario.net

$$\frac{u}{u_{LC}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/N}$$

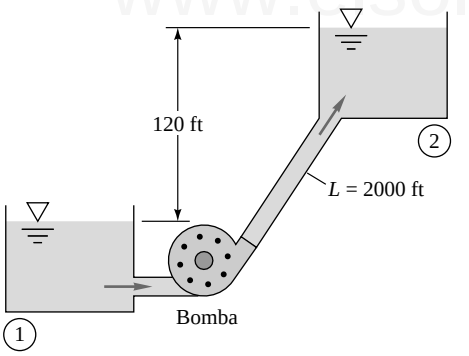
donde y es la distancia a la pared y N varía entre 6 y 9. Encuentre el valor de N que mejor se ajusta a los datos de Laufer del Problema PE6.6. Después, emplee esta expresión para calcular el caudal y compárelo con el valor medido de 45 ft³/s.

P6.61 ¿Qué altura h debe de mantenerse en la Figura P6.61 para proporcionar un caudal de 0,015 ft³/s a través del conducto de acero de $\frac{1}{2}$ in?



P6.61

P6.62 Se bombea agua a 20 °C a través de un conducto de 2000 ft de longitud desde el depósito 1 al depósito 2 con un caudal de 3 ft³/s, como se muestra en la Figura P6.62. Si la tubería es de hierro fundido y tiene 6 in de diámetro, y el rendimiento de la bomba es del 75 por 100, ¿cuál es la potencia necesaria?



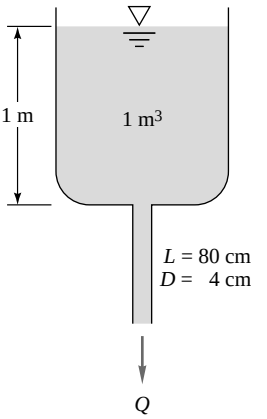
P6.62

P6.63 Un depósito de 1 m³ de agua a 20 °C se vacía por un pequeño tubo capilar en el fondo, como muestra la Figura P6.63. En el instante representado en la figura, calcule el caudal Q en m³/h.

P6.64 Resuelva el sistema presentado en la Figura P6.63 para aceite SAE 10 a 20 °C. ¿Es el flujo laminar o turbulento?

P6.65 En el Problema P6.63 el flujo es inicialmente turbulento. A medida que el depósito se va vaciando, ¿volverá el flujo a ser laminar? ¿Qué profundidad tendrá el depósito en ese instante? Calcule el tiempo necesario para vaciar el depósito completamente.

P6.66 Alcohol etílico a 20 °C fluye a través de un tubo horizontal de 10 cm de diámetro y 100 m de longitud. Los esfuerzos de cortadura en la pared cuando el flujo está completamente desarrollado son 14 Pa. Estime (*a*) la caída de presión, (*b*) el caudal y (*c*) la velocidad u en $r = 1$ cm.



P6.63

P6.67 Un conducto comercial de 10 cm de diámetro fabricado de acero comercial tiene 1 km de longitud y está colocado en una pendiente de 5°. Por su interior desciende agua a 20 °C por efecto de la gravedad. Estime el caudal en m³/h. ¿Qué pasaría si la longitud del conducto fuera de 2 km?

P6.68 El diagrama de Moody, Figura 6.13, es ideal para calcular pérdidas de carga (o Δp) cuando Q, V, d y L son conocidos. Los problemas de tipo 2, calcular Q cuando h_f o Δp son conocidos, son más complicados de resolver (véase Ejemplo 6.9). Prepare un diagrama de Moody modificado en el que la abcisa sea independiente de Q y V, usando ε/d como parámetro, y en el que se pueda leer directamente en ordenadas Q o V. Emplee este diagrama modificado para resolver el Ejemplo 6.9.

P6.69 En el Problema P6.62 suponga que la única bomba disponible proporciona 80 hp al fluido. ¿Cuál es el diámetro adecuado del conducto para mantener un caudal de 3 ft³/s?

P6.70 En la Figura P6.62 suponga que la tubería está fabricada de hierro fundido, tiene 5 in de diámetro y la bomba proporciona 75 hp al fluido. ¿Cuál es el caudal Q resultante en ft³/s?

***P6.71** Se desea resolver el Problema P6.62 para el conjunto tubería de hierro fundido/bomba más económico. Si la bomba cuesta 125 € por hp proporcionado al fluido y la tubería 7000 € por in de diámetro, ¿cuáles son los valores óptimos del diámetro y la potencia para mantener un caudal de 3 ft³/s? Realice las hipótesis necesarias.

P6.72 Modifique el Problema P6.57 considerando el diámetro como incógnita. Calcule el diámetro necesario para que la piscina se vacíe en 2 horas.

P6.73 El diagrama de Moody, Figura 6.13, es ideal para calcular pérdidas de carga (o Δp) cuando Q, V, d y L son conocidos. Los problemas de tipo 3, calcular d cuando h_f o Δp son conocidos, son más complicados de resolver (véase Ejemplo 6.11). Prepare un diagrama de Moody modificado en el que la abcisa sea indepen-

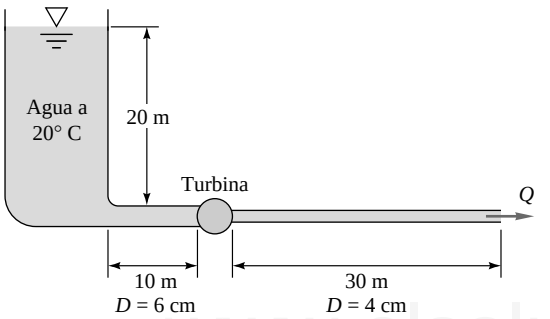
www.elsolucionario.net

diente de d, usando como parámetro ε adimensionalizado sin d, y en el que se pueda leer directamente en ordenadas el valor adimensional de d. Emplee este diagrama modificado para resolver el Ejemplo 6.11.

P6.74 En la Figura P6.61 suponga que el fluido es gasolina a 20 °C y h = 90 ft. ¿Qué diámetro tiene que tener un tubo comercial de acero para que el caudal sea de 0,015 ft^3/s?

P6.75 Usted quiere regar su jardín con una manguera de 100 ft, $\frac{5}{8}$ in de diámetro y una rugosidad de 0,011 in. ¿Cuál será el caudal si la presión manométrica en la entrada es de 60 lbf/in^2? Si la manguera no llega a todo el jardín, ¿cuál es la máxima distancia a la que puede llegar el agua?

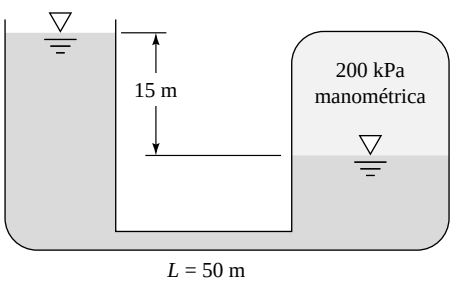
***P6.76** La turbina pequeña de la Figura P6.76 extrae 400 W del flujo de agua que circula. Ambos tubos son de hierro forjado. Calcule el caudal Q en metros cúbicos por hora. Esquematizar la LNE y la LAM.



P6.76

***P6.77** Modifique el Problema P6.76 para realizar un análisis económico. Sea d el diámetro del tubo de hierro forjado de 40 m. Sea Q = 30 m^3/h el flujo estacionario de agua del que se dispone. El coste de la turbina es de 4 € por vatio de potencia y el coste del sistema de tuberías de 75 € por cm de diámetro. La potencia generada será vendida a 0,08 € por kilovatio hora. Calcule el diámetro óptimo para minimizar el tiempo de amortización, esto es, el tiempo que pasa hasta recuperar la inversión inicial en el sistema.

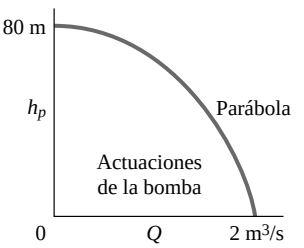
P6.78 La tubería de la Figura P6.78 es una tubería comercial de acero de 6 cm de diámetro por la que circula agua a 20 °C. Calcule el caudal en m^3/h y la dirección del flujo.



P6.78

P6.79 Se desea utilizar una manguera de jardín como línea de retorno en la fuente de un centro comercial. Para poder seleccionar la bomba adecuada se necesita conocer la rugosidad del interior de la manguera, y el fabricante no proporciona esa información. Por lo tanto, se prepara un sencillo experimento para medir la rugosidad: la manguera se conecta al desagüe de una piscina con la superficie del agua 3 m por encima de la salida de la manguera. Se estima que el coeficiente de pérdidas localizadas de la región de entrada de la manguera es 0,5 y que la válvula de desagüe de la piscina tiene unas pérdidas localizadas equivalentes a una longitud de 200 diámetros. Con un cubo y un cronómetro, se calcula que el caudal que fluye a través de una manguera de 10 m de longitud y 1,5 cm de diámetro es de $2{,}0 \times 10^{-4}$ m^3/s. Estime la rugosidad de la manguera.

P6.80 Las curvas características de carga frente a caudal de una bomba centrífuga se muestran en la Figura P6.80. Si con esta bomba se transporta agua a 20 °C por una tubería de hierro fundido de 120 m de longitud y 30 cm de diámetro, ¿cuál será el caudal, en m^3/s?



P6.80

www.elsolucionario.net

P6.81 La bomba de la Figura P6.80 se emplea para dispensar gasolina a 20 °C a través de una tubería de hierro galvanizado de 350 m de longitud y 30 cm de diámetro. Estime el caudal en m^3/s. (Tenga en cuenta que el incremento de carga de la bomba está expresado ahora en metros de gasolina.)

P6.82 La bomba de la Figura P6.80 tiene una eficiencia máxima cuando el incremento de carga es de 45 m. Si se emplea esta bomba para bombear etanol a 20 °C a través de un conducto comercial de 200 m de longitud fabricado en acero, ¿cuál es el diámetro adecuado para que la bomba funcione con el máximo rendimiento?

P6.83 En el sistema de la Figura P6.55, Δz = 80 m, L = 185 m y la tubería está fabricada en hierro fundido. ¿Cuál es el diámetro de la tubería si el caudal es de 7 m^3/h?

P6.84 Se quieren proporcionar 60 m^3/h de agua a 20 °C por una tubería horizontal de hierro fundido asfáltico. Calcule el diámetro de la tubería que hace que la pérdida de carga sea exactamente de 40 kPa por cada 100 m de tubería.

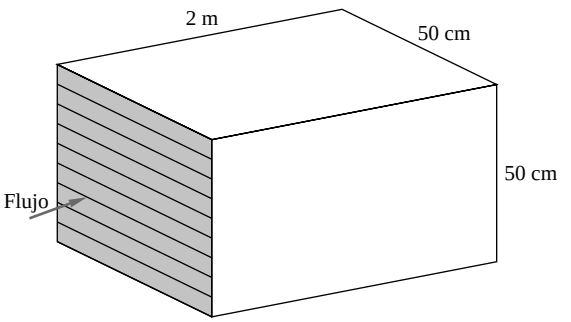
P6.85 La bomba de la Figura P6.80 se emplea para proporcionar 0,7 m^3/s de metanol a 20 °C a través de 95 m de tubería de hierro fundido. ¿Qué diámetro debe tener la tubería?

P6.86 Aceite SAE 10 a 20 °C fluye a una velocidad media de 2 m/s entre dos placas planas horizontales separadas 3 cm. Estime (a) la velocidad en el centro, (*b*) la pérdida de carga y (*c*) la caída de presión, ambas por unidad de longitud.

www.elsolucionario.net

P6.87 Un conducto anular de acero de 40 ft de longitud, con $a = 1$ in y $b = \frac{1}{2}$ in, conecta dos depósitos con una diferencia de alturas entre sus superficies libres de 20 ft. Calcule el caudal que atraviesa el conducto si el líquido es agua a 20 °C.

P6.88 Un sistema de refrigeración de aceite consiste en una serie de ranuras entre placas planas, como se muestra en la Figura P6.88. La caída de presión disponible es de 6 kPa, y el fluido es aceite SAE 10W a 20 °C. Si el caudal total es de 900 m³/h, estime el número máximo de ranuras. Las paredes de las placas son hidrodinámicamente lisas.

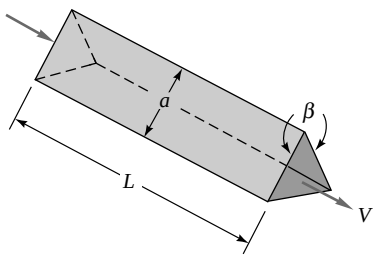


P6.88

P6.89 Un conducto anular muy estrecho produce una caída de presión muy acusada y se puede utilizar para medir viscosidades de forma precisa. Si un conducto anular liso, de 1 m de longitud, con $a = 50$ mm y $b = 49$ mm, trasporta aceite a 0,001 m³/s, ¿cuál es la viscosidad del aceite si la caída de presión es de 250 kPa?

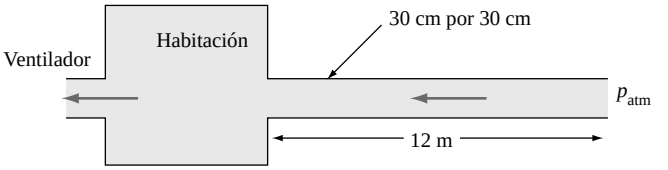
P6.90 Un conducto de 90 ft de longitud fabricado con láminas de acero transporta aire a 1 atm y 20 °C. La sección del conducto es un triángulo equilátero de 9 in de lado. Si un ventilador proporciona una potencia de 1 hp al fluido, ¿cuál es el caudal resultante?

P6.91 Muchos cambiadores de calor consisten en una serie de conductos de sección triangular. La Figura P6.91 presenta un ejemplo típico, donde $L = 60$ cm y las secciones tienen forma de triángulos isósceles con $a = 2$ cm y $\beta = 80°$. Si la velocidad media es $V = 2$ m/s y el fluido es aceite SAE 10 a 20 °C, estime la caída de presión.



P6.91

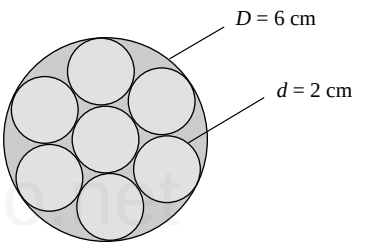
P6.92 Para ventilar una habitación amplia se utiliza un ventilador que toma aire del exterior a 20 °C a través de un conducto cuadrado de acero que tiene 30 cm de lado y 12 m de largo, como muestra la Figura P6.92. Estime (*a*) el caudal de aire en m³/h si la presión de la habitación es de 10 Pa de vacío y (*b*) la presión de la habitación si el caudal es de 1200 m³/h. Desprecie las pérdidas localizadas.



P6.92

P6.93 Modifique el Problema P6.91 de forma que el ángulo β sea incógnita. Para aceite SAE 10 a 20 °C, si la caída de presión es de 120 kPa y el caudal es de 4 m³/h, ¿cuál es el valor apropiado para β?

P6.94 Como se muestra en la Figura P6.94, un conducto consiste en 7 tubos de 2 cm de diámetro agrupados en una malla hexagonal, dentro de un tubo de 6 cm de diámetro. Estime la caída de presión por unidad de longitud si por el interior del conducto fluyen 150 m³/h de aire a 20 °C y 1 atm de presión.



P6.94

P6.95 Un túnel de viento fabricado con madera tiene 28 m de longitud y una sección rectangular de 50 cm por 80 cm. Un ventilador propulsa en su interior aire en condiciones estándar a nivel del mar. Si el ventilador proporciona al aire una potencia de 7 kW, estime (*a*) la velocidad media y (*b*) la caída de presión en el túnel de viento.

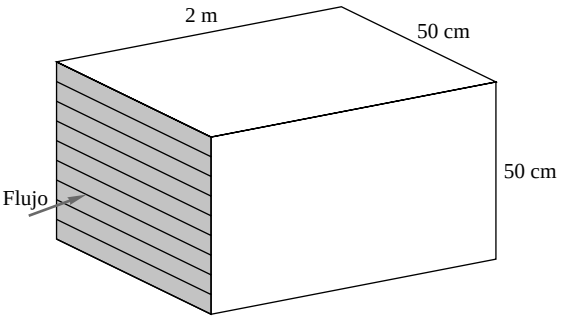
P6.96 Agua a 20 °C fluye por el interior de un conducto de sección cuadrada con 20 cm de lado y número de Reynolds (turbulento) de 100.000. Para medir el caudal con un medidor de flujo laminar se quiere rellenar la sección con una malla de pequeños conductos cuadrados (véase, por ejemplo, Figura P6.28). ¿Cuál es el ancho h de los conductos que asegura que el flujo en cada uno será laminar (número de Reynolds inferior a 2000)?

P6.97 Un cambiador de calor consiste en una serie de conductos entre placas paralelas, como se muestra en la Figura P6.97. La caída de presión disponible es de 2 kPa, y el fluido es agua a 20 °C. Si el caudal total deseado es de 900 m³/h, estime el número de conductos necesarios. Las paredes son hidrodinámicamente lisas.

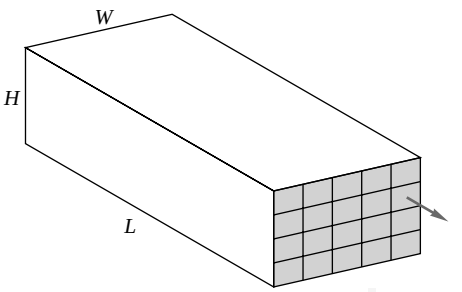
P6.98 Un cambiador de calor rectangular va a ser dividido en secciones más pequeñas empleando láminas de acero comercial de 0,4 mm de espesor, como se muestra en

www.elsolucionario.net

la Figura P6.98. El gasto másico es de 20 kg/s de agua a 20 °C. Las dimensiones son L = 1 m, W = 20 cm y H = 10 cm. ¿Cuál es el número máximo de secciones *cuadradas* si la caída de presión no debe superar los 1600 Pa?



P6.97



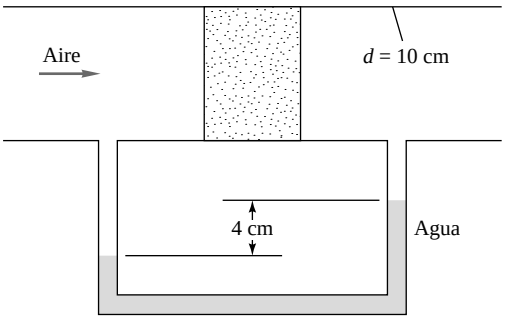
P6.98

P6.99 A través de un conducto horizontal de sección cuadrada fabricado en acero se suministran 3 m^3/s de aire, aproximadamente en condiciones estándar a nivel del mar. ¿Cuáles son las dimensiones del conducto si la caída de presión debe de ser inferior a 90 Pa a lo largo de los 100 m del mismo?

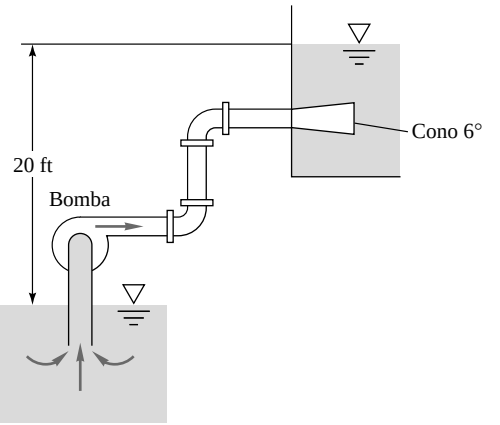
***P6.100** Repita el Problema P6.92 incluyendo las pérdidas localizadas debidas a una entrada con aristas vivas, la salida a la habitación y una válvula de compuerta abierta. Si la presión de la habitación es de 10 Pa de vacío, determine la variación porcentual del caudal en relación al resultado del apartado (*a*) del Problema P6.92.

P6.101 En la Figura P6.101 se está ensayando un filtro para determinar sus pérdidas. El caudal en el conducto es de 7 m^3/min, y la presión aguas arriba es de 120 kPa. El fluido es aire a 20 °C. Empleando la lectura del manómetro de agua, estime el coeficiente de pérdidas K del filtro.

***P6.102** Una bomba con un rendimiento del 70 por 100 transporta agua a 20 °C de un depósito a otro 20 ft más alto, como se muestra en la Figura P6.102. El sistema de tuberías consiste en un tubo de 2 in y 60 ft de longitud fabricado en hierro galvanizado, una entrada que sobresale, dos codos roscados de gran radio a 90°, una válvula de compuerta abierta y una salida con aristas vivas. ¿Cuál es la potencia que se debe suministrar a la bomba, con y sin un difusor cónico de 6° añadido a la salida? El caudal es de 0,4 ft^3/s

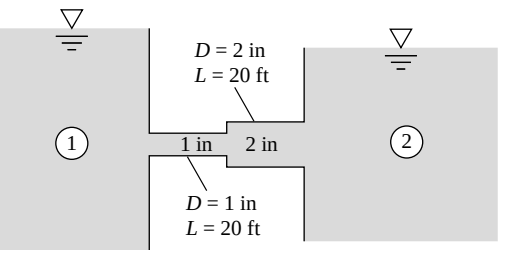


P6.101



P6.102

P6.103 Los depósitos de la Figura P6.103 están conectados a dos tuberías de hierro fundido acopladas sin cuidado alguno, con aristas vivas en la entrada y en la salida. Incluyendo las pérdidas localizadas, estime el flujo de agua a 20 °C si la superficie del depósito 1 está 45 ft por encima de la del 2.

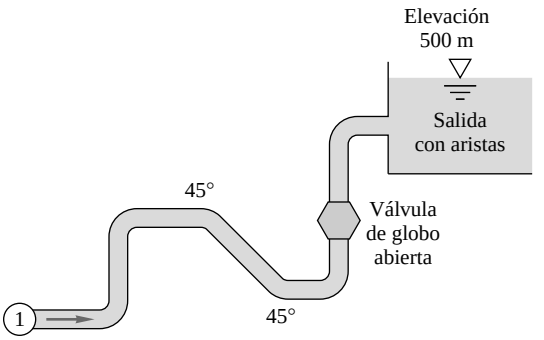


P6.103

***P6.104** Considere la mesa de hockey sobre aire del Problema P3.162, pero considerando ahora pérdidas localizadas. La mesa tiene 3 ft por 6 ft de área, con orificios de $\frac{1}{16}$ in espaciados 1 in formando una malla rectangular (2592 orificios en total). La velocidad del chorro en cada orificio es V_{chorro} = 50 ft/s. Su tarea consiste en seleccionar la bomba adecuada. *Consejo*: Suponga que el aire está estancado bajo la mesa y que la entrada de cada orificio tiene las aristas vivas. (*a*) Calcule el incremento de presión que necesita la bomba. (*b*) Compare su respuesta con los cálculos previos en los que se despreciaron las pérdidas localizadas. ¿Son importantes en esta aplicación?

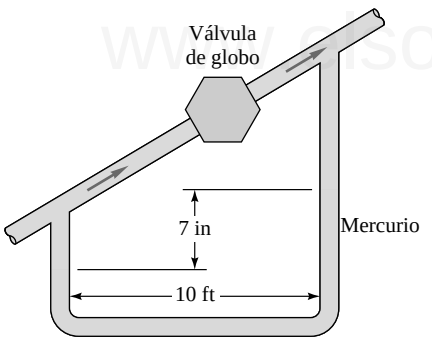
www.elsolucionario.net

P6.105 El sistema de la Figura P6.105 consiste en 1200 m de tubería de hierro fundido de 5 cm de diámetro, dos codos de gran radio a 45° y cuatro a 90°, todos acoplados, una válvula de globo abierta, también acoplada, y una salida con aristas. Si la elevación del punto 1 es de 400 m, ¿qué presión manométrica se necesita en el punto 1 para proporcionar 0,005 m^3/s de agua a 20 °C en el depósito?



P6.105

P6.106 La tubería de agua de la Figura P6.106 desciende por una pendiente de 30°. La tubería tiene un diámetro de 1 in y es lisa. La válvula de globo está completamente abierta. Si el manómetro de mercurio indica 7 in, ¿cuál es el caudal en ft^3/s?

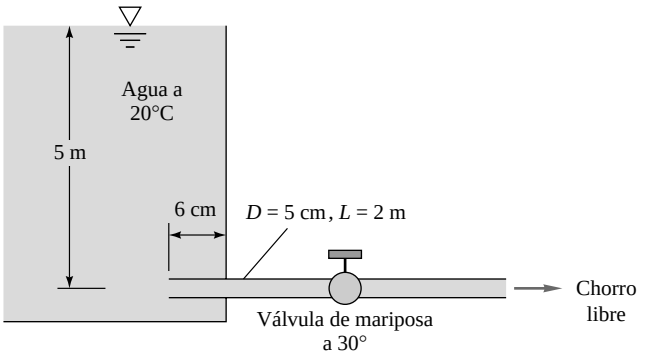


P6.106

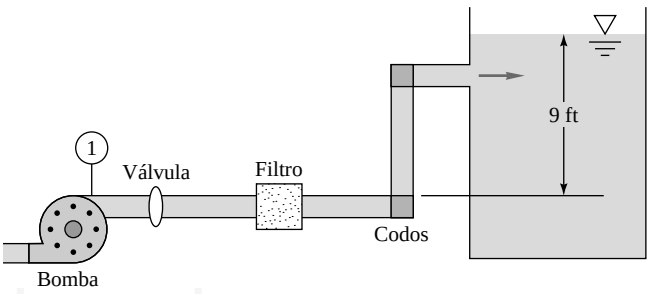
P6.107 En la Figura P6.107 la tubería está fabricada de hierro galvanizado. Estime el incremento porcentual en el caudal (*a*) si la entrada de la tubería está al «ras» de la pared del depósito y (*b*) la válvula de mariposa está completamente abierta.

P6.108 La bomba de agua de la Figura P6.108 mantiene una presión de 6,5 psi en el punto 1. A continuación hay una válvula de disco medio abierta, un filtro y dos codos roscados a 90°. La tubería comercial de acero tiene una longitud total de 80 ft. (*a*) Si el caudal es de 0,4 ft^3/s, ¿cuál es el coeficiente de pérdida del filtro? (*b*) Si la válvula de disco está completamente abierta y el coeficiente de pérdida del filtro es $K_{filtro} = 7$, ¿cuál es el caudal resultante?

P6.109 En la Figura P6.109 hay 125 ft de tubería de 2 in de diámetro, 75 ft de tubería de 6 in y 150 ft de tubería de 3 in, todas de hierro fundido. También hay tres codos de 90° y una válvula de globo abierta, todos acoplados. Si la elevación de la salida es nula, ¿que potencia se extrae de la turbina cuando atraviesa el sistema un flujo de 0,16 ft^3/s de agua a 20 °C?

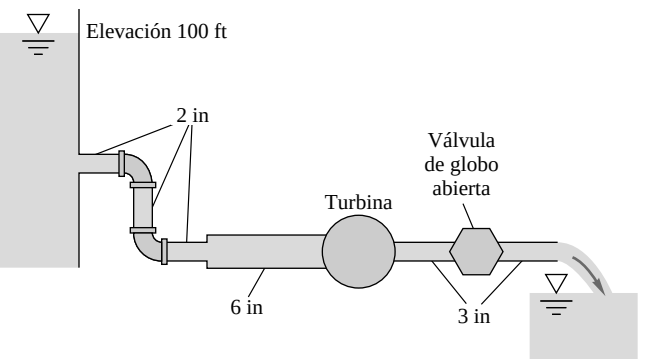


P6.107



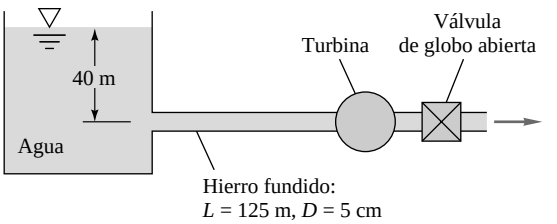
P6.108

www.elsolucionario.net



P6.109

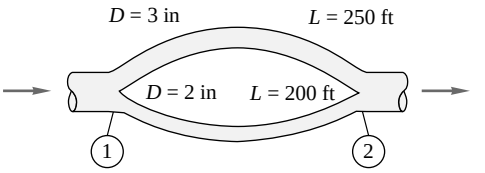
P6.110 La entrada de la tubería de la Figura P6.110 tiene aristas. Si el caudal es de 0,004 m^3/s, ¿qué potencia, en W, se extrae de la turbina?



P6.110

www.elsolucionario.net

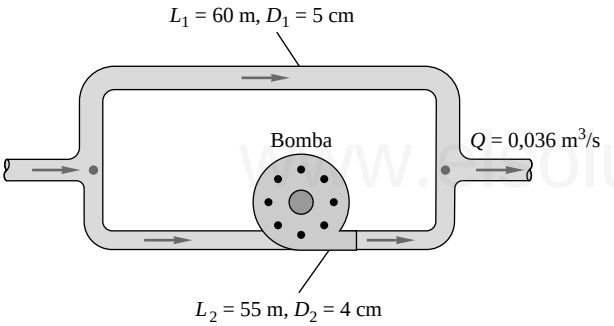
P6.111 En el sistema de tuberías en paralelo de la Figura P6.111 cada tubería es de hierro fundido, y la diferencia de presiones $p_1 - p_2 = 3$ lbf/in^2. Calcule el gasto másico total entre 1 y 2 si el fluido es aceite SAE 10 a 20 °C.



P6.111

P6.112 Si las dos tuberías de la Figura P6.111 se instalaran en serie con la misma diferencia de presión de 3 lbf/in^2 entre sus extremos, ¿cuál sería el caudal? El fluido es aceite SAE 10 a 20 °C.

P6.113 El sistema de tuberías de hierro galvanizado en paralelo de la Figura P6.113 suministra 0,036 m^3/s de agua a 20 °C. Si la bomba está abierta sin funcionar, con un coeficiente de pérdidas $K = 1{,}5$, determine (*a*) el caudal en cada conducto y (*b*) la caída de presión total.



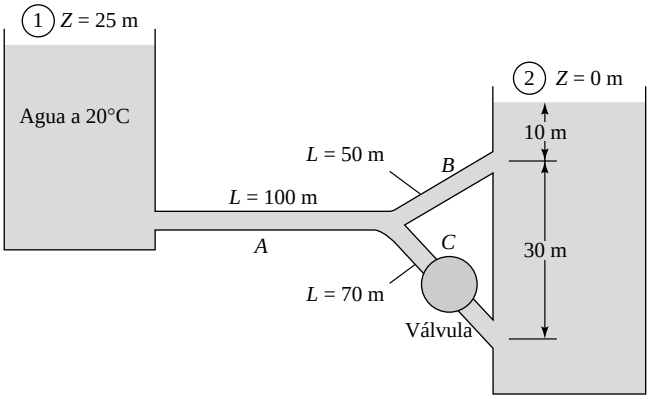
P6.113

P6.114 Modifique el Problema P6.113 como se indica. Suponga que la bomba está funcionando y proporciona 45 kW al fluido en la tubería 2. El fluido es gasolina a 20 °C. Determine (*a*) el caudal en cada conducto y (*b*) la caída de presión total.

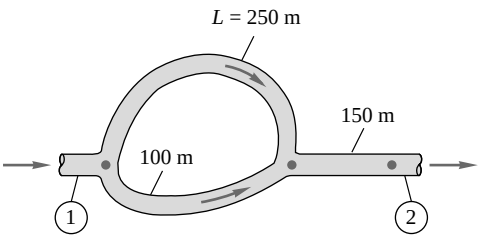
P6.115 En la Figura P6.115 todas las tuberías son de hierro fundido con diámetro igual a 8 cm. Determine el caudal en *A* si la válvula en *C* está (*a*) cerrada y (*b*) abierta con un coeficiente de pérdidas $K = 0{,}5$.

P6.116 En el sistema de tuberías en serie y en paralelo de la Figura P6.116 todos los conductos tienen 8 cm de diámetro y están fabricados en hierro fundido asfáltico. Si la diferencia de presiones total $p_1 - p_2 = 750$ kPa, calcule el caudal de agua a 20 °C, en m^3/h. Desprecie las pérdidas localizadas.

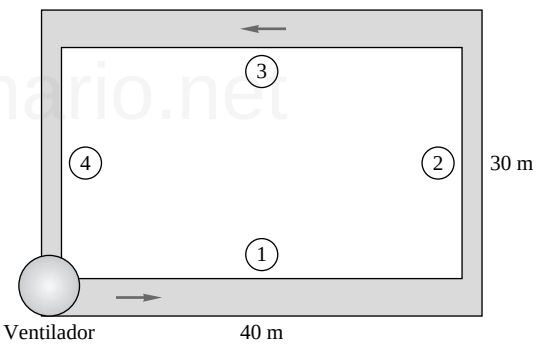
P6.117 Un ventilador suministra 3000 m^3/h al sistema de conductos de la Figura P6.117. Cada conducto es de sección cuadrada, con lados $a_1 = a_3 = 20$ cm y $a_2 = a_4 = 12$ cm. Todos están fabricados en acero. Suponiendo condiciones a nivel del mar, estime la potencia que necesita el ventilador si éste tiene un rendimiento del 75 por 100. Desprecie las pérdidas localizadas.



P6.115

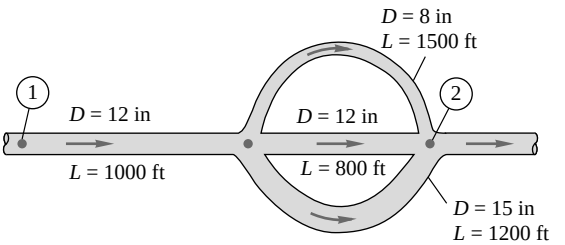


P6.116



P6.117

P6.118 Considere el sistema de tuberías de hormigón de la Figura P6.118, con una rugosidad $\varepsilon = 0{,}04$ in. Despreciando las pérdidas localizadas, calcule la diferencia de presiones $p_1 - p_2$ si $Q = 20$ ft^3/s. El fluido es agua a 20 °C.



P6.118

P6.119 Modifique el Problema P6.118, de forma que la diferencia de presión sea $p_1 - p_2 = 98$ lbf/in^2 y la incógnita sea el caudal. Desprecie las pérdidas localizadas.

www.elsolucionario.net

P6.120 Tres tuberías de hierro fundido de las siguientes dimensiones se montan en paralelo:

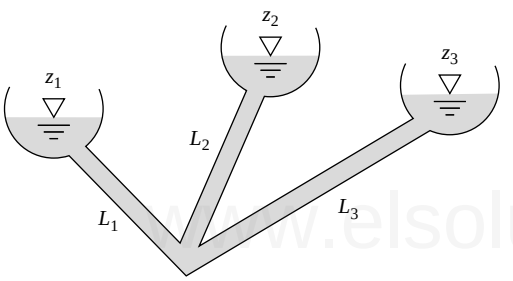
Tubería	Longitud, m	Diámetro, cm
1	800	12
2	600	8
3	900	10

El caudal total es de 200 m^3/h de agua a 20 °C. Determine (*a*) el caudal en cada tubería y (*b*) la caída de presión en el sistema.

P6.121 Considere el sistema de tres depósitos de la Figura P6.121 con los siguientes datos:

$$L_1 = 95 \text{ m} \quad L_2 = 125 \text{ m} \quad L_3 = 160 \text{ m}$$
$$z_1 = 25 \text{ m} \quad z_2 = 115 \text{ m} \quad z_3 = 85 \text{ m}$$

Todas las tuberías tienen 28 cm y son de hormigón (ε = 1 mm). Calcule el caudal de agua a 20 °C en cada tubería en régimen estacionario.



P6.121

P6.122 Modifique el Problema P6.121, reduciendo el diámetro a 15 cm (se mantiene ε = 1 mm), y calculando los caudales de agua a 20 °C. El reparto de caudales es aproximadamente igual al del Problema P6.121, pero éstos son unas 5,2 veces más pequeños. Explique esta diferencia.

P6.123 Modifique el Problema P6.121 suponiendo que z_3 es incógnita. Calcule el valor de z_3 sabiendo que el caudal por la tubería 3 es 0,2 m^3/s hacia la unión. (Este problema requiere iterar, por lo que se recomienda el uso de un ordenador.)

P6.124 El sistema de tres depósitos de la Figura P6.124 contiene agua a 20 °C. Los datos del sistema se enumeran a continuación:

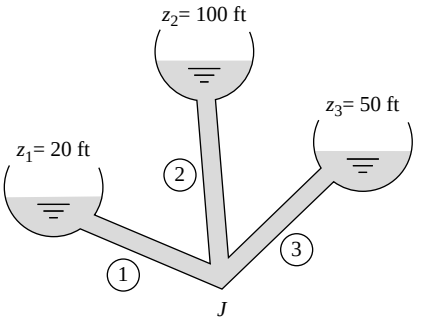
$$D_1 = 8 \text{ in} \quad D_2 = 6 \text{ in} \quad D_3 = 9 \text{ in}$$
$$L_1 = 1800 \text{ ft} \quad L_2 = 1200 \text{ ft} \quad L_3 = 1600 \text{ ft}$$

Todas las tuberías son de hierro galvanizado. Calcule el caudal en cada tubería.

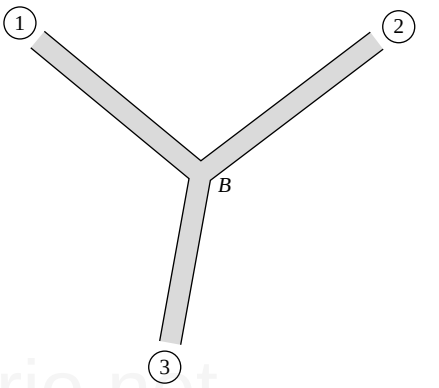
P6.125 Suponga que las tres tuberías de hierro fundido del Problema P6.120 están conectadas se forma suave en el punto *B*, tal y como muestra la Figura P6.125. Las presiones a la entrada de cada tubería son:

$$p_1 = 200 \text{ kPa} \quad p_2 = 160 \text{ kPa} \quad p_3 = 100 \text{ kPa}.$$

El fluido es agua a 20 °C. Desprecie las pérdidas localizadas. Determine el caudal y la dirección del flujo en cada tubería.



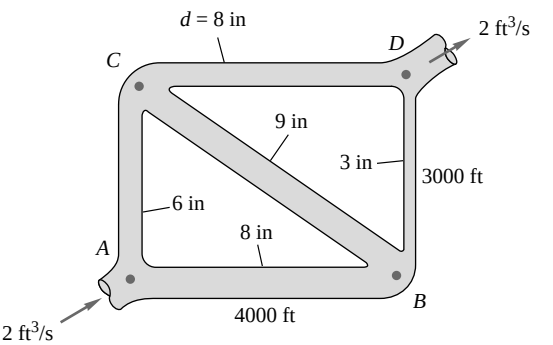
P6.124



P6.125

P6.126 Modifique el Problema P6.124. Suponga que los datos son los mismos salvo porque la tubería 1 está equipada con una válvula de mariposa (Figura 6.19*b*). Estime el ángulo de apertura de la válvula para reducir el flujo a través de la tubería 1 hasta 1,5 ft^3/s hacia el depósito 1. (Este problema requiere iterar, por lo que se recomienda el uso de un ordenador.)

P6.127 En la red de cinco tuberías horizontales de la Figura P6.127 suponga que todas tienen coeficiente de fricción f = 0,025. Si existe un caudal de 2 ft^3/s de agua a 20 °C en la entrada y en la salida del sistema, determine el caudal y la dirección del flujo en cada tubería. Si p_A = 120 lbf/in^2 manométrica, determine la presión en los puntos *B*, *C* y *D*.



P6.127

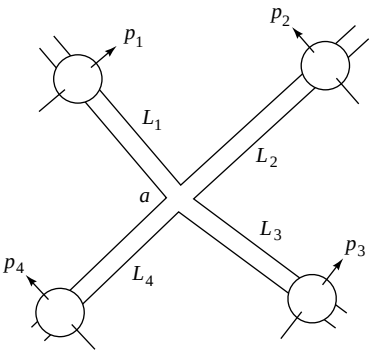
www.elsolucionario.net

P6.128 Modifique el Problema P6.127 suponiendo que los caudales de fluido en la entrada *A* y en la salida *D* son incógnitas. Suponga $p_A - p_B = 100$ lbf/in^2. Calcule los caudales en las cinco tuberías.

P6.129 En la Figura P6.129 las cuatro tuberías horizontales de hierro fundido tienen 45 m de longitud, 8 cm de diámetro y se unen en el punto *a*. El fluido es agua a 20 °C. Las presiones se conocen en cuatro puntos:

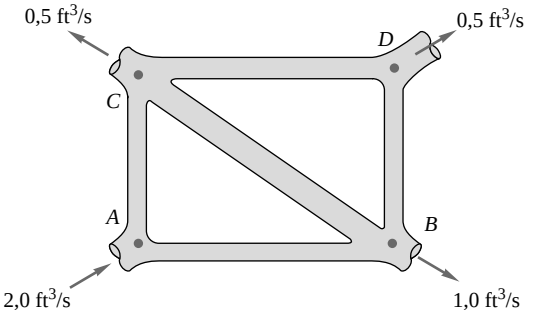
$$p_1 = 950 \text{ kPa} \quad p_2 = 350 \text{ kPa}$$
$$p_3 = 675 \text{ kPa} \quad p_4 = 100 \text{ kPa}$$

Despreciando pérdidas localizadas, determine el caudal en cada tubería.



P6.129

P6.130 En la Figura P6.130 las longitudes *AB* y *BD* son 2000 y 1500 ft, respectivamente. El coeficiente de fricción es 0,022 en todos los conductos, y $p_A = 90$ lbf/in^2 manométrica. Todos los conductos tienen 6 in de diámetro. Para agua a 20 °C, determine el caudal y las presiones en los puntos *B*, *C* y *D*.



P6.130

P6.131 La sección de ensayos de un túnel de agua tiene 1 m de diámetro, $V = 20$ m/s, $p = 100$ kPa y $T = 20$ °C. El bloqueo de las capas límite al final de la sección es del 9 por 100. Si se instala un difusor cónico tras la sección de ensayos para maximizar la recuperación de presión, ¿cuáles deben de ser su ángulo, longitud, diámetro de salida y presión de salida?

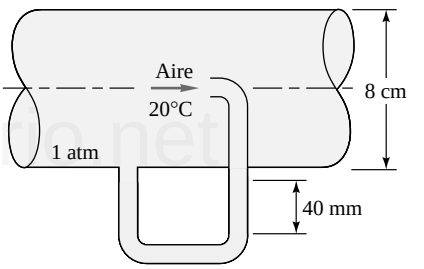
P6.132 Para el Problema P6.131 suponga que el espacio está limitado a una longitud máxima del difusor de 10 m. ¿Cuáles serían el ángulos del difusor, el diámetro de la salida y la presión de salida para recuperación máxima?

P6.133 La sección de ensayos de un túnel de viento es cuadrada y tiene 3 ft de lado; el flujo tiene $V = 150$ ft/s, $p = 15$ lbf/in^2 absoluta y $T = 68$ °F. El bloqueo de la capa límite al final de la sección de ensayos es del 8 por 100. Calcule el ángulo, longitud, altura y presión a la salida del difusor de paredes planas que proporciona recuperación máxima de la presión.

P6.134 Suponga que en el Problema P6.133 la longitud máxima del difusor es de 30 ft. ¿Cuáles son el ángulo, altura y presión a la salida que proporcionan recuperación máxima?

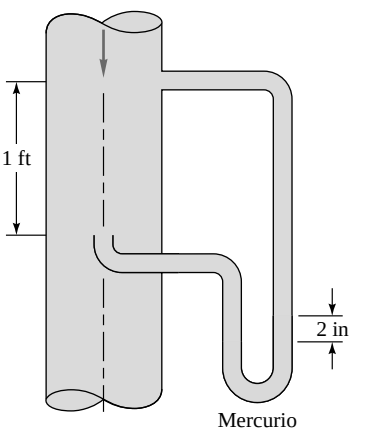
P6.135 Un avión emplea un tubo de Pitot para medir la velocidad del aire. Las medidas, que se indican aquí con sus incertidumbres, son una temperatura estática de –11 ± 3 °C, una presión estática de 60 ± 2 kPa y una diferencia de presiones $(p_0 - p_s) = 3200 \pm 60$ kPa. (*a*) Estime la velocidad del avión y su incertidumbre. (*b*) ¿Se requiere corrección por compresibilidad?

P6.136 En la configuración de tubo de Pitot de la Figura P6.136 el fluido manométrico es agua a 20 °C. Estime (*a*) la velocidad en el eje, (*b*) el caudal que fluye por el tubo y (*c*) los esfuerzos de cortadura en la pared (que supondremos lisa).



P6.136

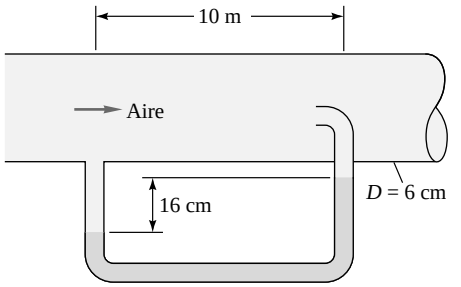
P6.137 Para el flujo de agua a 20 °C que se muestra en la Figura P6.137 se emplea un sistema de tubo de Pitot para estimar (*a*) la velocidad en el eje y (*b*) el caudal que fluye por el tubo liso de 5 in de diámetro. (*c*) ¿Qué error se comete en el caudal si se desprecia la diferencia de alturas de 1 ft?



P6.137

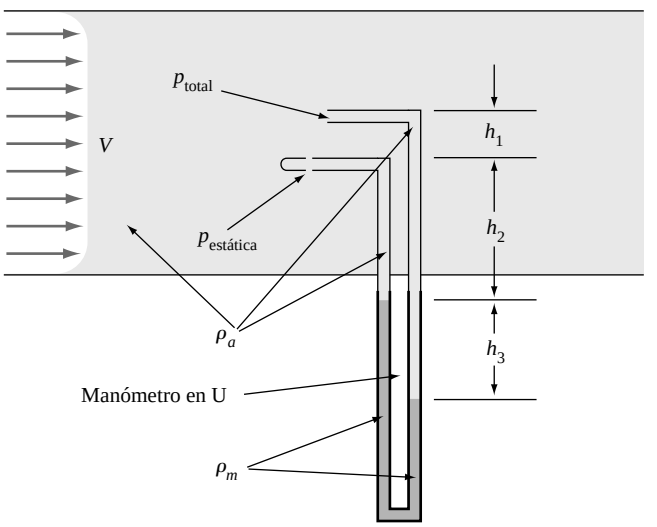
www.elsolucionario.net

P6.138 Un ingeniero con pocos conocimientos de Mecánica de Fluidos ha instalado la toma de presión estática ridículamente lejos de la toma de remanso, contaminando la medida del tubo de Pitot con las pérdidas de carga del conducto. Si el flujo en el conducto es aire a 20 °C y 1 atm y el fluido manométrico es aceite rojo Meriam (S = 0,827), estime la velocidad en el centro del conducto para la lectura de 16 cm del manómetro. Suponga paredes lisas.



P6.138

P6.139 El Doctor Walter Tunnel tiene que medir la velocidad en un túnel de agua. Debido a las restricciones del presupuesto no puede comprar un tubo de Pitot, pero en su lugar instala una toma de presión de remanso y una toma estática, como se muestra en la Figura P6.139, separadas una distancia h_1. Las dos tomas se encuentran en la corriente central del túnel de agua, sin verse afectadas por las capas límites de los laterales, y están conectadas por un manómetro en U. Las densidades y las distancias verticales se indican en la Figura P6.139. (*a*) Escriba una ecuación para la velocidad V en función de los parámetros del problema. (*b*) ¿Es crítico medir con precisión la distancia h_1? (*c*) ¿Cómo variaría la velocidad si se dispusiera de un tubo de Pitot conectado al mismo manómetro?

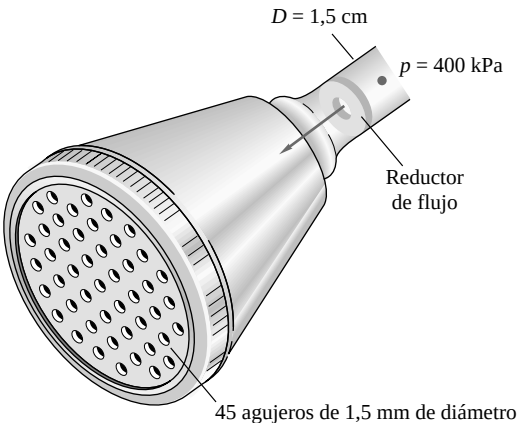


P6.139

P6.140 Por una tubería de 5 cm de diámetro fluyen 18 m³/h de queroseno a 20 °C. Si se instala una placa delgada con un orificio de 2 cm de diámetro con tomas en las esquinas, ¿cuál será la caída de presión medida, en Pa?

P6.141 Por una tubería de 10 cm de diámetro fluyen 105 m³/h de gasolina a 20 °C. Se desea medir el caudal con una placa delgada con un orificio y un transductor diferencial de presión, que tiene resolución máxima en 55 kPa. ¿Cuál es el valor adecuado de β para el orificio?

P6.142 La pera de ducha de la Figura P6.142 suministra agua a 50 °C. Se quiere instalar una reducción de sección para disminuir el caudal. La presión aguas arriba es constante e igual a 400 kPa. ¿Cuál es el caudal, en galones/min, sin la reducción? ¿Qué diámetro debe tener el orificio reductor para que el flujo disminuya en un 40 por 100?

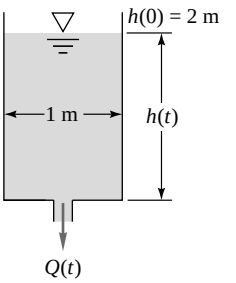


P6.142

P6.143 Un conducto liso de 10 cm de diámetro contiene una placa con un orificio con tomas D: $\frac{1}{2}D$ y $\beta = 0{,}5$. La caída de presión medida es de 75 kPa para un flujo de agua a 20 °C. Estime el caudal, en m³/h. ¿Cuál es la pérdida de carga no recuperable?

P6.144 La solución del Problema P6.143 empleando la Figura 6.41 requiere iterar, porque la incógnita Q aparece tanto en abcisas como en ordenadas. Siguiendo la filosofía del Ejemplo 5.8, reescale las variables y prepare un nuevo diagrama en el que Q se lea directamente en ordenadas. Resuelva el Problema P6.143 con el nuevo diagrama.

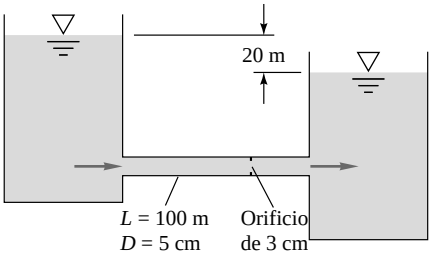
P6.145 El depósito de 1 m de diámetro de la Figura P6.145 se encuentra inicialmente lleno de gasolina a 20 °C. Hay un orificio de 2 cm de diámetro en el fondo. Si se destapa el orificio de repente, calcule el tiempo que tardará la superficie libre $h(t)$ en bajar de 2 m a 1,6 m.



P6.145

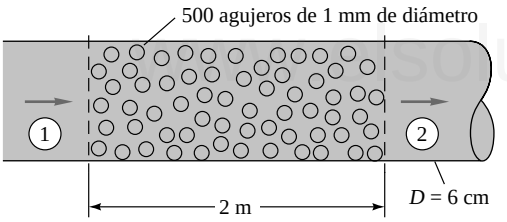
www.elsolucionario.net

P6.146 La tubería que conecta los dos depósitos mostrados en la Figura P6.146 tiene una placa delgada con un orificio. Para un flujo de agua a 20 °C, calcule (*a*) el caudal que atraviesa el conducto y (*b*) la diferencia de presiones a ambos lados de la placa delgada.



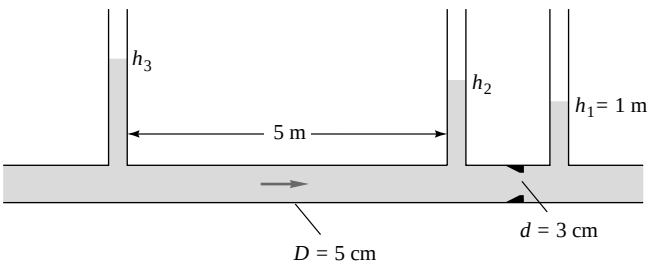
P6.146

P6.147 Una tubería lisa de 6 cm de diámetro tiene una tramo de 2 m de longitud perforado con 500 orificios de 1 mm de diámetro, como se muestra en la Figura P6.147. La presión fuera del conducto es la presión estándar a nivel del mar, y por el interior del mismo circula aire con p_1 = 105 kPa y Q_1 = 110 m³/h. Determine p_2 y Q_2 suponiendo que los orificios se comportan como orificios en una placa delgada. *Consejo*: La ecuación de cantidad de movimiento en forma integral puede ser muy útil.



P6.147

P6.148 Una tubería lisa contiene etanol a 20 °C que fluye a 7 m³/h a través de una obstrucción de tipo Bernoulli, como en la Figura P6.148, y se le han instalado tres tubos piezométricos. Si la obstrucción es del tipo orificio en placa delgada, calcule los niveles piezométricos (*a*) h_2 y (*b*) h_3.

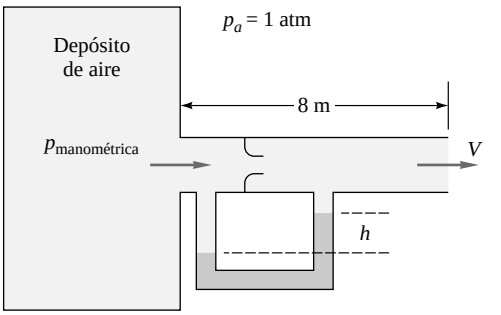


P6.148

P6.149 En un experimento de laboratorio se hace fluir aire a 20 °C desde un depósito grande a través de un tubo de 2 cm de diámetro hasta condiciones atmosféricas a nivel del mar, como se muestra en la Figura P6.149. El flujo se mide con una tobera de curvatura suave, utilizando un manómetro con aceite rojo Meriam (S = 0,827). La longitud del conducto es de 8 m. Las mediciones de las presiones en el depósito y las alturas manométricas son las siguientes:

$p_{depósito}$, Pa (manométrica):	60	320	1200	2050	2470	3500	4900
$h_{manómetro}$, mm:	6	38	160	295	380	575	820

Utilice estos datos para calcular el caudal Q y el número de Reynolds Re_D, y represente Q en función de la presión en el depósito. ¿Es el flujo laminar o turbulento? Compare los datos con las predicciones teóricas obtenidas con el diagrama de Moody, incluyendo las pérdidas localizadas. Discuta los resultados.



P6.149

P6.150 El flujo de 0,06 m³/s de gasolina a 20 °C a través de un conducto de 15 cm de diámetro se mide con una tobera de curvatura suave de 9 cm de diámetro (Figura 6.40*a*). ¿Cuál es la caída de presión en la tobera?

P6.151 Se utiliza una tobera de curvatura suave de 3 cm de diámetro para medir el caudal de alcohol etílico a 20 °C a través de un conducto de 6 cm de diámetro. Si la caída de presión en la tobera es de 45 kPa, ¿cuál es el caudal estimado, en m³/h?

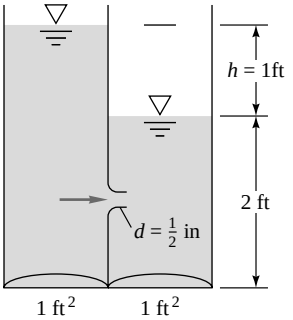
P6.152 Por un conducto de 8 cm de diámetro fluyen 20 m³/h de queroseno a 20 °C. El caudal se mide con una tobera ISA 1932, y la caída de presión es de 7000 Pa. Determine el diámetro de la tobera.

P6.153 Dos depósitos de agua, con áreas iguales a 1 ft², están conectados con una tobera de curvatura suave de 0,5 in de diámetro, como se muestra en la Figura P6.153. Si h = 1ft en t = 0, estime el tiempo necesario para que $h(t)$ caiga a 0,25 ft.

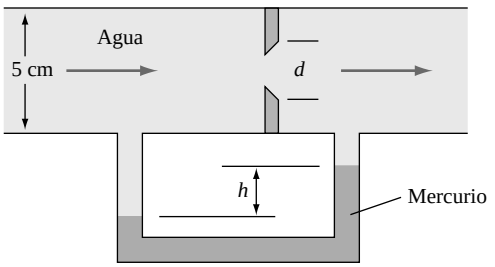
***P6.154** A través del orificio de la Figura P6.154 fluye agua a 20 °C, que es controlada con un manómetro de mercurio. Si d = 3 cm, (*a*) ¿cuál es el valor de h si el caudal es 20 m³/h?, y (*b*) ¿cuál es el valor de Q en m³/h cuando h = 58 cm?

P6.155 Se desea medir el caudal de gasolina a 20 °C en un conducto de 12 cm de diámetro empleando un venturi moderno. Para cumplir los estándares internacionales (Figura 6.43), ¿cuál es el rango permisible de (*a*) caudales, (*b*) diámetros de toberas y (*c*) caídas de presión? (*d*) Para la caída de presión más elevada, ¿será un problema la compresibilidad?

www.elsolucionario.net

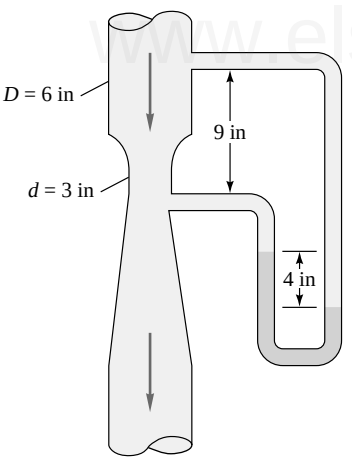


P6.153



P6.154

P6.156 A través de un venturi moderno se hace circular etanol a 20 °C, como se esquematiza en la Figura P6.156. Si la lectura del manómetro de mercurio es de 4 in, estime el caudal en galones/min.



P6.156

P6.157 Modifique el Problema P6.156 si el fluido es aire a 20 °C, entrando en el venturi con una presión de 18 lbf/in^2. ¿Se necesita corrección por compresibilidad?

P6.158 A través de un conducto comercial de acero de 6 cm de diámetro fluye agua a 20 °C. En su interior el conducto tiene instalado un venturi de Herschel con una garganta de 4 cm, conectado a un manómetro de mercurio que indica h = 40 cm. Determine (*a*) el caudal, en m^3/h, y (*b*) la diferencia de presión total entre un punto situado 50 cm aguas arriba del venturi y otro situado 50 cm aguas abajo.

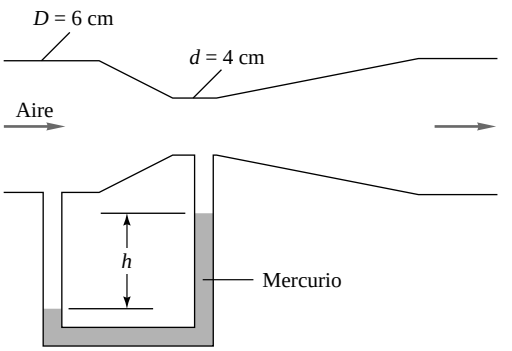
P6.159 En un laboratorio se ensaya un venturi moderno con agua a 20 °C. El diámetro del conducto es de 5,5 cm, y la garganta del venturi tiene un diámetro de 3,5 cm. El flujo se mide con una balanza y la caída de presión con un manómetro de agua-mercurio. A continuación se indican los gastos másicos y volumétricos:

$\dot{m}$, kg/s	0,95	1,98	2,99	5,06	8,15
h, mm	3,7	15,9	36,2	102,4	264,4

Emplee estos datos para dibujar una curva de calibración del coeficiente de descarga del venturi en función del número de Reynolds. Compare con la correlación aceptada, Ecuación (6.116).

***P6.160** Las pérdidas de carga en válvulas de mariposa de la Figura 6.19*b* pueden ser interpretadas como obstrucciones de tipo Bernoulli, como en la Figura 6.39. El «área de la garganta» A_g de la Ecuación (6.104) puede interpretarse como las dos rendijas abiertas alrededor del disco de la válvula cuando se mira desde aguas arriba. En primer lugar, ajuste la curva de la Figura 6.19*b* de pérdida media K_{media} frente al ángulo de apertura por una exponencial. Después emplee esta exponencial para calcular el «coeficiente de descarga» de la válvula de mariposa en función del ángulo de apertura. Pinte los resultados y compárelos con los de un medidor de flujo típico.

P6.161 Una corriente de aire fluye a gran velocidad a través de un venturi de Herschel controlado por un manómetro de mercurio, como se muestra en la Figura P6.161. Las condiciones aguas arriba son 150 kPa y 80 °C. Si h = 37 cm, estime el gasto másico en kg/s. (*Consejo*: el flujo es compresible.)



P6.161

P6.162 Modifique el Problema P6.161 suponiendo que el gasto másico es dato e igual a 0,4 kg/s y calcule la altura indicada por el manómetro. (*Consejo*: el flujo es compresible.)

www.elsolucionario.net

Problemas conceptuales

C6.1 En el flujo completamente desarrollado en un conducto recto el perfil de velocidades no cambia (¿por qué?), pero la presión cae a lo largo del eje del conducto. Por tanto, la presión realiza un trabajo sobre el fluido. Si suponemos que el conducto está térmicamente aislado, ¿dónde va a parar esa energía? Realice un análisis termodinámico del flujo en el conducto.

C6.2 En el diagrama de Moody (Figura 6.13) vemos que las superficies rugosas, como superficies con granos de arena o melladas, no afectan al flujo laminar. ¿Puede explicar por qué? Sin embargo, *sí* que afectan a los flujos turbulentos. ¿Puede desarrollar, o simplemente sugerir, un modelo físico-analítico de flujo turbulento cerca de una superficie rugosa que pueda utilizarse para predecir el aumento en la caída de presión?

C6.3 Al diferenciar la solución laminar, Ecuación (6.40), vemos que los esfuerzos de cortadura varían linealmente desde cero en el eje hasta τ_w en la pared. Se afirma que esto también sucede, en media, para los flujos turbulentos. ¿Puede confirmar esta aseveración analíticamente?

C6.4 Un medio poroso consiste en muchos conductos tortuosos, y el número de Reynolds basado en el tamaño de los poros es típicamente muy pequeño, de orden unidad. En 1856 Darcy propuso que el gradiente de presión en un medio poroso era directamente proporcional a la velocidad media del fluido:

$$\Re p = \Phi \frac{\mu}{K} \mathbf{V}$$

donde K es la *permeabilidad* del medio. Esta ecuación recibe el nombre de *ley de Darcy* para medios porosos. ¿Puede hacer un modelo basado en el flujo de Poiseuille para el flujo en un medio poroso que verifique la ley de Darcy? Además, cuando el número de Reynolds aumenta, de forma que $VK^{1/2}/\nu > 1$, la caída de presión se hace no lineal, como fue demostrado en los experimentos de P. H. Forscheimer hacia el 1782. El flujo es aún laminar, aunque el gradiente de presión es cuadrático:

$$\Re p = \Phi \frac{\mu}{K} \mathbf{V}\, \Phi C\, |V|\, \mathbf{V} \quad \text{Ley de Darcy-Forscheimer}$$

donde C es una constante empírica. ¿Puede explicar las razones de este comportamiento no lineal?

C6.5 Un dispositivo de medida del flujo, muy utilizado en la industria de distribución de agua y suministro de gasolina, es el medidor de disco giratorio. Realice una consulta bibliográfica y escriba un breve informe indicando cómo funciona y las ventajas e inconvenientes de los diseños típicos.

www.elsolucionario.net

Problemas del examen de fundamentos de ingeniería

FE6.1 En el flujo a través de un tubo liso y recto, el número de Reynolds de transición basado en el diámetro se suele tomar igual a:
(*a*) 1500, (*b*) 2300, (*c*) 4000, (*d*) 250.000, (*e*) 500.000

FE6.2 Para un flujo de 0,06 m^3/h de agua a 20 °C a través de un tubo recto y liso, el diámetro para el que el flujo transiciona de laminar a turbulento es:
(*a*) 1,0 cm, (*b*) 1,5 cm, (*c*) 2,0 cm, (*d*) 2,5 cm,
(*e*) 3,0 cm

FE6.3 En un flujo de aceite [μ = 0,1 kg/(m · s), S = 0,9] por un tubo recto y liso de 5 cm de diámetro, con un caudal de 14 m^3/h, la caída de presión por unidad de longitud es aproximadamente igual a:
(*a*) 2200 Pa, (*b*) 2500 Pa, (*c*) 10.000 Pa, (*d*) 160 Pa,
(*e*) 2800 Pa

FE6.4 Para un flujo de agua a número de Reynolds $1{,}03 \times 10^6$ por un conducto de 5 cm de diámetro y una rugosidad de 0,5 mm de altura, el coeficiente de fricción de Moody es aproximadamente:
(*a*) 0,012, (*b*) 0,018, (*c*) 0,038, (*d*) 0,049, (*e*) 0,102

FE6.5 Las pérdidas localizadas en válvulas, accesorios, codos, contracciones y similares suelen modelizarse como proporcionales a la
(*a*) pérdida de carga total, (*b*) pérdida de carga estática, (*c*) pérdida de carga de velocidad, (*d*) caída de presión, (*e*) velocidad.

FE6.6 Una tubería de 8 cm de diámetro y 200 m de longitud conecta dos depósitos que contienen agua a 20 °C, uno con una elevación de 700 m y otro con una elevación de 560 m. Si se desprecian las pérdidas localizadas, el flujo es:
(*a*) 0,048 m^3/h, (*b*) 2,87 m^3/h, (*c*) 134 m^3/h,
(*d*) 172 m^3/h, (*e*) 385 m^3/h

FE6.7 Si en el Problema FE6.6 la tubería fuera rugosa y el caudal fuera de 90 m^3/h, la altura media de la rugosidad debería ser:
(*a*) 1,0 mm, (*b*) 1,25 mm, (*c*) 1,5 mm, (*d*) 1,75 mm,
(*e*) 2,0 mm

FE6.8 Suponga que en el Problema FE6.6 los dos depósitos están conectados por un orificio de 8 cm de diámetro y bordes afilados, en lugar de una tubería. En ese caso, el caudal es aproximadamente:
(*a*) 90 m^3/h, (*b*) 579 m^3/h, (*c*) 748 m^3/h, (*d*) 949 m^3/h,
(*e*) 1048 m^3/h

FE6.9 Por un conducto liso de 8 cm de diámetro y 50 m de longitud fluye aceite [μ = 0,1 kg/(m · s), S = 0,9]. La máxima caída de presión esperada en flujo laminar es de aproximadamente:
(*a*) 30 kPa, (*b*) 40 kPa, (*c*) 50 kPa, (*d*) 60 kPa,
(*e*) 70 kPa

FE6.10 Aire a 20 °C y aproximadamente 1 atm fluye a través de un conducto liso de sección cuadrada y 30 cm de

www.elsolucionario.net

lado con un caudal de 1500 ft^3/min. La caída de presión esperada por unidad de longitud del conducto es: (*a*) 1,0 Pa, (*b*) 2,0 Pa, (*c*) 3,0 Pa, (*d*) 4,0 Pa, (*e*) 5,0 Pa

FE6.11 Agua a 20 °C fluye por un orificio de 3 cm de diámetro en un conducto de 6 cm de diámetro con un caudal de 3 m^3/h. Estime la caída de presión en el orificio. (*a*) 440 Pa, (*b*) 680 Pa, (*c*) 875 Pa, (*d*) 1750 Pa, (*e*) 1870 Pa

FE6.12 Por una tubería recta de 10 cm de diámetro fluye agua con un número de Reynolds de 250.000. Si la rugosidad media de la tubería es de 0,06 mm, ¿cuál es aproximadamente el coeficiente de fricción de Moody? (*a*) 0,015, (*b*) 0,017, (*c*) 0,019, (*d*) 0,026, (*e*) 0,032

FE6.13 ¿Cuál es el diámetro hidráulico de un conducto rectangular de sección 1 m por 25 cm? (*a*) 25 cm, (*b*) 40 cm, (*c*) 50 cm, (*d*) 75 cm, (*e*) 100 cm

FE6.14 Por una tubería circulan 300 galones/min de agua a 20 °C con una pérdida de carga por fricción de 45 ft. ¿Qué potencia se necesita para mantener este flujo? (*a*) 0,16 kW, (*b*) 1,88 kW, (*c*) 2,54 kW, (*d*) 3,41 kW, (*e*) 4,24 kW

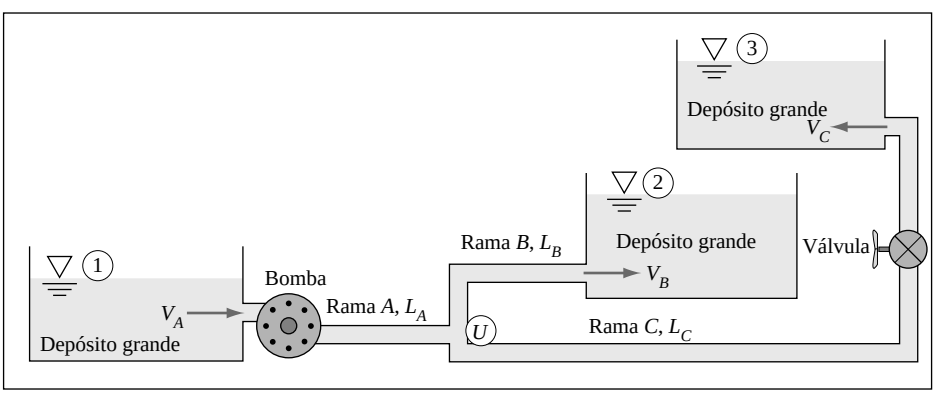
FE6.15 Por una tubería de 150 m de longitud y 8 cm de diámetro fluyen 200 galones/min de agua a 20 °C. Si la pérdida de carga por fricción es de 12 m, ¿cuál es el coeficiente de fricción de Moody? (*a*) 0,010, (*b*) 0,015, (*c*) 0,020, (*d*) 0,025, (*e*) 0,030

Problemas extensos

PE6.1 Para medir la distribución de velocidades de un túnel de agua a 20 °C se va a utilizar un tubo de Pitot. Las dos líneas de presión del tubo se conectan a un manómetro en U que utiliza un líquido de densidad relativa 1,7. La velocidad máxima esperada en el túnel es de 2,3 m/s. Su trabajo es seleccionar el tubo en U adecuado entre las alturas de manómetros proporcionados por el fabricante: 8, 12, 16, 24 y 36 in. El coste aumenta significativamente con la altura del manómetro. ¿Qué tamaño compraría?

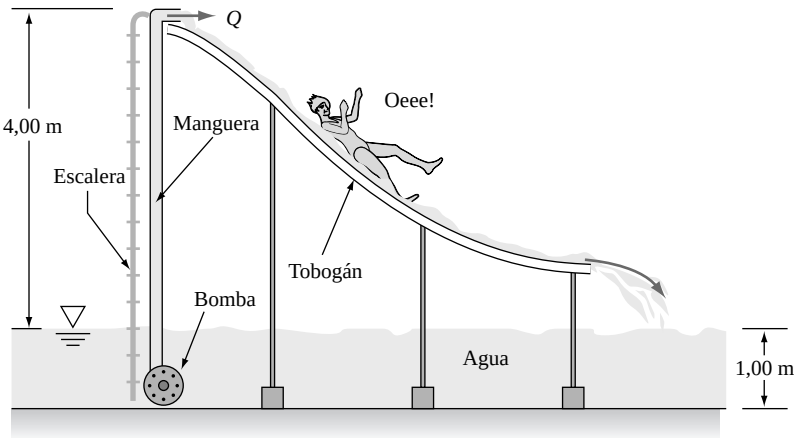
***PE6.2** Una bomba proporciona un flujo estacionario de agua (ρ, μ) desde un depósito grande a dos depósitos situados más altos, como se muestra en la Figura PE6.2. El diámetro d de los conductos y su rugosidad ε son constantes. Todas las pérdidas de carga *excepto las de la válvula* son despreciables, y la válvula parcialmente abierta tiene un coeficiente de pérdidas $K_{\text{válvula}}$. Se puede suponer flujo turbulento con todos los coeficientes de corrección de la energía cinética iguales a 1,06. El incremento de carga de la bomba H es una función conocida del caudal Q_A, donde $V_A = Q_A/A_{\text{tubo}}$; sea $H = a - bV_A^2$, donde a y b son constantes conocidas. Los subíndices U se refieren a la unión en «T» donde la rama A se divide en las ramas B y C. La longitud del tubo L_C es mucho mayor que L_B. Se desea conocer la presión en U, las velocidades y coeficientes de fricción en los tres conductos y el incremento de carga de la bomba. Por lo tanto, hay ocho variables: H, V_A, V_B, V_C, f_A, f_B, f_C, p_U. Escriba las ocho ecuaciones necesarias para resolver este problema , pero *no las resuelva*, ya que el proceso de resolución requiere el empleo de un método iterativo o de un programa del tipo EES.

PE6.3 Se instala un pequeño tobogán de agua en una piscina (véase la Figura PE6.3). Para evitar que los usuarios sufran quemaduras, el fabricante recomienda que por el tobogán baje un flujo continuo de agua $Q = 1{,}39 \times 10^{-3}$ m^3/s, unos 22 galones/min. Para ello se instala una bomba, con una manguera de 5 m de longitud y 4 cm de diámetro, que lleva agua de la piscina al tobogán. La bomba tiene un rendimiento del 80 por 100 y está totalmente sumergida en el agua 1 m por debajo de la superficie. La manguera, con una rugosidad de 0,0080 cm, descarga el agua sobre el tobogán en forma de chorro libre en condiciones atmosféricas 4 m por encima de la superficie de la piscina. Suponiendo flujo turbulento completamente desarrollado con un factor de corrección de energía cinética de 1,06, calcule la potencia necesaria para accionar la bomba. Suponga $\rho = 998$ kg/m^3 y $\nu = 1{,}00 \times 10^{-6}$ m^2/s para el agua e ignore las pérdidas localizadas.



PE6.2

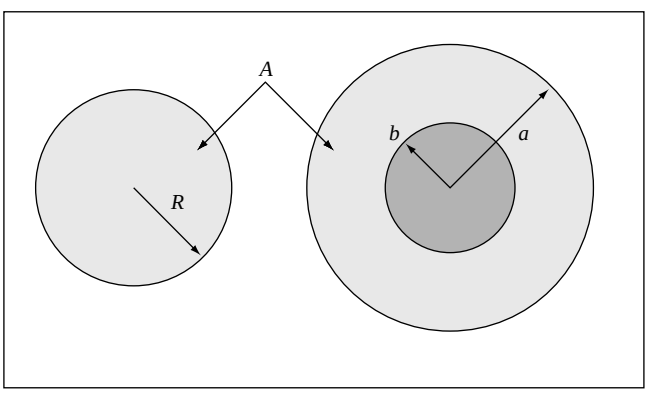
www.elsolucionario.net



PE6.3

***PE6.4** Suponga que usted está construyendo una casa rural y necesita llevar una tubería hasta el suministro de agua más cercano, que afortunadamente está 1000 m por encima del nivel de su casa. La tubería tendrá 6 km de longitud, la distancia hasta el suministro de agua, donde la presión manométrica es de 1000 kPa. Usted necesita un caudal mínimo de 3 galones/min y el final de la tubería, que es extremadamente lisa, estará abierto a la atmósfera. Para minimizar costes, usted compra la tubería con el menor diámetro posible. (*a*) Calcule la pérdida de carga total desde la entrada a la tubería hasta la salida. Desprecie las pérdidas localizadas debidas a válvulas, codos, longitudes de entrada y demás, ya que la tubería es muy larga y ése es el efecto dominante. (*b*) ¿Qué es más importante en este problema, la pérdida de carga debida a la diferencia de alturas o la debida a la caída de presión dentro del conducto? (*c*) Calcule el diámetro mínimo necesario para la tubería.

PE6.5 Agua a temperatura ambiente fluye por dos conductos con *el mismo* caudal, $Q = 9{,}4 \times 10^{-4}$ m^3/s, un conducto circular y uno anular. La sección transversal de los dos conductos es la misma, A, y las paredes son de acero comercial. Los dos conductos tienen la misma longitud. En las secciones transversales de la Figura PE6.5, $R = 15$ mm y $a = 25$ mm. (*a*) ¿Cuál es el radio b para que las secciones transversales sean idénticas? (*b*) Compare las pérdidas de carga por fricción por unidad de longitud en los dos casos suponiendo flujo laminar. Para el conducto anular realice una estimación inicial empleando el radio hidráulico y un cálculo más detallado, utilizando la corrección del diámetro efectivo, y compare los resultados. (*c*) Si las pérdidas son diferentes en los dos casos, explique por qué. ¿Algún conducto es más «eficiente»?



PE6.5

PE6.6 John Laufer (*NACA Tech Rep.* 1174, 1945) proporcionó datos de velocidades en una corriente de aire a 20 °C en un conducto liso de 24,7 cm de diámetro con Re $\Xi 10^{-5}$.

u/u_{LC}	1,0	0,997	0,988	0,959	0,908	0,847	8,818	0,771	0,690
r/R	0,0	0,102	0,206	0,412	0,617	0,784	0,846	0,907	0,963

La velocidad en el centro u_{LC} era 30,5 m/s. Determine (*a*) la velocidad media por integración numérica y (*b*) los esfuerzos de cortadura en la pared a partir de la aproximación de la ley logarítmica. Compare con el diagrama de Moody y la Ecuación (6.43).

PE6.7 Considere el intercambio de energía en un flujo laminar completamente desarrollado entre placas paralelas, como en las Ecuaciones (6.63). Suponga que la caída de presión a lo largo de la distancia L es Δp. Calcule el trabajo realizado sobre el fluido por esta caída de presión en el dominio ($0 < x < L$, $-h < y < h$) y compare con la integral de la función de disipación Φ de la Ecuación (4.50) extendida a la misma región. Deberían ser iguales, explique por qué. ¿Puede relacionar la fuerza de resistencia viscosa y los esfuerzos de cortadura en la pared con este resultado?

www.elsolucionario.net

Proyectos de diseño

D6.1 Un jardín hidropónico emplea la tubería de 10 m de longitud esquematizada en la Figura D6.1 para suministrar agua a 20 °C. La tubería tiene 5 cm de diámetro y tiene un orificio circular cada 20 cm. Una bomba proporciona agua a 75 kPa (manométrica) a la entrada, mientras que el extremo opuesto está cerrado. Si intentó el Problema P3.125 sabrá que la presión cerca del extremo cerrado de un conducto perforado es sorprendentemente alta, y por lo tanto habrá mucho flujo por los orificios cercanos a ese extremo. El remedio es variar el tamaño de los orificios a lo largo del conducto. Realice un análisis de diseño, quizás empleando un ordenador, para obtener la distribución óptima de tamaños que consigue una distribución de flujos lo más uniforme posible. Tenga en cuenta que los tamaños de los orificios están limitados a los tamaños de brocas métricas disponibles en el mercado.

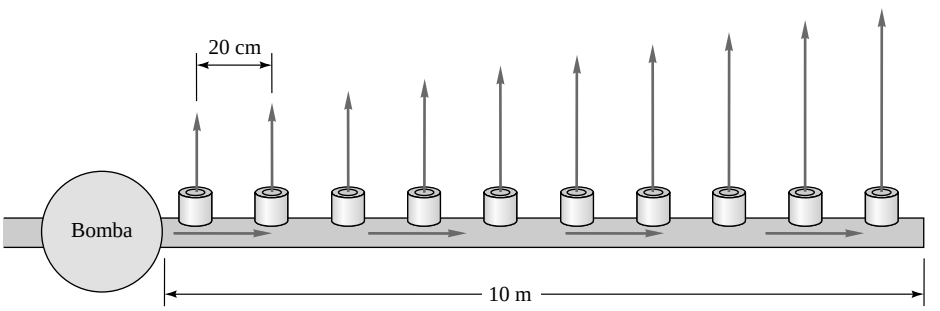
D6.2 Se desea diseñar un sistema de bombeo para mantener lleno un depósito de 1 millón de galones de agua de capacidad. La idea es emplear una versión modificada (en tamaño y velocidad) de la bomba centrífuga 1206 fabricada por Taco Inc., Cranston, Rhode Island. A continuación se muestran datos de ensayos con agua a 20 °C en un modelo pequeño de esta bomba, cortesía de Taco Inc.: $D = 5{,}45$ in, $\Omega = 1760$ rpm

Q, galones/min	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
H, ft	28	28	29	29	28	28	27	26	25	23	21	18	15
Rendimiento, %	0	13	25	35	44	48	51	53	54	55	53	50	45

El depósito debe llenarse con agua del subsuelo bastante fría (10 °C) obtenida de un acuífero situado a 0,8 mi del tanque y 150 ft por debajo. El uso diario de agua estimado es de 1,5 millones de gal/día. El tiempo de llenado debe ser inferior a las 8 h diarias. El sistema debe tener cuatro válvulas de mariposa, con aperturas variables, 10 codos de distintos ángulos, con tuberías de acero galvanizado y diámetro a ser determinado en el diseño. El diseño debe ser económico, tanto en capital invertido como en costes de operación. Taco Inc. estima los siguientes costes por componente:

Bomba y motor	3500 € más 1500 € por in de diámetro del rotor
Velocidad de la bomba	Entre 900 y 1800 rpm.
Válvulas	300 € más 200 € por in de diámetro
Codos	50 € más 50 € por in de diámetro
Tuberías	1 € por in de diámetro y por ft de longitud
Costes eléctricos	10 céntimos por kilovatio hora

El objetivo es seleccionar el tamaño de la tubería, del rotor de la bomba y la velocidad de operación de ésta más económicos para esta tarea, empleando los datos adimensionalizados del ensayo como datos de diseño. Escriba un breve informe (de cinco a seis páginas) mostrando sus cálculos y gráficas.



D6.1

Referencias

1. P. A. Libby, *An Introduction to Turbulence*, Taylor & Francis, Nueva York, 1996.
2. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, 7.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1979.
3. F. M. White, *Viscous Fluid Flow*, 2.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1991.
4. O. Reynolds, «An Experimental Investigation of the Circumstances which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous and of the Law of Resistance in Parallel Channels», *Phil. Trans. R. Soc.*, vol. 174, 1883, págs. 935-982.
5. P. G. Drazin y W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, Londres, 1981.
6. H. Rouse y S. Ince, *History of Hydraulics*, Iowa Institute of Hydraulic Research, State University of Iowa, Iowa City, 1957.

www.elsolucionario.net

7. J. Nikuradse, «Strömungsgesetze in Rauhen Rohren», *VDI Forschungsh*. 361, 1933. Traducción al inglés, *NACA Tech. Mem.* 1292.
8. L. F. Moody, «Friction Factors for Pipe Flow», *ASME Trans.*, vol. 66, págs. 671-684, 1944.
9. C. F. Colebrook, «Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition between the Smooth and Rough Pipe Laws», *J. Inst. Civ. Eng. Lond.*, vol. 11, 1938-1939, págs. 133-156.
10. O. C. Jones, Jr., «An Improvement in the Calculations of Turbulent Friction in Rectangular Ducts», *J. Fluids Eng.*, junio 1976, págs. 173-181.
11. R. Berker, *Handbuch der Physik*, vol. 7, núm. 2, págs. 1-384, Springer-Verlag, Berlín, 1963.
12. R. M. Olson y S. J. Wright, *Essentials of Engineering Fluid Mechanics*, 5.ª ed., Harper & Row, Nueva York, 1990.
13. P. D. Durbin, B. A. Pettersson y B. A. Reif, *Theory and Modeling of Turbulent Flows*, Wiley, Nueva York, 2001.
14. P. W. Runstadler, Jr., et al., «Diffuser Data Book», *Creare Inc. Tech. Note* 186, Hanover, NH, 1975.
15. «*Flow of Fluids through Valves, Fittings, and Pipes*», Tech. Paper 410, Crane Valve Group, Long Beach, CA, 1957 (actualizado como CD-ROM; véase http://www.cranevalves.com).
16. *Pipe Friction Manual*, 3.ª ed., The Hydraulic Institute, Nueva York, 1961.
17. H. Cross, «Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors», *Univ. Ill. Bull.* 286, nov. 1936.
18. B. E. Larock, R. W. Jeppson y G. Z. Watters, *Hydraulics of Pipeline Systems*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.
19. D. C. Wilcox, *Turbulence Modeling for CFD*, 2.ª ed., DCW Industries, La Canada, CA, 1998.
20. D. Cholaseuk, V. Srinivasan y V. Modi, «Shape Optimization for Fluid Flow Problems Using Bezier Curves and Designed Numerical Experiments», Paper DETC99/CIE-9116, ASME Design Engineering Conference, Las Vegas, 1999.
21. R. W. Fox y S. J. Kline, «Flow Regime Data and Design Methods for Curved Subsonic Diffusers», *J. Basic Eng.*, vol. 84, 1962, págs. 303-312.
22. J. P. Holman, *Experimental Methods for Engineers*, 7.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2000.
23. R. W. Miller, *Flow Measurement Engineering Handbook*, 3.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1997.
24. B. Warren y C. Wunsch (eds.), *Evolution of Physical Oceanography*, M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1981.
25. U.S. Department of Commerce, *Tidal Current Tables*, National Oceanographic and Atmospheric Administration, Washington, DC, 1971.
26. J. A. Shercliff, *Electromagnetic Flow Measurement*, Cambridge University Press, Nueva York, 1962.
27. J. A. Miller, «A Simple Linearized Hot-Wire Anemometer», *J. Fluids Eng.*, dic. 1976, págs. 749-752.
28. R. J. Goldstein (ed.), *Fluid Mechanics Measurements*, 2.ª ed., Hemisphere, Nueva York, 1996.
29. D. Eckardt, «Detailed Flow Investigations within a High Speed Centrifugal Compressor Impeller», *J. Fluids Eng.*, septiembre 1976, págs. 390-402.
30. H. S. Bean (ed.), *Fluid Meters: Their Theory and Application*, 6.ª ed., American Society of Mechanical Engineers, Nueva York, 1971.
31. «Measurement of Fluid Flow by Means of Orifice Plates, Nozzles, and Venturi Tubes Inserted in Circular Cross Section Conduits Running Full», *Int. Organ. Stand. Rep.* DIS-5167, Ginebra, abril 1976.
32. P. Bagchi, M. Y. Ha y S. Balachandar, «Direct Numerical Simulation of Flow and Heat Transfer from a Sphere in a Uniform Cross-Flow», *J. Fluids Engineering*, vol. 123, 2001, págs. 347-358.
33. S. E. Haaland, «Simple and Explicit Formulas for the Friction Factor in Turbulent Pipe Flow», *J. Fluids Eng.*, marzo 1983, págs. 89-90.
34. R. K. Shah y A. L. London, *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*, Academic, Nueva York, 1979.
35. P. L. Skousen, *Valve Handbook*, McGraw-Hill, Nueva York, 1998.
36. B. A. Younis y D. Cokjat, «Eddy-Viscosity versus Second-Order Closures for Flows in Non-Circular Ducts», *AIChE Journal*, vol. 43, núm. 4, 1997, págs. 893-901.
37. *ASHRAE Handbook-2001 Fundamentals*, ASHRAE, Atlanta, GA, 2001.
38. F. Durst, A. Melling y J. H. Whitelaw, *Principles and Practice of Laser-Doppler Anemometry*, 2.ª ed., Academic, Nueva York, 1981.
39. *Laser Anemometry 1995*, ASME/JSME Fluids Engineering and Laser Anemometry Conference, Hilton Head, SC, 1995.
40. J. E. Amadi-Echendu, H. Zhu y E. H. Higham, «Analysis of Signals from Vortex Flowmeters», *Flow Measurement and Instrumentation*, vol. 4, núm. 4, oct. 1993, págs. 225-231.
41. G. Vass, «Ultrasonic Flowmeter Basics», *Sensors*, vol. 14, núm. 10, oct. 1997, págs. 73-78.
42. ASME Fluid Meters Research Committee, «The ISO-ASME Orifice Coefficient Equation», *Mech. Eng.*, julio 1981, págs. 44-45.
43. R. D. Blevins, *Applied Fluid Dynamics Handbook*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1984.
44. O. C. Jones, Jr., y J. C. M. Leung, «An Improvement in the Calculation of Turbulent Friction in Smooth Concentric Annuli», *J. Fluids Eng.*, dic. 1981, págs. 615-623.
45. P. R. Bandyopadhyay, «Aspects of the Equilibrium Puff in Transitional Pipe Flow», *J. Fluid Mech.*, vol. 163, 1986, págs. 439-458.
46. I. E. Idelchik, *Handbook of Hydraulic Resistance*, 3.ª ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.
47. S. Klein y W. Beckman, *Engineering Equation Solver* (*EES*), University of Wisconsin, Madison, WI, 2002.
48. R. D. Coffield, P. T. McKeown y R. B. Hammond, «Irrecoverable Pressure Loss Coefficients for Two Elbows in Series with Various Orientation Angles and Separation Distances», *Report WAPD-T-3117*, Bettis Atomic Power Laboratory, West Mifflin, PA, 1997.
49. H. Ito, «Pressure Losses in Smooth Pipe Bends», *Journal of Basic Engineering*, marzo 1960, págs. 131-143.

www.elsolucionario.net

El prototipo *Helios* de la NASA, un ala volante de propulsión solar, en su primer vuelo de prueba sobre el Océano Pacífico el 14 de julio de 2001. Cada uno de los 14 paneles solares da potencia a un motor eléctrico de 2 caballos, que mueve una de las catorce hélices. Este extraordinario vehículo ha alcanzado una altura de 81.100 ft (24.700 m) y, en condiciones meteorológicas ideales, podría volar aún más alto. También es idóneo para comprobar la «teoría de alas» del presente capítulo, pues no tenemos que preocuparnos por las superficies de cola, el fuselaje o los grandes carenados de los motores. (*NASA*.)

www.elsolucionario.net

Capítulo 7
Flujo alrededor de cuerpos

Motivación. Este capítulo está dedicado a flujos «externos» alrededor de cuerpos inmersos en una corriente fluida. Estos flujos presentan efectos viscosos (de cortadura y no deslizamiento) cerca de las superficies del cuerpo y dentro de la estela, pero típicamente son prácticamente no viscoso lejos del cuerpo. Son flujos de *capa límite* no confinados.

En el Capítulo 6 se consideraron flujos «internos» confinados por las paredes de un conducto. En este caso las capas límite crecen desde las paredes, se encuentran en el centro y ocupan todo el conducto. Los esfuerzos viscosos de cortadura son el efecto dominante. Por ejemplo, el diagrama de Moody de la Figura 6.13 es esencialmente una correlación para el esfuerzo en la pared en conductos largos de sección constante.

Los flujos «externos» no están confinados, pudiendo expandirse sin importar cuánto crezca la capa límite. Aunque la teoría de capa límite (Sección 7.3) y la Mecánica de Fluidos Computacional (CFD, *Computational Fluid Dynamics*) [4] son muy útiles para comprender los flujos exteriores, los cuerpos con geometrías complejas suelen requerir datos experimentales relativos a las fuerzas y momentos producidos por el flujo. Tales flujos son muy comunes en estudios ingenieriles: *aerodinámica* (aviones, cohetes, proyectiles), *hidrodinámica* (barcos, submarinos, torpedos), *transporte* (automóviles, camiones, motos), *ingeniería eólica* (edificios, puentes, torres de agua, aerogeneradores) e *ingeniería marina* (boyas, rompeolas, tuberías, cables, instrumentos amarrados). Este capítulo proporciona datos y análisis de utilidad para su aplicación en dichos estudios.

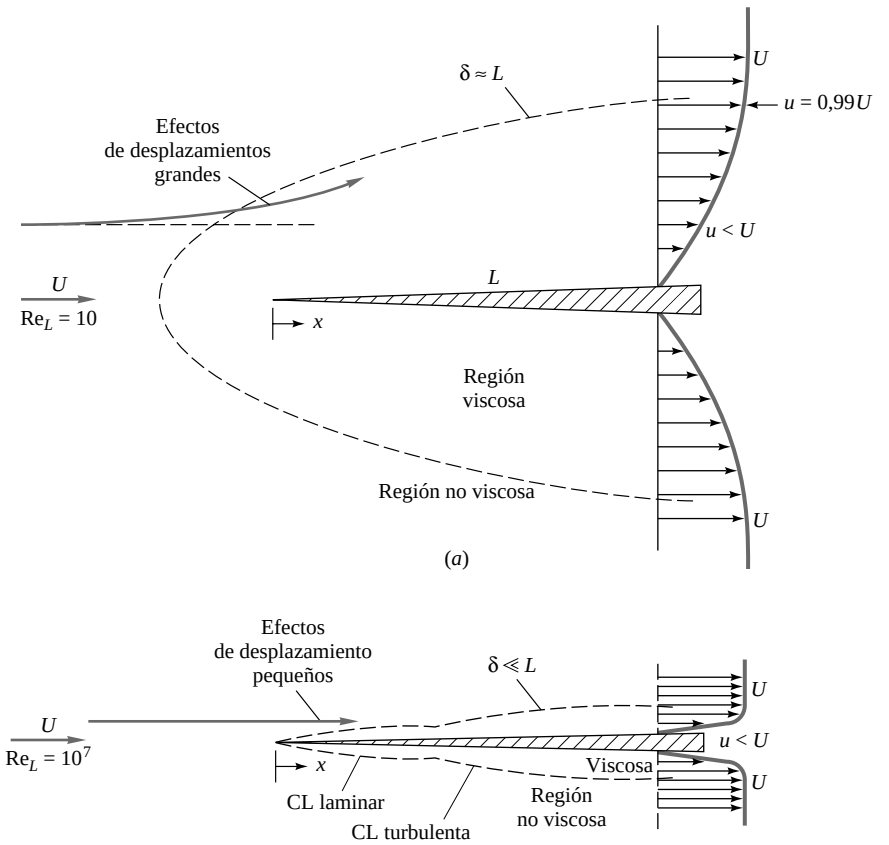
7.1. EFECTOS GEOMÉTRICOS Y DEL NÚMERO DE REYNOLDS

La técnica del análisis de capa límite (CL) puede utilizarse para calcular los efectos viscosos cerca de las paredes sólidas y «acoplar» éstos al movimiento exterior no viscoso. Este acoplamiento es tanto más efectivo cuanto mayor sea el número de Reynolds basado en el cuerpo, como se ilustra en la Figura 7.1.

La Figura 7.1 muestra una corriente uniforme de velocidad U que se mueve paralelamente a una placa plana delgada de longitud L. Si el número de Reynolds UL/ν es bajo (Figura 7.1*a*), la región viscosa es muy ancha y se extiende lejos aguas arriba y a los lados de la placa. La placa frena mucho la corriente incidente, y pequeños cambios en los parámetros del flujo originan grandes cambios en la distribución de presiones a lo largo de la placa. Aunque en principio sería posible empalmar las zonas viscosa y no viscosa mediante un análisis matemático, su interacción es fuerte y no lineal [1 a 3]. No existe una teoría simple para el análisis de los flujos externos en el intervalo de números de Reynolds desde 1 hasta 1000. En general, estos flujos con capas viscosas gruesas se estudian experimentalmente o con modelos numéricos del campo fluido utilizando el ordenador [4].

Los flujos a altos números de Reynolds (Figura 7.1*b*) son mucho más fáciles de tratar mediante el acoplamiento de la capa límite, como mostró Prandtl en 1904 por primera vez. Las capas viscosas, tanto laminares como turbulentas, son muy delgadas, incluso más delgadas de lo que muestran los dibujos de la figura. Definiremos el espesor δ de la capa límite como el lugar geométrico de los puntos donde la velocidad u paralela a la placa alcanza el 99 por 100 del valor de la velocidad exterior U. Como veremos en la Sección 7.4, las fórmulas aceptadas para el espesor de la capa límite de una placa plana son

www.elsolucionario.net



www.elsolucionario.net

Figura 7.1. Comparación del flujo alrededor de una placa plana: (*a*) flujo laminar a bajos números de Reynolds; (*b*) flujo a altos números de Reynolds.

$$\frac{\delta}{x} = \begin{cases} \dfrac{5,0}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} & \text{laminar} \quad 10^3 < \mathrm{Re}_x < 10^6 \quad (7.1a) \\ \dfrac{0,16}{\mathrm{Re}_x^{1/7}} & \text{turbulento} \quad 10^6 < \mathrm{Re}_x \quad (7.1b) \end{cases}$$

donde $\mathrm{Re}_x = Ux/\nu$ es el *número de Reynolds local* del flujo a lo largo de la superficie de la placa. La fórmula para el flujo turbulento es aplicable para Re_x mayores que 10^6, aproximadamente.

Algunos valores de δ obtenidos de la Ecuación (7.1) son

Re_x	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$(\delta/x)_{\mathrm{lam}}$	0,050	0,016	0,005	—	—
$(\delta/x)_{\mathrm{turb}}$	—	—	0,022	0,016	0,011

Los cuadros en blanco indican que la fórmula no es aplicable. En todos los casos las capas límite son tan delgadas que se puede despreciar el efecto de desplazamiento inducido en la corriente no viscosa. De este modo, la distribución de presiones a lo largo de la placa se puede determinar de la teoría no viscosa, como

www.elsolucionario.net

si la capa límite no existiese. Este campo externo de presiones «gobierna», por tanto, el flujo en la capa límite y actúa como una función forzante en la ecuación de la cantidad de movimiento a lo largo de la superficie. Explicaremos la teoría de la capa límite de las Secciones 7.4 y 7.5.

Para cuerpos esbeltos, tales como placas y perfiles paralelos a la corriente incidente, la suposición de que la interacción entre la capa límite y la distribución de presiones de la corriente exterior es despreciable constituye una excelente aproximación.

Para cuerpos romos, sin embargo, incluso a números de Reynolds muy altos, hay una discrepancia en el concepto de acoplamiento entre la zona viscosa y no viscosa. La Figura 7.2 muestra dos esquemas de flujo alrededor de cuerpos romos bidimensionales o tridimensionales. En el esquema idealizado (7.2*a*) hay una película delgada o capa límite alrededor del cuerpo y una estela viscosa muy delgada en la parte posterior. La teoría de la capa límite funcionaría perfectamente para este esquema, pero resulta falsa. En el caso real (7.2*b*), la capa límite es delgada en la zona frontal del cuerpo, de incidencia de la corriente, donde la presión decrece a lo largo de la superficie (gradiente de presión *favorable*). Pero en la parte posterior la capa límite se encuentra con presiones crecientes (gradiente de presión *adverso*) y se desprende, o separa, formándose una estela amplia y pulsatoria (la Figura 5.2*a* es una fotografía de un ejemplo específico). La corriente principal se deflecta por causa de la estela, de modo que el flujo exterior difiere bastante del que predice la teoría no viscosa modificada sólo por los efectos de una capa límite delgada.

La teoría para la interacción fuerte entre las zonas viscosa y no viscosa alrededor de cuerpos romos no está bien desarrollada. Los flujos como el de la Figura 7.2*b* se estudian normalmente de un modo experimental o mediante CFD [4]. La Referencia 5 es un ejemplo del reciente esfuerzo para mejorar la teoría de las capas límite desprendidas. La Referencia 6 es un libro de texto dedicado a flujos desprendidos.

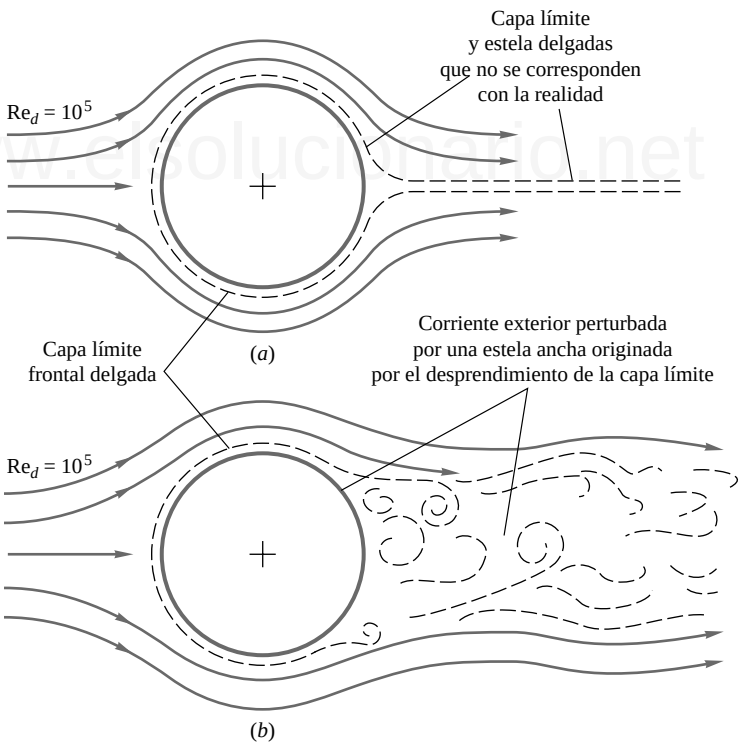


Figura 7.2. Ilustración de la interacción fuerte entre las regiones viscosa y no viscosa en la parte posterior del flujo alrededor de un cuerpo romo: (*a*) flujo idealizado pero falso alrededor de un cuerpo romo; (*b*) representación real del flujo alrededor de un cuerpo romo.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 7.1

Una placa plana semiinfinita se sitúa paralelamente a una corriente de agua a 68 °F con una velocidad de 20 ft/s. ¿A qué distancia x del borde de ataque el espesor de la capa límite será 1 in?

Solución

- *Consideraciones*. Flujo sobre placa plana, con las Ecuaciones (7.1) válidas en sus respectivos rangos.
- *Procedimiento*. Resolvemos en principio para flujo laminar. Si los resultados son contradictorios, resolvemos para flujo turbulento.
- *Valores de las propiedades*. De la Tabla A.1 para agua a 68 °F, $\nu = 1{,}082 \times 10^{-5}$ ft²/s.
- *Paso 1*. Con $\delta = 1$ in = 1/12 ft, probamos con la Ecuación (7.l*a*) para flujo laminar:

$$\frac{\delta}{x}\Big|_{\text{lam}} = \frac{5}{(Ux/\nu)^{1/2}} \quad \text{o} \quad \frac{1/12 \text{ ft}}{x} = \frac{5}{[(20 \text{ ft/s})x/(1{,}082 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s})]^{1/2}}$$

$$\text{Despejando } x = 513 \text{ ft}$$

¡Una placa muy larga! El resultado no parece correcto. Ahora determinamos el número de Reynolds local:

$$\text{Re}_x = \frac{Ux}{\nu} = \frac{(20 \text{ ft/s})(513 \text{ ft})}{1{,}082 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s}} = 9{,}5 \times 10^8 \quad (!)$$

Esto es imposible, ya que el Re_x máximo para flujo laminar alrededor de una placa plana es aproximadamente 10^6 (o, teniendo especial cuidado para evitar perturbaciones, hasta 3×10^6).

- *Paso 2*. Probamos con la Ecuación (7.l*b*) para flujo turbulento:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0{,}16}{(Ux/\nu)^{1/7}} \quad \text{o} \quad \frac{1/12 \text{ ft}}{x} = \frac{0{,}16}{[(20 \text{ ft/s})x/(1{,}082 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s})]^{1/7}}$$

$$\text{Despejando } x = 5{,}17 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}$$

y comprobamos que $\text{Re}_x = (20 \text{ ft/s})(5{,}17 \text{ ft})/(1{,}082 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s}) = 9{,}6 \times 10^6 > 10^6$, luego efectivamente el flujo es turbulento.

- *Comentarios*. El flujo es turbulento, y la ambigüedad inherente a la teoría queda resuelta.

7.2. MÉTODOS INTEGRALES EN LA TEORÍA DE LA CAPA LÍMITE

Cuando obtuvimos la Ecuación (3.37) de la cantidad de movimiento en forma integral y la aplicamos a la capa límite de una placa plana en el Ejemplo 3.11, prometimos hacer un examen más detallado en el Capítulo 7. Bien, ¡helo aquí! Revisemos el problema utilizando la Figura 7.3.

A lo largo de la placa afilada de la Figura 7.3 existe una capa de cortadura de espesor desconocido y variable. La condición de no deslizamiento frena al fluido, obteniéndose un perfil de velocidad variable $u(y)$ que alcanza el valor de la velocidad exterior U = constante en el «espesor» $y = \delta(x)$. Utilizando el volumen de control de la Figura 3.11, en el Ejemplo 3.11 determinamos que la fuerza de resistencia sobre la placa (sin hacer ninguna hipótesis acerca de si el flujo es laminar o turbulento) viene dada por la siguiente integral, extendida a la sección de salida:

$$D(x) = \rho b \int_0^{\delta(x)} u(U - u)\,dy \tag{7.2}$$

donde b es la anchura de la placa, en dirección perpendicular al papel, y la integración se hace a lo largo de un plano vertical x = constante. Se aconseja al lector revisar la ecuación de cantidad de movimiento en forma integral (3.37) y su utilización en el Ejemplo 3.11.

www.elsolucionario.net

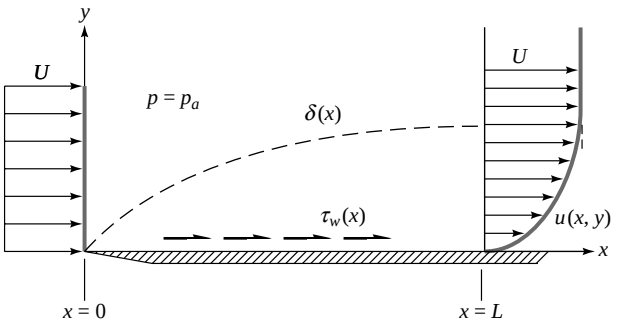


Figura 7.3. Crecimiento de la capa límite de una placa plana.

Análisis de Kármán para la placa plana

La Ecuación (7.2) fue obtenida por T. von Kármán en 1921 [7], que la escribió en función del *espesor de cantidad de movimiento* θ:

$$D(x) = \rho b U^2 \theta \qquad \theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \tag{7.3}$$

Por lo tanto, el espesor de cantidad de movimiento es una medida de la resistencia total de la placa. Kármán advirtió que la resistencia también es equivalente a la integral del esfuerzo de cortadura a lo largo de la placa:

www.elsolucionario.net

$$D(x) = b\int_0^x \tau_w(x)\,dx$$

o

$$\frac{dD}{dx} = b\tau_w \tag{7.4}$$

Por otra parte, la derivada de la Ecuación (7.3), con U = constante, es:

$$\frac{dD}{dx} = \rho b U^2 \frac{d\theta}{dx}$$

Comparando este resultado con la Ecuación (7.4) Kármán obtuvo lo que hoy se conoce como la *integral de cantidad de movimiento* para la capa límite sobre una placa plana:

$$\boxed{\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx}} \tag{7.5}$$

Esta ecuación es válida tanto para flujos laminares como turbulentos.

Para obtener un resultado numérico para flujo laminar, Kármán supuso que los perfiles de velocidad eran aproximadamente parabólicos:

$$u(x,y) \approx U\left[\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right] \qquad 0 \le y \le \delta(x) \tag{7.6}$$

www.elsolucionario.net

lo que permite estimar tanto el espesor de cantidad de movimiento como el esfuerzo de cortadura en la pared:

$$\theta = \int_0^{\delta} \left[\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right]\left[1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right] dy = \frac{2}{15}\delta$$

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{2\mu U}{\delta} \tag{7.7}$$

Sustituyendo (7.7) en (7.5) y reordenando obtenemos

$$\delta\, d\delta = 15\frac{\nu}{U}\, dx \tag{7.8}$$

donde $\nu = \mu/\rho$. Integrando desde 0 hasta x, suponiendo que $\delta = 0$ en el borde de ataque, $x = 0$:

$$\frac{1}{2}\delta^2 = \frac{15\nu x}{U}$$

o

$$\frac{\delta}{x} = 5{,}5\left[\frac{\nu}{Ux}\right]^{1/2} = \frac{5{,}5}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \tag{7.9}$$

Ésta es la estimación del espesor que deseábamos obtener. Es, por supuesto, una expresión aproximada correspondiente a la *teoría integral de cantidad de movimiento de Kármán* [7], pero es asombrosamente precisa, dando sólo un valor un 10 por 100 más alto que la solución exacta conocida que dimos en la Ecuación (7.1*a*), para el flujo en la capa límite laminar de placa plana.

Combinando las Ecuaciones (7.9) y (7.7) obtenemos también una aproximación para la variación de la cortadura en la pared a lo largo de la placa:

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho U^2} = \left[\frac{\frac{8}{15}}{\mathrm{Re}_x}\right]^{1/2} = \frac{0{,}73}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \tag{7.10}$$

De nuevo, y a pesar de lo rudimentario de la hipótesis acerca del perfil de velocidades [Ecuación (7.6)], esta estimación es sólo un 10 por 100 más alta que la dada por la solución exacta, $c_f = 0{,}664/\mathrm{Re}_x^{1/2}$, que se expondrá en la Sección 7.4. La cantidad adimensional c_f es análoga al coeficiente de fricción f en conductos y se denomina *coeficiente de fricción superficial*.

Una capa límite se puede considerar «delgada» si, por ejemplo, la relación δ/x es menor que 0,1. Esto ocurre, para $\delta/x = 0{,}1 = 5/\mathrm{Re}_x^{1/2}$, cuando el número de Reynolds $\mathrm{Re}_x = 2500$. Para Re_x menor que 2500 la teoría de la capa límite falla porque el espesor es tan grande que tiene un efecto importante en la corriente exterior no viscosa. El límite superior de Re_x para flujo laminar es alrededor de 3×10^6, para el cual las medidas en una placa plana lisa [8] muestran que se presenta la transición de la capa límite a régimen turbulento. No hay limitación en los valores de los números de Reynolds superiores a 3×10^6, si bien, en la actualidad, el límite práctico es 5×10^{10} en superpetroleros.

Espesor de desplazamiento

Otro efecto interesante de la capa límite es el desplazamiento pequeño, pero finito, que origina en las líneas de corriente exteriores. Como se muestra en la Figura 7.4, las líneas de corriente exteriores deben deflectarse hacia arriba una distancia $\delta^*(x)$ para que se satisfaga la conservación de la masa entre la entrada y la salida:

$$\int_0^h \rho U b\, dy = \int_0^{\delta} \rho u b\, dy \qquad \delta = h + \delta^* \tag{7.11}$$

www.elsolucionario.net

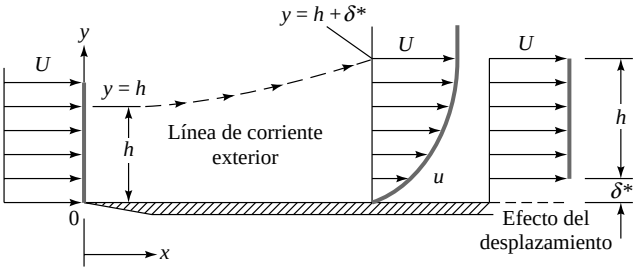


Figura 7.4. Efecto de desplazamiento en la capa límite.

La cantidad δ^* se denomina *espesor de desplazamiento* de la capa límite. Para relacionarlo con $u(y)$, eliminamos ρ y b de la Ecuación (7.11), evaluamos la integral del primer miembro, y sumando y restando astutamente U al integrando del segundo miembro para obtener

$$Uh = \int_0^{\infty} (U + u - U)\, dy = U(h + \delta^*) + \int_0^{\infty} (u - U)\, dy$$

o

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \tag{7.12}$$

Por lo tanto la relación δ^*/δ varía sólo con el perfil adimensional de velocidades u/U.

Introduciendo la expresión aproximada (7.6) para el perfil de velocidades en la Ecuación (7.12), obtenemos por integración el siguiente resultado aproximado:

www.elsolucionario.net

$$\delta^* = \frac{1}{3}\delta \qquad \frac{\delta^*}{x} = \frac{1{,}83}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \tag{7.13}$$

Esta estimación se separa sólo un 6 por 100 del valor dado en la Sección 7.4 para una placa plana en régimen laminar: $\delta^* = 0{,}344\delta = 1{,}721x/\mathrm{Re}_x^{1/2}$. Dado que para Re_x grandes δ^* es mucho menor que x, y como la pendiente de las líneas de corriente exteriores V/U es proporcional a δ^*, resulta que en la corriente exterior la velocidad normal a la pared es mucho menor que la velocidad paralela a la pared. Esta hipótesis es clave en la teoría de la capa límite (Sección 7.3).

Dado el éxito de estas sencillas estimaciones hechas por medio de la teoría integral de Kármán con la hipótesis de un perfil de velocidades parabólico, concluiremos que esta teoría es útil y efectiva. En las Referencias 1 a 3 se dan más detalles de esta teoría.

EJEMPLO 7.2

¿Son realmente delgadas las capas límite de objetos pequeños en agua y aire a bajas velocidades? Considere una corriente sobre una placa plana de 1 ft de longitud con velocidad $U = 1$ ft/s. Determine el espesor de la capa límite en el borde de salida para (*a*) aire y (*b*) agua, ambos a 68 °F.

Solución

Apartado (*a*)

De la Tabla A.2, $\nu_{\text{aire}} = 1{,}61 \times 10^{-4}$ ft²/s. El número de Reynolds en el borde de salida es

$$\mathrm{Re}_L = \frac{UL}{\nu} = \frac{(1 \text{ ft/s})(1 \text{ ft})}{1{,}61 \times 10^{-4} \text{ ft}^2/\text{s}} = 6200$$

www.elsolucionario.net

Dado que es menor que 10^6, suponemos que el flujo es laminar, y como es mayor que 2300, esperamos tener una capa límite delgada. De la ecuación (7.l*a*), el espesor es

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,0}{\sqrt{6200}} = 0,0634$$

o, en $x = 1$ ft, $\delta = 0,0634$ ft Ξ 0,76 in *Resp. (a)*

Apartado (*b*)

De la Tabla A.1 tenemos $\nu_{agua} \Xi 1,08 \times 10^{-5}$ ft^2/s. El número de Reynolds en el borde de salida es

$$\mathrm{Re}_L = \frac{(1 \text{ ft/s})(1 \text{ ft})}{1,08 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s}} = 92.600$$

De nuevo se satisface la condición de movimiento laminar. El espesor en el borde de salida es

$$\frac{\delta}{x} \Xi \frac{5,0}{\sqrt{92.600}} = 0,0164$$

o, en $x = 1$ ft, $\delta = 0,0164$ ft Ξ 0,20 in *Resp. (b)*

Por tanto, incluso con velocidades y longitudes tan pequeñas, la aproximación de capa límite es válida tanto en aire como en agua.

7.3. LAS ECUACIONES DE CAPA LÍMITE

www.elsolucionario.net

En los Capítulos 4 y 6 vimos que hay varias docenas de soluciones conocidas para flujos laminares [1 a 3]. Ninguna de ellas corresponde a flujos externos alrededor de cuerpos inmersos en una corriente, a pesar de que es una de las principales aplicaciones de la Mecánica de Fluidos. No se conoce ninguna solución exacta en flujo turbulento, que suele analizarse empleando modelos empíricos para variables promediadas en el tiempo.

Actualmente se utilizan tres técnicas para tratar los flujos externos: (1) soluciones numéricas en ordenador, (2) experimentación y (3) teoría de la capa límite.

La *Mecánica de Fluidos Computacional* (CFD) es en la actualidad una herramienta bien desarrollada, descrita en textos avanzados como el de Anderson [4]. Se han publicado miles de modelos y soluciones numéricas interesantes; los tiempos de ejecución, tamaño de las mallas y presentaciones gráficas mejoran cada año. Se han publicado soluciones tanto laminares como turbulentas, y la modelización numérica precisa de los flujos turbulentos es objeto de investigación en la actualidad [9]. Salvo por el breve tratamiento del Capítulo 8, los métodos numéricos en Mecánica de Fluidos quedan fuera del alcance de este libro.

El método más corriente de análisis de flujos externos es el experimental. El Capítulo 5 describe la técnica del análisis dimensional, y en la Sección 7.6 daremos gran cantidad de resultados experimentales en forma adimensional para flujos externos.

La tercera herramienta es la teoría de la capa límite, formulada por Ludwig Prandtl en 1904. Seguiremos aquí la teoría de Prandtl, haciendo hipótesis sobre los órdenes de magnitud, que permiten simplificar mucho las ecuaciones de Navier-Stokes (4.38) para dar las ecuaciones de la capa límite, cuya resolución es relativamente sencilla, acoplando la solución en la capa límite con el campo exterior no viscoso.

Uno de los grandes éxitos de la teoría de la capa límite es la capacidad de predecir la separación de la corriente en presencia de gradientes de presión adversos (positivos), tal y como se ilustra en la Figura 7.2*b*. Antes de 1904, cuando Prandtl publicó su artículo pionero, nadie había pensado que estas capas tan delgadas pudiesen dar lugar a efectos tan fuertes como la separación de la corriente. Desgraciadamente, todavía hoy, la teoría no puede predecir de forma precisa el comportamiento del flujo en la región desprendida ni su interacción con la región exterior. Investigaciones recientes [4, 5, 9] se han centrado en simulaciones detalladas de flujos desprendidos y sus estelas para tratar de entender mejor el problema.

www.elsolucionario.net

Aplicación a flujo bidimensional

Consideraremos sólo el flujo bidimensional estacionario y viscoso de un fluido incompresible, con el eje x paralelo a la pared y el eje y perpendicular a la misma, como se muestra en la Figura 7.3.[1] Despreciamos la gravedad, que sólo es importante en capas límite donde la flotabilidad es dominante [2, Sección 4.13]. Según el Capítulo 4, las ecuaciones de la continuidad y las componentes x e y de la ecuación de la cantidad de movimiento son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{7.14a}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{7.14b}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{7.14c}$$

Estas ecuaciones deben resolverse para obtener u, v y p con las condiciones de contorno típicas de no deslizamiento y con condiciones a la entrada y la salida, pero de hecho son bastante difíciles de manejar para la mayoría de los flujos externos salvo si se resuelven numéricamente.

Prandtl, en 1904, dedujo correctamente que la capa de cortadura debería ser muy delgada si el número de Reynolds es grande, de modo que se cumplen las siguientes relaciones:

Velocidades: $$v \ll u \tag{7.15a}$$

Gradientes: $$\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial v}{\partial y} \tag{7.15b}$$

Números de Reynolds: $$\mathrm{Re}_x = \frac{Ux}{\nu} \gg 1 \tag{7.15c}$$

La discusión de la sección previa sobre el espesor de desplazamiento fue hecha para justificar esta hipótesis.

Usando estas relaciones se obtiene una gran simplificación de la Ecuación (7.14c):

$$\rho\underbrace{u\frac{\partial v}{\partial x}}_{\text{pequeño}} + \rho\underbrace{v\frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{pequeño}} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\text{muy pequeño}} + \mu\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\text{pequeño}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0 \quad \text{o} \quad p \approx p(x) \quad \text{sólo} \tag{7.16}$$

En otras palabras, la ecuación de la cantidad de movimiento según el eje y se reduce a decir que la presión varía solamente *a lo largo* de la capa límite, y no a través de ella. El término del gradiente de presiones en la Ecuación (7.14b) se considera conocido de antemano por medio de la ecuación de Bernoulli aplicada a la corriente exterior no viscosa:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} = -\rho U\frac{dU}{dx} \tag{7.17}$$

[1] En una pared curvada, x puede representar la longitud de arco a lo largo de la pared e y es la coordenada normal local, siendo despreciables los términos de las ecuaciones de la capa límite que tienen en cuenta los efectos de la curvatura siempre y cuando el radio de curvatura de la pared sea grande comparado con el espesor de la capa límite [1 a 3].

www.elsolucionario.net

Es de suponer que ya hemos hecho el análisis no viscoso y se conoce, por tanto, la distribución $U(x)$ a lo largo de la pared (Capítulo 8).

También podemos despreciar un término de la Ecuación (7.14*b*) debido a las Ecuaciones (7.15):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7.18}$$

Sin embargo, no se puede despreciar ninguno de los dos términos de la ecuación de la continuidad (7.14*a*); otra advertencia de que la ecuación de la continuidad es siempre imprescindible en el análisis del movimiento de los fluidos.

El resultado que se obtiene es que las tres ecuaciones del movimiento (7.14) se reducen a las dos ecuaciones de la capa límite de Prandtl para flujos bidimensionales e incompresibles:

Continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{7.19a}$$

Cantidad de movimiento a lo largo de la pared:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{dU}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y} \tag{7.19b}$$

donde

$$\tau = \begin{cases} \mu \dfrac{\partial u}{\partial y} & \text{flujo laminar} \\ \mu \dfrac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} & \text{flujo turbulento} \end{cases}$$

Estas ecuaciones deben resolverse para determinar $u(x,y)$ y $v(x,y)$, con $U(x)$ conocida del análisis del flujo exterior no viscoso. Hay dos condiciones de contorno para u y una para v:

En $y = 0$ (pared): $u = v = 0$ (no deslizamiento) (7.20*a*)

En $y = \delta(x)$ (corriente exterior): $u = U(x)$ (acoplamiento) (7.20*b*)

Al contrario que las ecuaciones de Navier-Stokes (7.14), que son elípticas y deben resolverse simultáneamente en todo el campo fluido, las ecuaciones de la capa límite (7.19) son parabólicas y se resuelven comenzando en el borde de ataque avanzando aguas abajo hasta donde se desee, deteniéndose en el punto de separación o antes, si se prefiere.[2]

Las ecuaciones de la capa límite se han resuelto en multitud de casos interesantes tanto de flujos externos como internos, laminares y turbulentos, utilizando la distribución $U(x)$ no viscosa apropiada a cada caso. En las Referencias 1 a 3 se dan detalles completos de la teoría de la capa límite, resultados y comparación con los experimentos. Aquí nos limitaremos principalmente a las soluciones para la placa plana (Sección 7.4).

7.4. CAPA LÍMITE SOBRE UNA PLACA PLANA

La solución clásica y de uso más frecuente de la teoría de la capa límite es la de la placa plana, presentada en la Figura 7.3, correspondiente al régimen laminar o al turbulento.

Flujo laminar

Para el flujo laminar a lo largo de la placa, se puede obtener la solución exacta, para u y v, de las ecuaciones de la capa límite (7.19) considerando que la velocidad de la corriente exterior U es constante ($dU/dx = 0$). La solución fue presentada por Blasius, alumno de Prandtl, en su tesis doctoral leída en Göttingen en 1908.

[2] Para más detalles matemáticos, consúltese Referencia 2, Sección 2.8.

www.elsolucionario.net

Utilizando una ingeniosa transformación de coordenadas, Blasius demostró que el perfil de velocidades u/U es sólo función de la variable adimensional compuesta $(y)[U/(\nu x)]^{1/2}$:

$$\frac{u}{U} = f'(\eta) \quad \eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \tag{7.21}$$

donde la prima denota diferenciación con respecto a η. Sustituyendo (7.21) en las ecuaciones de la capa límite (7.19) el problema se reduce, después de numerosas manipulaciuones algebraicas, a una única ecuación diferencial ordinaria no lineal de tercer orden para f [1 a 3]:

$$f''' + \tfrac{1}{2} f f'' = 0 \tag{7.22}$$

Las condiciones de contorno (7.20) se convierten en:

En $y = 0$: $$f(0) = f'(0) = 0 \tag{7.23a}$$

Para $y \to \infty$: $$f'(\infty) \to 1{,}0 \tag{7.23b}$$

Ésta es la *ecuación de Blasius*, para la que sólo se puede obtener la solución con cierta precisión mediante integración numérica. Los valores tabulados del perfil de velocidades $f'(\eta) = u/U$ se presentan en la Tabla 7.1.

Puesto que u/U se aproxima a 1,0 sólo cuando $y \to \infty$, se acostumbra a elegir el espesor δ de la capa límite como el valor para el que $u/U = 0{,}99$. De la Tabla 7.1 se deduce que esto ocurre cuando $\eta \cong 5$:

$$\delta_{99\%}\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \cong 5{,}0$$

o

$$\boxed{\frac{\delta}{x} \cong \frac{5{,}0}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \quad \text{Blasius (1908)}} \tag{7.24}$$

Conocido el perfil de velocidades, Blasius pudo determinar el esfuerzo en la pared y el espesor de desplazamiento:

$$\boxed{c_f = \frac{0{,}664}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \qquad \frac{\delta^*}{x} = \frac{1{,}721}{\mathrm{Re}_x^{1/2}}} \tag{7.25}$$

Tabla 7.1. Perfil de velocidad de Blasius [1 a 3].

$y[U/(\nu x)]^{1/2}$	u/U	$y[U/(\nu x)]^{1/2}$	u/U
0,0	0,0	2,8	0,81152
0,2	0,06641	3,0	0,84605
0,4	0,13277	3,2	0,87609
0,6	0,19894	3,4	0,90177
0,8	0,26471	3,6	0,92333
1,0	0,32979	3,8	0,94112
1,2	0,39378	4,0	0,95552
1,4	0,45627	4,2	0,96696
1,6	0,51676	4,4	0,97587
1,8	0,57477	4,6	0,98269
2,0	0,62977	4,8	0,98779
2,2	0,68132	5,0	0,99155
2,4	0,72899	∞	1,00000
2,6	0,88246		

www.elsolucionario.net

Obsérvese que estos valores son muy próximos a los estimados con el método integral, Ecuaciones (7.9), (7.10) y (7.13). Cuando c_f se convierte a forma dimensional, se tiene

$$\tau_w(x) = \frac{0{,}332\rho^{1/2}\mu^{1/2}U^{1{,}5}}{x^{1/2}}$$

El esfuerzo en la pared decrece aguas abajo como $x^{-1/2}$ a causa del crecimiento de la capa límite, que varía con la potencia 1,5 de la velocidad. Esto contrasta con el flujo laminar en tubos, donde $\tau_w \propto U$ y es independiente de x.

Si sustituimos $\tau_w(x)$ en la Ecuación (7.4), obtenemos la resistencia total:

$$D(x) = b\int_0^x \tau_w(x)dx = 0{,}664b\rho^{1/2}\mu^{1/2}U^{1{,}5}x^{1/2} \tag{7.26}$$

La resistencia crece sólo con la raíz cuadrada de la longitud de la placa. El *coeficiente* adimensional de *resistencia* se define como

$$\boxed{C_D = \frac{2D(L)}{\rho U^2 bL} = \frac{1{,}328}{\mathrm{Re}_L^{1/2}} = 2c_f(L)} \tag{7.27}$$

Por tanto, para una placa en régimen laminar, C_D es igual al doble del coeficiente de fricción superficial en el borde de salida. Ésta es la resistencia de una de las caras de la placa.

Kármán también indicó que la resistencia podía calcularse de la ecuación de la cantidad de movimiento (7.2). La forma adimensional de la Ecuación (7.2) es

www.elsolucionario.net

$$C_D = \frac{2}{L}\int_0 \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy \tag{7.28}$$

Esta ecuación puede ser expresada en función de espesor de cantidad de movimiento en el borde de salida:

$$C_D = \frac{2\theta(L)}{L} \tag{7.29}$$

Calculando θ a partir del perfil de velocidades u/U o de C_D obtenemos

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0{,}664}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \qquad \text{placa plana laminar} \tag{7.30}$$

Puesto que δ no está definido de una forma precisa, mientras que el espesor de cantidad de movimiento sí lo está, este último se utiliza a menudo para correlacionar los datos tomados de una gran variedad de capas límite bajo condiciones diferentes. La relación entre los espesores de desplazamiento y cantidad de movimiento, denominada *factor de forma* del perfil, se utiliza mucho en las teorías integrales. Para la capa límite laminar en una placa plana,

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{1{,}721}{0{,}664} = 2{,}59 \tag{7.31}$$

Un valor elevado del factor de forma implica que la separación de la capa límite está próxima a ocurrir.

Si representamos el perfil de velocidades de Blasius u/U en función de y/δ dado en la Tabla 7.1, podemos ver por qué la sencilla estimación de la teoría integral, Ecuación (7.3), da tan buena aproximación. Esta

www.elsolucionario.net

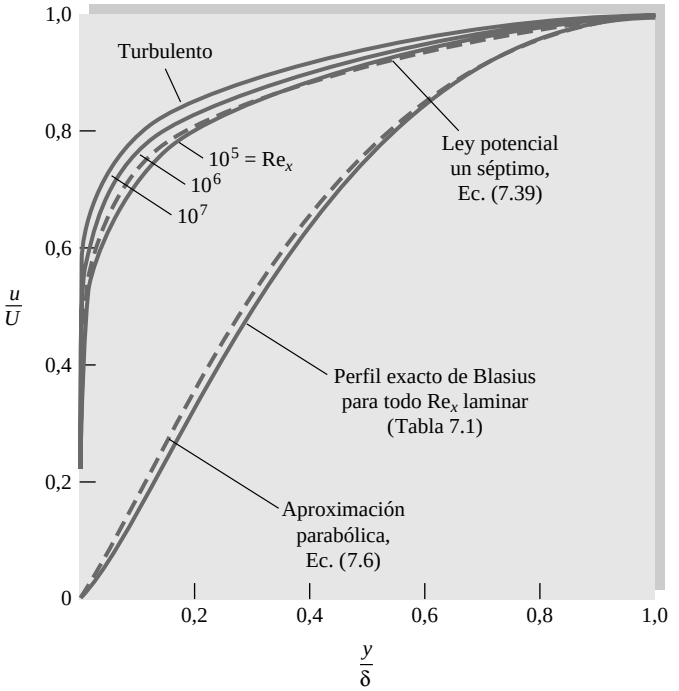


Figura 7.5. Comparación de los perfiles adimensionales de velocidad de la capa límite laminar y turbulenta de una placa plana.

gráfica se presenta en la Figura 7.5. La aproximación parabólica no se separa mucho del perfil de Blasius; éste es el motivo por el que el espesor de cantidad de movimiento no difiere más del 10 por 100 de su verdadero valor. En la Figura 7.5 se muestran también tres perfiles de velocidad típicos de la capa límite turbulenta de una placa plana. Obsérvese la forma tan diferente que tienen los perfiles turbulentos con respecto a los laminares. En lugar de descender monótonamente a cero, los perfiles turbulentos son muy planos, decreciendo la velocidad muy rápidamente cerca de la pared. Como quizá pueda imaginarse, siguen una ley de forma logarítmica y, por tanto, puede utilizarse la teoría integral si se representa su forma apropiadamente.

Transición a la turbulencia

La capa límite laminar sobre una placa plana puede acabar convirtiéndose en turbulenta, pero el valor del número de Reynolds para el que se produce la transición no es único. Puliendo la pared con cuidado y con una corriente libre sin perturbaciones, se puede retrasar el número de Reynolds de transición hasta $\mathrm{Re}_{x,\mathrm{tr}} \Xi 3 \times 10^6$ [8]. De cualquier forma, para superficies comerciales y corrientes libres racheadas, un valor más realista es

$$\mathrm{Re}_{x,\mathrm{tr}} \Xi 5 \times 10^5$$

EJEMPLO 7.3

Una placa plana con L = 50 cm y b = 3 m, se introduce paralelamente a una corriente de 2,5 m/s de velocidad. Determine la resistencia de *una de las caras de la placa*, así como el espesor de la capa límite δ en el borde de salida, para (*a*) aire y (*b*) agua a 20 °C y 1 atm.

Solución

- *Consideraciones*. Suponemos flujo laminar sobre una placa plana, pero debemos comprobar el número de Reynolds.

www.elsolucionario.net

- *Procedimiento*. Calculamos el número de Reynolds y empleamos las fórmulas de capa límite adecuadas.
- *Valores de las propiedades*. De la Tabla A.2 para aire a 20 °C, $\rho = 1{,}2$ kg/m^3, $\nu = 1{,}5 \times 10^{-5}$ m^2/s. De la Tabla A.1 para agua a 20 °C, $\rho = 998$ kg/m^3, $\nu = 1{,}005 \times 10^{-6}$ m^2/s.
- (*a*) *Solución para aire*. Calculamos el número de Reynolds para el borde de salida:

$$\mathrm{Re}_L = \frac{UL}{\nu_{\text{aire}}} = \frac{(2{,}5 \text{ m/s})(0{,}5 \text{ m})}{1{,}5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 83.300 < 5 \times 10^5 \text{ sin duda laminar}$$

La fórmula apropiada para el espesor es la Ecuación (7.24):

$$\frac{\delta}{L} = \frac{5}{\mathrm{Re}_L^{1/2}} = \frac{5}{(83.300)^{1/2}} = 0{,}0173, \text{ o } \delta_{x=L} = 0{,}0173(0{,}5 \text{ m}) \angle 0{,}0087 \text{ m} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

La capa límite laminar sólo tiene 8,7 mm de espesor. El coeficiente de fricción se obtiene de la Ecuación (7.27):

$$C_D = \frac{1{,}328}{\mathrm{Re}_L^{1/2}} = \frac{1{,}328}{(83.300)^{1/2}} = 0{,}0046$$

o $$D_{\text{un lado}} = C_D \frac{\rho}{2} U^2 bL = (0{,}0046)\frac{1{,}2 \text{ kg/m}^3}{2}(2{,}5 \text{ m/s})^2(3 \text{ m})(0{,}5 \text{ m}) \approx 0{,}026 \text{ N} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

- *Comentario* (*a*). Esta resistencia es puramente de *fricción* y es muy pequeña para gases a bajas velocidades.
- (*b*) *Solución para agua*. Calculamos de nuevo el número de Reynolds en el borde de salida:

$$\mathrm{Re}_L = \frac{UL}{\nu_{\text{agua}}} = \frac{(2{,}5 \text{ m/s})(0{,}5 \text{ m})}{1{,}005 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 1{,}24 \times 10^6 > 5 \times 10^5 \text{ luego puede ser turbulento}$$

www.elsolucionario.net

Nos encontramos con un dilema. Si la placa es rugosa o se encuentra con perturbaciones, el flujo en el borde de salida es turbulento. Asumamos una placa lisa, sin perturbaciones, de forma que el flujo permanezca laminar. De nuevo la relación de espesores adecuada es la Ecuación (7.24):

$$\frac{\delta}{L} = \frac{5}{\mathrm{Re}_L^{1/2}} = \frac{5}{(1{,}24 \times 10^6)^{1/2}} = 0{,}00448 \quad \text{o} \quad \delta_{x=L} = 0{,}00448(0{,}5 \text{ m}) \angle 0{,}0022 \text{ m} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

La capa límite es cuatro veces más delgada que en el aire, apartado (*a*), debido al elevado número de Reynolds laminar. De nuevo, el coeficiente de fricción viene dado por la Ecuación (7.27):

$$C_D = \frac{1{,}328}{\mathrm{Re}_L^{1/2}} = \frac{1{,}328}{(1{,}24 \times 10^6)^{1/2}} = 0{,}0012$$

o $$D_{\text{un lado}} = C_D \frac{\rho}{2} U^2 bL = (0{,}0012)\frac{998 \text{ kg/m}^3}{2}(2{,}5 \text{ m/s})^2(3 \text{ m})(0{,}5 \text{ m}) \approx 5{,}6 \text{ N} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

- *Comentario* (*b*). La resistencia es 215 veces mayor para el agua, a pesar de que C_D es menor, porque el agua es 56 veces más viscosa y 830 veces más densa que el aire. Según la Ecuación (7.26), para los mismos valores de U y x, la resistencia debe ser $(56)^{1/2}(830)^{1/2} \approx 215$ veces mayor en el agua. *Nota*: Si la transición a la turbulencia hubiera ocurrido en $\mathrm{Re}_x = 5 \times 10^5$ (aproximadamente $x = 20$ cm), la resistencia hubiera sido unas 2,5 veces mayor, y el espesor en el borde de ataque unas cuatro veces mayor que para el flujo completamente laminar.

www.elsolucionario.net

Flujo turbulento

No hay ninguna teoría exacta para la capa límite turbulenta de una placa plana, aunque hay muchas soluciones numéricas elegantes que emplean modelos empíricos para la viscosidad turbulenta [9]. El resultado más aceptado se obtiene de un análisis integral similar al que hemos hecho con el perfil laminar aproximado, Ecuación (7.6).

Comenzamos con la Ecuación (7.5), que es válida para flujo laminar o turbulento. Volvemos a escribirla aquí para poder referirnos a ella:

$$\tau_w(x) = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \tag{7.32}$$

De la definición del c_f, Ecuación (7.10), podemos reescribir esto como

$$c_f = 2\frac{d\theta}{dx} \tag{7.33}$$

Obsérvese en la Figura 7.5 que los perfiles turbulentos difieren mucho del parabólico. Volviendo a la Figura 6.10, vemos que el perfil de velocidades para la placa plana es aproximadamente logarítmico, con una estela débil en la región exterior y una subcapa viscosa delgada. Por tanto, al igual que en el flujo turbulento en tubos, supondremos que la ley logarítmica (6.28) es válida en todo el espesor de la capa límite

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{yu^*}{\nu} + B \qquad u^* = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2} \tag{7.34}$$

donde, como de costumbre, $\kappa = 0{,}41$ y $B = 5{,}0$. En el borde exterior de la capa límite, $y = \delta$ y $u = U$, y la Ecuación (7.34) toma la forma

$$\frac{U}{u^*} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{\delta u^*}{\nu} + B \tag{7.35}$$

Pero la definición del coeficiente de fricción superficial, Ecuación (7.10), es tal que se cumple la identidad:

$$\frac{U}{u^*} \equiv \left(\frac{2}{c_f}\right)^{1/2} \qquad \frac{\delta u^*}{\nu} \equiv \mathrm{Re}_\delta \left(\frac{c_f}{2}\right)^{1/2} \tag{7.36}$$

Por tanto, la Ecuación (7.35) es una *ley de fricción superficial* para el flujo turbulento sobre una placa plana:

$$\left(\frac{2}{c_f}\right)^{1/2} = 2{,}44\ln\left[\mathrm{Re}_\delta\left(\frac{c_f}{2}\right)^{1/2}\right] + 5{,}0 \tag{7.37}$$

Es una ley complicada, pero podemos al menos resolverla para unos cuantos valores, que damos a continuación:

Re_δ	10^4	10^5	10^6	10^7
c_f	0,00493	0,00315	0,00217	0,00158

www.elsolucionario.net

Siguiendo una sugerencia de Prandtl, podemos olvidarnos de la compleja ley logarítmica (7.37) y ajustar los números de la tabla por medio de una ley potencial:

$$c_f \approx 0{,}02\ \mathrm{Re}_{\delta}^{-1/6} \tag{7.38}$$

que se puede utilizar en el primer miembro de la Ecuación (7.33). Para el segundo miembro necesitamos estimar $\theta(x)$ en función de $\delta(x)$. Si utilizamos el perfil logarítmico (7.34), terminaríamos hasta la coronilla de hacer integraciones logarítmicas en la ecuación de la cantidad de movimiento. En lugar de ello seguiremos otra sugerencia de Prandtl, que indicó que los perfiles turbulentos de la Figura 7.5 pueden aproximarse por la ley potencial un séptimo:

$$\frac{u}{U_{\text{turb}}} \approx \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \tag{7.39}$$

mostrada en la Figura 7.5 con trazos discontinuos. Representa un ajuste excelente de los datos de la capa límite turbulenta a los números de Reynolds más bajos, que fueron de los que dispuso Prandtl en su momento. Con esta sencilla aproximación, el espesor de cantidad de movimiento (7.28) puede evaluarse fácilmente:

$$\theta \approx \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right] dy = \frac{7}{72}\,\delta \tag{7.40}$$

Aceptamos este resultado y sustituimos las Ecuaciones (7.38) y (7.40) en la ecuación de Kármán (7.33):

$$c_f = 0{,}02\,\mathrm{Re}_{\delta}^{-1/6} = 2\frac{d}{dx}\left(\frac{7}{72}\delta\right)$$

www.elsolucionario.net

o

$$\mathrm{Re}_{\delta}^{-1/6} = 9{,}72\frac{d\delta}{dx} = 9{,}72\frac{d(\mathrm{Re}_{\delta})}{d(\mathrm{Re}_x)} \tag{7.41}$$

Separando variables e integrando con $\delta = 0$ en $x = 0$:

$$\boxed{\mathrm{Re}_{\delta} \approx 0{,}16\,\mathrm{Re}_x^{6/7} \quad \text{o} \quad \frac{\delta}{x} \approx \frac{0{,}16}{\mathrm{Re}_x^{1/7}}} \tag{7.42}$$

Por tanto, el espesor de la capa límite turbulenta aumenta con $x^{6/7}$, bastante más rápido que el crecimiento laminar $x^{1/2}$. La Ecuación (7.42) es la solución del problema, porque todos los demás parámetros se pueden determinar fácilmente a partir de ella. Por ejemplo, combinando las Ecuaciones (7.38) y (7.42) obtenemos la variación del coeficiente de fricción

$$\boxed{c_f \approx \frac{0{,}027}{\mathrm{Re}_x^{1/7}}} \tag{7.43}$$

Escrita en forma dimensional,

$$\tau_{w,\text{turb}} \approx \frac{0{,}0135\mu^{1/7}\rho^{6/7}U^{13/7}}{x^{1/7}} \tag{7.44}$$

La fricción turbulenta decae lentamente con x, crece aproximadamente como ρ y U^2, y es poco sensible a los cambios de viscosidad.

www.elsolucionario.net

De la Ecuación (7.29) podemos obtener el coeficiente de resistencia:

$$C_D = \frac{0{,}031}{\mathrm{Re}_L^{1/7}} = \frac{7}{6} c_f(L) \tag{7.45}$$

Se observa que C_D es sólo un 16 por 100 más grande que el coeficiente de fricción superficial en el borde de salida [compárese con la Ecuación (7.27) para el caso laminar].

El espesor de desplazamiento se puede estimar de la ley potencial (7.39) y de la Ecuación (7.12):

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \frac{1}{8}\delta \tag{7.46}$$

El factor de forma para la capa límite turbulenta sobre una placa plana es, aproximadamente,

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{72}} = 1{,}3 \tag{7.47}$$

Estos son los resultados básicos de la teoría para la capa límite turbulenta sobre una placa plana.

La Figura 7.6 muestra los coeficientes de resistencia de una placa plana en los dos regímenes, laminar y turbulento. Se muestran las relaciones (7.27) y (7.45) para paredes lisas, junto con el efecto de la rugosidad, que es bastante fuerte. El parámetro apropiado para la rugosidad es, en este caso, x/ε o L/ε, por analogía

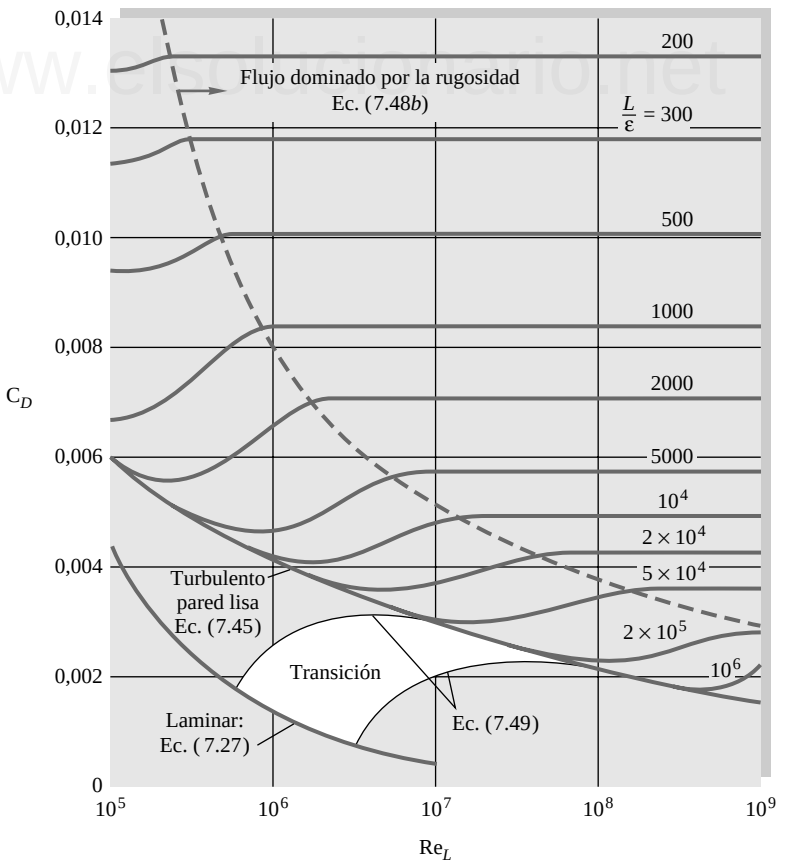


Figura 7.6. Coeficientes de resistencia de la capa límite laminar y turbulenta de placas planas lisas y rugosas. Este gráfico es el equivalente para placas planas al diagrama de Moody (Figura 6.13).

www.elsolucionario.net

con el parámetro ε/d para tubos. En régimen turbulento dominado por la rugosidad, C_D es independiente del número de Reynolds, de modo que la resistencia varía como U^2 y es independiente de μ. En la Referencia 2 se expone la teoría para una placa rugosa y en la Referencia 1 se proporciona una curva de correlación para los coeficientes de fricción superficial y el de resistencia en régimen turbulento dominado por la rugosidad:

$$c_f = \left[2{,}87 + 1{,}58 \log \frac{x}{\varepsilon}\right]^{-2{,}5} \tag{7.48a}$$

$$C_D = \left[1{,}89 + 1{,}62 \log \frac{L}{\varepsilon}\right]^{-2{,}5} \tag{7.48b}$$

La Ecuación (7.48*b*) se representa a la derecha de la línea discontinua de la Figura 7.6. Esta figura muestra también el comportamiento del coeficiente de resistencia en la región de transición $5 \times 10^5 < \mathrm{Re}_L < 8 \times 10^7$, donde la resistencia laminar en el borde de ataque es una fracción apreciable de la resistencia total. Schlichting [1] sugiere las siguientes expresiones para correlacionar las curvas de resistencia en la zona de transición, dependientes del valor del número de Reynolds $\mathrm{Re}_{\text{trans}}$ para el que se inicia la transición:

$$C_D = \begin{cases} \dfrac{0{,}031}{\mathrm{Re}_L^{1/7}} - \dfrac{1440}{\mathrm{Re}_L} & \mathrm{Re}_{\text{trans}} = 5 \times 10^5 \quad (7.49a) \\ \dfrac{0{,}031}{\mathrm{Re}_L^{1/7}} - \dfrac{8700}{\mathrm{Re}_L} & \mathrm{Re}_{\text{trans}} = 3 \times 10^6 \quad (7.49b) \end{cases}$$

EJEMPLO 7.4

Una hidroala de 1,2 ft de longitud y 6 ft de anchura se sitúa en una corriente de agua de 40 ft/s, con $\rho = 1{,}99$ slugs/ft^3 y $\nu = 0{,}000011$ ft^2/s. (*a*) Estime el espesor de la capa límite al final de la placa. Estime la resistencia de fricción para (*b*) flujo turbulento con pared lisa desde el borde de ataque, (*c*) flujo laminar turbulento con $\mathrm{Re}_{\text{trans}} = 5 \times 10^5$ y (*d*) flujo turbulento con pared rugosa de rugosidad $\epsilon = 0{,}0004$ ft.

Solución

Apartado (*a*)

El número de Reynolds es

$$\mathrm{Re}_L = \frac{UL}{\nu} = \frac{(40 \text{ ft/s})(1{,}2 \text{ ft})}{0{,}000011 \text{ ft}^2/\text{s}} = 4{,}36 \times 10^6$$

Por tanto, el flujo en el borde de salida es turbulento. El máximo espesor de la capa límite se obtendrá cuando el flujo sea turbulento desde el borde de ataque. De la Ecuación (7.42) tenemos

$$\frac{\delta(L)}{L} = \frac{0{,}16}{(4{,}36 \times 10^6)^{1/7}} = 0{,}018$$

o $$\delta = 0{,}018(1{,}2 \text{ ft}) = 0{,}0216 \text{ ft} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

La capa es 7,5 veces más gruesa que la capa límite laminar al mismo número de Reynolds.

Apartado (*b*)

El coeficiente de resistencia de un lado de la placa, para flujo turbulento con pared lisa, se obtiene de la Ecuación (7.45):

$$C_D = \frac{0{,}031}{(4{,}36 \times 10^6)^{1/7}} = 0{,}00349$$

www.elsolucionario.net

Entonces la resistencia en ambos lados de la placa es, aproximadamente,

$$D = 2C_D(\tfrac{1}{2}\rho U^2)bL = 2(0{,}00349)(\tfrac{1}{2})(1{,}99)(40)^2(6{,}0)(1{,}2) = 80 \text{ lbf} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

Apartado (*c*)

En el caso de régimen laminar en el borde de ataque y $\text{Re}_{\text{trans}} = 5 \times 10^5$, es aplicable la Ecuación (7.49*a*),

$$C_D = 0{,}00349\,\Phi\frac{1440}{4{,}36\times10^6} = 0{,}00316$$

La resistencia puede calcularse de nuevo para este valor inferior del coeficiente de resistencia:

$$D = 2C_D(\tfrac{1}{2}\rho U^2)bL = 72 \text{ lbf} \qquad \textit{Resp. (c)}$$

Apartado (*d*)

Finalmente, para la pared rugosa, tenemos

$$\frac{L}{\epsilon} = \frac{1{,}2 \text{ ft}}{0{,}0004 \text{ ft}} = 3000$$

Con $\text{Re}_L = 4{,}36 \times 10^6$ vemos en la Figura 7.6 que esta condición cae dentro del régimen de viscosidad dominante. Es aplicable, por tanto, la Ecuación (7.48*b*):

$$C_D = (1{,}89 + 1{,}62 \log 3000)^{-2{,}5} = 0{,}00644$$

y la estimación de la resistencia es

$$D = 2C_D(\tfrac{1}{2}\rho U^2)bL = 148 \text{ lbf} \qquad \textit{Resp. (d)}$$

www.elsolucionario.net

Esta rugosidad tan pequeña casi duplica la resistencia. Es probable que la resistencia total de la hidroala tenga que multiplicarse todavía por otro factor de 2 a causa de los efectos de la separación en el borde de salida.

7.5. CAPA LÍMITE CON GRADIENTE DE PRESIÓN[3]

El análisis de la sección anterior para la placa plana nos da una buena idea del comportamiento de la capa límite laminar y turbulenta, excepto por un aspecto importante: la separación. Prandtl mostró que la separación, como la que se muestra en la Figura 7.2*b*, se debe a una pérdida excesiva de cantidad de movimiento del fluido de la capa límite cerca de la pared, cuando el fluido debe moverse aguas abajo con un *gradiente adverso de presión*, esto es, $dp/dx > 0$. En el caso en que la presión decrece, $dp/dx < 0$, se dice que hay un *gradiente favorable* y, en estas condiciones, no se presenta nunca la separación. En la corriente sobre un cuerpo sumergido, por ejemplo, el de la Figura 7.2*b*, el gradiente favorable se da en la parte frontal del cuerpo y el adverso en la parte posterior, como se discutirá detalladamente en el Capítulo 8.

Podemos explicar la separación de la corriente mediante un argumento geométrico acerca de la derivada segunda de la velocidad u en la pared. De la Ecuación (7.19*b*) de cantidad de movimiento particularizada en la pared, donde $u = v = 0$, tenemos

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{\text{pared}} = \mu\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\text{pared}} = \Phi pU\frac{dU}{dx} = \frac{dp}{dx}$$

o

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\text{pared}} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} \qquad (7.50)$$

[3] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

tanto para flujo laminar como turbulento. Cuando el gradiente de presión es adverso, la derivada segunda de la velocidad particularizada en la pared es positiva, mientras que en la parte exterior de la capa ($y = \delta$) debe ser negativa para empalmar suavemente con la corriente exterior $U(x)$. Por tanto, la derivada segunda debe anularse en algún punto intermedio, punto de inflexión, y el perfil de velocidades en la capa límite con gradiente adverso de presión tendrá una forma típica en S.

En la Figura 7.7 se ilustra el caso general. Con un gradiente favorable (Figura 7.7*a*), el perfil es convexo, muy redondeado, no hay punto de inflexión y no puede haber separación. Los perfiles laminares de este tipo son muy resistentes a la transición a la turbulecia [1 a 3].

Con gradiente de presión nulo (Figura 7.7*b*), como en el caso de la placa plana, el punto de inflexión está en la propia pared. No puede haber separación y el flujo se hace turbulento para Re_x no muy distinto de 3×10^6, como se discutió anteriormente.

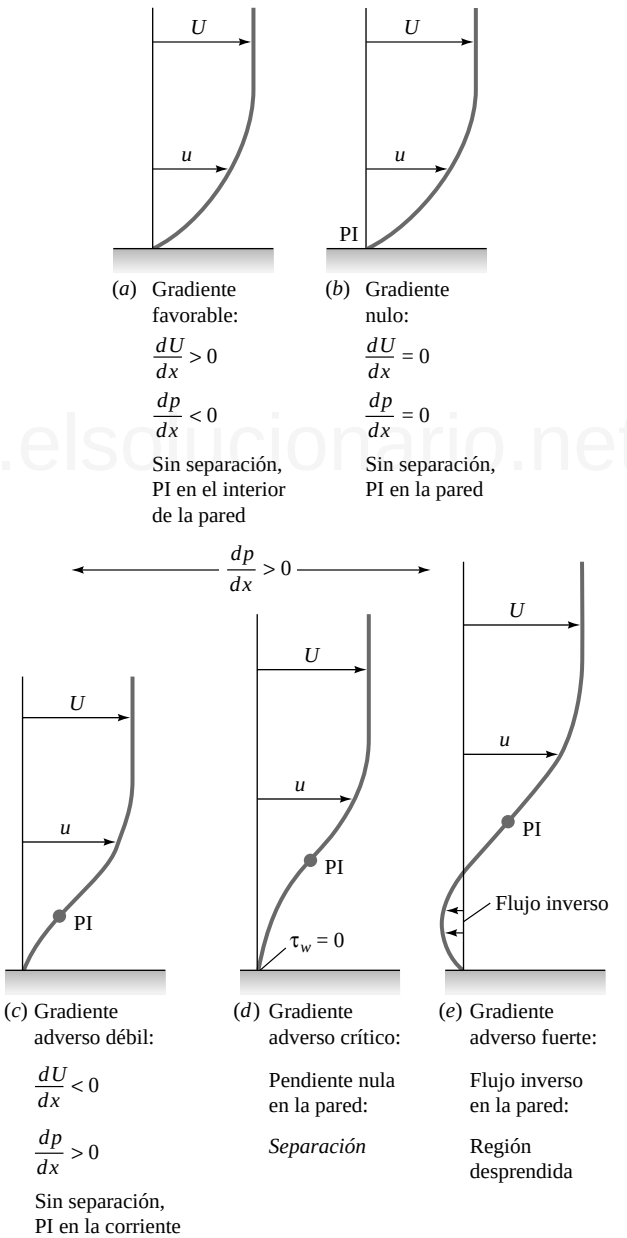


Figura 7.7. Efecto del gradiente de presión en el perfil de velocidades de una capa límite; PI = punto de inflexión del perfil.

www.elsolucionario.net

Si el gradiente de presión es adverso (Figura 7.7*c* a *e*), el punto de inflexión (PI) está en la capa límite a una distancia de la pared que aumenta con la intensidad del gradiente adverso. Para un gradiente adverso débil (Figura 7.7*c*), el flujo no está desprendido, pero es susceptible de pasar a turbulento para Re_x tan bajos como 10^5 [1, 2]. Con un gradiente adverso moderado se alcanza una situación crítica (Figura 7.7*d*) para la cual el esfuerzo en la pared es nulo ($\partial u/\partial y = 0$). Esto define el *punto de separación* ($\tau_w = 0$), ya que cualquier gradiente más fuerte producirá una corriente de recirculación en la pared (Figura 7.7*e*): el espesor de la capa límite crece considerablemente, y la corriente principal se desprende o separa de la pared (Figura 7.2*b*).

Los perfiles de la Figura 7.7 aparecen normalmente de forma secuencial a medida que la capa límite evoluciona a lo largo de la pared de un cuerpo. Por ejemplo, en la Figura 7.2*a*, el gradiente favorable se da en la parte frontal del cuerpo, el gradiente nulo se da poco antes de alcanzar el máximo espesor del cuerpo y el gradiente adverso aparece posteriormente en la parte dorsal del cuerpo.

Un segundo ejemplo práctico es el flujo en un conducto formado por una tobera convergente, una garganta y un difusor, tal como se muestra en la Figura 7.8. El flujo en la tobera convergente es de gradiente favorable y nunca se desprende la corriente. Lo mismo ocurre en la garganta donde el gradiente es próximo a cero. El área creciente del difusor da lugar a velocidades decrecientes y presiones crecientes; por tanto, se tiene un gradiente adverso. Si el ángulo del difusor es demasiado grande, el gradiente adverso es excesivo y la capa límite se desprende de una o de ambas paredes, con flujo inverso, incremento de las pérdidas y una pobre recuperación de presión. En la literatura sobre difusores [10] esta situación se denomina *difusor en pérdida*, un término utilizado también en perfiles aerodinámicos (Sección 7.6) para indicar el desprendimiento de la capa límite de perfiles. El comportamiento de la capa límite explica por qué un difusor con un ángulo grande tiene pérdidas elevadas (Figura 6.23) y malas actuaciones (Figura 6.28).

La teoría actual de la capa límite sólo permite el cálculo de la misma hasta el punto de desprendimiento, a partir del cual deja de ser válida. Se están desarrollando nuevas técnicas para analizar la interacción fuerte originada por las corrientes desprendidas [5, 6].

www.elsolucionario.net

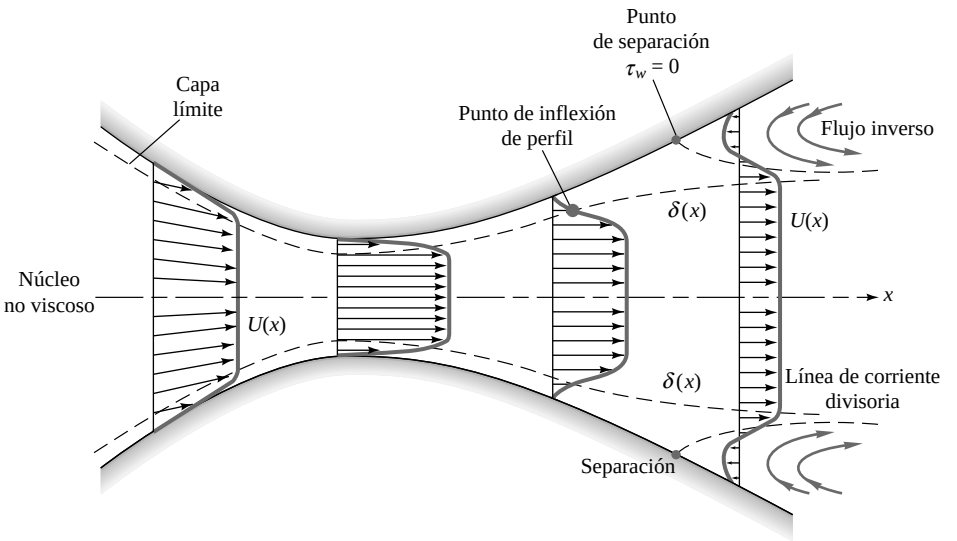


Figura 7.8. Crecimiento y separación de la capa límite en una configuración tobera-difusor.

www.elsolucionario.net

Teoría integral para la capa límite laminar[4]

Se puede desarrollar una teoría de la capa límite bidimensional tanto laminar como turbulenta a partir de la relación integral de Kármán [2, 7], que generaliza la Ecuación (7.33) al caso de $U(x)$ variable integrando a través de la capa límite:

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{1}{2}c_f = \frac{d\theta}{dx} + (2+H)\frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx} \tag{7.51}$$

donde $\theta(x)$ es el espesor de cantidad de movimiento y $H(x) = \delta^*(x)/\theta(x)$ es el factor de forma. Según la Ecuación (7.17), un valor negativo de dU/dx es equivalente a un valor positivo de dp/dx, esto es, un gradiente adverso de presión.

Podemos integrar la Ecuación (7.51) para determinar $\theta(x)$ para un valor dado de $U(x)$, si relacionamos c_f y H con el espesor de cantidad de movimiento. Esto se ha hecho examinando los perfiles de velocidad típicos de la capa límite laminar y turbulenta para diversos gradientes de presión. En la Figura 7.9 se dan algunos ejemplos, mostrando que el factor de forma H es un buen indicador del gradiente de presión. Los valores más altos de H corresponden a los gradientes adversos más fuertes y la separación se da aproximadamente cuando

$$H \approx \begin{cases} 3{,}5 & \text{flujo laminar} \\ 2{,}4 & \text{flujo turbulento} \end{cases} \tag{7.52}$$

Los perfiles laminares (Figura 7.9*a*) presentan claramente la forma típica en S y un punto de inflexión con un gradiente adverso. En los perfiles turbulentos (Figura 7.9*b*) los puntos de inflexión están normalmente embebidos en la delgada subcapa viscosa, lo que resulta difícil de ver en la figura debido a su escala.

www.elsolucionario.net

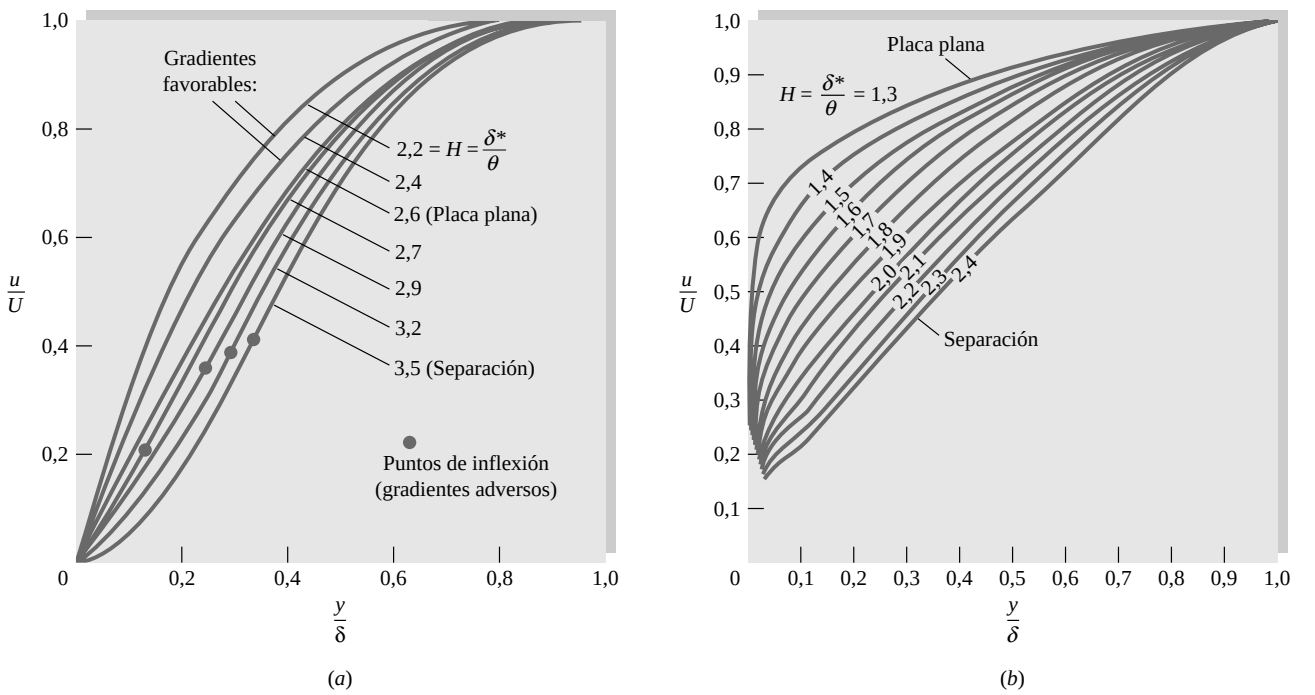


Figura 7.9. Perfiles de velocidad con gradiente de presión: (*a*) flujo laminar; (*b*) flujo turbulento con gradiente de presión adverso.

[4] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

En la literatura hay multitud de teorías para el movimiento turbulento, pero todas ellas son algebraicamente complicadas y las omitiremos aquí. El lector puede encontrarlas en los textos avanzados [1-3, 9].

Para flujo laminar hay un método simple y efectivo desarrollado por Thwaites [11], quien encontró que las variables de la Ecuación (7.51) pueden correlacionarse con una única variable adimensional λ para el espesor de cantidad de movimiento, definida como

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU}{dx} \tag{7.53}$$

Utilizando una aproximación lineal para esta correlación, Thwaites pudo integrar la Ecuación (7.51), obteniendo el resultado

$$\theta^2 = \theta_0^2 \left(\frac{U_0}{U}\right)^6 + \frac{0,45\nu}{U^6}\int_0^x U^5 dx \tag{7.54}$$

donde θ_0 es el espesor de cantidad de movimiento en $x = 0$ (que frecuentemente puede tomarse como nulo). La separación ($c_f = 0$) se presenta cuando λ toma el valor particular

Separación: $$\lambda = -0,09 \tag{7.55}$$

Finalmente, Thwaites correlacionó los valores adimensionales del esfuerzo $S = \tau_w\theta/(\mu U)$ con λ, y sus resultados gráficos se pueden ajustar del siguiente modo:

$$S(\lambda) = \frac{\tau_w\theta}{\mu U} \cong (\lambda + 0,09)^{0,62} \tag{7.56}$$

www.elsolucionario.net

Este parámetro está relacionado con el coeficiente de fricción superficial por la identidad

$$S \equiv \tfrac{1}{2}c_f \mathrm{Re}_\theta \tag{7.57}$$

Las Ecuaciones (7.54) a (7.56) constituyen una teoría completa para el esfuerzo de fricción y espesor de la capa límite laminar con $U(x)$ variable, con una aproximación del ±10 por 100, comparando con las soluciones numéricas de las ecuaciones (7.19) de la capa límite laminar. Los detalles completos de la teoría de Thwaites y otras teorías laminares se dan en las Referencias 2 y 3.

Como demostración del método de Thwaites, consideremos una placa plana en la que U = constante, $\lambda = 0$ y $\theta_0 = 0$. La Ecuación (7.54) se integra para dar

$$\theta^2 = \frac{0,45\nu x}{U}$$

o

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0,671}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \tag{7.58}$$

Que difiere menos del 1 por 100 de la solución numérica de Blasius, Ecuación (7.30).

Con $\lambda = 0$, la Ecuación (7.56) predice, para el esfuerzo de la placa plana,

$$\frac{\tau_w\theta}{\mu U} = (0,09)^{0,62} = 0,225$$

o

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho U^2} = \frac{0,671}{\mathrm{Re}_x^{1/2}} \tag{7.59}$$

www.elsolucionario.net

Que también difiere menos del 1 por 100 del resultado de Blasius, Ecuación (7.25). Sin embargo, la precisión general de este método es peor que el 1 por 100, porque Thwaites «afinó» las constantes de su correlación buscando un buen acuerdo con la teoría exacta de la placa plana.

No intentaremos predecir aquí más detalles de la capa límite, pero más adelante consideraremos varios flujos con cuerpos sumergidos; especialmente en el Capítulo 8, utilizaremos el método de Thwaites para hacer predicciones cualitativas del comportamiento de la capa límite.

EJEMPLO 7.5

En 1938 Howarth propuso una distribución lineal de velocidades para la corriente exterior

$$U(x) = U_0\left(1 - \frac{x}{L}\right) \tag{1}$$

como modelo teórico para el estudio de la capa límite laminar. (*a*) Utilice el método de Thwaites para calcular el punto de separación x_{sep} para $\theta_0 = 0$ y compárelo con la solución numérica exacta $x_{sep}/L = 0{,}119863$ dada por H. Wipperman en 1966. (*b*) Calcule también el valor $c_f = 2\tau_w/(\rho U^2)$ en $x/L = 0{,}1$.

Solución

Apartado (*a*)

En primer lugar obsérvese que $dU/dx = -U_0/L$ = constante: la velocidad decrece, la presión crece y el gradiente de presiones es adverso en todas partes. Integrando la Ecuación (7.54) se tiene:

$$\theta^2 = \frac{0{,}45\nu}{U_0^6(1 - x/L)^6}\int_0^x U_0^5\left(1 - \frac{x}{L}\right)^5 dx = 0{,}075\frac{\nu L}{U_0}\left[1 - \left(1 - \frac{x}{L}\right)^6\right] \tag{2}$$

www.elsolucionario.net

Por tanto, el factor adimensional λ está dado por

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU}{dx} = -\frac{\theta^2 U_0}{\nu L} = -0{,}075\left[1 - \left(1 - \frac{x}{L}\right)^6\right] \tag{3}$$

De acuerdo con la Ecuación (7.55), igualaremos este valor a –0,09 para determinar el punto de separación:

$$\lambda_{sep} = -0{,}09 = -0{,}075\left[1 - \left(1 - \frac{x_{sep}}{L}\right)^6\right]$$

o

$$\frac{x_{sep}}{L} = 1 - (2{,}2)^{-1/6} = 0{,}123 \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Este resultado es superior en algo menos de un 3 por 100 al valor exacto de Wipperman, pero el esfuerzo de cálculo es muy pequeño.

Apartado (*b*)

Para calcular c_f en $x/L = 0{,}1$ (inmediatamente antes de la separación), determinamos primero λ en este punto utilizando la Ecuación (3):

$$\lambda(x = 0{,}1L) = -0{,}075[(1 - 0{,}1)^{-6} - 1] = -0{,}0661$$

Con la Ecuación (7.56) calculamos el parámetro de esfuerzo:

$$S(x = 0{,}1L) = (-0{,}0661 + 0{,}09)^{0{,}62} = 0{,}099 = \tfrac{1}{2}c_f \mathrm{Re}_\theta \tag{4}$$

www.elsolucionario.net

Usando la Ecuación (2) o (3) podemos obtener Re_θ en función de Re_L:

$$\frac{\kappa^2}{L^2} = \frac{0,0661}{UL/\nu} = \frac{0,0661}{\mathrm{Re}_L}$$

o $$\mathrm{Re}_\kappa = 0,257\,\mathrm{Re}_L^{1/2} \quad \text{en} \quad \frac{x}{L} = 0,1$$

Sustituyendo en la Ecuación (4):

$$0,099 = \tfrac{1}{2} c_f (0,257\ \mathrm{Re}_L^{1/2})$$

o $$c_f = \frac{0,77}{\mathrm{Re}_L^{1/2}} \qquad \mathrm{Re}_L = \frac{UL}{\nu}$$ *Resp. (b)*

No podemos determinar el valor numérico de c_f sin conocer, por ejemplo, el valor de $U_0 L/\nu$.

7.6. EXPERIMENTACIÓN EN FLUJOS EXTERNOS

La teoría de la capa límite es muy interesante y clarificadora y nos da un conocimiento cualitativo sólido del comportamiento de los flujos viscosos, pero a causa de la separación, la teoría no permite un cálculo cuantitativo completo del campo fluido. Así, por ejemplo, en la actualidad no hay ninguna teoría satisfactoria para determinar las fuerzas sobre un cuerpo cualquiera sumergido en una corriente a un número de Reynolds arbitrario, excepto los resultados CFD. Por tanto, la experimentación es la llave para tratar estos flujos externos.

Hay miles de trabajos experimentales en la literatura sobre flujos externos. En esta sección daremos una breve descripción de los siguientes aspectos de los flujos externos:

1. Resistencia de cuerpos bidimensionales y tridimensionales.
   a. Cuerpos romos.
   b. Formas fuseladas.
2. Actuaciones de cuerpos sustentadores.
   a. Perfiles y aviones.
   b. Proyectiles y cuerpos con aletas.
   c. Pájaros e insectos.

Para más detalles véase la mina de oro de datos recopilados por Hoerner [12]. En los próximos capítulos examinaremos datos correspondientes a perfiles supersónicos (Capítulo 9), fricción en canales abiertos (Capítulo 10) y actuaciones de turbomáquinas (Capítulo 11).

Resistencia de cuerpos sumergidos

Cuando un cuerpo de forma arbitraria se sumerge en una corriente fluida, el fluido ejercerá sobre él fuerzas y momentos. Si el cuerpo tiene forma y orientación arbitrarias, las fuerzas y momentos que ejerce el fluido sobre él tienen componentes según los tres ejes coordenados, como se muestra en la Figura 7.10. Es costumbre elegir un eje paralelo a la corriente no perturbada, positivo aguas abajo. La fuerza sobre el cuerpo según este eje se denomina *resistencia*, y el momento alrededor de él, *momento de balance*. La resistencia corresponde a una pérdida de cantidad de movimiento y debe vencerse de alguna manera si queremos que el cuerpo avance aguas arriba en la corriente fluida.

www.elsolucionario.net

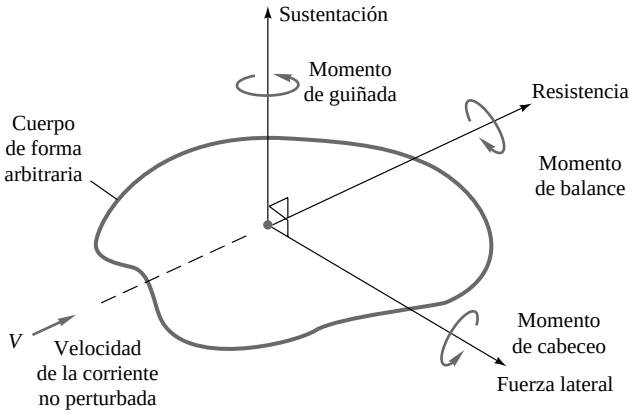


Figura 7.10. Definición de fuerzas y momentos sobre un cuerpo inmerso en una corriente uniforme.

Una segunda componente muy importante de la fuerza es la que normalmente equilibra al peso. Se denomina *sustentación* y es perpendicular a la resistencia. El momento alrededor de este eje se denomina momento de *guiñada*.

La tercera componente, que no proporciona ni pérdida ni ganancia, es la *fuerza lateral* y el momento alrededor de su eje es el momento de *cabeceo*. De estas fuerzas y momentos tridimensionales se ocupan los libros de texto de aerodinámica [por ejemplo, 13]. Aquí nos limitaremos a la discusión de la sustentación y resistencia.

Cuando el cuerpo es simétrico con respecto al plano formado por los ejes de sustentación y resistencia, como es el caso de aviones, barcos y coches moviéndose en un fluido en reposo, la fuerza lateral y los momentos de guiñada y balanceo desaparecen, reduciéndose el problema al caso bidimensional: dos fuerzas, sustentación y resistencia, y un momento, el de cabeceo.

Hay una simplificación adicional cuando el cuerpo tiene dos planos de simetría, como en la Figura 7.11. Una gran variedad de formas satisfacen esta condición, tales como cilindros, alas y todos los cuerpos de revolución. Si la corriente no perturbada es paralela a la intersección de estos dos planos, denominada *cuerda principal del cuerpo*, habrá resistencia, pero no habrá sustentación, ni fuerza lateral ni momentos.[5] La resistencia para este tipo de cuerpos es la que más se ha medido y la que se encuentra más corrientemente en la literatura, pero si la corriente no perturbada no es paralela a la cuerda, el cuerpo tendrá una orientación no simétrica y, teóricamente, pueden aparecer todas las fuerzas y momentos.

En flujos a baja velocidad alrededor de cuerpos geométricamente semejantes con orientación y rugosidad relativa idénticas, el coeficiente de resistencia será sólo función del número de Reynolds:

$$C_D = f(\mathrm{Re}) \tag{7.60}$$

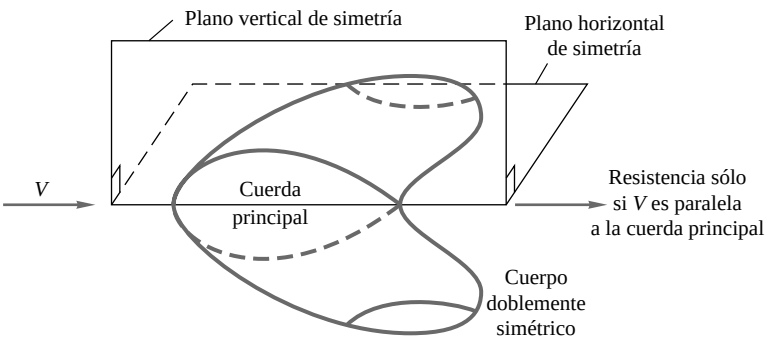


Figura 7.11. Cuando la corriente incidente es paralela a los dos planos de simetría sólo hay resistencia.

[5] En cuerpos con estelas de torbellinos, como el cilindro de la Figura 5.2, puede haber fuerzas y momentos *oscilatorios*, pero su valor medio es nulo.

www.elsolucionario.net

El número de Reynolds está basado en la velocidad no perturbada V y en una longitud característica del cuerpo L, que normalmente es la cuerda o la longitud del cuerpo paralela a la corriente:

$$\mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu} \tag{7.61}$$

Para cilindros, esferas y discos, la longitud característica es el diámetro D.

Área característica

Los coeficientes de resistencia se definen usando un área característica A, que puede variar dependiendo de la forma del cuerpo:

$$C_D = \frac{\text{resistencia}}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} \tag{7.62}$$

El factor $\frac{1}{2}$ es nuestro tradicional tributo a Euler y Bernoulli. Normalmente el área A es una de estas tres:

1. *Área frontal*, área del cuerpo que se ve mirando en la dirección de la corriente; apropiada para cuerpos gruesos tales como esferas, cilindros, coches, misiles, proyectiles y torpedos.
2. *Área de la forma en planta*, área del cuerpo que se ve mirando desde arriba; apropiada para cuerpos anchos y planos, tales como alas e hidroalas.
3. *Área mojada*, que se acostumbra a utilizar en barcos y lanchas.

Cuando se quiere hacer uso de datos de resistencia u otras fuerzas, es importante asegurarse de cuál es la longitud y área utilizadas para adimensionalizar los coeficientes que nos proporcionan.

www.elsolucionario.net

Resistencia de presión y de fricción

Como ya hemos mencionado, la teoría para determinar la resistencia es poco sólida e inadecuada excepto para el caso de la placa plana debido al desprendimiento de la corriente. La teoría de la capa límite puede predecir el punto de desprendimiento, pero no permite estimar, ni siquiera aproximadamente, la distribución de presiones (generalmente bajas) en la zona desprendida. La diferencia entre las altas presiones en la región frontal de remanso y las bajas presiones en la región posterior del cuerpo donde la corriente está desprendida da lugar a una contribución a la resistencia denominada *resistencia de presión*. Esta resistencia debe añadirse a la integral extendida a toda la superficie del cuerpo del esfuerzo en la pared, o *resistencia de fricción* del cuerpo, a la que a menudo supera, para obtener la resitencia total:

$$C_D = C_{D,\text{pres}} + C_{D,\text{fric}} \tag{7.63}$$

La contribución relativa de las resistencias de fricción y presión depende de la forma del cuerpo, especialmente de su espesor. La Figura 7.12 muestra la resistencia de un cuerpo aerodinámico cilíndrico muy largo en dirección perpendicular al papel. Cuando el espesor es nulo se reduce a una placa plana y la resistencia es el 100 por 100 de fricción. Cuando el espesor es igual a la cuerda, caso de un cilindro circular, la resistencia de fricción es sólo alrededor del 3 por 100 del total. Las resistencias de fricción y presión son aproximadamente iguales cuando la relación espesor/cuerda es t/c = 0,25. Obsérvese que C_D en la Figura 7.12*b* varía de forma diferente según se base en el área frontal o en el área de la forma en planta, siendo esta última la habitual para este tipo de cuerpos. Las dos curvas de la Figura 7.12*b* se refieren a los mismos datos de la resistencia.

La Figura 7.13 ilustra el efecto dramático de la separación de la corriente y el subsiguiente fallo de la teoría de la capa límite. La distribución de presiones sobre un cilindro circular en el caso teórico no viscoso (Capítulo 8) corresponde a la línea discontinua de la Figura 7.13*c*:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V^2} = 1 - 4\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$

www.elsolucionario.net

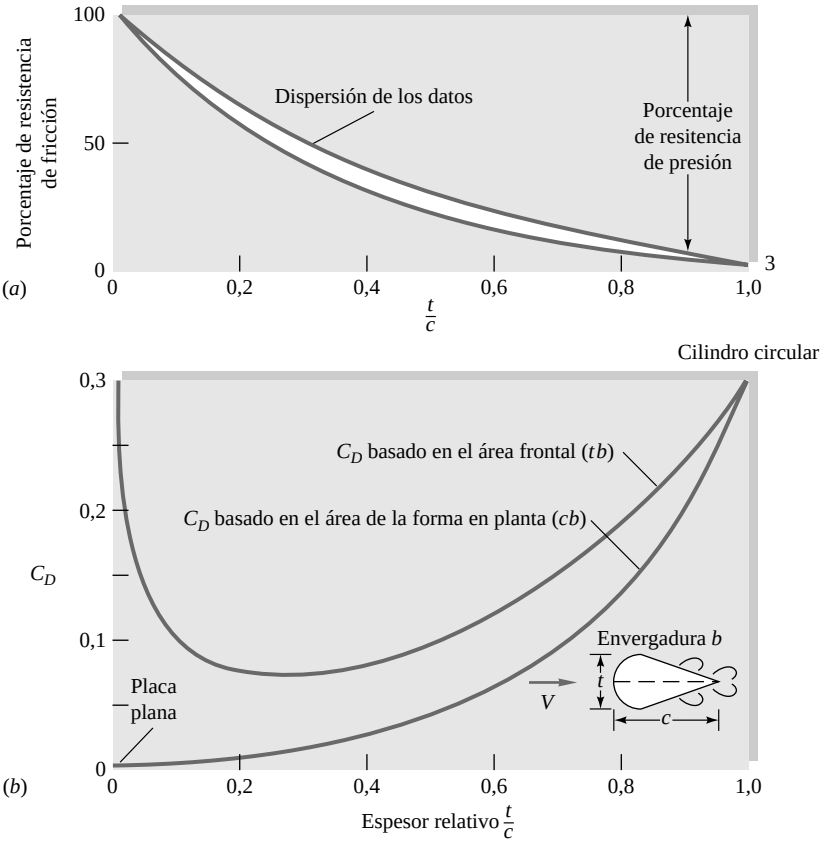


Figura 7.12. Resistencia de un cilindro bidimensional fuselado a $Re_c = 10^6$: (*a*) efecto del espesor relativo en el porcentaje de la resistencia de fricción; (*b*) coeficiente de resistencia total, basado en dos áreas distintas, en función del espesor relativo.

donde p_∞ y V son, respectivamente, la presión y la velocidad de la corriente no perturbada. La diferencia entre las distribuciones de presión en el caso real, tanto laminar como turbulento, y la predicción teórica del caso no viscoso, Figura 7.13*c*, es asombrosa. El flujo laminar es muy vulnerable a los gradientes adversos en la parte posterior del cuerpo y la separación aparece en $\theta = 82°$, que no podría haberse predicho con la teoría no viscosa. La amplia estela y la baja presión en la región desprendida da lugar a una gran resistencia $C_D = 1{,}2$.

La capa límite turbulenta es más resistente a la separación, que se retrasa hasta $\theta = 120°$, Figura 7.13*b*, lo que da lugar a una estela más pequeña y presiones más altas en la parte posterior del cuerpo, por lo que el coeficiente de resistencia es un 75 por 100 más bajo, $C_D = 0{,}3$. Esto explica la caída brusca de la resistencia en la transición, Figura 5.3.

En una esfera también se observa una diferencia marcada entre la separación de la capa límite laminar y turbulenta, Figura 7.14. El flujo laminar (Figura 7.14*a*) se separa alrededor de los 80°, $C_D = 0{,}5$, mientras que en el caso turbulento (Figura 7.14*b*) se separa a los 120°, $C_D = 0{,}2$. Los números de Reynolds son exactamente iguales y la transición a la capa límite turbulenta se indujo con una banda rugosa en la parte frontal de la bola. Las pelotas de golf se mueven en este rango de número de Reynolds, por lo que su superficie tiene hoyuelos para asegurar deliberadamente una capa límite turbulenta y tener menor resistencia. De nuevo, la distribución real de presiones en la esfera es muy distinta de la que proporciona la teoría no viscosa.

No podemos dejar de resaltar la importancia que tiene carenar o fuselar los cuerpos para reducir su resistencia a números de Reynolds por encima de 100. Esto se ilustra en la Figura 7.15. En el cilindro rectangular (Figura 7.15*a*) se produce separación en todas las esquinas, dando lugar a una resistencia muy alta. Redondeando su parte frontal (Figura 7.15*b*) la resistencia se reduce alrededor del 45 por 100, pero C_D todavía es alto. Fuselando su parte posterior (Figura 7.15*c*) la resistencia se reduce en otro 85 por

www.elsolucionario.net

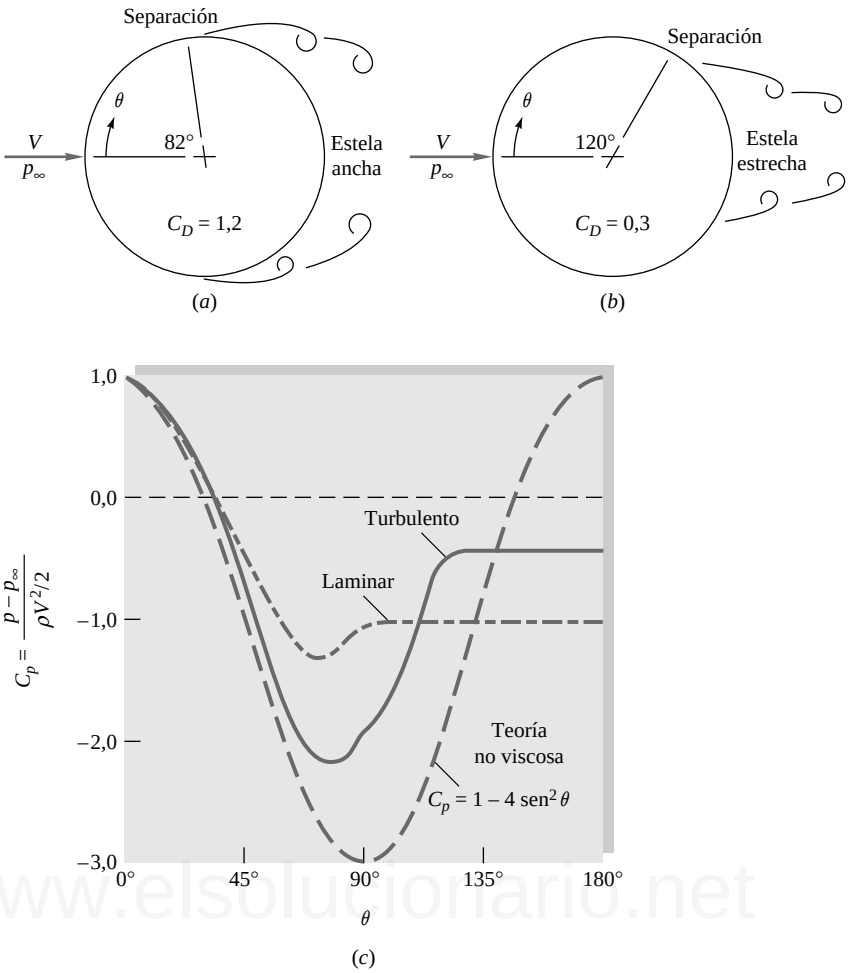


Figura 7.13. Flujo alrededor de un cilindro circular: (*a*) separación laminar; (*b*) separación turbulenta; (*c*) distribución de presión sobre la superficie, teórica y experimental.

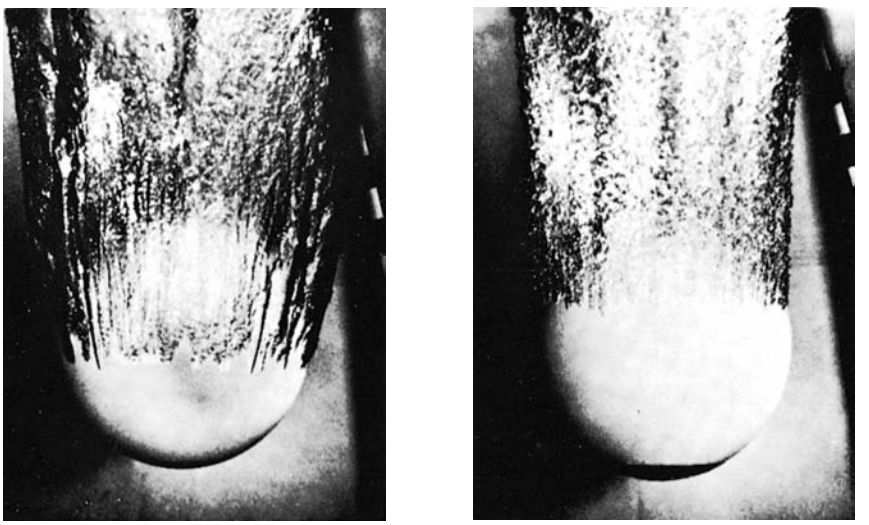


Figura 7.14. Diferencias importantes entre la separación laminar y turbulenta en una bola de 8,5 in que cae al agua con una velocidad de 25 ft/s: (*a*) superficie de la bola lisa, capa límite laminar; (*b*) flujo turbulento, con la misma velocidad, inducido por una banda rugosa en la parte frontal. (*NAVAIR Weapons Division Historical Archives.*)

www.elsolucionario.net

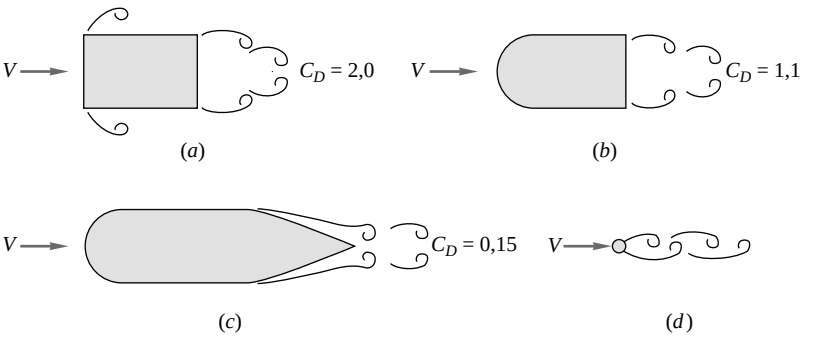


Figura 7.15. Importancia de fuselar los cuerpos para reducir su resistencia (C_D basado en el área frontal): (*a*) cilindro rectangular; (*b*) con morro redondeado; (*c*) con morro redondeado y borde de salida fuselado; (*d*) cilindro circular con la misma resistencia que el caso (*c*).

100, hasta el valor mínimo práctico para un espesor dado. Como contraste, el cilindro circular de la Figura 7.15*d*, que tiene la misma resistencia que el cuerpo de la Figura 7.15*c*, tiene un espesor ocho veces más pequeño y un área transversal trescientas veces menor que la del caso considerado (Figura 7.15*c*). Para vehículos de altas prestaciones y otros cuerpos móviles, la reducción de la resistencia es esencial, por lo que se está haciendo un esfuerzo enorme en investigación tanto para aplicaciones aerodinámicas como hidrodinámicas [20, 39].

Cuerpos bidimensionales

En la Figura 7.16*a* se muestra la resistencia de algunos cuerpos de gran alargamiento (casi bidimensionales) en función del número de Reynolds. Todos los cuerpos tienen C_D elevados a números de Reynolds muy bajos (*flujos lentos*) Re A 1,0, mientras que a altos números de Reynolds los valores difieren considerablemente de acuerdo con el carácter más o menos aerodinámico de los cuerpos. Todos los valores de C_D están basados en el área de la forma en planta, excepto para la placa plana perpendicular a la corriente. Los pájaros y las velas no son, por supuesto, muy bidimensionales, ya que tienen un alargamiento modesto. Obsérvese que los pájaros no son tan eficientes como las velas y perfiles modernos [14, 15].

Movimientos a bajos números de Reynolds

En 1851 G. G. Stokes mostró que, si el número de Reynolds es muy pequeño, Re $\ll$ 1, los términos de aceleración en las ecuaciones de Navier Stokes (7.14*b*, *c*) son despreciables. En este caso el movimiento se denomina *flujo lento*, o flujo de Stokes, y representa un balance entre los términos de presión y los esfuerzos viscosos. Las ecuaciones de la continuidad y de la cantidad de movimiento se reducen a dos ecuaciones lineales para la velocidad y la presión:

$$\text{Re} \ll 1: \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{V}$$

Si la geometría es sencilla (por ejemplo, una esfera o un disco) pueden encontrarse soluciones del problema en forma cerrada que permiten calcular también la resistencia del cuerpo [2]. El propio Stokes proporcionó la fórmula para la resistencia de una esfera:

$$F_{\text{esfera}} = 3\pi\mu U d$$

o

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 \frac{\pi}{4} d^2} = \frac{24}{\rho U d / \mu} = \frac{24}{\text{Re}_d} \tag{7.64}$$

www.elsolucionario.net

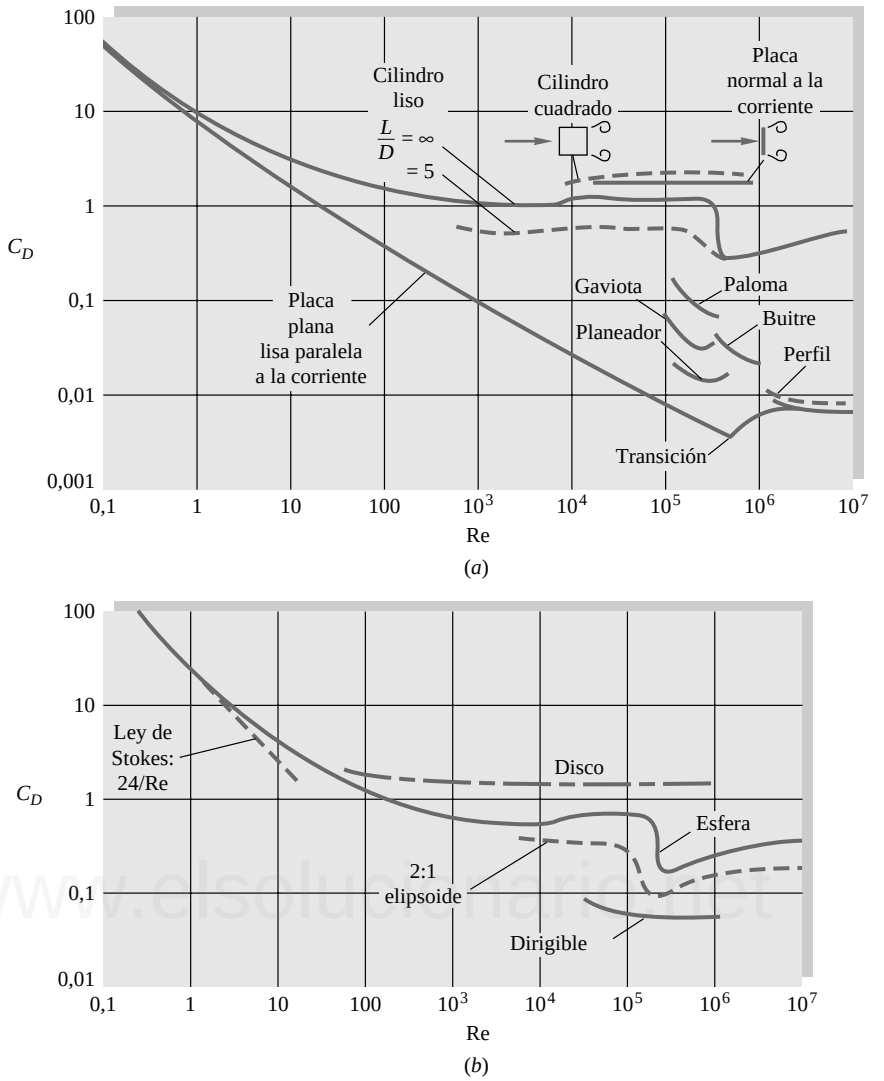


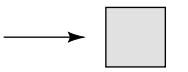
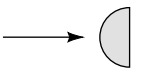
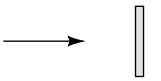
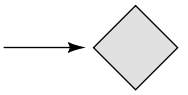
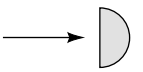
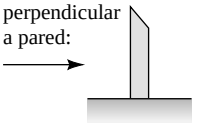
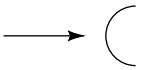
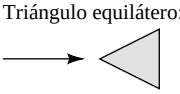
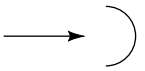
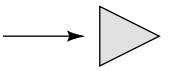
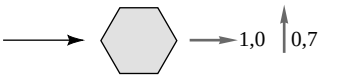
Figura 7.16. Coeficientes de resistencia de cuerpos lisos a bajos números de Mach: (*a*) cuerpos bidimensionales; (*b*) cuerpos tridimensionales. Obsérvese que la resistencia de cuerpos romos a altos números de Reynolds es independiente de Re.

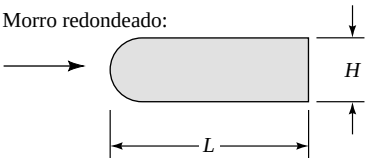
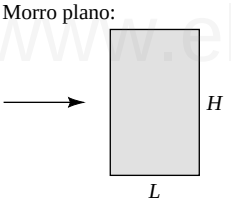
Esta relación se ha representado en la Figura 7.16*b* y puede comprobarse que es precisa hasta aproximadamente $\mathrm{Re}_d \approx 1$.

La Tabla 7.2 proporciona algunos valores del coeficiente de resistencia, basado en el área frontal, de cuerpos bidimensionales de formas transversales diversas, a números de Reynolds $\mathrm{Re} > 10^4$. El comportamiento de los cuerpos con aristas vivas, que tienden a originar el desprendimiento del flujo independientemente del carácter de la capa límite, es poco sensible al número de Reynolds. En los cilindros elípticos, suavemente redondeados, se presentan los efectos de transición de capa límite laminar a turbulenta de las Figuras 7.13 y 7.14, y por lo tanto muestran bastante sensibilidad al carácter de la capa límite.

www.elsolucionario.net

Tabla 7.2. Resistencia de cuerpos bidimensionales para Re B 10^4.

Forma	C_D basado en el área frontal	Forma	C_D basado en el área frontal	Forma	C_D basado en el área frontal
Cilindro cuadrado:		Medio cilindro:		Placa:	
	2,1		1,2		2,0
	1,6		1,7	Placa plana perpendicular a pared: 	1,4
Medio tubo:		Triángulo equilátero:			
	1,2		1,6		
	2,3		2,0	Hexágono: 	1,0 0,7

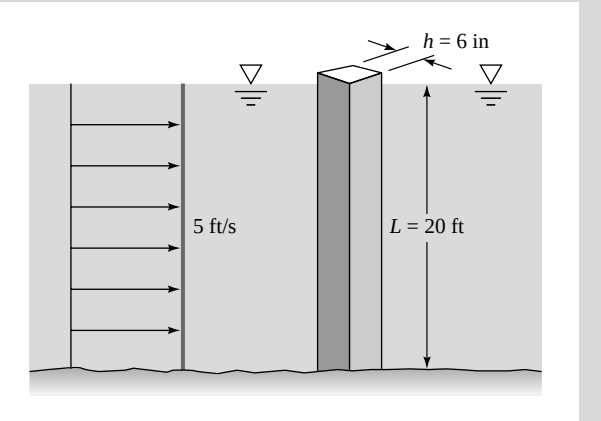
Forma	C_D basado en el área frontal
Morro redondeado: 	L/H: 0,5 | 1,0 | 2,0 | 4,0 | 6,0 C_D: 1,16 | 0,90 | 0,70 | 0,68 | 0,64
Morro plano: 	L/H: 0,1 | 0,4 | 0,7 | 1,2 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 6,0 C_D: 1,9 | 2,3 | 2,7 | 2,1 | 1,8 | 1,4 | 1,3 | 0,9

Cilindro elíptico:	Laminar	Turbulento
1:1	1,2	0,3
2:1	0,6	0,2
4:1	0,35	0,15
8:1	0,25	0,1

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 7.6

Sobre un pilote cuadrado de 6 in de lado incide una corriente de agua de 5 ft/s y 20 ft de profundidad, como se muestra en la Figura E7.6. Estime el momento ejercido por la corriente en la base del pilote.



E7.6

Solución

Consideramos agua de mar con $\rho = 1{,}99$ slugs/ft^3 y viscosidad cinemática $\nu = 0{,}000011$ ft^2/s. Con una anchura del pilote de 0,5 ft, tenemos

$$\mathrm{Re}_h = \frac{(5\ \text{ft/s})(0{,}5\ \text{ft})}{0{,}000011\ \text{ft}^2/\text{s}} = 2{,}3\times 10^5$$

www.elsolucionario.net

Para este valor del número de Reynolds es aplicable la Tabla 7.2. El caso más desfavorable se da cuando la corriente es perpendicular a uno de los lados del pilote, $C_D \approx 2{,}1$. El área frontal es $A = Lh = (20\ \text{ft})(0{,}5\ \text{ft}) = 10\ \text{ft}^2$. La resistencia es

$$F = C_D(\tfrac{1}{2}\rho V^2 A) \approx 2{,}1(\tfrac{1}{2})(1{,}99\ \text{slugs/ft}^3)(5\ \text{ft/s})^2(10\ \text{ft}^2) = 522\ \text{lbf}$$

Si el flujo es uniforme, el punto de aplicación de esta fuerza estará aproximadamente en el punto medio del pilote. Por tanto, el momento en la base es

$$M_0 \approx \frac{FL}{2} = 522(10) = 5220\ \text{ft}\cdot\text{lbf} \qquad \textit{Resp.}$$

De acuerdo con la teoría de flexión de vigas de la resistencia de materiales, el esfuerzo flector en la base será

$$S = \frac{M_0 y}{I} = \frac{(5220\ \text{ft}\cdot\text{lb})(0{,}25\ \text{ft})}{\frac{1}{12}(0{,}5\ \text{ft})^4} = 251.000\ \text{lbf/ft}^2 = 1740\ \text{lbf/in}^2$$

que, por supuesto, debe multiplicarse por el factor de concentración de esfuerzos debido a las condiciones de empotramiento en el extremo.

Cuerpos tridimensionales

La Tabla 7.3 y la Figura 7.16*b* proporcionan algunos coeficientes de resistencia de cuerpos tridimensionales. Podemos concluir, de nuevo, que las aristas siempre originan la separación de la corriente y una alta re-

www.elsolucionario.net

Tabla 7.3. Resistencia de cuerpos tridimensionales para Re B 10^4.

Cuerpo	C_D basado en el área frontal
Cubo:	1,07
	0,81
Taza:	1,4
	0,4
Disco:	1,17
Paracaídas (Baja porosidad):	1,2
Tren aerodinámico (aprox. 5 vagones):	$C_DA \approx 8{,}5\ m^2$
Bicicleta y ciclista:	Levantado: $C_DA \approx 0{,}51\ m^2$; en carrera: $C_DA \approx 0{,}30\ m^2$

Cono:

θ:	10°	20°	30°	40°	60°	75°	90°
C_D:	0,30	0,40	0,55	0,65	0,80	1,05	1,15

Cilindro, flujo laminar:

L/D:	1	2	3	5	10	20	40	∞
C_D:	0,64	0,68	0,72	0,74	0,82	0,91	0,98	1,20

Antena parabólica porosa [23]:

Porosidad:	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
← C_D:	1,42	1,33	1,20	1,05	0,95	0,82
→ C_D:	0,95	0,92	0,90	0,86	0,83	0,80

Persona media: → $C_DA \approx 9\ ft^2$ ↑ $C_DA \approx 1{,}2\ ft^2$

Pinos y abetos [24]:

U, m/s:	10	20	30	40
C_D:	1,2 ± 0,2	1,0 ± 0,2	0,7 ± 0,2	0,5 ± 0,2

Camión con remolque: Sin deflector: 0,96; con deflector: 0,76

Cuerpo	Relación de aspecto	C_D basado en el área frontal		
Placa rectangular:	b/h 1	1,18		
	5	1,2		
	10	1,3		
	20	1,5		
	∞	2,0		
		Laminar	**Turbulento**	
Elipsoide:	L/d 0,75	0,5	0,2	
	1	0,47	0,2	
	2	0,27	0,13	
	4	0,25	0,1	
	8	0,2	0,08	

Cuerpo	Relación de aspecto	C_D basado en el área frontal
Cilindro con bases planas:	L/d 0,5	1,15
	1	0,90
	2	0,85
	4	0,87
	8	0,99

Esfera ascendiendo por flotabilidad [50], $C_D \approx 0{,}95$

$135 < Re_d < 1 \times 10^5$

www.elsolucionario.net

sistencia que es independiente del número de Reynolds. Los cuerpos redondeados como el elipsoide tienen una resistencia que depende del punto de separación, de modo que el número de Reynolds y el carácter de la capa límite son importantes. La longitud del cuerpo, por lo general, disminuye la resistencia de presión por hacer el cuerpo relativamente más esbelto, pero tarde o temprano la resistencia de fricción acaba por dominar. Para el cilindro de frentes planos de la Tabla 7.3, la resistencia de presión decrece con L/d, pero la de fricción aumenta, de modo que la resistencia mínima se obtiene alrededor de $L/d = 2$.

Esferas ligeras ascendiendo por flotabilidad

Los datos de resistencia de esferas de la Figura 7.16*b* se obtuvieron de modelos fijos en túneles de viento y de ensayos de caída libre, y proporcionan un coeficiente de resistencia aproximadamente igual a 0,5 en el intervalo $10^3 < \mathrm{Re}_d < 10^5$. Recientemente se ha puesto de manifiesto [50] que este *no* es el caso de una esfera o una burbuja que asciende libremente por flotabilidad en un fluido. Si la esfera es ligera, $\rho_{\text{esfera}} < 0{,}8\ \rho_{\text{fluido,}}$ aparece una inestabilidad en la estela en el intervalo $135 < \mathrm{Re}_d < 10^5$. La esfera asciende siguendo una hélice que forma un ángulo de unos 60° con la horizontal, y el coeficiente de resistencia prácticamente se dobla, con un valor medio $C_D \approx 0{,}95$, como se refleja en la Tabla 7.3 [50]. Para cuerpos más pesados, $\rho_{\text{esfera}} \approx \rho_{\text{fluido,}}$ la esfera asciende verticalmente y el coeficiente de resistencia sigue la curva habitual de la Figura 7.16*b*.

EJEMPLO 7.7

Según la Referencia 12, el coeficiente de resistencia de un dirigible, basado en su superficie mojada, es aproximadamente 0,006 si $\mathrm{Re}_L > 10^6$. El dirigible tiene 75 m de longitud y una superficie mojada de 3400 m^2. Estime la potencia necesaria para propulsar este dirigible a 18 m/s a la altura estándar de 1000 m.

Solución

www.elsolucionario.net

- *Consideraciones*. Suponemos que el número de Reynolds es lo suficientemente elevado como para que los datos dados sean válidos.
- *Procedimiento*. Determinamos si $\mathrm{Re}_L > 10^6$ y, en caso afirmativo, calculamos la resistencia y la potencia pedidas.
- *Valores de las propiedades.* De la Tabla A.6 a $z = 1000$ m: $\rho = 1{,}112$ kg/m^3, $T = 282$ K, y por tanto $\mu \approx 1{,}75 \times 10^{-5}$ kg/(m · s).
- *Resolución*. Determinamos el número de Reynolds del dirigible:

$$\mathrm{Re}_L = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{(1{,}112\ \text{kg/m}^3)(18\ \text{m/s})(75\ \text{m})}{1{,}75 \times 10^{-5}\ \text{kg/(m}\cdot\text{s)}} = 8{,}6 \times 10^7 > 10^6 \quad \text{Correcto}$$

El coeficiente de resistencia dado es válido. Calculamos la resistencia del dirigible y la potencia = (resistencia) × (velocidad):

$$F = C_D \frac{\rho}{2} U^2 A_{\text{mojada}} = (0{,}006)\frac{1{,}112\ \text{kg/m}^3}{2}(18\ \text{m/s})^2(3400\ \text{m}^2) = 3675\ \text{N}$$

$$\text{Potencia} = FV = (3675\ \text{N})(18\ \text{m/s}) = 66.000\ \text{W} \quad (89\ \text{hp}) \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios*. Estos resultados son meras estimaciones. La resistencia es muy dependiente de la forma del cuerpo y del número de Reynolds, y hay una gran incertidumbre en el valor del coeficiente $C_D = 0{,}006$.

Fuerzas aerodinámicas en vehículos terrestres

Las fuerzas aerodinámicas sobre automóviles y camiones, tanto resistencia como sustentación, son actualmente objeto de numerosas investigaciones [21]. Al menos existe un libro de texto dedicado a este tema [22]. Los intereses de consumidores, fabricantes y gobiernos han oscilado cíclicamente entre vehículos

www.elsolucionario.net

de alta velocidad y gran potencia y vehículos de baja velocidad y baja resistencia. El diseño más aerodinámico de los coches ha provocado una gran reducción de la resistencia de los automóviles en los últimos años, como se muestra en la Figura 7.17*a*. Los coches modernos tienen un coeficiente de resistencia medio, basado en el área frontal, de 0,3. Como el área frontal también ha sido reducida drásticamente, la *fuerza* de resistencia neta en los coches se ha reducido más incluso de lo que indica la Figura 7.17*a*. Como se muestra en la figura, el mínimo práctico, $C_D \Xi 0{,}15$, se alcanzaría para un vehículo con forma de gota, pero este valor sólo podrá alcanzarse si la sociedad está dispuesta a comprar coches con esa forma. Hay que tener en cuenta que basar el C_D en el área frontal es poco práctico, ya que se necesita un plano preciso del automóvil para estimar su área frontal. Por este motivo, algunos artículos técnicos especifican sencillamente la resistencia neta en newtons o kilogramos-fuerza, o dan el producto $C_D A$.

Muchas compañías y laboratorios tienen túneles de viento para automoción, algunos a escala real y/o con superficies móviles para satisfacer las condiciones de semejanza cinemática. Las formas romas de la mayoría de los automóviles, junto con su cercanía al suelo, producen una gran interacción entre los efectos geométricos y el flujo. Cambios sencillos en la forma pueden tener una gran influencia en las fuerzas aerodinámicas. La Figura 7.17*b* muestra datos de resistencia de Bearman et al. [25] para una forma suave idealizada de un automóvil con un ángulo variable en la parte trasera de los bajos. Podemos observar que con un ángulo de 25° se cuadriplica la fuerza vertical hacia abajo, aumentando la tracción de las ruedas, a

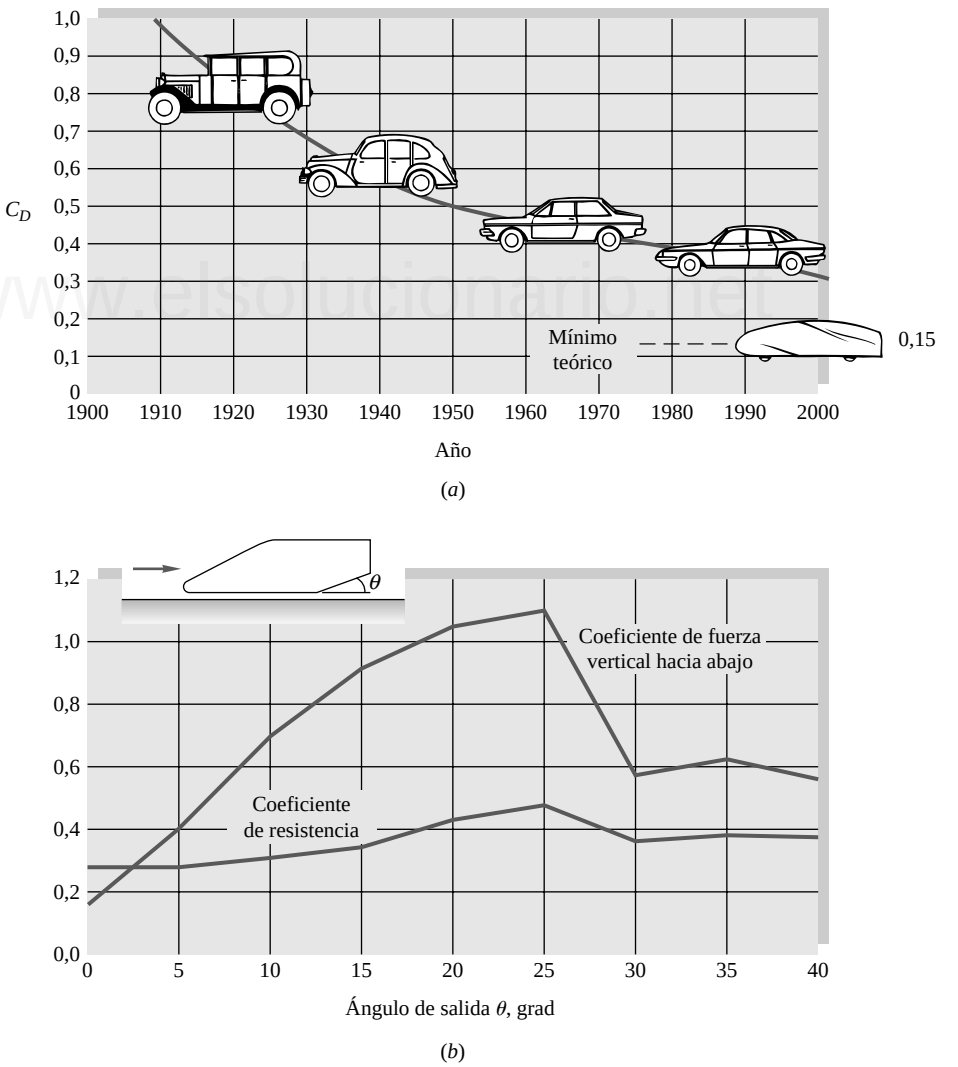


Figura 7.17. Aerodinámica de automóviles: (*a*) evolución histórica de los coeficientes de resistencia (de la Referencia 21); (*b*) efecto del ángulo de salida de los bajos del coche en la fuerza vertical hacia abajo y en la resistencia (Referencia 25).

www.elsolucionario.net

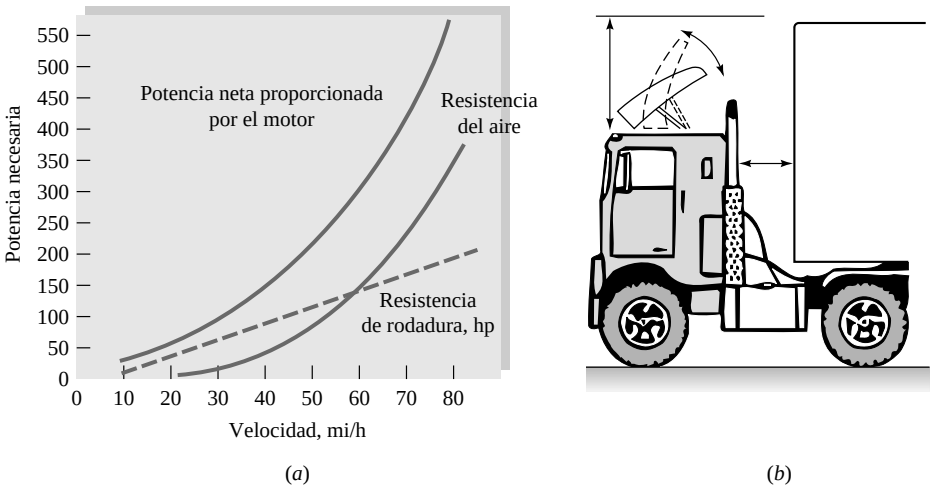


Figura 7.18. Reducción del coeficiente de resistencia de una camión con remolque: (*a*) potencia necesaria para vencer la fuerza de resistencia*; (*b*) si se añade un deflector a la cabina la resistencia del aire se reduce en un 20 por 100. (*Uniroyal Inc.*)

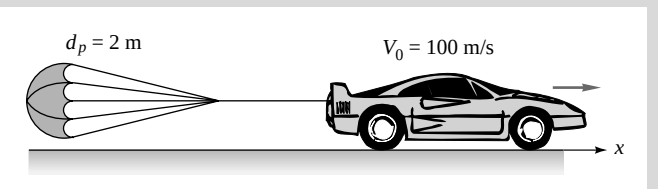
costa de duplicar la resistencia. En este estudio, el efecto del movimiento del suelo es pequeño, un incremento en torno al 10 por 100, tanto en la resistencia como en la fuerza vertical hacia abajo, comparado con los resultados con suelo fijo.

Es difícil cuantificar con exactitud el efecto de los cambios geométricos en las fuerzas sobre el automóvil, ya que, por ejemplo, cambiar la forma del parabrisas puede interactuar con el flujo aguas abajo sobre el techo y el maletero. Sin embargo, la Referencia 26 propone una fórmula para la resistencia sobre automóviles, basada en correlaciones sobre numerosos modelos y ensayos a escala real, que contabiliza por separado efectos tales como el capó, parachoques, espejos retrovisores, guardabarros, parabrisas, techos, etc.

La Figura 7.18 muestra la potencia necesaria para mover un camión con remolque hasta velocidades de 80 mi/h (117 ft/s o 36 m/s). La resistencia de rodadura aumenta linealmente con la velocidad, mientras que la resistencia del aire lo hace de forma cuadrática ($C_D \Xi 1{,}0$). Las dos son aproximadamente iguales a 55 mi/h. Como se muestra en la Figura 7.18*b*, la resistencia del aire se reduce mediante un deflector en el techo de la cabina. Si el ángulo del deflector se ajusta para guiar la corriente suavemente hasta el techo y los laterales del remolque, la reducción en C_D es del 20 por 100. Por lo tanto, a 55 mi/h la resistencia total se reduce en un 10 por 100, con la correspondiente reducción en el gasto de combustible y/o el tiempo de viaje del camión. Una reducción adicional se obtiene cuando el deflector se extiende hasta cubrir el espacio entre la cabina y el remolque. Este tipo de aplicaciones ingenieriles de la Mecánica de Fluidos puede jugar un papel importante en el futuro en muchos de los problemas medioambientales asociados a los medios de transporte.

EJEMPLO 7.8

Un automóvil de alta velocidad con $m = 2000$ kg, $C_D = 0{,}3$ y $A = 1$ m^2, despliega un paracaídas de 2 m para frenar partiendo de una velocidad inicial de 100 m/s (Figura E7.8). Considerando C_D constante, sin acción de los frenos y sin resistencia de rodadura, calcule la distancia recorrida por el coche y su velocidad después de 1, 10, 100 y 1000 s. Considere para el aire $\rho = 1{,}2$ kg/m^3 y desprecie la interacción entre la estela del coche y el paracaídas.



E7.8

* 1 hp equivale a 1,03869 CV. (*N. del T.)*

www.elsolucionario.net

Solución

La ley de Newton aplicada en la dirección del movimiento proporciona

$$F_x = m\frac{dV}{dt} = \Phi F_c\ \Phi F_p = \Phi\frac{1}{2}\Leftarrow V^2(C_{Dc}A_c + C_{Dp}A_p)$$

donde el subíndice *c* es para el coche y *p* para el paracaídas. La forma general de esta expresión es

$$\frac{dV}{dt} = \Phi\frac{K}{m}V^2 \qquad K = \mathbf{Z}\,C_D A\frac{\Leftarrow}{2}$$

Separando variables e integrando:

$$\mathbf{I}_{v_0}^{v}\frac{dV}{V^2} = \Phi\frac{K}{m}\mathbf{I}_0^t dt$$

o

$$V_0^{\Phi 1}\ \Phi V^{\Phi 1} = \Phi\frac{K}{m}t$$

Reagrupando y despejando la velocidad *V*:

$$V = \frac{V_0}{1+(K/m)V_0 t} \qquad K = \frac{(C_{Dc}A_c + C_{Dp}A_p)\Leftarrow}{2} \tag{1}$$

Podemos determinar por integración la distancia recorrida:

$$S = \frac{V_0}{\diagup}\ln(1+\diagup t) \quad \diagup = \frac{K}{m}V_0 \tag{2}$$

De la Tabla 7.3, $C_{Dp}\ \Xi\ 1{,}2$; por lo tanto,

$$C_{Dc}A_c + C_{Dp}A_p = 0{,}3(1\text{ m}^2) + 1{,}2\frac{\Theta}{4}(2\text{ m})^2 = 4{,}07\text{ m}^2$$

Entonces

$$\frac{K}{m}V_0 = \frac{\frac{1}{2}(4{,}07\text{ m}^2)(1{,}2\text{ kg/m}^3)(100\text{ m/s})}{2000\text{ kg}} = 0{,}122\text{ s}^{-1} = \diagup$$

Confeccionamos ahora una tabla con los resultados para *V* y *S* de las Ecuaciones (1) y (2):

t, s	1	10	100	1000
V, m/s	89	45	7,6	0,8
S, m	94	654	2110	3940

La resistencia del aire por sí sola no detendría al coche por completo. Si no utiliza los frenos, todavía estaría moviéndose.

Otros métodos de reducción de la resistencia

En ocasiones la resistencia es beneficiosa, como ocurre, por ejemplo, cuando se usa un paracaídas. Nunca salte de un avión sujetando una placa plana paralela a su movimiento (véase Problema P7.81). En la ma-

www.elsolucionario.net

yoría de los casos, sin embargo, la resistencia es contraproducente y debe reducirse. El método clásico de reducción de la resistencia es el empleo de *formas fuseladas* (Figuras 7.15 y 7.18). Por ejemplo, los carenados han permitido desarrollar motocicletas que viajan a más de 200 mi/h. Investigaciones más recientes han descubiertos otros métodos muy prometedores, sobre todo para flujos turbulentos.

1. Los oleoductos introducen una *película anular* de agua para reducir la potencia de bombeo [36]. La baja viscosidad del agua pegada a la pared reduce la fricción en un 60 por 100.
2. La fricción turbulenta en líquidos se reduce en un 60 por 100 disolviendo pequeñas cantidades de *polímeros de alto peso molecular* [37]. Sin cambiar las bombas, el *Trans-Alaska Pipeline System* (TAPS) incrementó el flujo de petróleo en un 50 por 100 inyectando pequeñas cantidades de polímero disuelto en queroseno.
3. Superficies con *microrranuras* en forma de «v» orientadas en el sentido de la corriente, que en la literatura reciben el nombre de *riblets*, pueden reducir la fricción hasta en un 8 por 100 [38]. Las ranuras tienen una profundidad del orden de 1 mm y se han usado en el casco de algunos yates, como el *Starts and Stripes*, en las regatas de la Copa América. Los *riblets* también son eficaces en las alas de los aviones.
4. La fricción turbulenta local se puede reducir en un 10 por 100 empleando pequeños dispositivos para *romper* las *estructuras turbulentas grandes* cerca de la pared (LEBUs, *Large Eddy Break-Up devices*). Sin embargo, estos pequeños dispositivos deben añadirse a la superficie y la resistencia adicional que esto supone puede ser significativa.
5. Inyectando *microburbujas* de aire en la pared en un flujo de agua se genera una capa de burbujas de baja cortadura. Cuando la fracción de vacío es alta la resistencia puede llegar a reducirse en un 80 por 100.
6. Las *oscilaciones de la pared* en la dirección transversal a la corriente pueden reducir la fricción turbulenta hasta en un 30 por 100 [41].
7. El *control activo del flujo*, especialmente el de flujos turbulentos, es la técnica del futuro, como se comenta en la Referencia 47. Estos métodos generalmente requieren consumo de energía, pero puede merecer la pena. Por ejemplo, el soplado tangencial en la parte trasera de un automóvil [48] provoca el *efecto Coanda*, en el que el flujo separado cercano a la estela se readhiere a la superficie del cuerpo y la resistencia del automóvil se reduce hasta en un 10 por 100.

La reducción de la resistencia es en la actualidad un campo de intensa y fructífera investigación, que se aplica a una gran variedad de flujos de aire y agua, tanto para vehículos como para conductos.

Resistencia de barcos

Los datos de resistencia dados hasta el momento, como las Tablas 7.2 y 7.3, corresponden a cuerpos «completamente sumergidos» en una corriente, esto es, sin superficies libres. Sin embargo, si el cuerpo se desplaza dentro o cerca de una superficie líquida libre, la *resistencia por formación de olas* comienza a ser importante, dependiendo tanto del número de Reynolds como del número de Froude. Para moverse a través de la superficie del agua, un barco debe crear olas a ambos lados. Esto implica introducir energía en la superficie del agua, lo que requiere una fuerza de resistencia finita para mover el barco, incluso si el fluido es no viscoso. La resistencia total de un barco puede aproximarse como la suma de la resistencia de fricción y la resistencia por formación de olas:

$$F \Xi F_{\text{fric}} + F_{\text{ola}} \quad \text{o} \quad C_D \Xi C_{D,\text{fric}} + C_{D,\text{ola}}$$

La resistencia de fricción puede estimarse mediante la fórmula para la placa plana (turbulenta), Ecuación (7.45), basada en la superficie sumergida o *superficie mojada* del barco.

La Referencia 27 proporciona una interesante revisión, tanto teórica como experimental, de la resistencia por formación de olas en barcos. En términos generales, la proa del barco crea un tren de olas con una longitud de onda relacionada con la velocidad del barco, pero no necesariamente con su longitud. Si la popa del barco está en el *valle* de una ola, el barco se mueve esencialmente cuesta arriba y la resistencia es alta. Si la popa coincide con la cresta de una ola, el barco está aproximadamente nivelado y la resistencia es menor. El criterio para estas dos condiciones se traduce en unos determinados números de Froude aproximados [27]:

www.elsolucionario.net

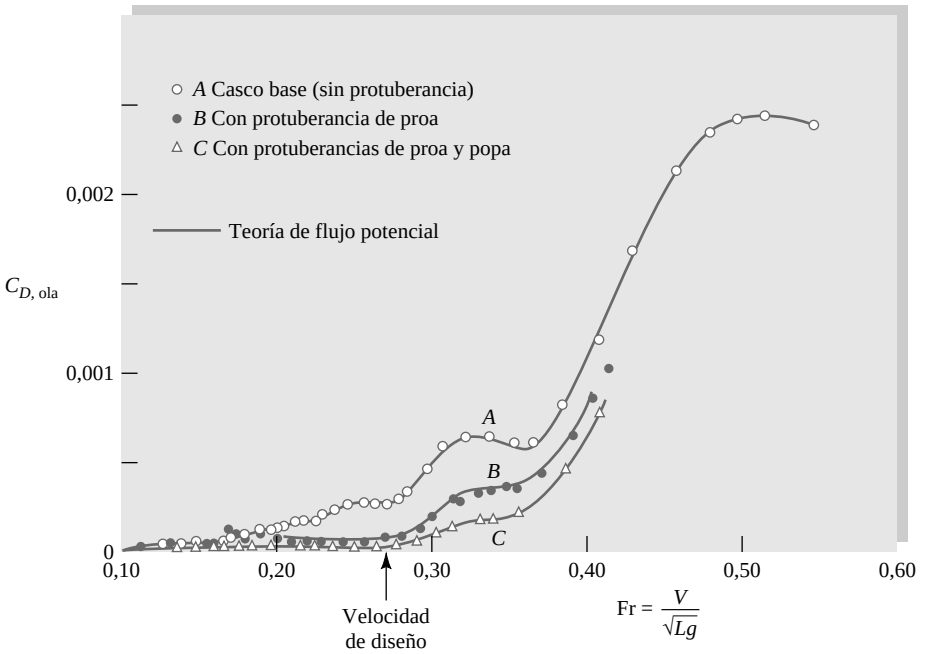


Figura 7.19. Resistencia por formación de olas experimentada por el modelo de un barco. (*Véase Inui [27].*) *Nota*: el coeficiente de resistencia se define como $C_{D,\text{ola}} = 2F/(\rho V^2 L^2)$.

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL}} \Xi \frac{0,53}{\sqrt{N}} \quad \begin{matrix} \text{resistencia alta si } N = 1,3,5,7,...; \\ \text{resistencia baja si } N = 2,4,6,8,... \end{matrix} \tag{7.65}$$

www.elsolucionario.net

donde V es la velocidad del barco, L es la longitud de la línea media del barco y N es el número de semilongitudes de onda, desde la proa a la popa, del tren de olas generador de resistencia. La resistencia de ola crecerá con el número de Froude y oscilará entre una resistencia menor (Fr Ξ 0,38, 0,27, 0,22, ...) y mayor (Fr Ξ 0,53, 0,31, 0,24, ...), con oscilaciones despreciables para Fr < 0,2. Por lo tanto es mejor diseñar un barco tal que en crucero N = 2, 4, 6, 8. Una forma adecuada de la proa y la popa puede reducir aún más la resistencia por formación de olas.

La Figura 7.19 muestra los datos de Inui [27] para un modelo a escala. El casco principal, curva *A*, muestra crestas y valles en la resistencia de ola para los valores adecuados del número de Froude > 0,2. Añadir una *protuberancia* en la proa, curva *B*, reduce en gran medida la resistencia. Añadir una segunda protuberancia en la popa, curva *C*, es aún mejor, e Inui recomienda que la velocidad de diseño para este barco sea N = 4, Fr Ξ 0,27, que es prácticamente una condición «sin olas». En esta figura $C_{D,\text{ola}}$ se define como $2F_{\text{ola}}/(\rho V^2 L^2)$ en vez de usando la superficie mojada.

Las líneas sólidas de la Figura 7.19 están basadas en la teoría potencial de flujos para la forma del casco sumergida en el agua. El Capítulo 8 es una introducción a la teoría potencial de flujos. Con los ordenadores actuales y usando CFD pueden obtenerse soluciones del flujo potencial sobre el casco de barcos, submarinos, yates y lanchas, incluyendo efectos de capa límite debidos al flujo potencial [28]. Como se puede comprobar, la predicción teórica de flujos alrededor de barcos se encuentra a un nivel bastante alto. Véase también Referencia 15.

Resistencia de cuerpos a altos números de Mach

Todos los datos presentados hasta ahora corresponden a flujos prácticamente incompresibles, con números de Mach inferiores a 0,3. Más allá de este valor la compresibilidad comienza a ser importante, con $C_D = f(\text{Re}, \text{Ma})$. A medida que aumenta el número de Mach de la corriente, a un valor subsónico $\text{Ma}_{\text{crít}} < 1$, que depende de la forma y del espesor del cuerpo, la velocidad local se hace supersónica en algún punto cercano a la superficie del cuerpo. Si Ma crece por encima de $\text{Ma}_{\text{crít}}$ aparecen ondas de choque que al ir aumentan-

www.elsolucionario.net

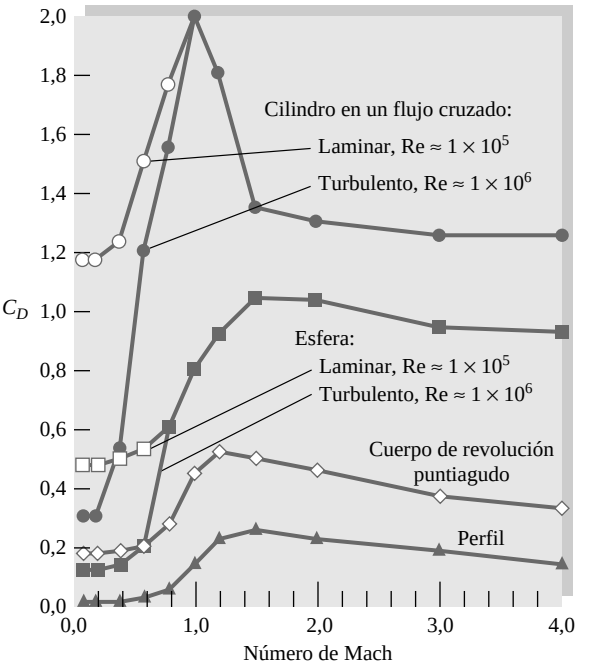


Figura 7.20. Efecto del número de Mach en la resistencia de cuerpos con distintas formas. (*Datos de las Referencias 23 y 29.*)

do Ma, se intensifican y se extienden al resto del campo fluido. Estas ondas de choque hacen aumentar la presión en la superficie cerca de la parte frontal del cuerpo y elevan así la resistencia de presión. El efecto puede ser dramático, llegando a multiplicarse C_D por diez; hace 70 años a este brusco aumento se le denominó la *barrera del sonido*, pues se pensaba que era una barrera que no se podía superar. Por supuesto que se pudo, el incremento en el C_D es finito, como han demostrado las balas supersónicas desde hace siglos.

La Figura 7.20 muestra el efecto del número de Mach en el coeficiente de resistencia para cuerpos de distintas formas ensayados en aire.[6] Podemos ver que la compresibilidad afecta antes a los cuerpos romos, con $Ma_{crít}$ igual a 0,4 para cilindros, 0,6 para esferas y 0,7 para perfiles aerodinámicos y proyectiles afilados. También el número de Reynolds (capa límite laminar o turbulenta) tiene un gran efecto en esferas y cilindros por debajo de $Ma_{crít}$ pero deja de ser importante por encima de Ma Ξ 1. Por el contrario, el efecto del número de Reynolds es pequeño en los perfiles aerodinámicos y los proyectiles, por lo que no se muestra en la Figura 7.20. En general, podemos dividir los efectos de los número de Reynolds y Mach en:

Ma A 0,3: el número de Reynolds es importante, el número de Mach no.
0,3 < Ma < 1: el número de Reynolds y el número de Mach son importantes.
Ma > 1: el número de Reynolds no es importante, el número de Mach sí.

A velocidades supersónicas, se forma una *onda de choque desprendida* delante del cuerpo (véase las Figuras 9.10*b* y 9.19) y la resistencia se debe fundamentalmente a las elevadas presiones inducidas por la onda de choque. Afilando la parte delantera del cuerpo se puede reducir mucho la resistencia (Figura 9.28), pero no se elimina la onda de choque. El Capítulo 9 está dedicado al estudio de los flujos compresibles. Las Referencias 30 y 31 son libros de texto avanzados completamente dedicados a flujos compresibles.

Mecanismos biológicos de reducción de la resistencia

Una gran parte del esfuerzo en ingeniería se dedica a diseñar las formas de los cuerpos sumergidos para reducir su resistencia. La mayor parte de ese esfuerzo se concentra en cuerpos con formas rígidas. En la naturaleza se da un proceso distinto, donde los organismos se adaptan para sobrevivir a vientos y corrientes a

[6] Hay una ligera influencia de la relación de calores específicos γ, que podría aparecer si se ensayaran otros gases.

www.elsolucionario.net

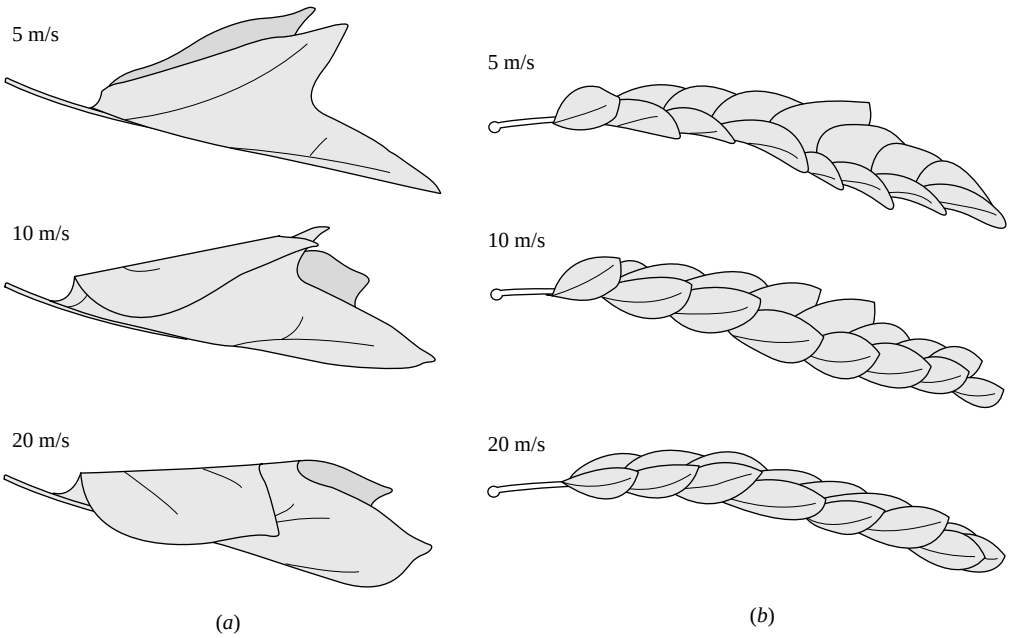


Figura 7.21. Adaptación biológica a las fuerzas del viento: (*a*) una hoja de tulipero de Virginia se riza adoptando una forma cilíndrica a altas velocidades; (*b*) las hojas del nogal negro se agrupan para proporcionar un perfil de baja resistencia al aumentar la intensidad del viento. (*De Vogel, Referencia 33.*)

altas velocidades, como explica S. Vogel en una serie de artículos [33, 34]. Un buen ejemplo son los árboles, cuya estructura flexible se reconfigura en presencia de fuertes vientos, reduciendo la resistencia y el daño. Las raíces de los árboles han evolucionado de diversas formas para resistir los momentos flectores inducidos por el viento, y las secciones de los troncos son resistentes a flexiones pero relativamente fáciles de torsionar y reconfigurar. Vimos esto en la Tabla 7.3, donde se observa que los coeficientes de resistencia de árboles [24] se reducen en un 60 por 100 cuando la velocidad del viento aumenta. La forma del árbol cambia para ofrecer menos resistencia.

Las ramas y hojas de un árbol también se retuercen y acumulan para reducir la resistencia. La Figura 7.21 muestra los resultados de un ensayo de túnel de viento realizado por Vogel [33]. Una hoja de tulipero de Virginia, Figura 7.21*a*, amplia y abierta con vientos suaves, se retuerce para adoptar una forma cónica de baja resistencia a medida que la velocidad del viento aumenta. Un conjunto de hojas de un ejemplar de nogal negro, Figura 7.21*b*, se agrupan formando una figura de baja resistencia cuando soplan vientos fuertes. Aunque los coeficientes de resistencia se reducen hasta en un 50 por 100 por la flexibilidad, Vogel apunta que las estructuras rígidas a veces son igual de efectivas. Recientemente, un interesante simposio [35] se dedicó por completo a la mecánica de sólidos y de fluidos de organismos biológicos.

Fuerzas sobre cuerpos sustentadores

Los cuerpos sustentadores (perfiles, hidroalas o álabes) pretenden proporcionar grandes fuerzas perpendiculares a la corriente no perturbada ofreciendo la mínima resistencia. Los diseños prácticos convencionales han desarrollado formas no muy diferentes de las alas de los pájaros, esto es, relativamente delgadas (t/c A 0,24) con un borde de ataque redondeado y borde de salida agudo. En la Figura 7.22 se esquematiza una forma típica.

Para nuestro propósito consideraremos que el cuerpo es simétrico como en la Figura 7.11, con la velocidad no perturbada contenida en el plano vertical. Si la línea de cuerda entre el borde de ataque y salida no es línea de simetría, se dice que el perfil tiene *curvatura*. La línea de curvatura es la línea media entre las superficies superior e inferior del perfil.[7]

[7] En un contexto aeronáutico las superficies superior e inferior de un perfil aerodinámico reciben los nombres de extradós e intradós, respectivamente (*N. del T.*).

www.elsolucionario.net

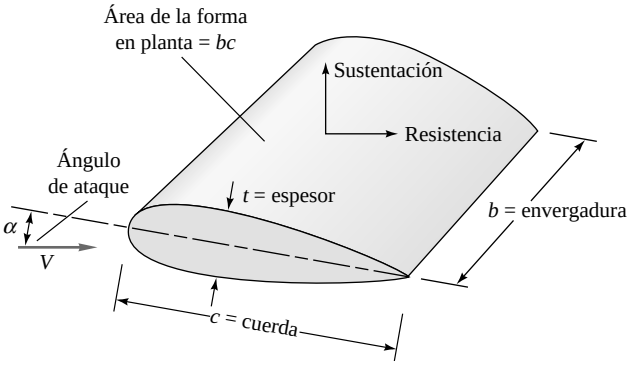


Figura 7.22. Definiciones para una superficie sustentadora.

El ángulo entre la corriente no perturbada y la cuerda se denomina *ángulo de ataque* α. La sustentación L y la resistencia D varían con este ángulo. Las fuerzas adimensionales están definidas con respecto al área de la forma en planta $A_p = bc$:

Coeficiente de sustentación:
$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A_p} \tag{7.66a}$$

Coeficiente de resistencia:
$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A_p} \tag{7.66b}$$

Si la cuerda no es constante, como ocurre con las alas con estrechamiento de los aviones modernos, $A_p = \int c\, db$.

Para flujos a baja velocidad con una rugosidad dada, C_L y C_D varían con α y con el número de Reynolds basado en la cuerda:

$$C_L = f(\alpha, \mathrm{Re}_c) \qquad \text{o} \qquad C_D = f(\alpha, \mathrm{Re}_c)$$

donde $\mathrm{Re}_c = Vc/\nu$. Los números de Reynolds están, generalmente, dentro del margen en el cual la capa límite es turbulenta y tiene un efecto moderado.

El borde de ataque redondeado evita el desprendimiento de la corriente en esta región, pero el borde de salida afilado origina el desprendimiento que genera la sustentación. La Figura 7.23 muestra lo que ocurre cuando se inicia el movimiento alrededor de un álabe o perfil.

Inmediatamente después del arranque, Figura 7.23*a*, el movimiento es irrotacional y no viscoso. Suponiendo un ángulo de ataque positivo, el punto de remanso posterior está en sobresuperficie superior y no hay sustentación; pero la corriente no puede bordear el borde de salida afilado: se desprende y se forma un *torbellino de arranque* como el de la Figura 7.23*b*. Este torbellino de arranque es arrastrado por la corriente aguas abajo, Figuras 7.23*c* y *d*, formándose una corriente sobre el ala con líneas de corriente que varían gradualmente y abandonan el perfil en una dirección aproximadamente paralela a la cuerda. En esta situación la sustentación se ha generado por completo y el torbellino de arranque está lejos aguas abajo. Si cesa la corriente, se origina un torbellino de parada de sentido opuesto (el de las aguas del reloj) que también es arrastrado por la corriente. Durante el vuelo, el aumento o disminución de la sustentación originará torbellinos de arranque o parada, siempre con el fin de mantener un flujo paralelo y suave en el borde de salida. Replantearemos matemáticamente esta idea en el Capítulo 8.

A pequeños ángulos de ataque, aparece un gradiente adverso de presión en la parte posterior del perfil, pero que no es lo suficientemente fuerte como para que se desprenda la capa límite. El flujo alrededor del perfil es suave, como en la Figura 7.23*d*, la resistencia es baja y la sustentación excelente. Cuando se aumenta el ángulo de ataque, el gradiente adverso en la superficie superior se hace más intenso, formándose, generalmente, una *burbuja de separación* que crece extendiéndose aguas arriba sobre el extradós.[8] A un

[8] Para algunos perfiles la burbuja explota, provocando una entrada en pérdida rápida y peligrosa.

www.elsolucionario.net

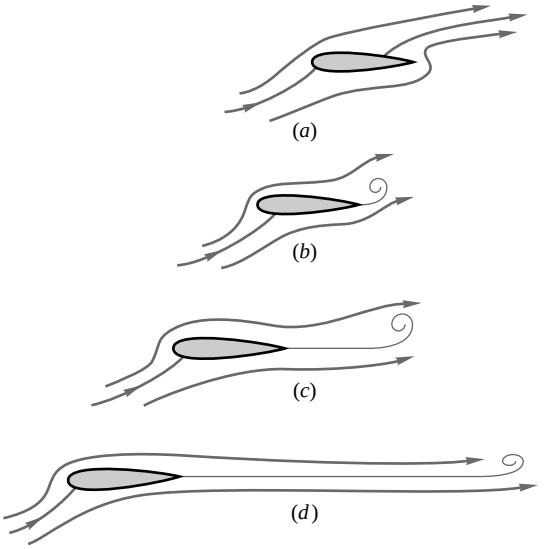


Figura 7.23. Etapas sucesivas en el desarrollo de la sustentación: (*a*) arranque: punto de remanso posterior en la superficie superior del perfil: sin sustentación; (*b*) el borde de salida afilado induce la separación y se forma un torbellino de arranque: sustentación pequeña; (*c*) el flujo arrastra el torbellino de arranque, el flujo en el borde de salida es suave: la sustentación alcanza el 80 por 100; (*d*) torbellino de arranque arrastrado lejos agua abajo, el flujo en el borde de salida es muy suave: la sustentación está completamente desarrollada.

cierto ángulo α comprendido entre 15° y 20°, la corriente está completamente desprendida del extradós, como muestra la Figura 7.24. Se dice que el perfil está en *pérdida*: la sustentación decae bruscamente, la resistencia aumenta considerablemente y el perfil deja de cumplir su función aerodinámica.

www.elsolucionario.net

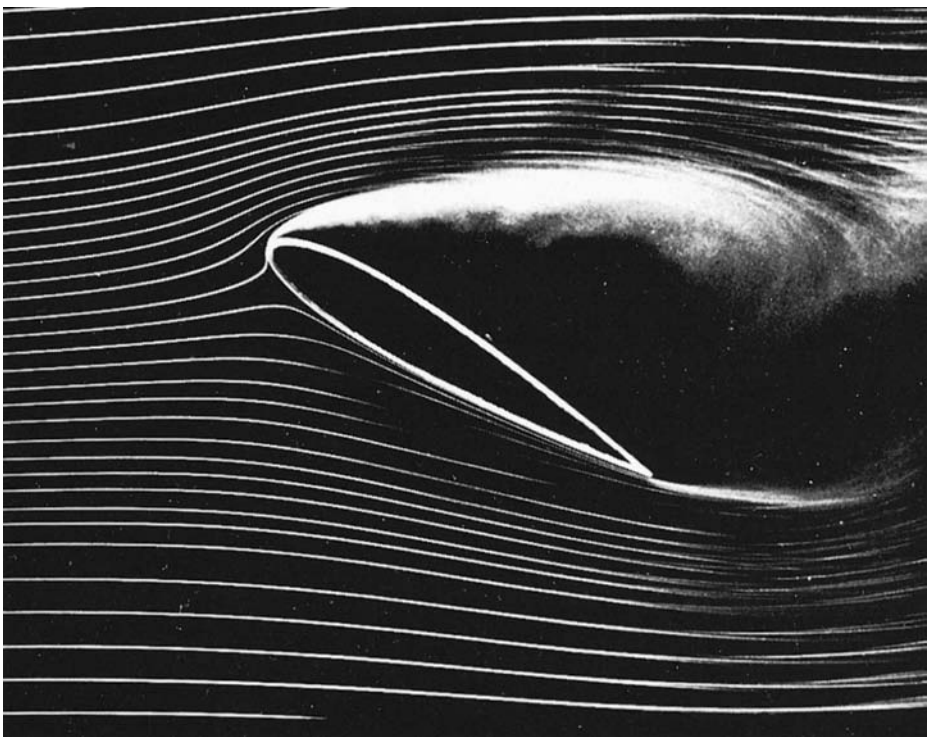


Figura 7.24. A altos ángulos de ataque, la visualización del flujo mediante humo muestra la separación de la corriente en la superficie superior de un perfil sustentador en pérdida. (*National Committee for Fluid Mechanics Films, Education Development Center, Inc., © 1972.*)

www.elsolucionario.net

Los primeros perfiles fueron delgados, tomando como modelos las alas de los pájaros. El ingeniero alemán Otto Lilienthal (1848-1896) experimentó con placas planas y con curvatura en un brazo giratorio. Él y su hermano Gustav volaron en el primer planeador del mundo en 1891. Horatio Frederick Phillips (1845-1912) construyó el primer túnel aerodinámico en 1884 y midió la sustentación y resistencia de álabes con curvatura. La primera teoría de la sustentación fue propuesta poco después por Frederick W. Lanchester. La teoría moderna de perfiles data de 1905, cuando el hidrodinámico ruso N. E. Joukowsky (1847-1921) desarrolló un teorema de la circulación (Capítulo 8) para determinar la sustentación de un perfil de curvatura y espesor arbitrarios. Con esta teoría básica, ampliada y desarrollada por Prandtl, Kármán y sus discípulos, es posible diseñar ahora perfiles de baja velocidad que tengan cualquier distribución de presiones sobre la superficie y con las características apropiadas para la capa límite. Hay familias enteras de perfiles, casi todas desarrolladas en Estados Unidos bajo la tutela de la NACA (ahora NASA). La Referencia 16 contiene una amplia exposición teórica y datos sobre estos perfiles. En el Capítulo 8 discutiremos con más detalle estos temas. La historia de la aeronáutica está repleta de aspectos interesantes y atractivos y su estudio resulta muy recomendable para el lector [43, 44].

La Figura 7.25 muestra la sustentación y resistencia de un perfil simétrico denominado NACA 0009, donde el último dígito indica que el espesor es del 9 por 100. La sustentación de este perfil a ángulo de ataque cero es nula cuando no tiene flap. Hasta los 12° el coeficiente de sustentación aumenta linealmente con una pendiente de 0,1 por grado o 6 por radián. Esto está de acuerdo con la teoría desarrollada en el Capítulo 8:

$$C_{L,\text{teoría}} \;\Xi\; 2\Theta \text{sen}\,\overset{\text{TM}}{\not-} + \frac{2h}{c}\Big| \qquad (7.67)$$

donde h/c es la curvatura máxima expresada como una fracción de la cuerda. El perfil NACA 0009 no tiene curvatura; por tanto, $C_L = 2\Theta\text{sen}\,\alpha\,\Xi\,0{,}11\alpha$, donde α está expresado en grados. El acuerdo es excelente.

El coeficiente de resistencia para el perfil liso de la Figura 7.22 es tan sólo de 0,005, que es incluso menor que el de una placa plana en régimen turbulento contabilizando ambas caras de la placa. Esto no es típico de un perfil comercial que tendrá efectos de la rugosidad; por ejemplo, bastaría una mano de pintura para duplicar el coeficiente.

www.elsolucionario.net

El efecto de aumentar el número de Reynolds se traduce, en la Figura 7.25, en un incremento de la sustentación máxima y del ángulo de entrada en pérdida (sin cambio apreciable de la pendiente), así como en una disminución del coeficiente de resistencia. Este efecto es beneficioso, ya que el prototipo probablemente funcionará a un número de Reynolds más alto que el modelo (10^7 o más).

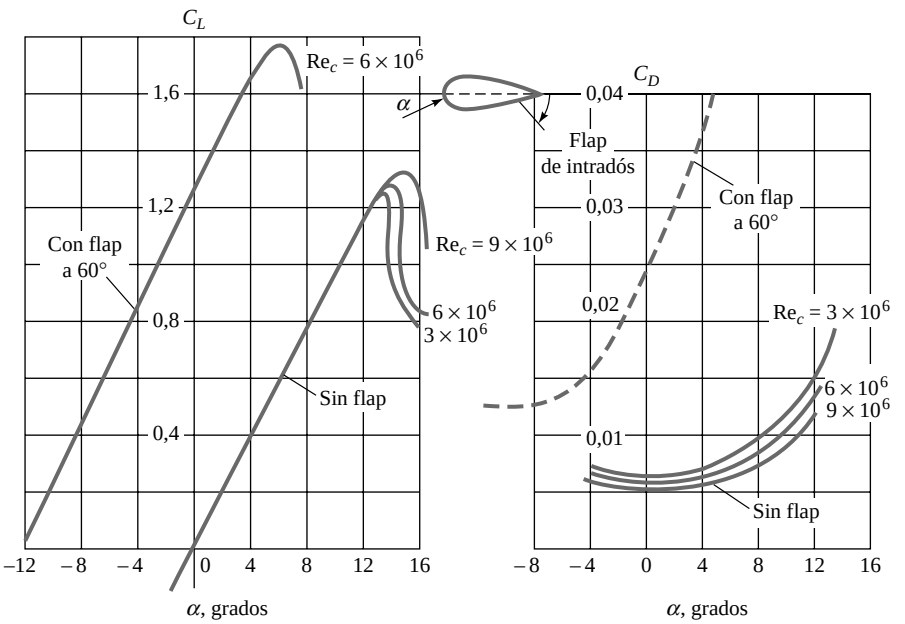


Figura 7.25. Sustentación y resistencia de un perfil NACA 0009 simétrico de envergadura infinita, con el efecto de la deflexión de un flap de intradós. Obsérvese que la rugosidad puede incrementar el C_D de un 100 a un 300 por 100.

www.elsolucionario.net

En el despegue o aterrizaje se aumenta la sustentación considerablemente deflectando un flap de intradós, como se muestra en la Figura 7.25. Esto hace que el perfil sea no simétrico (o con curvatura efectiva), cambiando el ángulo de sustentación nula a $\alpha = -12°$. A causa del flap de intradós también aumenta la resistencia, pero la reducción de las distancias de despegue y aterrizaje bien puede justificar la necesidad de una potencia adicional de los motores.

Los aviones vuelan en regímenes de crucero a ángulos de ataque pequeños, cuando la sustentación es mucho mayor que la resistencia. Los valores máximos de la relación sustentación-resistencia para los perfiles corrientes están entre 20 y 50.

Algunos perfiles, como los de la serie NACA 6, están diseñados para que el gradiente de presiones sea favorable en gran parte de la superficie superior a ángulos de ataque pequeños. En este caso apenas hay separación y se retrasa la aparición de la turbulencia; la capa límite se mantiene laminar incluso a altos números de Reynolds en gran parte del perfil. En la Figura 7.26 se ha representado la polar, curva de sustentación-resistencia, del perfil NACA 0009 a partir de los datos de la Figura 7.25, y también la del perfil laminar NACA 63-009, del mismo espesor. El perfil laminar tiene un régimen de baja resistencia a pequeños ángulos de ataque, pero también entra en pérdida a ángulos de ataque inferiores y con coeficiente de sustentación máxima más bajo. En el régimen de baja resistencia ésta es un 30 por 100 más baja, pero este régimen desaparece si la rugosidad de la superficie es apreciable.

Todos los datos de las Figuras 7.25 y 7.26 son para envergadura infinita, esto es, flujo bidimensional alrededor de alas sin bordes laterales. El efecto de la envergadura finita se puede correlacionar con el cociente adimensional denominado *alargamiento* (Λ):

$$\upsilon = \frac{b^2}{A_p} = \frac{b}{\bar{c}} \tag{7.68}$$

donde $\bar{c}$ es la cuerda media. La Figura 7.27 muestra los efectos de la envergadura finita. La pendiente de la curva de sustentación disminuye, pero el ángulo de sustentación nula no se modifica; la resistencia aumenta, pero la resistencia cuando la sustentación es nula no se modifica. La teoría de alas de envergadura finita [16] predice que el ángulo de ataque efectivo aumenta, como muestra la Figura 7.27, en la cantidad

$$\mathcal{O}' \equiv \frac{C_L}{\Theta\upsilon} \tag{7.69}$$

www.elsolucionario.net

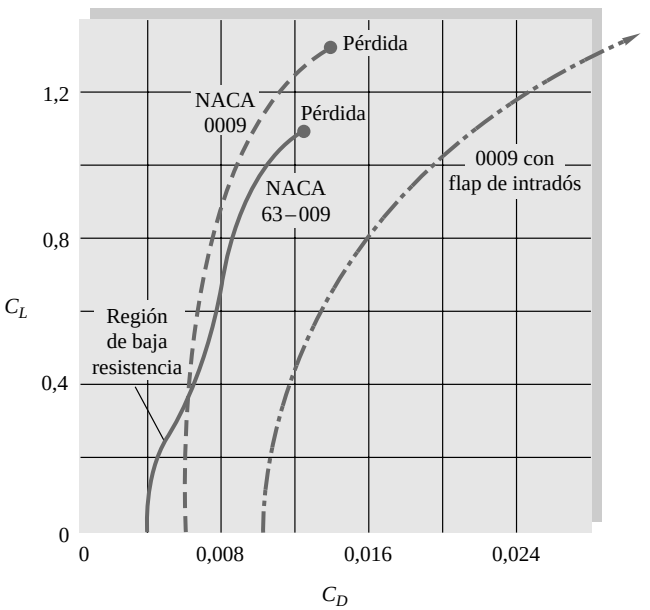


Figura 7.26. Polar sustentación-resistencia para un perfil NACA estándar (0009) y un perfil NACA laminar (63-009).

www.elsolucionario.net

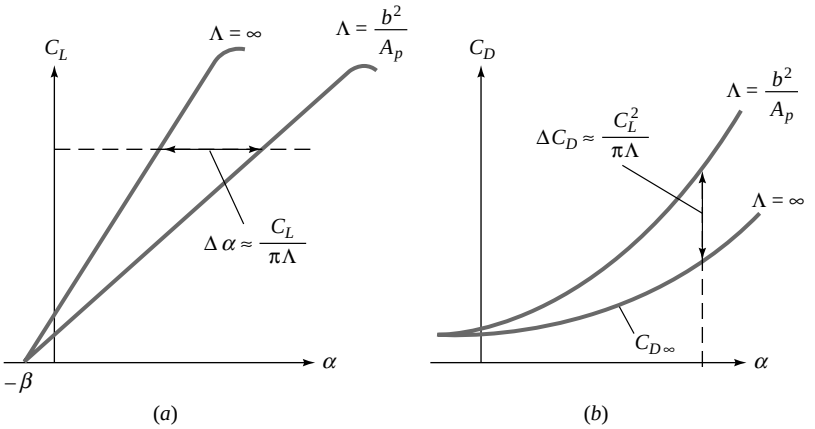


Figura 7.27. Efecto de alargamiento finito en la sustentación y resistencia de un perfil: (*a*) incremento del ángulo de ataque efectivo; (*b*) incremento de la resistencia inducida.

Cuando se combina con la Ecuación (7.67), la sustentación para envergadura finita toma la forma

$$C_L = \frac{2\pi \,\text{sen}\,(\alpha + 2h/c)}{1 + 2/\upsilon} \tag{7.70}$$

El correspondiente aumento de resistencia es $\Delta C_D = C_L \,\text{sen}\,\Delta\alpha = C_L \Delta\alpha$, o

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi\upsilon} \tag{7.71}$$

www.elsolucionario.net

donde $C_{D\infty}$ es la resistencia para envergadura infinita, representada en la Figura 7.25. Estas correlaciones concuerdan bien con los experimentos en alas de envergadura finita [16].

La existencia de un coeficiente de sustentación máximo implica la existencia de una velocidad mínima, o *velocidad de entrada en pérdida*, para la que la sustentación equilibra al peso:

$$L = W = C_{L,\text{máx}}\left(\tfrac{1}{2}\rho V_s^2 A_p\right)$$

o

$$V_s = \left[\frac{2W}{\rho C_{L,\text{máx}} A_p}\right]^{1/2} \tag{7.72}$$

La velocidad de entrada en pérdida de aviones típicos varía entre 60 y 200 ft/s, dependiendo del peso y del valor de $C_{L,\text{máx}}$. El piloto debe mantener la velocidad por encima de 1,2 V_s con objeto de evitar las inestabilidades asociadas a la entrada en pérdida completa.

El flap de intradós de la Figura 7.25 es uno de los múltiples mecanismos que se utilizan para obtener una sustentación elevada a bajas velocidades. En la Figura 7.28*a* se muestran seis de estos mecanismos, cuyas actuaciones sustentadoras se muestran en la Figura 7.28*b*, operando con un perfil estándar (*A*) y con uno laminar (*B*). Con el flap de doble ranura se alcanza un $C_{L,\text{máx}} = 3{,}4$, y una combinación de éste con el slat de borde de ataque puede proporcionar $C_{L,\text{máx}} = 4$. Éstas no son curiosidades científicas, ya que el reactor comercial Boeing 727, por ejemplo, utiliza durante el aterrizaje un flap de triple ranura junto con un slat de borde de ataque.

En la Figura 7.28*b* también se muestra el perfil de Kline-Fogleman [17], señalado con *C*, que no ha llegado a utilizarse todavía. Los diseñadores, aficionados entusiastas del aeromodelismo, no sabían que la aerodinámica convencional prohíbe un borde de ataque afilado y un rebaje en forma de salto en el intradós

www.elsolucionario.net

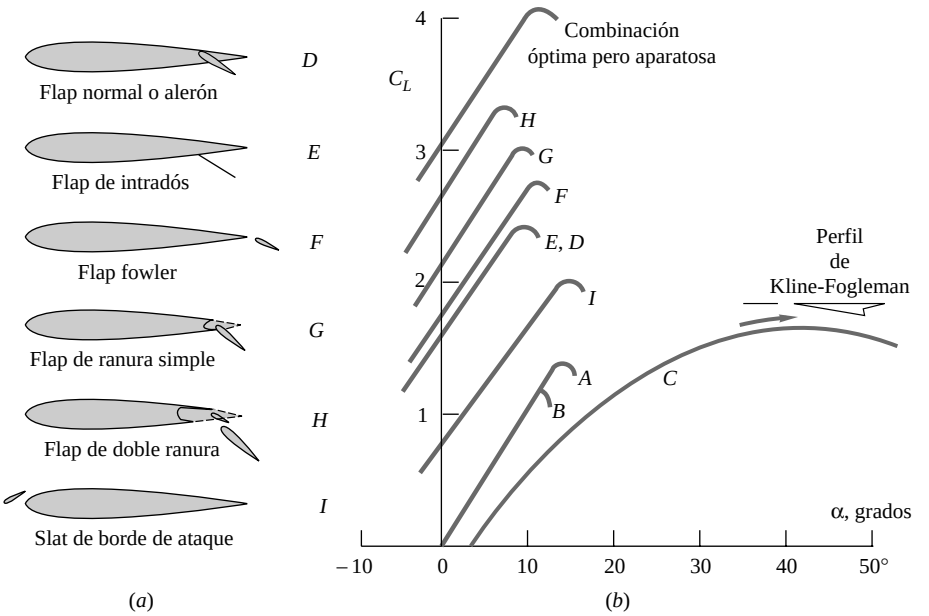


Figura 7.28. Actuaciones de perfiles con y sin dispositivos hipersustentadores: *A* = NACA 0009; *B* = NACA 63-009; *C* = perfil de Kline-Fogleman (de la Referencia 17); de *D* a *I* mostrados en (*a*): (*a*) tipos de dispositivos hipersustentadores; (*b*) coeficientes de sustentación con los distintos dispositivos.

antes del borde de salida. El perfil de Kline-Fogleman tiene una resistencia relativamente alta, pero asombrósamente muestra un crecimiento continuo de la sustentación hasta $\alpha = 45°$. De hecho, podemos decir que este perfil prácticamente no entra en pérdida y proporciona unas actuaciones que varían gradualmente en un margen impresionante de condiciones de vuelo. Los aerodinámicos no han dado todavía ninguna explicación para este comportamiento. Actualmente se está estudiando este perfil y puede que tenga o no algún valor comercial.

Otra violación de la aerodinámica convencional son esas aeronaves militares que están empezando a volar, brevemente, *por encima de la entrada en pérdida*. Los pilotos de cazas están aprendiendo a realizar maniobras rápidas en la zona de pérdida, como se detalla en la Referencia 32. Algunos aviones pueden volar de forma continuada en pérdida; el avión experimental Grumman X-29 realizó recientemente un vuelo a $\alpha = 67°$.

Nuevos diseños de aviones

El perfil de Kline-Fogleman de la Figura 7.28 es una desviación de la aerodinámica convencional, pero ha habido otras desviaciones sorprendentes, como detalla Chandler en un reciente artículo [42]. Estos nuevos aviones, concebidos de momento como pequeños modelos, presentan una gran variedad de configuraciones, como se muestra en la Figura 7.29: alas en forma de anillo, deltas cruciformes, alas circulares y alas batientes. Una configuración de ala circular (Figura 7.29*c*), con un diámetro de 40 in, ha volado con éxito controlada por radio control, y su inventor, Jack M. Jones, planea una versión de 20 ft y dos pasajeros. Otro microavión de 18 in de envergadura llamado Bat (que no se muestra en la figura), fabricado por MLB Co., es capaz de volar durante 20 min. a 40 mi/h y lleva instalada una minicámara para labores de vigilancia. Los nuevos motores se han reducido hasta un tamaño de 10 por 3 mm, con 20 W de potencia. En el lado opuesto del espectro de tamaños, los ingenieros de Boeing y NASA han propuesto un ala volante estilo jumbo, con forma similar al bombardero invisible B2, que llevaría 800 pasajeros con un alcance de 7000 mi.

En las Referencias 12, 13 y 16 puede encontrarse información adicional sobre las actuaciones de superficies sustentadoras y aeronaves. Trataremos este tema de nuevo, brevemente, en el Capítulo 8.

www.elsolucionario.net

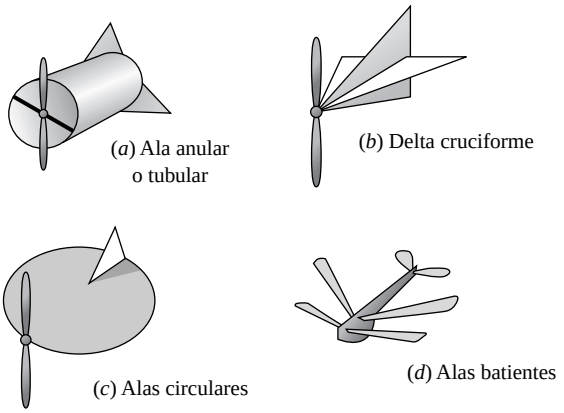


Figura 7.29. Los nuevos diseños de aviones no tienen por qué parecerse al típico avión comercial. (*Tomado de la Referencia 42.*)

EJEMPLO 7.9

Un avión pesa 75.000 lb, tiene un área en planta del ala de 2500 ft^2 y puede suministrar un empuje constante de 12.000 lb. Su alargamiento es de 7 y $C_{D_0} = 0{,}02$. Determine, despreciando la resistencia de rodadura, la carrera de despegue a nivel del mar, si la velocidad de despegue es 1,2 veces la velocidad de entrada en pérdida. Tómese $C_{L,\text{máx}} = 2{,}0$

Solución

www.elsolucionario.net

De la Ecuación (7.72) se obtiene la velocidad de entrada en pérdida, que con la densidad $\rho = 0{,}00237$ slug/ft^3 al nivel del mar, resulta

$$V_s = \left[\frac{2W}{C_{L,\text{máx}}\rho A_p}\right]^{1/2} = \left[\frac{2(75.000)}{2{,}0(0{,}00237)(2500)}\right]^{1/2} = 112{,}5 \text{ ft/s}$$

Por tanto, la velocidad de despegue $V_0 = 1{,}2V_s = 135$ ft/s. La resistencia se obtiene de la Ecuación (7.71) con $\Lambda = 7$:

$$C_D = 0{,}02 + \frac{C_L^2}{7\pi} = 0{,}02 + 0{,}0455C_L^2$$

El equilibrio de fuerzas en la dirección del movimiento da

$$F_s = m\frac{dV}{dt} = \text{empuje} - \text{resistencia} = T - kV^2 \qquad k = \tfrac{1}{2}C_D\rho A_p \tag{1}$$

Puesto que buscamos la distancia, no el tiempo, aplicamos el cambio de variable $dV/dt = V\,dV/ds$ en la Ecuación (1), separamos variables e integramos:

$$\int_0^{s_0} dS = \frac{m}{2}\int_0^{V_0} \frac{d(V^2)}{T - kV^2} \qquad k = \text{constante}$$

o

$$S_0 = \frac{m}{2k}\ln\frac{T}{T - kV_0^2} = \frac{m}{2k}\ln\frac{T}{T - kD_0} \tag{2}$$

www.elsolucionario.net

donde $D_0 = kV_0^2$ es la resistencia en el despegue. La Ecuación (2) es la relación teórica buscada para la carrera de despegue. En nuestro caso particular tenemos los valores numéricos

$$m = \frac{75.000}{32,2} = 2329 \text{ slugs}$$

$$C_{L_0} = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V_0^2 A_p} = \frac{75.000}{\frac{1}{2}(0,00237)(135)^2(2500)} = 1,39$$

$$C_{D_0} = 0,02 + 0,0455(C_{L_0})^2 = 0,108$$

$$k \equiv \tfrac{1}{2} C_{D_0} \rho A_p = (\tfrac{1}{2})(0,108)(0,00237)(2500) = 0,319 \text{ slug/ft}$$

$$D_0 = kV_0^2 = 5820 \text{ lb}$$

Por tanto, la Ecuación (2) conduce a

$$S_0 = \frac{2329 \text{ slugs}}{2(0,319 \text{ slug/ft})} \ln \frac{12.000}{12.000 - 5820} = 3650 \ln 1,94 = 2420 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}$$

En [13] se da un análisis más exacto teniendo en cuenta que k es variable, pero el resultado es prácticamente el mismo, salvo un error del 1 por 100.

EJEMPLO 7.10

Calcule la velocidad de la aeronave del Ejemplo 7.9 en mi/h si se aplica el empuje máximo durante el vuelo a 6000 m de altura estándar.

Solución

- *Consideraciones*. Los datos son W = 75.000 lbf, A_p = 2500 ft², T = 12.000 lbf, Λ = 7, C_{D_+} = 0,02.
- *Procedimiento*. Igualando la sustentación al peso y la resistencia al empuje, despejamos la velocidad.
- *Valores de las propiedades*. De la Tabla A.6, a z = 6000 m, ρ = 0,6596 kg/m³ = 0,00128 slug/ft³.
- *Resolución*. Planteamos las ecuaciones para la resistencia y la sustentación. Las incógnitas son C_L y V.

$$W = 75.000 \text{ lbf} = \text{sustentación} = C_L \frac{\rho}{2} V^2 A_p = C_L \frac{0,00128 \text{ slug/ft}^3}{2} V^2 (2500 \text{ ft}^2)$$

$$T = 12.000 \text{ lbf} = \text{resistencia} = \left[C_{D_+} + \frac{C_L^2}{\pi \Lambda} \right] \frac{\rho}{2} V^2 A_p$$

$$= \left[0,02 + \frac{C_L^2}{\pi (7)} \right] \frac{0,00128 \text{ slug/ft}^3}{2} V^2 (2500 \text{ ft}^2)$$

Esto parece un trabajo apropiado para EES, pero de hecho después de unas transformaciones inteligentes (dividiendo W entre T) se obtiene una ecuación cuadrática para C_L. En cualquier caso, la solución final es

$$C_L = 0,13 \qquad V = 600 \text{ ft/s} = 410 \text{ mi/h} \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios*. Éstos son cálculos de *diseño preliminar*, estimaciones que no dependen de la forma del perfil.

www.elsolucionario.net

Resumen

Este capítulo ha tratado acerca de los efectos viscosos en el flujo alrededor de cuerpos inmersos en una corriente libre. Cuando el número de Reynolds es grande, los esfuerzos viscosos están confinados a una capa delgada pegada al cuerpo y a la estela. El flujo fuera de estas «capas de cortadura» es básicamente no viscoso, y puede calcularse con la teoría potencial y la ecuación de Bernoulli.

El capítulo comienza con el estudio de la capa límite sobre una placa plana y el uso de la teoría integral de cantidad de movimiento para predecir el esfuerzo de cortadura en la pared, la resistencia de fricción y el espesor de estas capas. Dichas aproximaciones sugieren cómo eliminar determinados términos pequeños de las ecuaciones de Navier Stokes, obteniendo las ecuaciones de la capa límite de Prandtl para flujos laminares y turbulentos. En la Sección 7.4 resolvimos las ecuaciones de capa límite para obtener expresiones muy precisas para flujos sobre placas planas a altos números de Reynolds. Se incluyeron los efectos de la rugosidad de la pared, y en la Sección 7.5 proporcionamos una breve introducción a las consecuencias de la presencia de gradientes de presión. Se mostró que un gradiente de presiones desfavorable (que decelera el fluido) provoca la separación del flujo: la capa límite se desprende de la superficie del cuerpo y se forma una estela ancha de baja presión.

La teoría de la capa límite falla para flujos separados, que generalmente se estudian mediante experimentos o CFD. La Sección 7.6 proporcionó datos acerca de los coeficientes de resistencia de distintas formas de cuerpos bidimensionales y tridimensionales. El capítulo terminó con una breve discusión acerca de las fuerzas de sustentación generadas por distintos cuerpos sustentadores, como perfiles e hidroalas. Los perfiles también están afectados por separación o *entrada en pérdida* a altos ángulos de ataque.

Problemas

La mayoría de los problemas propuestos aquí son bastante sencillos. Los más difíciles, o de final abierto, están marcados con un asterisco. Para resolver los problemas marcados con un icono EES se recomienda el uso del Resolvedor de Ecuaciones de Ingeniería (EES, *Engineering Equation Solver*), mientras que los problemas señalados con un disquete pueden requerir el uso de un ordenador. Los problemas estándar de fin de capítulo P7.1 a P7.125 (ordenados por temas en la lista de abajo) están seguidos por los problemas conceptuales C7.1 a C7.12, problemas de examen de fundamentos de ingeniería (FE, *Fundamentals of Engineering*) FE7.1 a FE7.10, los problemas extensos PE7.1 a PE7.5 y el proyecto de diseño D7.1.

Distribución de los problemas

Sección	Tema	Problemas
7.1	Número de Reynolds y geometría	P7.1-P7.5
7.2	Métodos integrales en la teoría de la capa límite	P7.6-P7.12
7.3	Ecuaciones de capa límite	P7.13-P7.15
7.4	Flujo laminar sobre una placa plana	P7.16-P7.29
7.4	Flujo turbulento sobre una capa plana	P7.30-P7.46
7.5	Capa límite con gradiente de presión	P7.47-P7.51
7.6	Resistencia de cuerpos	P7.52-P7.114
7.6	Cuerpos sustentadores: perfiless	P7.115-P7.125

P7.1 Para un flujo a 20 m/s sobre una placa plana delgada, calcule la distancia x desde el borde de ataque a la que el espesor de la capa límite es 1 mm o 10 cm para (*a*) aire y (*b*) agua a 20 °C y 1 atm.

P7.2 Aire equivalente al de una altura estándar de 4000 m fluye a 450 mi/h sobre un ala con un espesor de 18 cm, una cuerda de 1,5 m y una envergadura de 12 m. ¿Cuál es el valor adecuado del número de Reynolds para correlar sustentación y resistencia en este ala?. Razone su respuesta.

P7.3 Para la validez de la Ecuación (7.1*b*) se considera que la capa límite de la placa es turbulenta desde el borde de ataque. Describa un procedimiento para determinar el espesor de la capa límite de forma más precisa cuando el flujo es laminar hasta un punto donde se alcanza $\mathrm{Re}_{x,\mathrm{tr}}$ y turbulento aguas abajo. Aplique este procedimiento al cálculo del espesor de la capa límite sobre una placa plana en x = 1,5 m, en un flujo de aire a 40 m/s, 20 °C y 1 atm. Compare su resultado con el valor de la Ecuación (7.1*b*). Considere $\mathrm{Re}_{x,\mathrm{tr}} \Xi 1{,}2 \times 10^6$.

P7.4 Una esfera de cerámica lisa (S = 2,6) está inmersa en un flujo de agua a 20 °C y 25 cm/s. ¿Cuál es el diámetro de la esfera si se encuentra en (*a*) un movimiento lento, $\mathrm{Re}_d = 1$, o (*b*) la transición a la turbulencia, $\mathrm{Re}_d = 250.000$?

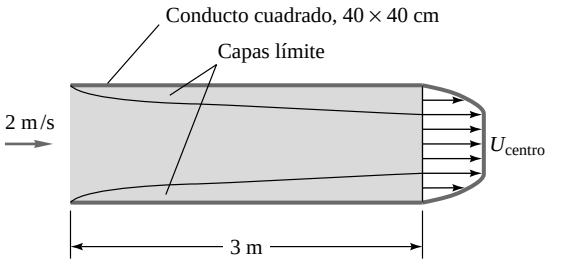
P7.5 Desde un depósito fluye aceite SAE 30 a 1,8 ft^3/s y 20 °C por un tubo de 6 in de diámetro. Utilice la teoría de la placa plana para estimar la distancia x a la que la capa límite alcanza el centro del tubo. Compare los resultados con la Ecuación (6.5) y proporcione alguna explicación para las diferencias.

P7.6 Para la capa límite laminar de perfil parabólico dado por la Ecuación (7.3), determine el factor de forma H y compare con el resultado exacto de Blasius, Ecuación (7.31).

P7.7 Aire a 20 °C y 1 atm entra en un conducto cuadrado de 40 cm de lado, como se muestra en la Figura P7.7. Empleando el concepto de «espesor de cantidad de movimiento» de la Figura 7.4, estime (*a*) la velocidad

www.elsolucionario.net

media y (*b*) la presión media en el centro del flujo en la posición $x = 3$ m. (*c*) ¿Cuál es el gradiente medio, en Pa/m, en esta sección?



P7.7

P7.8 Sobre una placa plana fluye aire, $\rho = 1{,}2$ kg/m^3 y $\mu = 1{,}8 \times 10^{-5}$ kg/(m · s), a 10 m/s. En el borde de salida de la placa se mide el siguiente perfil de velocidades:

y, mm	0	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
u, m/s	0	1,75	3,47	6,58	8,70	9,68	10,0	10,0

Si la superficie superior tiene un área de 0,6 m^2, estime, usando conceptos de la ecuación de la cantidad de movimiento, la resistencia de fricción, en N, de la superficie superior.

P7.9 Repita el análisis integral de la Sección 7.2 para una placa plana reemplazando el perfil parabólico, Ecuación (7.6), por el perfil sinusoidal más preciso:

$$\frac{u}{U} = \operatorname{sen}\frac{\pi y}{2\delta}$$

Calcule estimaciones de cantidad de movimiento para c_f, θ/x, δ^*/x y H.

P7.10 Repita el Problema P7.9 usando el perfil polinómico sugerido por K. Polhausen en 1921:

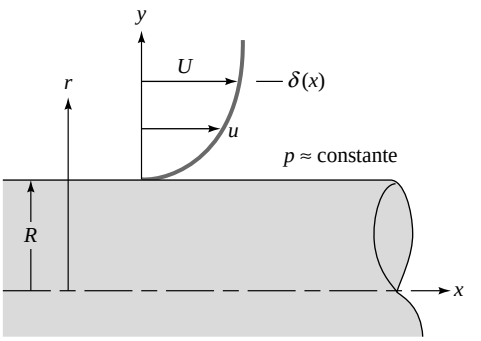
$$\frac{u}{U} = 2\frac{y}{\delta} - 2\frac{y^3}{\delta^3} + \frac{y^4}{\delta^4}$$

¿Satisface este perfil la condición de contorno de flujo laminar sobre placa plana?

P7.11 Sobre una placa plana afilada fluye aire a 20 °C y 1 atm, con una velocidad de 2 m/s. Suponiendo que el análisis de Kármán del perfil parabólico de velocidades, Ecuaciones (7.6-7.10), es suficientemente preciso, calcule (*a*) la velocidad local u y (*b*) el esfuerzo de cortadura local τ en la posición $(x, y) = (50 \text{ cm}, 5 \text{ mm})$.

P7.12 El perfil de velocidades $u/U = 1 - \exp(-4{,}605y/\delta)$ es una curva suave con $u = 0$ en $y = 0$ y $u = 0{,}99U$ en $y = \delta$, por lo que podría parecer un buen sustituto para el perfil parabólico de la Ecuación (7.3). Aun así, cuando este nuevo perfil se emplea en el análisis integral de la Sección 7.3, obtenemos el pésimo resultado $\delta/x = 9{,}2/\text{Re}_x^{1/2}$, que es un 80 por 100 superior. ¿Cuál es el motivo de esta falta de precisión? (*Indicación*: la respuesta se obtiene evaluando la ecuación de la cantidad de movimiento laminar (7.19*b*) en la pared, $y = 0$)

P7.13 Obtenga una forma modificada de las ecuaciones de la capa límite laminar (7.19) para el caso de flujo axilsimétrico alrededor de un cilindro circular de radio constante R, como en la Figura P7.13. Considere los dos casos especiales (*a*) $\delta \ll R$ y (*b*) $\delta = R$. ¿Cuáles son las condiciones de contorno adecuadas?



P7.13

P7.14 Demuestre que la distribución de velocidades

$$u = U_0(1 - e^{Cy}) \qquad v = v_0 < 0$$

de un flujo laminar bidimensional con $dp/dx = 0$ es solución exacta de las ecuaciones de capa límite (7.19). Encuentre el valor de la constante C en función de los parámetros del flujo. ¿Se satisfacen las condiciones de contorno? ¿Qué puede representar este flujo?

P7.15 Discuta cuándo las ecuaciones de capa límite (7.19) con las condiciones de contorno (7.20) aceptan como solución exacta el flujo laminar incompresible completamente desarrollado entre las placas paralelas, Ecuación (4.143) y Figura 4.16*b*. ¿En qué sentido los flujos en conductos son también flujos de capa límite?

P7.16 Una placa delgada de 55 por 110 cm está inmersa en una corriente de 6 m/s de aceite SAE 10 a 20 °C. Calcule la resistencia de fricción si la corriente es paralela (*a*) al lado largo o (*b*) al lado corto de la placa.

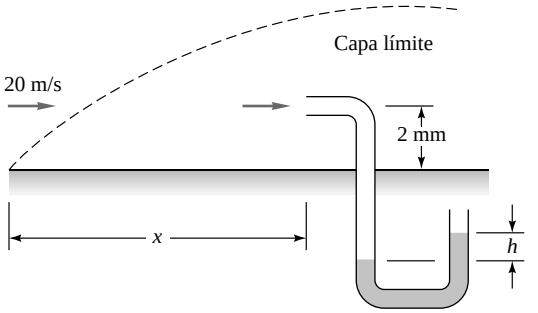
P7.17 Helio a 20 °C y baja presión fluye alrededor de una placa delgada de 1 m de longitud y 2 m de anchura. Se desea que la resistencia de fricción de la placa sea de 0,5 N. ¿Cuál es la presión adecuada para el helio si $U = 35$ m/s?

P7.18 La respuesta al Problema P7.11 es $u = 1{,}44$ m/s y $\tau = 0{,}0036$ Pa en $x = 50$ cm e $y = 5$ mm. (No se la diga a sus compañeros que aún estén trabajando en el Problema P7.11). Repita el mismo problema pero usando la solución exacta de Blasius para la capa límite sobre placa plana.

P7.19 Programe un método para resolver numéricamente la ecuación de Blasius para una placa plana (7.22) con las condiciones de la Ecuación (7.23). Para comenzar la resolución necesitará un valor inicial de la derivada segunda $f''(0)$, que está comprendida entre 0,2 y 0,5. Conciba un esquema iterativo que comience con un valor $f''(0) = 0{,}2$ y converja hacia el valor correcto. Represente $u/U = f'(\eta)$ y compare con la Tabla 7.1.

www.elsolucionario.net

P7.20 Aire a 20 °C y 1 atm fluye a 20 m/s alrededor de la placa plana de la Figura P7.20. Un tubo de pitot a 2 mm de la pared está conectado a un manométro que funciona con aceite rojo Meriam, S = 0,827, y que indica h = 16 mm. Emplee estos datos para determinar la posición x del tubo de pitot. Suponga flujo laminar.



P7.20

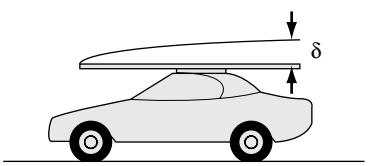
P7.21 Para el experimento de la Figura P7.20, suponga que la velocidad de la corriente incidente es desconocida y que se desplaza el tubo de pitot a través de la capa límite de aire a 1 atm y 20 °C. El fluido manométrico es aceite rojo Meriam, y se obtienen las siguientes mediciones:

y, mm	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
h, mm	1,2	4,6	9,8	15,8	21,2	25,3	27,8	29,0	29,7	29,7

Usando exclusivamente estas mediciones (sin emplear la teoría de Blasius) estime (*a*) la velocidad de la corriente, (*b*) el espesor de la capa límite, (*c*) el esfuerzo de cortadura en la pared y (*d*) la resistencia total de fricción entre el borde de ataque y la posición del tubo de pitot.

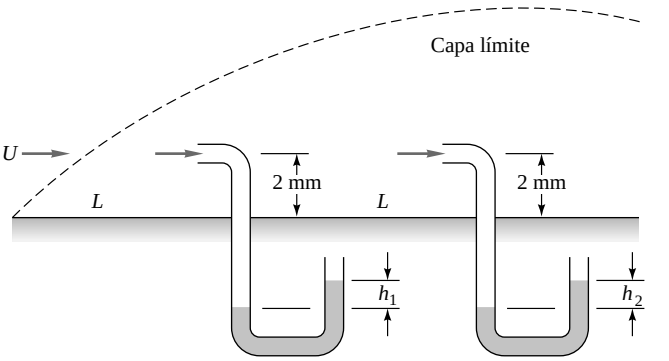
P7.22 Para el problema de Blasius de la placa plana, Ecuaciones (7.21) a (7.23), ¿existe una función de corriente bidimensional $\psi(x, y)$? En caso afirmativo, determine la forma *adimensional* de ψ, considerando $\psi = 0$ en la pared, $y = 0$.

P7.23 Suponga que adquiere una lámina de madera contrachapada de 4 por 8 ft y la coloca en la baca de su automóvil (véase la Figura P7.23). Conduce a 35 mi/h. (*a*) Suponiendo que el tablero está perfectamente alineado con la corriente, ¿de qué espesor es la capa límite al final del tablero? (*b*) Estime la resistencia sobre el tablero si la capa límite permanece laminar. (*c*) Estime la resistencia del tablero si la capa límite es turbulenta (suponga que la madera es lisa), y compare los resultados con los de la capa límite laminar.



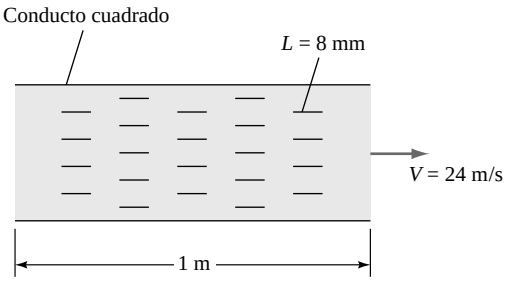
P7.23

***P7.24** Aire a 20 °C y 1 atm fluye en régimen laminar alrededor de la placa de la Figura P7.24. Se dispone de dos tubos de pitot equiespaciados, cada uno a 2 mm de la pared. El fluido manométrico es agua a 20 °C. Si U = 15 m/s y L = 50 cm, determine los valores de las lecturas manométricas h_1 y h_2 en mm.



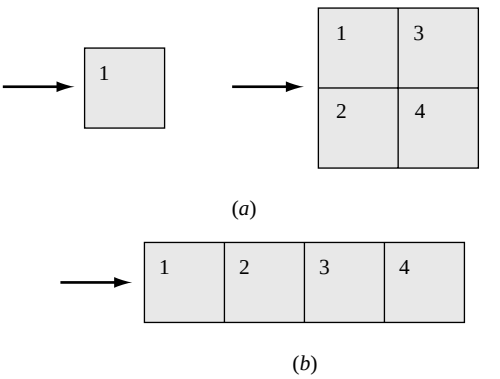
P7.24

P7.25 Considere el conducto liso de sección cuadrada de 10 cm de lado de la figura P7.25. El fluido es aire a 20 °C y 1 atm con una velocidad V_{med} = 24 m/s. Se desea incrementar la pérdida de carga en el metro de conducto añadiendo placas planas de 8 mm de longitud, como se muestra en la figura. (*a*) Estime la pérdida de carga en el conducto sin placas. (*b*) Estime cuántas placas son necesarias para generar una pérdida de carga adicional de 100 Pa.



P7.25

P7.26 Considere una capa límite laminar alrededor de la configuración de placas planas cuadradas de la Figu-



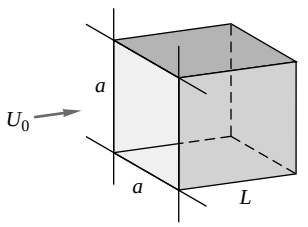
P7.26

www.elsolucionario.net

ra P7.26. Comparada con la resistencia de fricción de la placa 1 aislada, ¿cómo de grandes son las resistencias de las cuatro placas en las configuraciones (*a*) y (*b*)? Explique los resultados.

***P7.27** Un disco liso y delgado de diámetro D está inmerso en una corriente uniforme de velocidad U. Suponiendo flujo laminar y empleando la teoría de placa plana como guía, desarrolle una fórmula aproximada para la resistencia del disco.

P7.28 Los rectificadores de flujo son mallas de conductos estrechos que se instalan en los túneles de viento para eliminar las componentes de la velocidad en el plano transversal a la corriente principal. Pueden idealizarse como conductos de sección cuadrada construidos mediante placas planas, como se muestra en la Figura P7.28. La sección transversal es a por a y la longitud de las placas es L. Suponiendo flujo laminar alrededor de la malla de $N \times N$ cajas, obtenga una fórmula para (*a*) la resistencia total del conjunto y (*b*) la pérdida de carga efectiva a través de la malla.



P7.28

P7.29 Con los rectificadores de flujo del Problema P7.28 construimos una malla de 20×20 cajas con $a = 4$ cm y $L = 25$ cm. Si la corriente incidente tiene $U_0 = 12$ m/s y el fluido es aire en condiciones estándar a nivel de mar, estime (*a*) la resistencia total de la malla y (*b*) la pérdida de carga a través de la misma. Compare con la Sección 6.8.

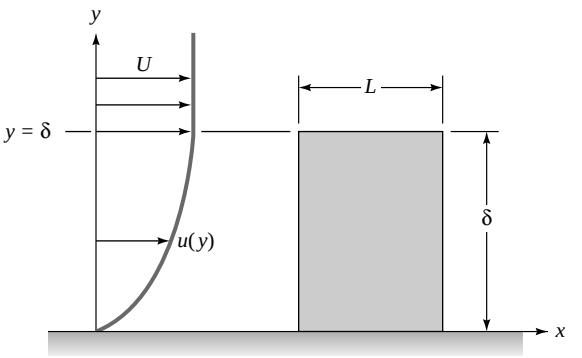
P7.30 Repita el Problema P7.16 si el fluido es agua a 20 °C y la superficie de la placa es lisa.

P7.31 La quilla de un velero tiene una longitud de 3 ft paralela a la corriente y sobresale 7 ft por debajo del casco. Empleando la teoría de placa plana para superficies lisas, estime la resistencia si el barco se desplaza a 10 nudos en agua de mar a 20 °C. Suponga $\mathrm{Re}_{x,\mathrm{tr}} = 5 \times 10^5$.

P7.32 Una placa plana de longitud L y altura δ se coloca sobre una pared paralelamente a la capa límite incidente, como se muestra en la Figura P7.32. Suponga que el flujo alrededor de la placa es totalmente turbulento y que el flujo incidente sigue la ley potencial:

$$u(y) = U_0 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}$$

Utilizando una aproximación bidimensional por secciones paralelas a la pared, obtenga una fórmula para el coeficiente de resistencia de la placa. Compare este resultado con la resistencia de la misma placa inmersa en una corriente incidente uniforme de velocidad U_0.



P7.32

P7.33 En 1927 Prandtl realizó un análisis alternativo del flujo turbulento alrededor de una placa plana, aplicando una fórmula para el esfuerzo de cortadura en la pared en tuberías:

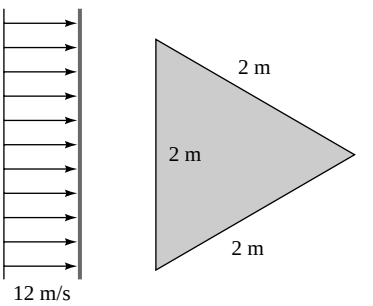
$$\tau_w = 0{,}0225 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U \delta} \right)^{1/4}$$

Muestre que esta fórmula puede combinarse con las Ecuaciones (7.33) y (7.40) para obtener las siguientes relaciones para flujos turbulentos alrededor de placas planas:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0{,}37}{\mathrm{Re}_x^{1/5}} \quad c_f = \frac{0{,}0577}{\mathrm{Re}_x^{1/5}} \quad C_D = \frac{0{,}072}{\mathrm{Re}_L^{1/5}}$$

Estas fórmulas están limitadas a valores de Re_x entre 5×10^5 y 10^7.

***P7.34** Una placa delgada con forma de triángulo equilátero se coloca paralela a una corriente incidente de agua a 12 m/s y 20 °C, como se muestra en la Figura P7.34. Suponiendo $\mathrm{Re}_{x,\mathrm{tr}} = 5 \times 10^5$, estime la resistencia de la placa.



P7.34

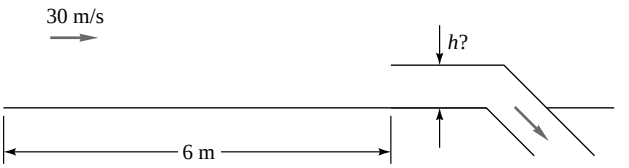
P7.35 Las soluciones al Problema P7.26 son (*a*) $F = 2{,}83F_{\mathrm{placa\text{-}1}}$ y (*b*) $F = 2{,}0F_{\mathrm{placa\text{-}1}}$. (No revele estos resultados a sus compañeros). Repita el Problema P7.26 suponiendo que la capa límite es turbulenta, y comente el notable aumento en las resistencias obtenidas.

P7.36 Un barco tiene 125 m de longitud y un área mojada de 3500 m^2. Sus hélices proporcionan una potencia máxima de 1,1 MW en agua de mar a 20 °C. Si toda la re-

www.elsolucionario.net

sistencia se debe a la fricción, estime la velocidad máxima del barco, expresada en nudos.

P7.37 Una placa plana está inmersa en una corriente de aire a 20 °C y 1 atm. Al final de la misma hay una rendija estrecha, como se muestra en la Figura P7.37. (*a*) Determine la altura *h* de la rendija si el gasto másico por unidad de envergadura (perpendicular al papel) de la misma debe ser de 4 kg/s. (*b*) Determine la resistencia por unidad de envergadura de la placa hasta la entrada a la rendija.



P7.37

P7.38 La capa límite atmosférica es bastante gruesa, pero sigue fórmulas similares a las proporcionadas por la teoría de placa plana. Considere viento a 10 m/s a una altura de 80 m sobre una playa lisa. Estime en Pa los esfuerzos de cortadura del viento sobre la playa si el aire se encuentra en condiciones estándar a nivel del mar. ¿Cuál es la velocidad del viento (*a*) a 170 cm y (*b*) 17 cm sobre el suelo?

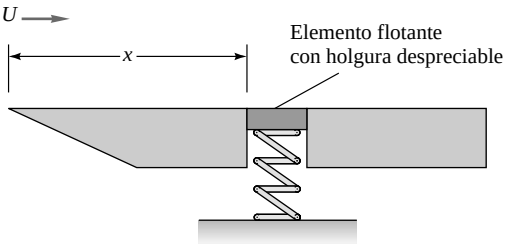
P7.39 Un hidroala de 50 cm de cuerda y 4 m de envergadura se desplaza a 28 nudos en agua de mar a 20 °C. Empleando la teoría de placa plana con $Re_{x,tr} = 5 \times 10^5$, estime su resistencia, en N, para (*a*) una superficie lisa y (*b*) una superficie rugosa, $\epsilon = 0{,}3$ mm.

P7.40 Hoerner [12, pág. 3-25] afirma que el coeficiente de resistencia de una bandera al viento, basado en el área mojada total $2bL$, es aproximadamente $C_D \approx 0{,}01 + 0{,}05L/b$, donde L es la longitud de la bandera en la dirección del viento. Los números de Reynolds del ensayo Re_L fueron superiores a 1×10^6. (*a*) Explique por qué, para $L/b \gg 1$, los valores de la resistencia son mucho mayores que los de placa plana. Determine, para aire a condiciones estándar a nivel del mar con una velocidad de 50 mi/h y un área $bL = 4$ m^2, (*b*) las dimensiones de la bandera que producen una resistencia de aproximadamente 400 N.

P7.41 Repita el Problema P7.20 con el tubo de pitot a 10 mm de la pared (una altura 5 veces mayor). Demuestre que el flujo en estas condiciones seguramente no sea laminar, y emplee la teoría de flujo turbulento sobre una pared lisa para estimar la posición x de la sonda, expresada en m.

***P7.42** Un rotor de helicóptero con cuatro palas gira a n rpm en aire de propiedades (ρ, μ). Cada pala tiene una cuerda C y se extiende desde el eje de rotación hasta una distancia R (se desprecia el tamaño de la cabeza del rotor). Suponiendo flujo turbulento desde el borde de ataque, desarrolle una estimación analítica de la potencia P necesaria para mover dicho rotor.

P7.43 En el flujo de aire a 20 °C y 1 atm alrededor de la placa plana de la Figura P7.43, los esfuerzos cortantes en la pared en la posición x son medidos mediante un *elemento móvil* (una pieza conectada a un sensor de fuerzas de presión). En $x = 2$ m, el sensor indica unos esfuerzos de cortadura de 2,1 Pa. Suponiendo flujo turbulento desde el borde de ataque, estime (*a*) la velocidad de la corriente U, (*b*) el espesor de la capa límite δ a la altura del sensor y (*c*) la velocidad de la capa límite u a 5 mm por encima del sensor.



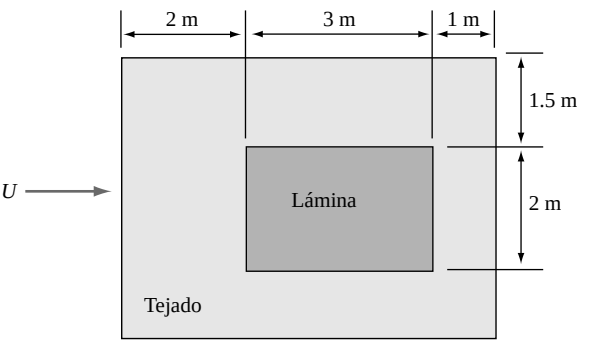
P7.43

P7.44 Amplias mediciones de los esfuerzos de cortadura en la pared y de las velocidades en flujos turbulentos de aire, realizadas en el túnel de viento de la Universidad de Rhode Island, han derivado en la siguiente correlación:

$$\frac{\tau_w^2 / \rho}{\mu^2} \approx 0{,}0207 \left(\frac{uy}{\nu} \right)^{1{,}77}$$

Por lo tanto, si y y $u(y)$ son conocidas en un punto de una capa límite sobre una placa plana, los esfuerzos de cortadura en la pared pueden ser calculados directamente. Si la respuesta a la pregunta (*c*) del Problema P7.43 es $u \approx 26{,}3$ m/s, determine los esfuerzos de cortadura y compare con los resultados del Problema P7.43. Razone la respuesta.

P7.45 Una lámina que pesa 90 N está colocada sobre un tejado, tal como se muestra en la Figura P7.45. Suponga aire a 20 °C y 1 atm. Si el coeficiente de resistencia entre la lámina y el tejado es $\sigma \approx 0{,}12$, ¿qué velocidad tiene que tener el viento para que el aire genere suficiente fricción como para desplazar la lámina?



P7.45

P7.46 Un barco tiene 150 m de longitud y un área mojada de 5000 m^2. Si hay percebes incrustados, el barco necesita una potencia de 7000 CV para superar la resistencia de fricción cuando navega a 15 nudos en agua de mar a 20 °C. ¿Cuál es la rugosidad media de los percebes? ¿A qué velocidad se movería el barco si la superficie

www.elsolucionario.net

del casco fuera lisa y se aplicara la misma potencia? Desprecie la resistencia por formación de olas.

P7.47 De forma similar al Ejemplo 7.5, Howarth también propuso el perfil de velocidades $U = U_0(1 - x^2/L^2)$ para gradientes adversos de presión, y calculó el punto de separación $x_{sep}/L = 0{,}271$ mediante desarrollos en serie. Calcule el punto de separación con el método de Thwaites y compare los resultados.

P7.48 En 1957 H. Görtler propuso para gradientes adversos de presión

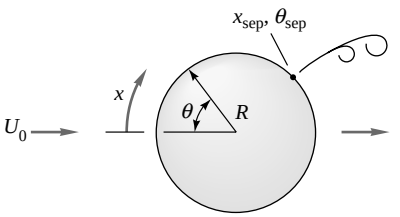
$$U = \frac{U_0}{(1 + x/L)^n}$$

y calculó el punto de separación para flujo laminar con $n = 1$, obteniendo $x_{sep}/L = 0{,}159$. Compare con el método de Thwaites, suponiendo $\theta_0 = 0$.

P7.49 Basándose únicamente en su conocimiento de la teoría de placa plana y de los conceptos de gradiente de presión favorable y adverso, razone la dirección del flujo (derecha o izquierda) que generará menor resistencia total (fricción + presión) en el cuerpo esbelto de la Figura P7.49.

P7.49

***P7.50** Para el flujo alrededor de un cilindro de radio R, véase la figura P7.50, la distribución teórica de velocidades en el caso no viscoso es $U = 2U_0$ sen (x/R), donde U_0 es la velocidad de la corriente incidente y x es la longitud de arco medida desde el punto de remanso. Calcule el punto de separación para el caso laminar x_{sep} y θ_{sep} empleando el método de Thwaites, y compare con la solución numérica $x_{sep}/R = 1{,}823$ ($\theta_{sep} = 104{,}5°$) obtenida por R. M. Terrill en 1960.

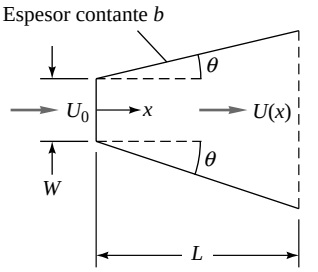


P7.50

P7.51 Considere el difusor de paredes planas de la Figura P7.51, similar al de la Figura 6.26*a* con anchura b constante. Si x es la distancia desde la entrada y las capas límite son delgadas, demuestre que la velocidad en el centro del difusor $U(x)$ viene dada por

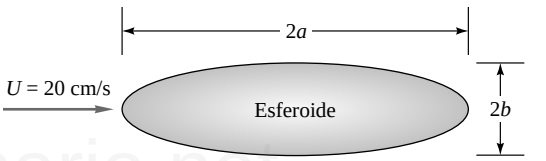
$$U = \frac{U_0}{1 + (2x \text{ tg } \theta)/W}$$

donde W es la altura de la entrada al difusor. Emplee esta distribución de velocidades y el método de Thwaites para calcular el ángulo de inclinación de la pared θ para el cual el punto de separación laminar se produce en la salida del difusor, siendo la longitud del mismo $L = 2W$. Tenga en cuenta que el resultado es independiente del número de Reynolds.



P7.51

P7.52 Clift et al. [46] proporcionaron la fórmula $F = (6\pi)(4 + a/b)\mu Ub$ para la resistencia de un esferoide en *movimiento lento*, como se muestra en la Figura P7.52. El semiespesor b es de 4 mm. Si el fluido es aceite SAE 50W a 20 °C, (*a*) compruebe que $\text{Re}_b < 1$ y (*b*) estime la longitud del elipsoide si la resistencia es de 0,02 N.



P7.52

P7.53 De la Tabla 7.2, el coeficiente de resistencia de una placa perpendicular a una corriente incidente es aproximadamente 2,0. Sean las condiciones de la corriente U_∞ y p_∞. Si la presión media delante de la placa es aproximadamente igual a la presión de remanso de la corriente libre, ¿cuál es la presión media en la parte posterior de la placa?

P7.54 Una chimenea a nivel del mar tiene 2 m de diámetro y 40 m de altura. Cuando está sometida a una tormenta con vientos de 50 mi/h, ¿cuál es el momento flector en la base debido al viento?

P7.55 Un barco arrastra un cilindro, de 1,5 m de diámetro y 22 m de longitud, sumergido en agua dulce a 20 °C con una velocidad de 5 m/s. Estime la potencia necesaria, en kW, para arrastrar el cilindro si éste está (*a*) paralelo o (*b*) perpendicular a la dirección del movimiento.

P7.56 Un vehículo lleva un cartel en su parte superior con las dimensiones indicadas en la Figura P7.56. Si el cartel es muy delgado y el vehículo se desplaza a 65 mi/h, (*a*) estime las fuerzas sobre el cartel sin viento cruzado y (*b*) discuta el efecto de la presencia de viento cruzado.

P7.57 En un puente colgante costero, el cable que une las torres tiene 60 cm de diámetro y 90 m de longitud. Estime la fuerza de resistencia total sobre este cable en presencia de vientos de 50 mi/h. ¿Son condiciones de flujo laminar?

www.elsolucionario.net

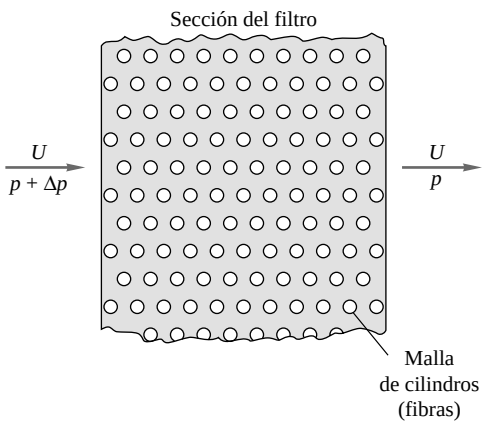
P7.56

P7.58 Un prisma de sección rectangular de 5 cm de ancho por 30 cm de largo está inmerso en una corriente de agua a 20 °C y 12 m/s, paralela al lado largo del rectángulo. Estime la fuerza de resistencia por unidad de longitud del prisma si el rectángulo (*a*) tiene las caras planas o (*b*) tiene un morro redondeado.

***P7.59** Un ciclista puede pedalear en una carretera nivelada sin viento a 10 m/s. La resistencia de rodadura de la bicicleta es de 0,80 N · s/m, es decir, 0,80 N de fuerza por m/s de velocidad. Para el conjunto ciclista más bicicleta sabemos que $C_DA = 0{,}422$ m^2. La masa del ciclista es de 80 kg, y la de la bicicleta es de 15 kg. Si el ciclista se encuentra con un viento de cara de 5,0 m/s, (*a*) desarrolle una ecuación para la velocidad del ciclista. [*Indicación*: se obtiene una ecuación cúbica para *V*]. (*b*) Obtenga el valor de *V*. (*c*) ¿Por qué la solución no es sencillamente 10 – 5,0 = 5,0 m/s, como se podría suponer en un principio?.

P7.60 Una red de pesca está compuesta por cuerdas de 1 mm de diámetro, trenzadas formando cuadrados de 1 cm de lado. Estime la resistencia de 1 m^2 de dicha red cuando es arrastrada perpendicularmente a una corriente de 3 m/s en agua de mar. ¿Qué potencia es necesaria para arrastrar 400 ft^2 de dicha red?

P7.61 Un filtro puede idealizarse como una malla de fibras cilíndricas normales a un flujo, como se muestra en la Figura P7.61. Suponiendo que las fibras están uniformemente distribuidas y que tienen los coeficientes de resistencia dados en la Figura 7.16*a*, obtenga una expresión aproximada para la pérdida de carga Δp a través de un filtro de longitud *L*.



P7.61

P7.62 Una chimenea de sección cuadrada situada a nivel del mar tiene 52 m de altura. Sus cimientos pueden resistir una fuerza lateral máxima de 90 kN. Si la chimenea tiene que aguantar vientos de 90 mi/h, calcule la anchura máxima de la misma.

P7.63 La Universidad de Keio, en Japón, ha ensayado un prototipo de coche eléctrico de 22 ft de longitud, equipado con ocho motores eléctricos que proporcionan 590 CV. La velocidad de crucero del «Kaz» es de 180 mi/h (véase *Popular Science*, agosto 2001, pág. 15). Si el coeficiente de resistencia vale 0,35 y el área frontal es de 26 ft^2, calcule el porcentaje de la potencia que consume la resistencia del aire a nivel del mar.

P7.64 Un paracaidista salta desde un avión empleando un paracaídas de 8,5 m de diámetro en atmósfera estándar. La masa total del conjunto es de 90 kg. Suponiendo que el paracaídas está abierto y el movimiento es casi estacionario, estime el tiempo de caída desde 2000 a 1000 m de altura.

P7.65 A medida que los soldados se hacen más grandes y las mochilas más pesadas, el conjunto paracaidista más carga puede llegar a pesar 400 lbf. El paracaídas estándar de 28 ft descendería demasiado rápido como para ser seguro. El U.S. Army Natick Center ha desarrollado el paracaídas XT-11, con mayor resistencia y menor porosidad (véase, http://www.natick.army.mil). Este paracaídas tiene una velocidad de descenso a nivel del mar de 16 ft/s con una carga de 400 lbf. (*a*) Determine el coeficiente de resistencia del XT-11, y (*b*) Determine la velocidad de descenso del paracaídas estándar a nivel del mar con dicha carga.

P7.66 Una esfera de densidad ρ_e y diámetro *D* se deja caer en un fluido de densidad ρ y viscosidad μ. Suponiendo que el coeficiente de resistencia C_{d_0} es constante, obtenga una ecuación diferencial para la velocidad de caída *V*(*t*) y demuestre que la solución es

$$V = \left(\frac{4gD(S\Phi 1)}{3C_{d_0}}\right)^{1/2} \text{tgh } Ct$$

$$C = \left(\frac{3gC_{d_0}(S\Phi 1)}{4S^2D}\right)^{1/2}$$

donde $S = \rho_e/\rho$ es el peso específico del material de la esfera.

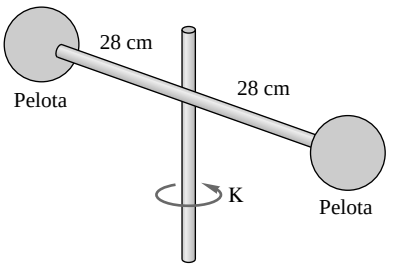
P7.67 Un ciclista profesional puede desarrollar una potencia de medio caballo de vapor durante periodos largos de tiempo. Si se encuentra a nivel del mar, estime la velocidad que puede mantener. Desprecie la resistencia de rodadura.

P7.68 Una pelota de béisbol pesa 145 g y tiene 7,35 cm de diámetro. Se deja caer con velocidad inicial nula desde una torre de 35 m de altura a nivel del mar. Suponiendo que el coeficiente de resistencia corresponde al de flujo laminar, estime (*a*) la *velocidad límite* y (*b*) si alcanzará el 99 por 100 de dicha velocidad antes de llegar al suelo.

P7.69 Dos pelotas de béisbol como la del problema P7.68 están unidas a una barra de 7 mm de diámetro y 56 cm de longitud, como aparece en la Figura P7.69. ¿Qué

www.elsolucionario.net

potencia, en kW, es necesaria para mantener el sistema girando a 400 rpm? Incluya la resistencia de la barra y considere condiciones estándar a nivel del mar.



P7.69

P7.70 Una pelota de béisbol como la del problema P7.68 es bateada con un ángulo de 45° y velocidad inicial de 98 mi/h. Despreciando la rotación de la pelota y la sustentación, estime la distancia horizontal recorrida (*a*) despreciando la resistencia y (*b*) teniendo en cuenta la resistencia en una solución numérica (usando un ordenador) con un número de Reynolds de transición $Re_{D,tr} = 2{,}5 \times 10^5$.

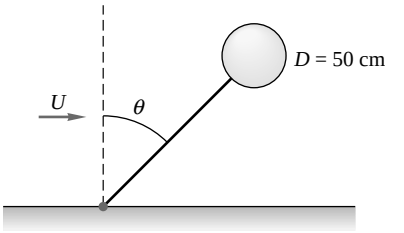
P7.71 Una pelota de fútbol americano pesa 0,91 lbf y tiene la forma de un elipsoide con 6 in de diámetro y 12 in de longitud (Tabla 7.3). Se lanza con un ángulo de 45° y una velocidad inicial de 80 ft/s. Despreciando la rotación de la pelota y la sustentación y asumiendo flujo turbulento, estime la distancia horizontal recorrida (*a*) despreciando la resistencia, (*b*) teniendo en cuenta la resistencia mediante un modelo numérico (usando un ordenador)

P7.72 Un tanque de sedimentación del sistema municipal de suministro de agua tiene 2,5 m de profundidad, y agua a 20 °C fluye continuamente a una velocidad de 35 cm/s. Estime la longitud mínima del tanque para asegurar que todas las partículas (S = 2,55) con diámetros mayores que (*a*) 1 mm y (*b*) 100 μm sedimentarán en su interior.

P7.73 Un globo tiene 4 m de diámetro y en su interior hay helio a 125 kPa y 15 °C. El material del globo y su carga de pago pesan 200 N, sin incluir el helio. Estime (*a*) la velocidad límite de ascenso en atmósfera estándar a nivel del mar, (*b*) la altura en la que el globo alcanza el equilibrio (despreciando vientos) y (*c*) el diámetro mínimo (< 4 m) para el cual el globo apenas se levantaría del suelo en aire en condiciones estándar a nivel del mar.

P7.74 Debido a la dificultad de definir un «área frontal» para una motocicleta, se suele medir el producto del coeficiente de resistencia por el área (esto es, C_DA), con unidades de área. Hoerner [12] indica que el C_DA de una motocicleta típica, incluyendo al piloto, es de aproximadamente 5,5 ft^2. La resistencia de rodadura es normalmente del orden de 0,7 lbf por mi/h de velocidad. Con estos valores, estime la velocidad máxima a nivel del mar (en mi/h) de la nueva Harley-Davidson V-Rod™, cuyos motores con refrigerante líquido producen 115 hp.

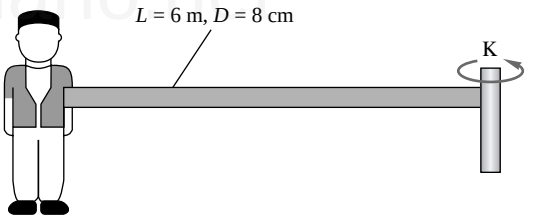
P7.75 El globo relleno de helio de la Figura P7.75 está atado con una cuerda de peso y resistencia despreciables, rodeado por aire a 20 °C y 1 atm. El diámetro del globo es de 50 cm y el material del globo pesa 0,2 N, sin incluir el helio. La presión del helio es de 120 kPa. Estime el ángulo de inclinación θ si la velocidad U de la corriente incidente es de (*a*) 5 m/s o (*b*) 20 m/s.



P7.75

P7.76 Amplíe el Problema P7.75 para hacer una gráfica suave del ángulo de inclinación θ frente a la velocidad de la corriente U en el rango $1 < U < 12$ mi/h. (Se recomienda el empleo de una hoja de cálculo para esta tarea). Comente la efectividad de este sistema para medir la velocidad del aire.

P7.77 Para medir la resistencia de una persona de pie, sin violar sus derechos humanos, se coloca un maniquí a tamaño real al final de una barra de 6 m de longitud y se somete una velocidad de rotación de Ω = 80 rpm, como se muestra en la Figura P7.77. La potencia necesaria para mantener el movimiento es de 60 kW. Incluyendo la resistencia de la barra, estime el C_DA del maniquí, en m^2.



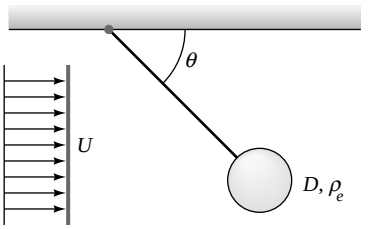
P7.77

P7.78 Aplique el resultado del Problema P7.61 a un filtro consistente en fibras de 300 μm de diámetro con una densidad de 250 fibras por centímetro cuadrado, como en la Figura P7.61. Para aire a 20 °C y 1 atm con una velocidad de 1,5 m/s, estime la caída de presión si el filtro tiene un grosor de 5 cm.

P7.79 Suponga que una partícula de polvo radiactivo es aproximadamente una esfera de densidad 2400 kg/m^3. Determine cuánto tiempo, expresado en días, tardará dicha partícula en sedimentarse a nivel del mar desde una altura de 12 km si el diámetro de la partícula es de (*a*) 1 μm o (*b*) 20 μm.

P7.80 Una esfera sujeta por un hilo e inmersa en una corriente de velocidad U cuelga con un ángulo θ, como se muestra en la figura P7.80. Obtenga una ecuación para θ en función de las propiedades del flujo y de la esfera. Determine θ si la esfera es de acero (S = 7,86) con diámetro 3 cm y el flujo es aire en condiciones estándar a nivel del mar con una velocidad de U = 40 m/s. Desprecie la resistencia del hilo.

www.elsolucionario.net



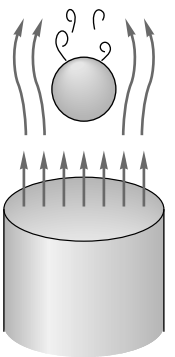
P7.80

P7.81 Un paracaídas típico del U.S. Army tiene un diámetro de 28 ft. Para una carga de pago de 80 kg, (*a*) determine la velocidad límite a 1000 m de altura en atmósfera estándar. Para la misma velocidad y carga de pago, ¿qué área sería necesaria si se empleara una placa plana, (*b*) perpendicular a la corriente o (*c*) paralela a la corriente? (Ignore el hecho de que formas planas son dinámicamente inestables en caída libre).

P7.82 El paracaidista medio sin abrir el paracaídas pesa 175 lbf y tiene un $C_DA = 9$ ft^2 totalmente extendido y 1,2 ft^2 cayendo de pie [Tabla 7.3]. Determine las velocidades límite del paracaidista a 5000 ft.

P7.83 Un coche de alta velocidad tiene un coeficiente de resistencia de 0,3 y un área frontal de 1 m^2. Para frenar el coche de 80 a 40 m/s en 8 s se emplea un paracaídas. Determine el diámetro del paracaídas y la distancia que recorrerá durante ese tiempo. Tómese m = 2000 kg.

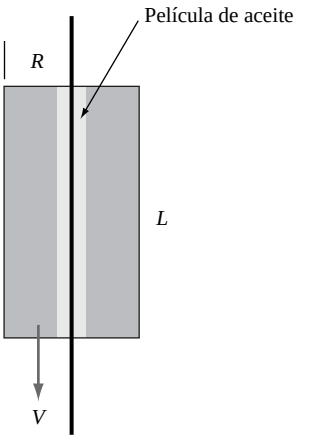
P7.84 Una pelota de ping-pong pesa 2,6 g y tiene un diámetro de 3,8 cm. Puede sostenerse en el chorro de aire de la salida de una aspiradora, como se muestra en la Figura P7.84. Para condiciones estándar a nivel del mar, determine la velocidad de salida del chorro.



P7.84

***P7.85** Un cilindro de aluminio (S = 2,7) se desliza concéntricamente a un cable tensado de 1 mm de diámetro, Figura P7.85. La longitud del cilindro es L = 8 cm, y su radio R = 1 cm. El orificio de 2 mm de diámetro en el cilindro está lubricado con aceite SAE 30 a 20 °C. Estime la velocidad límite de caída V del cilindro, (*a*) despreciando y (*b*) incluyendo la resistencia del aire. Suponga aire a 20 °C y 1 atm.

P7.86 Hoerner [12, págs. 3-25] afirma que el coeficiente de resistencia de una bandera con una relación de aspecto 2:1 es de 0,11, basado en la forma en planta de la misma. La Universidad de Rhode Island tiene un mástil de aluminio de 25 m de altura y 14 cm de diámetro, y en él ondean las banderas nacional y estatal, ambas del mismo tamaño. Si el esfuerzo de fractura del aluminio es de 210 MPa, determine el tamaño máximo de las banderas si el mástil debe resistir un huracán con vientos de 75 mi/h (desprecie la resistencia del mástil).



P7.85

P7.87 Un trailer tiene un $C_DA = 8$ m^2, que se reduce a 6,7 m^2 empleando un deflector aerodinámico (véase Figura 7.18*b*). Su resistencia de rodadura es de 50 N por cada milla por hora de velocidad. Calcule la potencia total necesaria a nivel del mar con y sin el deflector si el camión se desplaza a (*a*) 55 mi/h y (*b*) 75 mi/h.

P7.88 Una camioneta tiene un coeficiente de resistencia limpio $C_DA = 35$ ft^2. Estime la potencia necesaria para mover la camioneta a 55 mi/h a nivel del mar (*a*) en configuración limpia y (*b*) con el letrero de dimensiones 3 por 6 ft de la Figura P7.88 instalado. Suponga que la resistencia de rodadura es de 150 lbf.

P7.88

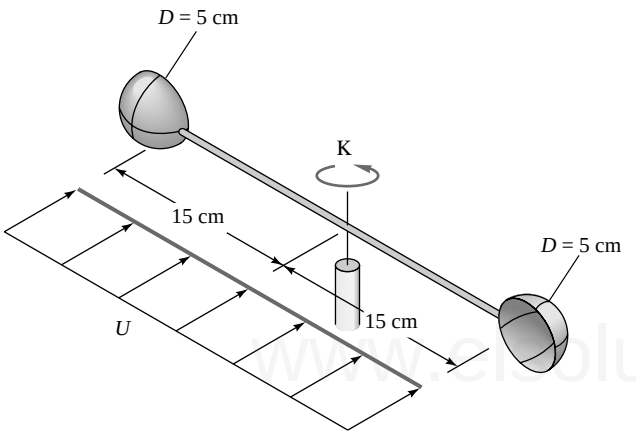
P7.89 El nuevo tren Acela de alta velocidad AMTRAK puede alcanzar 150 mi/h, lo que consigue rara vez debido al sinuoso trazado de las vías de la costa de Nueva Inglaterra. Si el 75 por 100 de la potencia consumida a

www.elsolucionario.net

esta velocidad es debida a la resistencia del aire, estime la potencia total consumida por el Acela.

P7.90 En el gran huracán de 1938 vientos de 85 mi/h azotaron un furgón en Providence, Rhode Island. El furgón tenía 10 ft de altura, 40 ft de longitud y 6 ft de anchura, con un margen de 4,8 ft sobre el suelo. Determine la velocidad del viento que sería necesaria para tumbar el furgón si éste pesara 40.000 lbf.

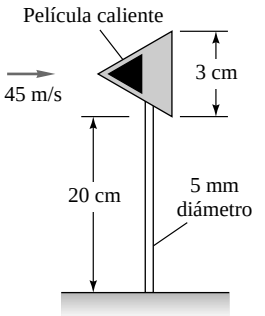
***P7.91** Un anemómetro usa dos semiesferas huecas de 5 cm de diámetro conectadas por barras de 15 cm, como se muestra en la Figura P7.91. La resistencia de las barras es despreciable y el rodamiento central tiene un momento resistente de 0,004 N · m. Realizando hipótesis simplificatorias para promediar la geometría variable en el tiempo, estime y represente la variación de la velocidad de rotación del anemómetro Ω con la velocidad del viento U en el rango $0 < U < 25$ m/s para aire en condiciones estándar a nivel del mar.



P7.91

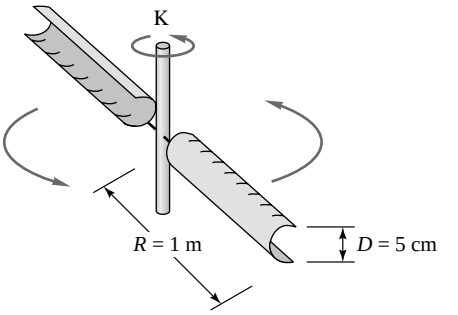
P7.92 Un automóvil de 1500 kg decelera desde 50 m/s empleando su resistencia aerodinámica $C_DA = 0{,}4$ m^2, su sistema de frenos y un paracaídas. El sistema de frenos proporciona 5000 N de resistencia. Suponiendo aire en condiciones estándar a nivel del mar, determine el diámetro del paracaídas si el automóvil debe frenar en 8 s.

P7.93 Una sonda de película caliente está montada sobre el sistema cono-barra de la Figura P7.93 en presencia de una corriente de aire de 45 m/s y a nivel del mar. Estime el ángulo máximo del cono para que el momento flector debido al viento no supere los 30 N · m en el encastre de la barra.



P7.93

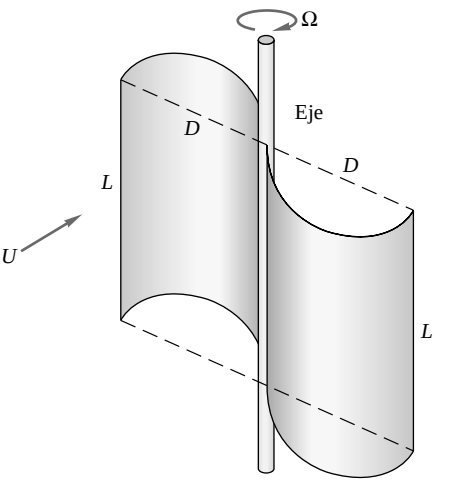
P7.94 Un mezclador giratorio consiste en dos canalones semicirculares girando alrededor de un eje, como se muestra en la Figura P7.94. Usando los datos de resistencias de la Tabla 7.2, obtenga una expresión para el par T necesario para proporcionar al mezclador una velocidad angular Ω en un fluido de densidad ρ. Suponiendo que el fluido es agua a 20 °C y que la máxima potencia disponible es de 20 kW, determine la velocidad de rotación máxima Ω en rpm.



P7.94

P7.95 Un avión que pesa 28 kN y tiene un $C_DA \equiv 5$ m^2 aterriza a 55 m/s a nivel del mar desplegando un paracaídas de 3 m de diámetro. No se aplica otro tipo de frenos. (*a*) Determine cuánto tiempo tardará el avión en reducir su velocidad a 20 m/s. (*b*) Calcule la distancia recorrida en ese tiempo.

***P7.96** Un rotor de Savonius (véase Figura 6.29*b*) puede aproximarse por los dos medios tubos abiertos de la Figura P7.96 montados sobre un eje central. Si la resistencia de cada tubo es similar a la de la Tabla 7.2, obtenga una fórmula aproximada para la velocidad de rotación Ω en función de U, D, L y las propiedades del fluido (ρ, μ).



P7.96

P7.97 Una medición sencilla de la resistencia de un automóvil puede obtenerse en una carretera nivelada un día sin viento, midiendo tiempos y velocidades del automóvil decelerando en punto muerto sin aplicar ni potencia ni frenos. Suponga resistencia de rodadura constante.

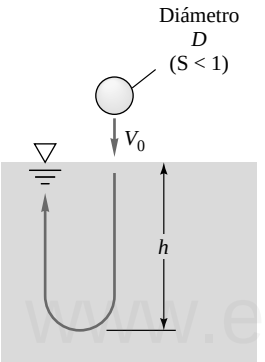
www.elsolucionario.net

Para un automóvil de 1500 kg y 2 m^2 de área frontal se obtienen las siguientes velocidades en el ensayo:

t, s	0	10	20	30	40
V, m/s	27,0	24,2	21,8	19,7	17,9

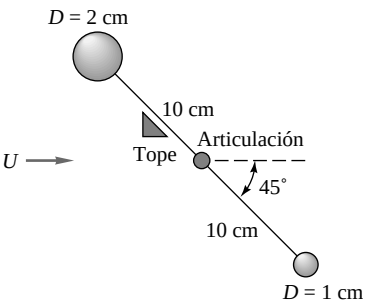
Estime (*a*) la resistencia de rodadura y (*b*) el coeficiente de resistencia. Este problema puede ser resuelto tanto por ordenador como a mano.

***P7.98** Una pelota de peso específico S < 1 introducida en agua con velocidad inicial V_0 penetrará una distancia h antes de volver a subir hacia la superficie, como se muestra en la Figura P7.98. Realice un análisis dinámico del problema suponiendo un coeficiente de resistencia constante, y obtenga una expresión para h en función de los parámetros del sistema. Para una pelota de 5 cm de diámetro con S = 0,5 y $C_D \Xi 0{,}47$, determine h si V_0 = 10 m/s.



P7.98

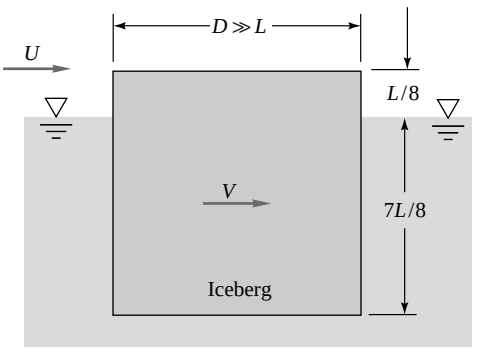
P7.99 Dos bolas de acero (S = 7,86) están conectadas por una barra delgada de peso y resistencia despreciables articulada en el centro, como se muestra en la Figura P7.99. Un tope evita que la barra gire en el sentido contrario a las agujas del reloj. Estime la velocidad del aire U para la cual la barra comienza a girar en el sentido de las agujas del reloj.



P7.99

P7.100 Un camión desciende en punto muerto y sin aplicar frenos por una pendiente de 8° a una altura estándar de 1000 m. La resistencia de rodadura es de 120 N por metro por segundo de velocidad, el área frontal del camión es de 9 m^2 y su peso 65 kN. Estime la velocidad límite de descenso (*a*) sin deflector y (*b*) con deflector.

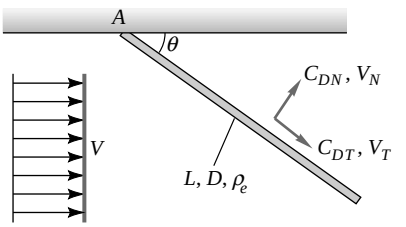
P7.101 Los icebergs pueden ser arrastrados por el viento a velocidades importantes. Podemos idealizar el iceberg como un cilindro grande y plano, $D \gg L$, con un octavo de su masa sobre la superficie del agua, tal y como muestra la Figura P7.101. Suponiendo que el agua del mar está en calma, si las fuerzas de resistencia sobre la parte superior e inferior del cilindro dependen de las velocidades relativas entre el cilindro y los fluidos, obtenga una expresión aproximada para la velocidad estacionaria del iceberg V cuando el viento sopla con velocidad U.



P7.101

P7.102 En una corriente ascendente de agua a 20 °C se introducen partículas de arena (S = 2,7) aproximadamente esféricas con diámetros variando entre 100 y 250 μm. Determine la velocidad mínima del agua que arrastrará a las partículas *hacia arriba*.

P7.103 Una barra pesada articulada en A e introducida en una corriente uniforme colgará con un *ángulo de Pode* θ, nombre debido a un análisis de L. Pode en 1951 (Figura P7.103). Suponga que el cilindro tiene un coeficiente de resistencia normal C_{DN} y tangencial C_{DT} que proporcionan las fuerzas de resistencia V_N y V_T, respectivamente. Obtenga una expresión para el ángulo de Pode como función de los parámetros del flujo y de la barra. Calcule θ para una barra de acero, L = 40 cm, D = 1 cm, colgando en aire a nivel del mar con velocidad V = 35 m/s.



P7.103

***P7.104** Suponga que el camión del Problema P7.100 está sin deflector, sin potencia y sin frenos, moviéndose en punto muerto en una carretera a nivel del mar. La velocidad inicial es de 65 mi/h. Calcule, bien en un ordenador o analíticamente, la velocidad del camión $V(t)$ y represente los resultados hasta que la velocidad

www.elsolucionario.net

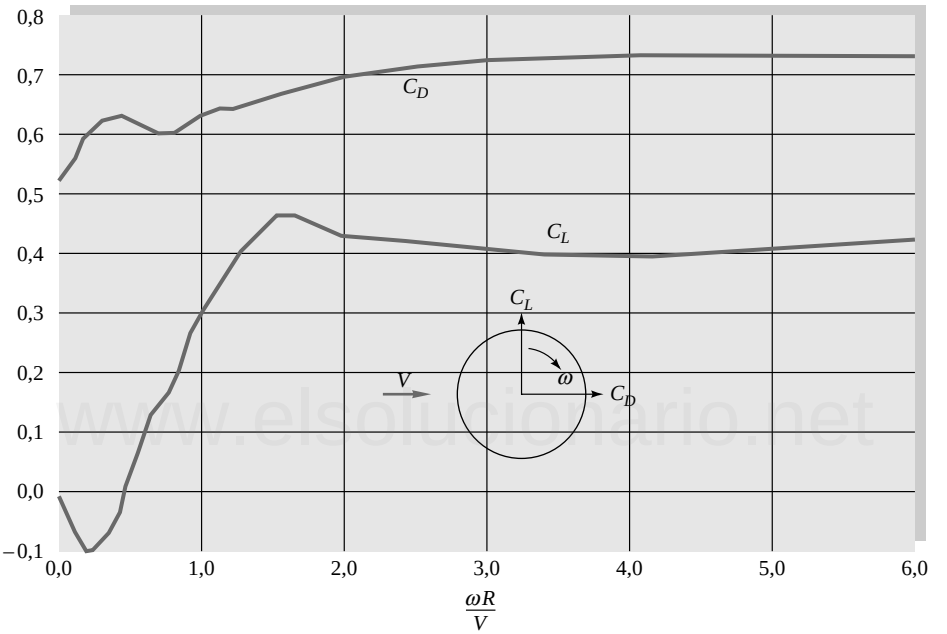
sea inferior a 30 mi/h. Determine el tiempo transcurrido.

P7.105 Un barco con una longitud de 50 m y una superficie mojada de 800 m^2 tiene el casco con la forma ensayada en la Figura 7.19, sin protuberancias en proa ni popa. La potencia propulsiva disponible es de 1 MW. Represente la velocidad del barco V (en nudos) frente a la potencia aplicada P para $0 < P < 1$ MW y agua de mar a 20 °C. ¿Cuál es el ajuste más eficiente?

P7.106 Una esfera lisa de acero de 1 cm de diámetro ($W \Xi$ 0,04 N) es disparada verticalmente a nivel del mar, con velocidad inicial supersónica $V_0 = 1000$ m/s. Su coeficiente de resistencia viene dado por la Figura 7.20. Suponiendo que la velocidad del sonido es constante $a \Xi$ 343 m/s, calcule la altura máxima del proyectil (*a*) mediante una estimación sencilla y (*b*) mediante un cálculo por ordenador.

P7.107 Repita el Problema P7.106 para una bala de acero de 9 mm ($W \Xi$ 0,07 N) que tiene la forma del cuerpo de revolución de la Figura 7.20.

P7.108 En la Figura P7.108 se presentan la sustentación y la resistencia de una esfera girando, Referencia 45. Supongamos que una pelota de tenis ($W \Xi$ 0,56 N, $D \Xi$ 6,35 cm) es golpeada a nivel del mar con una velocidad inicial $V_0 = 30$ m/s y un efecto liftado que produce una velocidad de rotación de 120 rpm (la parte delantera de la pelota moviéndose hacia abajo). Si la pelota es golpeada a 1,5 m del suelo, calcule la distancia recorrida hasta alcanzar el suelo.

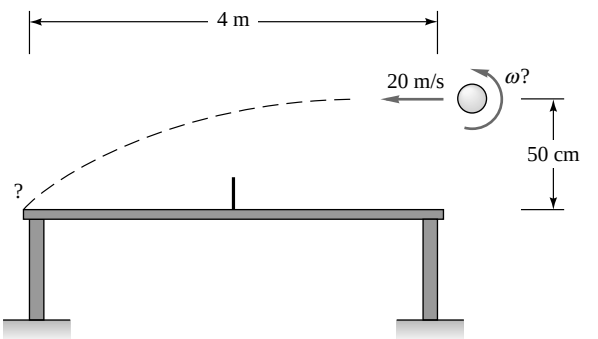


P7.108. Coeficientes de resistencia y sustentación para una esfera giratoria con $Re_D \Xi 10^5$, de la Referencia 45. (*Reproducido con permiso de la American Society of Mechanical Engineers.*)

P7.109 Repita el Problema P7.108 si la pelota es golpeada con efecto cortado (parte delantera de la pelota moviéndose hacia arriba).

P7.110 Un lanzador de béisbol lanza una pelota curva con una velocidad inicial de 65 mi/h y una rotación alrededor de su eje vertical de 6500 rpm. La pelota pesa 0,32 lbf y tiene un diámetro de 2,9 in. Usando los datos de la Figura P7.108 para flujos turbulentos, estime la distancia que se habrá desviado la pelota de su trayectoria recta cuando llegue a la base, situada a 60,5 ft.

***P7.111** Una pelota de ping-pong tiene una masa de 2,6 g y un diámetro de 3,81 cm. Es golpeada horizontalmente con una velocidad inicial de 20 m/s a 50 cm de la mesa, como se muestra en la Figura P7.111. Para aire a nivel del mar, ¿qué velocidad de giro, en rpm, será necesaria para que la pelota llegue al borde opuesto de la mesa, a una distancia de 4 m? Realice una estimación analítica, empleando la Figura P7.108, y tenga en cuenta que la pelota se decelera durante la trayectoria.

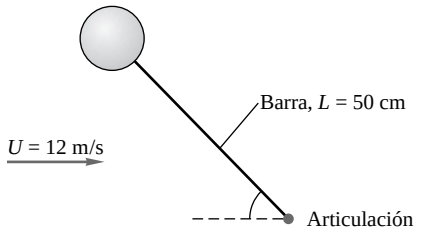


P7.111

P7.112 En el interior de un túnel de viento tenemos una esfera lisa de madera (S = 0,65) unida a una bisagra por una

www.elsolucionario.net

barra delgada y rígida, como se muestra en la Figura P7.112. La esfera levita debido al flujo de aire a 20 °C y 1 atm. (*a*) Represente el ángulo θ en función del diámetro de la esfera *d* cuando este varía ente 1 cm A*d* A 15 cm. (*b*) Comente la viabilidad de esta configuración. Desprecie la resistencia de la barra.



P7.112

P7.113 Un automóvil tiene una masa de 1000 kg y un C_DA = 0,7 m^2. La resistencia de rodadura es de 70 N y es aproximadamente constante. El coche viaja en punto muerto sin aplicar frenos a 90 km/h cuando comienza a subir una pendiente del 10 por 100 (pendiente = tg^{-1} 0,1 = 5,71°). ¿Qué distancia recorrerá antes de pararse?

***P7.114** Suponga que el coche del Problema P7.113 se sitúa en la cima de una colina con una pendiente del 10 por 100, y se deja caer en punto murto sin frenos. ¿Qué velocidad, en km/h, tendrá después de descender una distancia vertical de 20 m?

P7.115 El avión ejecutivo Cessna Citation pesa 67 kN y tiene una superficie alar de 32 m^2. Su crucero se realiza a 10 km de altura estándar, con un coeficiente de sustentación de 0,21 y un coeficiente de resistencia de 0,015. Estime (*a*) la velocidad de crucero en mi/h y (*b*) la potencia necesaria para mantener el crucero.

P7.116 Una aeronave pesa 180 kN y tiene una superficie alar de 160 m^2, con una cuerda media de 4 m. Las propiedades del perfil están dadas en la Figura 7.25. Si el avión tiene una velocidad de diseño de aterrizaje V_0 = 1,2V_s, usando un flap de intradós a 60°, (*a*) ¿cuál es la velocidad de aterrizaje en mi/h? (*b*) ¿Qué potencia es necesaria para el despegue a la misma velocidad?

P7.117 Suponga que el avión del Problema P7.116 despega a nivel del mar sin ayuda de flaps, con C_L constante y una velocidad de despegue de 100 mi/h. Estime la carrera de despegue si el empuje aplicado es de 10 kN. ¿Cuál es el empuje necesario para que la carrera de despegue sea de 1250 m?

***P7.118** Suponga que la aeronave del Problema P7.116 está equipada con los mejores dispositivos hipersustentadores de la Figura 7.28. ¿Cuál sería la menor velocidad de entrada en pérdida, expresada en mi/h? Estime la distancia de frenado si el avión aterriza con V_0 = 1,2V_s con C_L = 3,0 constante y C_D = 0,2, aplicando una fuerza en los frenos igual al 20 por 100 del peso en las ruedas.

P7.119 Una aeronave tiene una masa de 5000 kg, un empuje máximo de 7000 N y un ala con forma en planta rectangular y alargamiento 6,0. El avión despega a nivel del mar con un flap de intradós a 60°, cuyas propiedades aparecen en la Figura 7.25. Suponga que toda la sustentación y la resistencia provienen del ala. ¿Cuál es el tamaño apropiado para el ala si la distancia de despegue es de 1 km?

P7.120 Demuestre que si las Ecuaciones (7.70) y (7.71) son válidas, la eficiencia aerodinámica máxima (cociente entre sustentación y resistencia) se obtiene cuando $C_D = 2C_{D*}$. Determine el $(L/D)_{máx}$ y α para un ala simétrica cuando $\Lambda = 5$ y $C_{D*} = 0{,}009$.

P7.121 En un vuelo en planeo (sin potencia), la sustentación y la resistencia están en equilibrio con el peso. Demuestre que si no hay viento, la aeronave desciende con un ángulo de planeo:

$$\text{tg } \gamma = \frac{\text{resistencia}}{\text{sustentación}}$$

Para un planeador de masa 200 kg, superficie alar de 12 m^2 y alargamiento 11, con un perfil NACA 0009, estime (*a*) la velocidad de entrada en pérdida, (*b*) el ángulo de planeo mínimo y (*c*) la distancia máxima que puede planear en aire en calma si está a 1200 m sobre el nivel del suelo.

P7.122 Un barco de masa 2500 kg tiene dos hidroalas, cada una con una cuerda de 30 cm y una envergadura de 1,5 m, con $C_{L,máx}$ = 1,2 y C_{D*} = 0,08. Sus motores proporcionan 130 kW. Para agua de mar a 20 °C, estime (*a*) la velocidad mínima para la que los perfiles sustentan el barco y (*b*) la velocidad máxima del barco.

P7.123 Antes de la guerra existía la controversia, quizás apócrifa, de si el abejorro tenía legítimo derecho a volar, aerodinámicamente hablando. El abejorro medio (*Bombus terrestris*) pesa 0,88 g, con una envergadura de 1,73 cm y una superficie alar de 1,26 cm^2. De hecho, puede volar a 10 m/s. Usando la teoría de ala fija, ¿cuál es el coeficiente de sustentación del abejorro a esta velocidad? ¿Es un valor razonable para los perfiles típicos?

***P7.124** El abejorro, batiendo sus alas, puede mantenerse quieto en el aire. Usando los datos del Problema P7.123, desarrolle una teoría para alas batientes en la que el movimiento hacia abajo del ala se asemeje a una placa plana corta normal al flujo (Tabla 7.3) y el movimiento del ala hacia arriba se realice prácticamente sin resistencia. ¿Cuántos aleteos por segundo del ala modelada serían necesarios para sustentar el peso del abejorro? (Mediciones recientes en abejas indican que la frecuencia de aleteo es de 194 Hz.)

P7.125 En 2001 una aeronave comercial sufrió una pérdida total de potencia mientras volaba a 33.000 ft sobre el Océano Atlántico, a unas 60 millas de las islas Azores. Los pilotos, con una destreza admirable, hicieron planear al avión y aterrizaron en las Azores. Suponga que el avión se ajusta a las Ecuaciones (7.70) y (7.71), con $\Lambda = 7$, $C_{D*} = 0{,}02$ y un perfil simétrico. Estime su distancia de planeo óptima con un piloto matemáticamente perfecto.

www.elsolucionario.net

Problemas conceptuales

C7.1 ¿Cómo *reconocería* una capa límite? Cite algunas propiedades físicas y algunas mediciones que revelen las características apropiadas.

C7.2 En el Capítulo 6 el número de Reynolds de transición en tuberías era del orden de $Re_{trans} \Xi 2300$, mientras que para una placa plana $Re_{trans} \Xi 1 \times 10^6$, unos tres órdenes de magnitud superior. ¿A qué se debe esta diferencia?

C7.3 Sin escribir ninguna ecuación, explique el concepto de espesor de desplazamiento de la capa límite.

C7.4 Describa, empleando palabras, las ideas básicas detrás de la «aproximación de capa límite.»

C7.5 ¿Qué es un gradiente de presión *adverso*? Proporcione tres ejemplos de flujos en los que se encuentre este fenómeno.

C7.6 ¿Qué es un gradiente de presión *favorable*? Proporcione tres ejemplos de flujos en los que se encuentre este fenómeno.

C7.7 La resistencia de un perfil (Figura 7.12) aumenta considerablemente si se da la vuelta al perfil, poniendo el borde de salida afilado de cara a la corriente. ¿Puede explicar este fenómeno?

C7.8 En la Tabla 7.3, el coeficiente de resistencia de un abeto disminuye bruscamente al aumentar la velocidad del viento. ¿Por qué?

C7.9 Para propulsar un avión hacia delante con una velocidad finita necesitamos empuje. ¿Por qué este movimiento implica una pérdida de energía? Explique los conceptos de empuje y resistencia en términos de la primera ley de la termodinámica.

C7.10 ¿Cómo se relaciona el concepto de *ir al rebufo* en carreras de coches y ciclismo con las materias estudiadas en este capítulo?

C7.11 El cilindro de la Figura 7.13 es simétrico y, por lo tanto, no debería tener sustentación. Aun así, una medida de la sustentación revelaría un valor medio cuadrático no nulo de la sustentación. ¿Puede explicar este comportamiento?

C7.12 Explique con palabras por qué una pelota lanzada girando sobre sí misma sigue una trayectoria curva. Proporcione razonamientos físicos que justifiquen la presencia de una fuerza lateral además de la resistencia.

Problemas del examen de fundamentos de ingeniería

FE7.1 Una esfera lisa de 12 cm de diámetro está inmersa en una corriente de agua a 20 °C moviéndose a 6 m/s. El número de Reynolds apropiado para esta esfera es
(*a*) $2{,}3 \times 10^5$, (*b*) $7{,}2 \times 10^5$, (*c*) $2{,}3 \times 10^6$, (*d*) $7{,}2 \times 10^6$, (*e*) $7{,}2 \times 10^7$

FE7.2 Si, en el Problema FE7.1, el coeficiente de resistencia basado en el área frontal es 0,5, ¿cuál es la fuerza de resistencia sobre la esfera?
(*a*) 17 N, (*b*) 51 N, (*c*) 102 N, (*d*) 130 N, (*e*) 203 N

FE7.3 Si, en el Problema FE7.1, el coeficiente de resistencia basado en el área frontal es 0,5, ¿a qué velocidad límite caería una esfera de aluminio (S = 2,7) en agua en reposo?
(*a*) 2,3 m/s, (*b*) 2,9 m/s, (*c*) 4,6 m/s, (*d*) 6,5 m/s, (*e*) 8,2 m/s

FE7.4 Para un flujo de aire en condiciones estándar a nivel del mar a 4 m/s, paralelo a una placa plana delgada, estime el espesor de la capa límite en $x = 60$ cm desde el borde de ataque:
(*a*) 1,0 mm, (*b*) 2,6 mm, (*c*) 5,3 mm, (*d*) 7,5 mm, (*e*) 20,2 mm

FE7.5 En el Problema FE7.4, con las mismas condiciones del flujo, ¿cuál es el esfuerzo de cortadura en la pared en $x = 60$ cm desde el borde de ataque?
(*a*) 0,053 Pa, (*b*) 0,11 Pa, (*c*) 0,16 Pa, (*d*) 0,32 Pa, (*e*) 0,64 Pa

FE7.6 Alrededor de un mástil de bandera de 18 m de altura y 20 cm de diámetro fluye aire a 20 °C y 1 atm con una velocidad de 75 km/h. El coeficiente de resistencia, basado en el área frontal, es 1,15. Estime el momento flector debido al viento en la base del mástil.
(*a*) 9,7 kN · m, (*b*) 15,2 kN · m, (*c*) 19,4 kN · m, (*d*) 30,5 kN · m, (*e*) 61,0 kN · m

FE7.7 Considere viento a 20 °C y 1 atm soplando contra una chimenea de 30 m de altura y 80 cm de diámetro. Si la chimenea se fractura con un momento flector en la base de 486 kN · m y su coeficiente de resistencia basado en el área frontal es 0,5, ¿cuál es la velocidad máxima admisible del viento para evita la fractura?
(*a*) 50 mi/h, (*b*) 75 mi/h, (*c*) 100 mi/h, (*d*) 125 mi/h, (*e*) 150 mi/h

FE7.8 Una partícula de polvo de densidad 2600 kg/m^3, suficientemente pequeña para satisfacer la ley de Stokes para la resistencia, precipita a 1,5 mm/s en aire a 20 °C y 1 atm. ¿Cuál es su diámetro aproximado?
(*a*) 1,8 μm, (*b*) 2,9 μm, (*c*) 4,4 μm, (*d*) 16,8 μm, (*e*) 234 μm

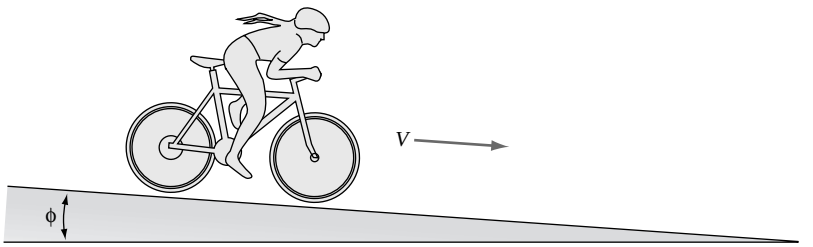
FE7.9 Una aeronave tiene una masa de 19.500 kg, una envergadura de 20 m y una cuerda media de 3 m. Cuando vuela en aire con densidad 0,5 kg/m^3, sus motores proporcionan un empuje de 12 kN frente a un coeficiente de resistencia total de 0,025. ¿Cuál es la velocidad aproximada del avión?
(*a*) 250 mi/h, (*b*) 300 mi/h, (*c*) 350 mi/h, (*d*) 400 mi/h, (*e*) 450 mi/h

FE7.10 Para las condiciones de vuelo del avión del Problema FE7.9, ¿cuál es aproximadamente el coeficiente de sustentación?
(*a*) 0,1, (*b*) 0,2, (*c*) 0,3, (*d*) 0,4, (*e*) 0,5

www.elsolucionario.net

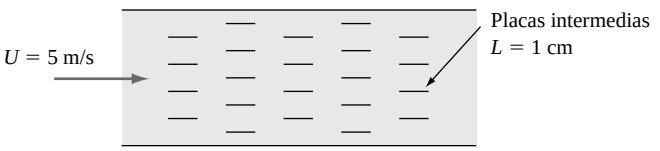
Problemas extensos

PE7.1 Jane quiere estimar su coeficiente de resistencia en bicicleta. Calcula que su área frontal es de 0,40 m^2 y que la resistencia de rodadura es de 0,80 N · s/m. La masa de la bicicleta es de 15 kg, mientras que la suya es de 80 kg. Jane se deja caer por una pendiente con una inclinación constante de 4° (véase la Figura PE7.1). Alcanza una velocidad límite estacionaria de 14 m/s. Estime el coeficiente de resistencia del conjunto ciclista más bicicleta.



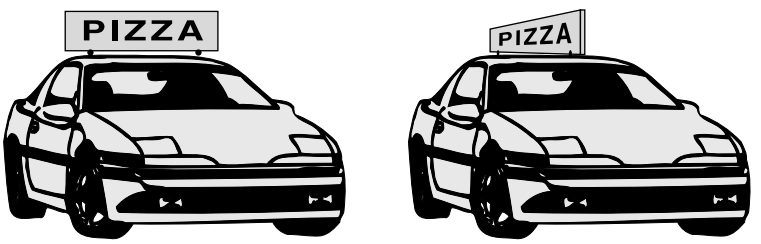
PE7.1

PE7.2 Entre las placas paralelas de un cambiador de calor, separadas 10 cm, fluye aire a 20 °C, 1 atm y V_{media} = 5 m/s, como se muestra en la Figura PE7.2. Se propone añadir un determinado número de placas de 1 cm de longitud para aumentar la transferencia de calor. Aunque el flujo en el canal es turbulento, la capa límite sobre las placas es básicamente laminar. Suponga que todas las placas tienen una envergadura de 1 m en dirección perpendicular al papel. Calcule (*a*) la caída de presión en Pa/m sin las placas adicionales presentes. Calcule (*b*) el número de placas adicionales por unidad de longitud del canal para aumentar la caída de presión hasta 10,0 Pa/m.



PE7.2

PE7.3 Una nueva pizzería está a punto de abrir. Por supuesto, ofrece reparto gratuito a domicilio en un pequeño coche con un enorme letrero. El letrero (una placa plana) tiene 1,5 ft de altura y 5 ft de longitud. El jefe (que no tiene ningún conocimiento de Mecánica de Fluidos) coloca el letrero de cara al viento. Uno de sus conductores está estudiando Mecánica de Fluidos y le advierte de que puede ahorrar mucho dinero montando el cartel paralelo al viento (véase Figura PE7.3). (*a*) Calcule la resistencia (en lbf) del *letrero aislado* a 40 mi/h (58,7 ft/s) con las *dos orientaciones*. (*b*) Suponiendo que el coche sin letrero tiene un coeficiente de resistencia de 0,4 y un área frontal de 40 ft^2, calcule la resistencia *total* del conjunto en las dos orientaciones para V = 40 mi/h. (*c*) Si el coche tiene una resistencia de rodadura de 40 lbf a 40 mi/h, calcule la potencia que tiene que proporcionar el motor para mover el coche a 40 mi/h con las dos orientaciones del letrero. (*d*) Finalmente, si el motor proporciona 10 CV durante 1 h con un galón de gasolina, calcule la eficiencia del combustible en mi/gal para las dos orientaciones a 40 mi/h.



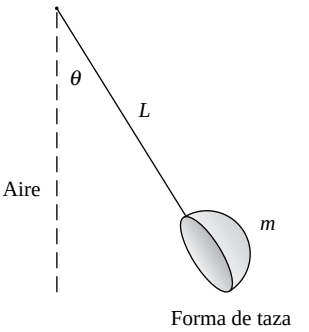
PE7.3

PE7.4 Considere un péndulo con una forma poco usual: un tazón semiesférico de diámetro D cuyos ejes están en el plano de oscilación, como se muestra en la Figura PE7.4. Desprecie la masa y la resistencia de la barra L. (*a*) Plantee las ecuaciones diferenciales para la oscilación $\theta(t)$, incluyendo la resistencia del tazón en las

www.elsolucionario.net

distintas direcciones (densidad del aire ρ). (*b*) Adimensionalice la ecuación. (*c*) Determine la frecuencia natural de oscilación para oscilaciones pequeñas $\theta \ll 1$ rad. (*d*) Para el caso concreto $L = 1$ m, $D = 10$ cm, $m = 50$ g y aire a 20 °C y 1 atm, con $\theta(0) = 30°$, calcule (numéricamente) el tiempo necesario para que la amplitud de la oscilación caiga a 1°.

PE7.5 Repita el Problema P7.111 calculando una solución numérica detallada de la trayectoria de la pelota. Emplee la Figura P7.108 para la sustentación y la resistencia.



PE7.4

Proyectos de diseño

D7.1 Se desea diseñar un anemómetro para medir la velocidad del viento, similar al representado en la Figura P7.91, con un método más sofisticado que el «par medio» empleado en el Problema P7.91. El diseño deberá proporcionar una relación casi lineal entre velocidad del viento y velocidad de rotación en el rango $20 < U < 40$ mi/h, con el anemómetro girando alrededor de 6 rev/s a $U = 30$ mi/h. Todos los parámetros (diámetro de las tazas *D*, longitud de la barra *L*, diámetro de la barra *d*, tipo de rodamiento, materiales) han de ser especificados en el análisis. Realice hipótesis adecuadas sobre la resistencia instantánea del sistema para un ángulo $\theta(t)$ dado. Calcule el par instantáneo $T(t)$ y determine e integre la aceleración angular del dispositivo. Desarrolle una teoría completa para velocidad de giro frente a velocidad del viento en el intervalo $0 < U < 50$ mi/h. Intente emplear valores realistas para la fricción de los rodamientos.

Referencias

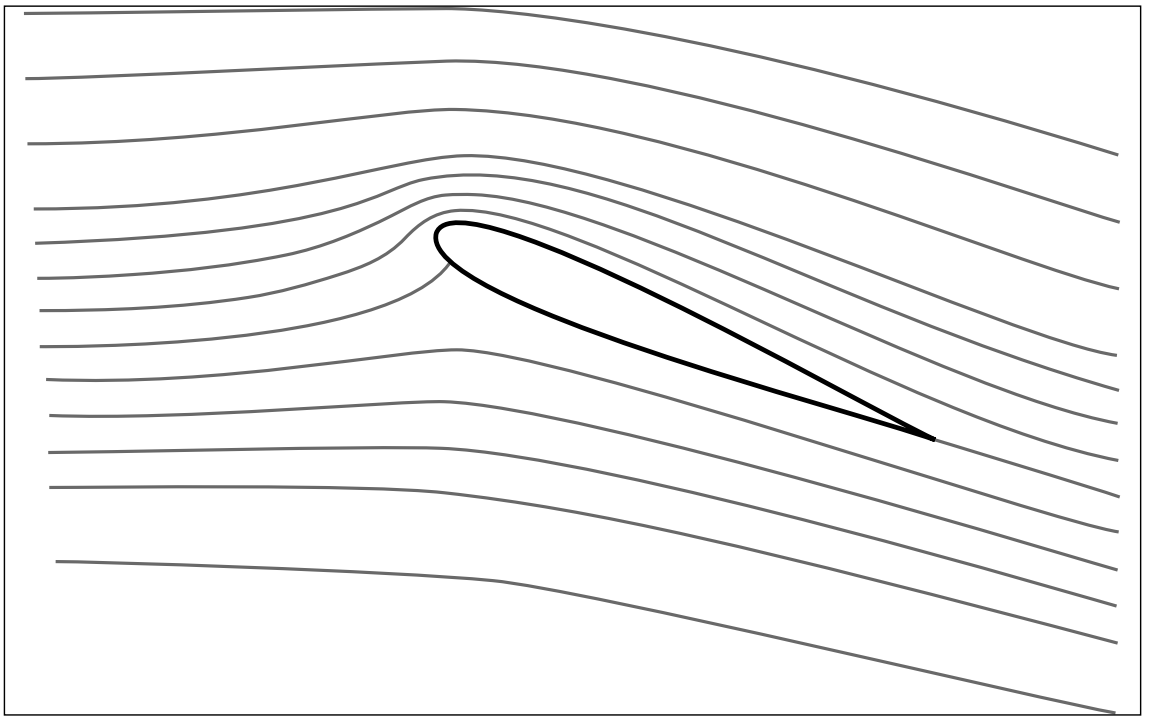
www.elsolucionario.net

1. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, 7.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1979.
2. F. M. White, *Viscous Fluid Flow*, 2.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1991.
3. J. A. Schetz, *Boundary Layer Analysis*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1992.
4. J. D. Anderson, Jr., *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*, McGraw-Hill, Nueva York, 1995.
5. C. L. Rumsey et al., «Efficiency and Accuracy of Time-Accurate Turbulent Navier-Stokes Computations», *Computers and Fluids*, vol. 25, núm. 2, 1996, págs. 217-236.
6. P. K. Chang, *Control of Flow Separation*, McGraw-Hill, Nueva York, 1976. Véase también P. K. Chang, *Recent Development in Flow Separation*, Pang Han Pub. Co., Seúl, Corea, 1983.
7. T. von Kármán, «On Laminar and Turbulent Friction» *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 1, 1921, págs. 235-236.
8. G. B. Schubauer y H. K. Skramstad, «Laminar Boundary Layer Oscillations and Stability of Laminar Flow», *Natl. Bur. Stand. Res. Pap.* 1772, abril 1943 (véase también *J. Aero. Sci*., núm. 14, 1947, págs. 69-78, y *NACA Rep*. 909, 1947).
9. P. D. Durbin, B. A. Petterson y B. A. Reif, *Theory and Modeling of Turbulent Flows*, John Wiley, Nueva York, 2001.
10. P. W. Runstadler, Jr., et al., «Diffuser Data Book», Creare Inc., *Tech. Note* 186, Hanover, NH, mayo 1975.
11. B. Thwaites, «Approximate Calculation of the Laminar Boundary Layer», *Aeronaut. Q.*, núm. 1, 1949, págs. 245-280.
12. S. F. Hoerner, *Fluid Dynamic Drag*, publicado por el autor, Midland Park, NJ, 1965.
13. J. D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*, 3.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2001.
14. V. Tucker y G. C. Parrott, «Aerodynamics of Gliding Flight of Falcons and Other Birds», *J. Exp. Biol.*, núm. 52, 1970, págs. 345-368.
15. E. Tupper, *Introduction to Naval Architecture*, Butterworth, Boston, 1996.
16. I. H. Abbott y A. E. von Doenhoff, *Theory of Wing Sections*, Dover, Nueva York, 1981.
17. R. L. Kline y F. F. Fogleman, Airfoil for Aircraft, U.S. Patent 3.706.430, 19 de diciembre de 1972.
18. T. Y. Yu et al. (eds.), *Swimming and Flying in Nature: Proceedings of a Symposium*, Plenum, Nueva York, 1975.
19. National Committee for Fluid Mechanics Films, *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics*, M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1972.
20. E. M. Uram y H. E. Weber (eds.), «Laminar and Turbulent Boundary Layers», *ASME Symp. Proc.*, núm. I00167, febrero 1984.
21. *Vehicle Aerodynamics: Wake Flows, Computational Fluid Dynamics, and Aerodynamic Testing*, SAE Special Publications, Int. Congress and Exposition, Detroit, MI, 1992.

www.elsolucionario.net

22. W. H. Hucho, *Aerodynamics of Road Vehicles*, 4.ª ed., Soc. of Automotive Engineers, Warrendale, PA, 1998.
23. R. D. Blevins, *Applied Fluid Dynamics Handbook*, van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1984.
24. R. C. Johnson, Jr., G. E. Ramey y D. S. O'Hagen, «Wind Induced Forces on Trees», *J. Fluids Eng*., núm. 104, marzo 1983, págs. 25-30.
25. P. W. Bearman et al., «The Effect of a Moving Floor on Wind-Tunnel Simulation of Road Vehicles», Paper No. 880245, SAE Transactions, *J. Passenger Cars*, núm. 97, sec. 4, 1988, págs. 4200-4214.
26. *CRC Handbook of Tables for Applied Engineering Science*, 2.ª ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 1973.
27. T. Inui, «Wavemaking Resistance of Ships», *Trans. Soc. Nav. Arch. Marine Engrs*., núm. 70, 1962, págs. 283-326.
28. L. Larsson et al., «A Method for Resistance and Flow Prediction in Ship Design», *Trans. Soc. Nav. Arch. Marine Engrs*., núm. 98, 1990, pags. 495-535.
29. R. L. Street, G. Z. Watters y J. K. Vennard, *Elementary Fluid Mechanics*, 7.ª ed., Wiley, Nueva York, 1995.
30. J. D. Anderson, Jr., *Modern Compressible Flow, with Historical Perspective*, 2.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1990.
31. J. D. Anderson, Jr., *Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics*, AIAA, Reston, VA, 2000.
32. J. Rom, *High Angle of Attack Aerodynamics: Subsonic, Transonic, and Supersonic Flows*, Springer-Verlag, Nueva York, 1992.
33. S. Vogel, «Drag and Reconfiguration of Broad Leaves in High Winds», *J. Exp. Bot*., vol. 40, núm. 217, agosto 1989, pags. 941-948.
34. S. Vogel, *Life in Moving Fluids*, Princeton University Press 2.ª ed., Princeton, NJ, 1996.
35. J. A. C. Humphrey (ed.), *Proceedings 1st International Symposium on Mechanics of Plants, Animals, and Their Environment*, Engineering Foundation, Nueva York, enero 1998.
36. D. D. Joseph, R. Bai, K. P. Chen e Y. Y. Renardy, «Core-Annular Flows», *Annu. Rev. Fluid Mech*., núm. 29, 1997, pags. 65-90.
37. J. W. Hoyt y R. H. J. Sellin, «Scale Effects in Polymer Solution Pipe Flow», *Experiments in Fluids*, vol. 15, núm. 1, junio 1993, págs. 70-74.
38. S. Nakao, «Application of V-Shape Riblets to Pipe Flows», *J. Fluids Eng*., núm. 113, diciembre 1991, págs. 587-590.
39. P. R. Bandyopadhyay, «Review: Mean Flow in Turbulent Boundary Layers Disturbed to Alter Skin Friction», *J. Fluids Eng*., vol. 108, 1986, pags. 127-140.
40. N. K. Madavan, S. Deutsch y C. L. Merkle, «Measurements of Local Skin Friction in a Microbubble Modified Turbulent Boundary Layer», *J. Fluid Mech.*, núm. 156, 1985, págs. 237-256.
41. S. M. Trujillo, D. G. Bogard y K. S. Ball, «Drag Reduction in a Turbulent Boundary Layer by Wall Oscillation», Paper AIAA 97-1870, AIAA Shear Flow Control Conference, Austin, TX, diciembre 1997.
42. J. G. Chandler, «Microplanes», *Popular Science*, enero 1998, págs. 54-59.
43. *Evolution of Flight*, Internet URL <http://www.flight100.org>.
44. J. D. Anderson Jr., *A History of Aerodynamics*, Cambridge University Press, Nueva York, 1997.
45. Y. Tsuji, Y. Morikawa y O. Mizuno, «Experimental Measurement of the Magnus Force on a Rotating Sphere at Low Reynolds Numbers», *Journal of Fluids Engineering*, vol. 107, 1985, págs. 484-488.
46. R. Clift, J. R. Grace y M. E. Weber, *Bubbles, Drops and Particles*, Academic Press, Nueva York, 1978.
47. M. Gad-el-Hak, «Flow Control: The Future», *Journal of Aircraft*, vol. 38, núm. 3, 2001, págs. 402-418.
48. D. Geropp y H. J. Odenthal, «Drag Reduction of Motor Vehicles by Active Flow Control Using the Coanda Effect», *Experiments in Fluids*, vol. 28, núm. 1, 2000, págs. 74-85.
49. Z. Zapryanov y S. Tabakova, *Dynamics of Bubbles, Drops, and Rigid Particles*, Kluwer Academic Pub., Nueva York, 1998.
50. D. G. Karamanev y L. N. Nikolov, «Freely Rising Spheres Do Not Obey Newton's Law for Free Settling», *AIChE Journal*, vol. 38, núm. 1, nov. 1992, págs. 1843-1846.

www.elsolucionario.net



Líneas de corriente, obtenidas analíticamente, del flujo potencial alrededor de un perfil simétrico con ángulo de ataque. Probablemente el mayor logro de la teoría potencial sea predecir la sustentación de un perfil. Obsérvese que las líneas de corriente se juntan mucho en la parte superior del perfil (alta velocidad, baja presión), mientras que en la parte inferior ocurre lo contrario. Para obtener la solución teórica se debe utilizar la condición de Kutta (véase Figura 8.18), que exige que el flujo en el borde de salida afilado sea suave y paralelo a la línea de la cuerda. La teoría potencial no tiene en cuenta la separación de la capa límite (entrada en pérdida) a grandes ángulos de ataque.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Capítulo 8
Flujo potencial y Mecánica de Fluidos Computacional

Motivación. En el Capítulo 4 se discutieron las ecuaciones diferenciales básicas de conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía. En la Sección 4.10 dimos algunas soluciones exactas para el flujo *potencial* incompresible, y en la Sección 4.11 para el flujo *viscoso* incompresible. Las soluciones exactas de flujos viscosos se limitan a geometrías sencillas y flujos unidireccionales, donde se pueden despreciar los términos convectivos no lineales. Los flujos potenciales no sufren la limitación de los términos no lineales. A continuación, en el Capítulo 7, introdujimos una aproximación: el acoplamiento del *flujo en la capa límite* con el flujo exterior no viscoso. Para flujos viscosos más complejos no existe ninguna teoría ni hay soluciones exactas, sólo datos experimentales.

Los objetivos del presente capítulo son (1) explorar más ejemplos de la teoría potencial y (2) discutir algunos flujos que pueden aproximarse usando la Mecánica de Fluidos Computacional (CFD, *Computational Fluid Dynamics*). La combinación de estas dos técnicas ilustra muy bien la teoría del flujo incompresible y su relación con los experimentos. Una de las aplicaciones más importantes de la teoría del flujo potencial se da en la aerodinámica y la hidrodinámica. Sin embargo, primero repasaremos y extenderemos los conceptos de la Sección 4.10.

8.1. INTRODUCCIÓN Y REPASO

La Figura 8.1 nos recuerda el problema a tratar. Una corriente libre que se aproxima a dos cuerpos próximos entre sí, creando un flujo «interno» entre ellos y un flujo «externo» por encima y por debajo de ellos. En la parte frontal de los cuerpos hay una región de gradiente favorable (la presión disminuye a lo largo de la superficie) y la capa límite, que estará adherida, y será delgada: la teoría no viscosa dará excelentes resultados para la corriente exterior si $\mathrm{Re} > 10^4$. En los flujos internos las capas límite crecen desde las paredes, y al encontrarse desaparece el núcleo no viscoso. Pero la teoría no viscosa es aplicable en conductos «cortos», $L/D < 10$, tales como la tobera de un túnel aerodinámico. En conductos más largos debemos estimar el crecimiento de la capa límite y tener en cuenta que los cálculos basados en la teoría no viscosa serán sólo una burda aproximación del flujo interno real.

La teoría no viscosa debería funcionar bien para los flujos externos de la Figura 8.1, especialmente cerca de la parte frontal del cuerpo, hasta que el gradiente de presiones a lo largo de la superficie se vuelve adverso (la presión aumenta) y la capa límite se desprende. Tras el punto de desprendimiento, la teoría de la capa límite se vuelve imprecisa, y la corriente desprendida deflecta y modifica las líneas de corriente del flujo exterior no viscoso, que interacciona fuertemente con el flujo viscoso cerca de la pared. El análisis teórico de las regiones de flujo desprendido es un área de investigación activa en la actualidad.

Repaso del concepto de potencial de velocidades

Como vimos en la Sección 4.9, si despreciamos los efectos viscosos y el flujo es incompresible, el movimiento es irrotacional, $\nabla \times \mathbf{V} = 0$, y existe un potencial de velocidades ϕ, tal que

$$\mathbf{V} = \nabla \phi \quad \text{o} \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{8.1}$$

www.elsolucionario.net

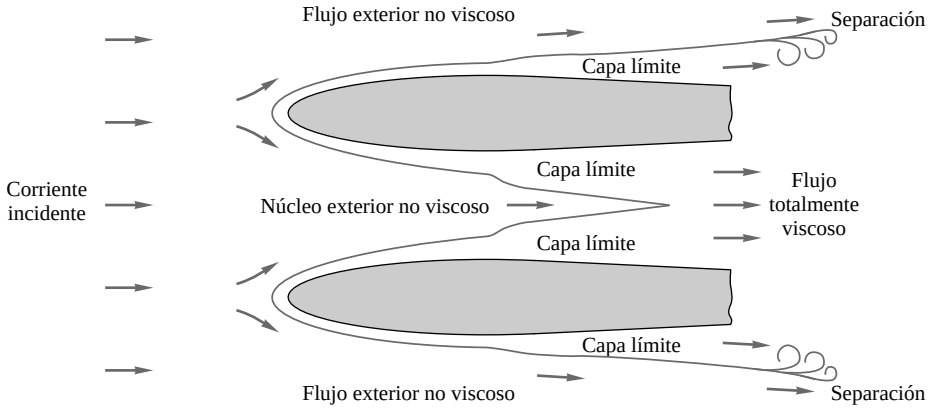


Figura 8.1. Acoplamiento entre las regiones viscosas y no viscosas de un flujo. La teoría potencial de este capítulo no es aplicable a la zona de la capa límite.

La ecuación de la continuidad (4.73), $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, se convierte en la de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \tag{8.2}$$

y la de cantidad de movimiento (4.74) en la de Bernoulli:

www.elsolucionario.net

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = \text{cte} \qquad \text{donde} \qquad V = |\nabla \phi| \tag{8.3}$$

Las condiciones de contorno para la Ecuación (8.3) son (1) la velocidad conocida en la corriente aguas arriba o en otros contornos de flujo libre

$$\text{Contornos exteriores:} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{conocidas} \tag{8.4}$$

y (2) no hay velocidad normal a las superficies sólidas fijas

$$\text{Superficies sólidas:} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{donde } n \text{ es perpendicular al cuerpo} \tag{8.5}$$

A diferencia de la condición de no deslizamiento del flujo viscoso, aquí no hay condición para la velocidad tangencial en la superficie sólida, $V_s = \partial\phi/\partial s$, que debe determinarse como parte de la solución, donde s es la coordenada a lo largo de la superficie.

En el flujo no viscoso a veces intervienen superficies libres; en tales casos se conoce la presión en dicha superficie y es igual a p_a, normalmente constante. La ecuación de Bernoulli (8.3) proporciona una relación entre el valor de V en la superficie libre y la posición z de dicha superficie. Por ejemplo, en flujo estacionario

$$\text{Superficie libre:} \qquad V^2 = |\nabla \phi|^2 = \text{cte} - 2gz_{\text{sup}} \tag{8.6}$$

www.elsolucionario.net

El lector debería tener claro que integrar la ecuación de Laplace, con valores conocidos para la derivada de ϕ en el contorno, es mucho más sencillo que utilizar directamente las ecuaciones completas de Navier-Stokes. El análisis de la ecuación de Laplace, que constituye la *teoría potencial*, está muy bien desarrollado, con libros enteros escritos acerca de ella [1] y de su aplicación a la mecánica de fluidos [2 a 4]. Hay muchas técnicas para encontrar las funciones potenciales que satisfacen la ecuación de Laplace, incluyendo la superposición de funciones elementales, la transformación conforme [4], el análisis numérico [5 a 7], y las analogías eléctricas y mecánicas [8], hoy en día obsoletas. Habiendo determinado $\phi(x, y, z, t)$ mediante alguno de estos procedimientos, se determina **V** por derivación, Ecuación (8.1), y después se calcula p usando la Ecuación (8.3). El procedimiento es bastante directo y permite obtener bastantes resultados interesantes, aunque idealizados.

Repaso del concepto de función de corriente

Como vimos en la Sección 4.7, si el flujo está descrito sólo por dos coordenadas, existe también la función de corriente ψ. Para el flujo irrotacional plano en coordenadas cartesianas xy, la forma apropiada es

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{8.7}$$

La condición de irrotacionalidad se reduce de nuevo a la ecuación de Laplace para ψ:

$$2\omega_z = 0 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$$

o

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0} \tag{8.8}$$

www.elsolucionario.net

Las condiciones de contorno son de nuevo velocidad conocida en la corriente libre y flujo nulo a través de cualquier superficie sólida:

Corriente exterior: $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}, \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ conocidas (8.9*a*)

Superficies sólidas: $\psi_{\text{cuerpo}} = \text{cte}$ (8.9*b*)

La Ecuación (8.9*b*) es especialmente interesante porque indica que *cualquier* línea ψ constante puede interpretarse como la pared de un cuerpo, lo que puede conducir a resultados interesantes.

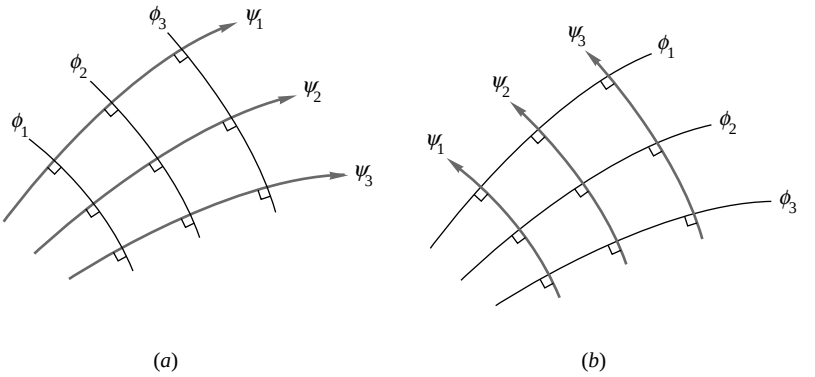
En las aplicaciones del presente capítulo podemos calcular ϕ o ψ o ambas, y la solución será una *red ortogonal de flujo* semejante a la de la Figura 8.2. Una vez determinadas, cualquier conjunto de líneas puede considerarse como las líneas equipotenciales, y las otras serán las líneas de corriente. Ambos conjuntos de líneas son soluciones de la ecuación de Laplace y pueden intercambiarse sus papeles.

Coordenadas polares planas

Muchas de las soluciones de este capítulo conviene escribirlas utilizando coordenadas polares (r, θ). Las expresiones para las componentes de la velocidad en función de las derivadas de ϕ y ψ adoptan entonces la siguiente forma:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{8.10}$$

www.elsolucionario.net



(*a*) (*b*)

Figura 8.2. Las líneas de corriente y equipotenciales son ortogonales y pueden invertirse sus papeles si los resultados son útiles: (*a*) flujo no viscoso típico; (*b*) lo mismo que en (*a*) pero con los papeles invertidos.

Y la ecuación de Laplace se escribe como sigue:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{8.11}$$

Exactamente la misma ecuación se aplica para la forma en coordenadas polares de $\psi(r, \theta)$.

Una faceta intrigante del flujo potencial es que cuando no existen superficies libres las Ecuaciones (8.2) y (8.8) no contienen parámetros, ni tampoco las condiciones de contorno. Por tanto, las redes de flujo son puramente geométricas, dependiendo sólo de la forma del cuerpo, de la orientación de la corriente libre y —sorprendentemente— de la posición del punto de remanso posterior.[1] No hay números de Reynolds, Froude o Mach que compliquen la semejanza dinámica. En los flujos potenciales no viscosos sólo interviene la semejanza cinemática, sin necesidad de parámetros adicionales; recuérdese la Figura 5.6*a*.

www.elsolucionario.net

8.2. SOLUCIONES ELEMENTALES EN FLUJOS PLANOS

En la Sección 4.10 se definieron tres tipos de soluciones elementales de flujos potenciales planos muy útiles: (1) corriente uniforme en la dirección del eje *x*, (2) fuente o sumidero bidimensional en el origen y (3) torbellino bidimensional en el origen. (La geometría de estos flujos se encuentra esquematizada en la Figura 4.12.) Revisemos aquí estos casos especiales:

Corriente uniforme **i***U*:	$\psi = Uy$	$\phi = Ux$	(8.12*a*)
Fuente o sumidero bidimensional:	$\psi = m\theta$	$\phi = m \ln r$	(8.12*b*)
Torbellino bidimensional:	$\psi = -K \ln r$	$\phi = K\theta$	(8.12*c*)

La «intensidad» *m* de la fuente y la «intensidad» *K* del torbellino tienen las mismas dimensiones, esto es, velocidad por longitud, o $\{L^2/T\}$.

En coordenadas polares, la corriente uniforme toma la forma

Corriente uniforme **i***U*:	$\psi = Ur \operatorname{sen} \theta$	$\phi = Ur \cos \theta$	(8.13)

Usando las mismas coordenadas resulta más sencillo superponer, por ejemplo, una corriente y un torbellino. Si la corriente uniforme se mueve formando un ángulo α con el eje *x*:

$$u = U\cos\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = U \operatorname{sen}\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

[1] La posición del punto de remanso posterior establece la circulación alrededor del cuerpo, dando lugar a una sustentación. De otro modo la solución no sería única. Véase Sección 8.4.

www.elsolucionario.net

Integrando, obtenemos las funciones correspondientes:

$$\psi = U(y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha) \qquad \phi = U(x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha) \tag{8.14}$$

Estas expresiones son útiles para problemas de perfiles con ángulo de ataque.

Circulación

El flujo inducido por un torbellino bidimensional es irrotacional en todas partes excepto en el origen, donde la vorticidad $\nabla \times \mathbf{V}$ es infinita. Esto significa que una cierta integral de línea denominada *circulación* Γ no se anula cuando se integra a lo largo de un circuito que encierra al núcleo del torbellino.

Haciendo referencia a la Figura 8.3, la circulación se define como la integral a lo largo de una curva cerrada *C*, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, de la componente de la velocidad tangente a la curva por la longitud de arco *ds* del elemento de curva:

$$\xi = \oint_C V \cos \measuredangle \, ds = \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \int_C (u\,dx + v\,dy + w\,dz) \tag{8.15}$$

De la definición de ϕ, $\mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \nabla\phi \cdot d\mathbf{s} = d\phi$ para un flujo irrotacional; por tanto, en un flujo irrotacional Γ será igual al valor final de ϕ menos el valor inicial de ϕ. Puesto que arrancamos y terminamos en el mismo punto, obtendremos $\Gamma = 0$; pero no para un torbellino: al ser $\phi = K\theta$, Ecuación (8.12*c*), se produce un cambio de ϕ de magnitud $2\pi K$ al dar una vuelta completa:

Curva que encierra al torbellino: $$\Gamma = 2\pi K \tag{8.16}$$

Se puede hacer un cálculo alternativo eligiendo como camino de integración una circunferencia de radio *r* alrededor del núcleo del torbellino en la Ecuación (8.15):

www.elsolucionario.net

$$\xi = \oint_C v_\theta \, ds = \int_0^{2\pi} \frac{K}{r} r \, d\theta = 2\pi K \tag{8.17}$$

En general, Γ es igual a la suma algebraica de las intensidades de todos los torbellinos que hay en la región interior a la curva cerrada. En la próxima sección veremos que una región de circulación finita en una corriente está sometida a una fuerza de sustentación proporcional a U_∞ y Γ.

Es fácil demostrar, usando la Ecuación (8.15), que una fuente o un sumidero no producen circulación. Si no hay torbellinos en el campo fluido, la circulación será cero alrededor de cualquier curva cerrada que encierre un número arbitrario de fuentes y sumideros.

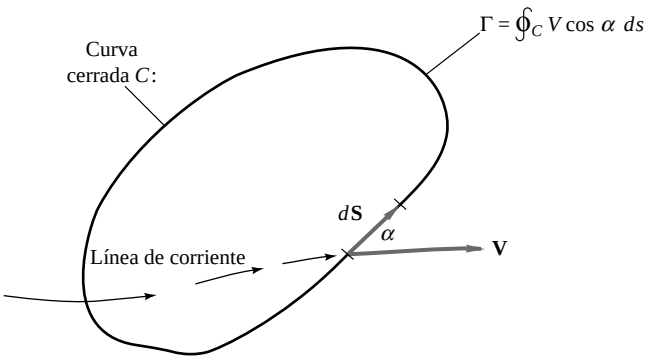


Figura 8.3. Definición de la circulación Γ.

www.elsolucionario.net

8.3. SUPERPOSICIÓN DE SOLUCIONES DE FLUJOS PLANOS

Ahora podemos construir una variedad de flujos potenciales interesantes sin más que sumar los potenciales de velocidad y las funciones de corriente de una corriente uniforme, y de fuentes, sumideros y torbellinos. Por supuesto, muchos de los resultados son clásicos, y sólo daremos aquí un tratamiento breve. La superposición es válida porque las ecuaciones básicas, (8.2) y (8.3), son lineales.

Método gráfico de superposición

Una forma sencilla de representar las líneas de corriente resultantes de la superposición $\psi_{tot} = \Sigma\, \psi_i$ de varios flujos elementales consiste en dibujar primero una serie de líneas de corriente de dichos flujos elementales. El valor de ψ_{tot} en las intersecciones será la suma de los valores individuales ψ_i de las líneas de corriente que se cruzan allí.

En la Figura 8.4 se muestra un ejemplo sencillo, donde se superponen dos familias de líneas de corriente ψ_a y ψ_b. Las componentes individuales se dibujan por separado, mostrando cuatro intersecciones típicas. Las líneas discontinuas que unen las intersecciones, correspondientes a valores constantes de $\psi_a + \psi_b$, representan entonces la solución deseada. A menudo el método de superposición gráfica es lo bastante rápido como para resolver el problema de forma aproximada antes de ejecutar una rutina de representación gráfica con el ordenador.

Algunos ejemplos del Capítulo 4

En la Sección 4.10 discutimos varios ejemplos de superposición de flujos.

1. Fuente de intensidad m situada en $(-a, 0)$ más sumidero de intensidad $-m$ situado en $(+a, 0)$, Ecuación (4.133) y Figura 4.13:

www.elsolucionario.net

$$\psi = \frac{m}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \qquad \phi = \frac{m}{2} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \tag{4.133}$$

   Las líneas de corriente son dos familias de circunferencias ortogonales, como muestra la Figura 4.13. Se parecen a las líneas de campo de un imán con los polos situados en $(x, y) = (\pm a, 0)$.
2. Sumidero de intensidad m más torbellino de intensidad K, ambos en el origen, Ecuación (4.134) y Figura 4.14:

$$\psi = m\theta - K \ln r \qquad \phi = m \ln r + K\theta \tag{4.134}$$

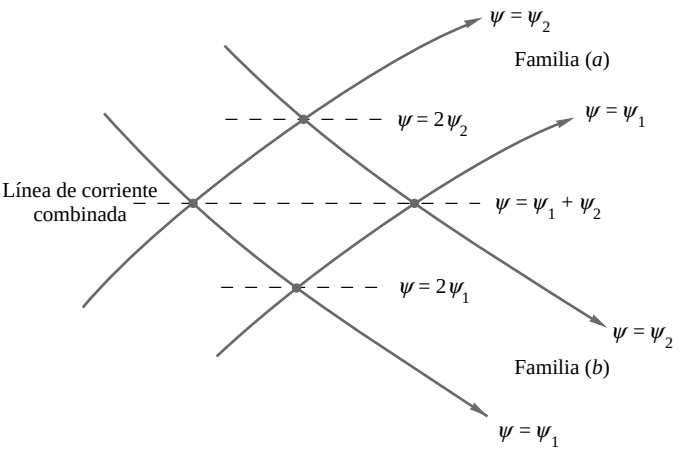


Figura 8.4. Las intersecciones de líneas de corriente simples pueden unirse para construir líneas de corriente combinadas.

www.elsolucionario.net

Las líneas de corriente son espirales logarítmicas que penetran en el origen, como en la Figura 4.14, y se asemejan a las de un tornado o a las del torbellino que se forma en el agujero de drenaje de un depósito.

3. Corriente uniforme $\mathbf{i}U_\infty$ más fuente de intensidad m situada en el origen, Ecuación (4.135) y Figura 4.15, o cuerpo semiinfinito de Rankine:

$$\psi = U_\infty r \operatorname{sen} \theta + m\theta \qquad \phi = U_\infty r \cos \theta + m \ln r \tag{4.135}$$

Si en el origen hay una fuente se origina un semicuerpo con la nariz hacia la izquierda, como en la Figura 8.5*a*. Si hay un *sumidero*, $m < 0$, la nariz del semicuerpo apunta hacia la derecha, como en la Figura 8.5*c*. En ambos casos, el punto de remanso se sitúa a una distancia $a = m/U_\infty$ del origen.

Desprendimiento de la capa límite en un cuerpo semiinfinito

Aunque los flujos no viscosos que se muestran en las Figuras 8.5*a* y *c* son imágenes especulares, el comportamiento de la capa límite viscosa es diferente en cada caso. La forma del cuerpo y la velocidad a lo largo de la superficie, tomados de la Sección 4.10, son:

$$V^2 = U_\infty^2 \left[1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2a}{r}\cos \theta\right] \quad \text{en} \quad r = \frac{m(\pi - \theta)}{U_\infty \operatorname{sen} \theta} \tag{8.18}$$

En las Figuras 8.5*b* y *d* se ha representado la velocidad a lo largo de la superficie del cuerpo semiinfinito en función de la longitud de arco s/a medida desde el punto de remanso. Estas figuras también son imágenes especulares. Sin embargo, cuando la nariz está en la parte delantera, Figura 8.5*b*, el gradiente de presión cerca del punto de remanso es favorable (la presión disminuye a lo largo de la superficie), mientras que cuando la nariz está en la parte posterior, Figura 8.5*d*, el gradiente de presión es adverso (la presión aumenta a lo largo de la superficie), lo que puede dar lugar al desprendimiento de la capa límite.

www.elsolucionario.net

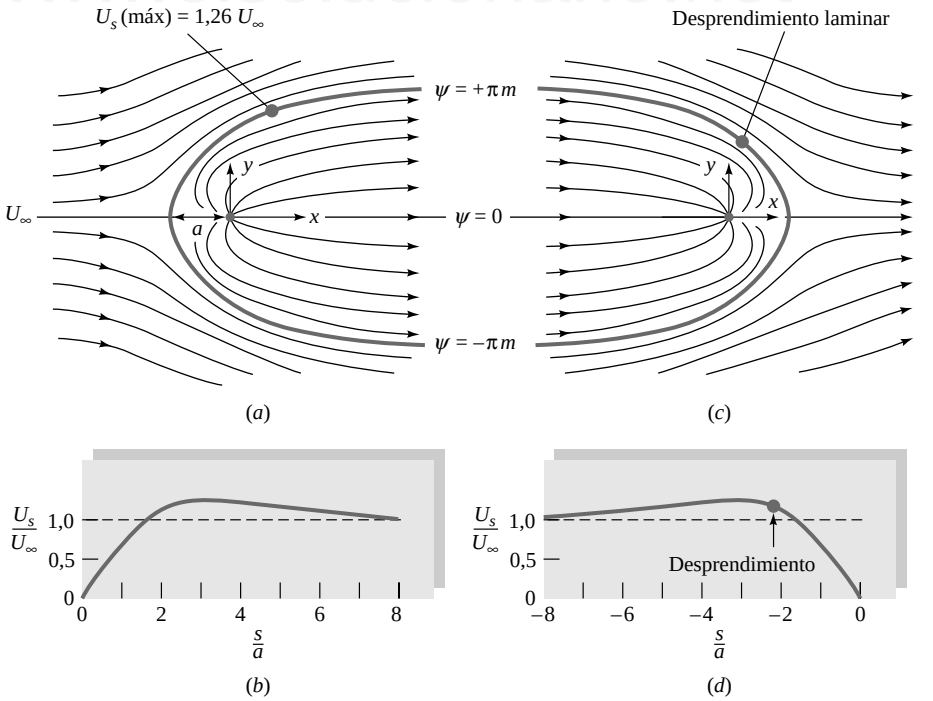


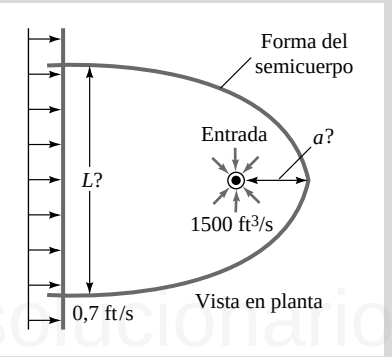
Figura 8.5. Cuerpo semiinfinito de Rankine; el caso (*c*) no se da en un fluido real a causa del desprendimiento de la capa límite. (*a*) Corriente uniforme superpuesta a una fuente para generar un semicuerpo; punto de remanso en $x = -a = -m/U_\infty$. (*b*) Ligero gradiente adverso de presión para s/a mayor que 3,0: no hay desprendimiento. (*c*) Una corriente uniforme y un sumidero generan la parte posterior del semicuerpo; punto de remanso en $x = a = m/U_\infty$. (*d*) Gradiente de presión adverso fuerte para $s/a > -3{,}0$: hay desprendimiento.

www.elsolucionario.net

Podemos aplicar la teoría de la capa límite del Capítulo 7 al flujo de la Figura 8.5*b* para ver cuándo se desprende la corriente. El método de Thwaites, Ecuaciones (7.54) y (7.56), no predice separación. Por tanto, podemos concluir que la Figura 8.5*a* representa un flujo muy realista y útil, que simula la parte frontal de un cuerpo cilíndrico inmerso en una corriente. Por el contrario, la aplicación del método de Thwaites al flujo de la Figura 8.5*c* muestra que la capa límite se desprende en $s/a \Xi 2{,}2$, o $\theta \Xi 110°$. Por tanto, si la forma del semicuerpo correspondiese a una superficie sólida, el flujo de la Figura 8.5*c* no sería realista, ya que se produciría la separación y se formaría una estela ancha. Sin embargo, como se muestra en el Ejemplo 8.1, dicho flujo simula correctamente una corriente uniforme acercándose a un sumidero, aunque en este caso la forma del semicuerpo representa la *línea fluida* que separa el flujo que se dirige al sumidero de la corriente exterior y no la superficie de un cuerpo.

EJEMPLO 8.1

La toma de agua para refrigeración de una central costera succiona 1500 ft^3/s de agua de mar allí donde la profundidad es de 30 ft, como muestra la Figura E8.1. Si la velocidad de la corriente de marea que se acerca a la toma es de 0,7 ft/s, (*a*) ¿hasta qué distancia aguas abajo recoge agua la toma? (*b*) ¿Qué anchura *L* de la corriente aguas arriba va a parar al sumidero?



E8.1

Solución

La intensidad *m* del sumidero se obtiene como función del caudal *Q* y de la profundidad *b*, perpendicular al papel, a partir de la Ecuación (4.131):

$$m = \frac{Q}{2\pi b} = \frac{1500 \text{ ft}^3/\text{s}}{2\pi(30 \text{ ft})} = 7{,}96 \text{ ft}^3/\text{s}$$

Por tanto, de la Figura 8.5, las distancias *a* y *L* son

$$a = \frac{m}{U_\infty} = \frac{7{,}96 \text{ ft}^3/\text{s}}{0{,}7 \text{ ft/s}} = 11{,}4 \text{ ft} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

$$L = 2\pi a = 2\pi(11{,}4 \text{ ft}) = 71 \text{ ft} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

Corriente uniforme y torbellino

Consideremos una corriente uniforme U_∞ en la dirección del eje *x* y un torbellino de intensidad *K* situado en el origen. Por superposición, la función de corriente del conjunto es

$$\psi = \psi_{\text{corriente}} + \psi_{\text{torbellino}} = U_\infty r \operatorname{sen} \theta - K \ln r \tag{8.19}$$

www.elsolucionario.net

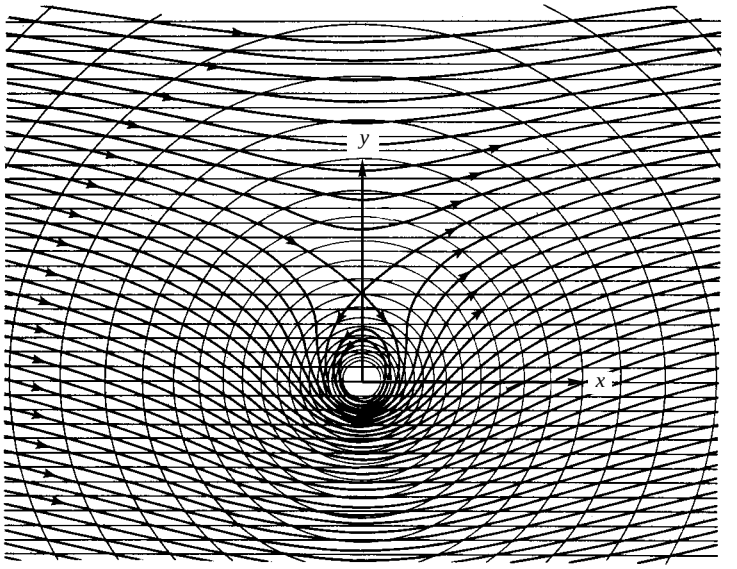


Figura 8.6. Flujo debido a una corriente uniforme y a un torbellino construido por el método gráfico.

Las componentes de la velocidad están dadas por

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty \cos\theta \qquad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty \operatorname{sen}\theta + \frac{K}{r} \tag{8.20}$$

En la Figura 8.6 se han representado las líneas de corriente utilizando el método gráfico, mediante la intersección de las líneas de corriente circulares del torbellino con las horizontales de la corriente uniforme.

De la Ecuación (8.20), haciendo $v_r = v_\theta = 0$, encontramos un punto de remanso en $\theta = 90°$, $r = a = K/U_\infty$, o $(x, y) = (0, a)$, que es donde la velocidad inducida por el torbellino K/r en el sentido contrario a las agujas del reloj es igual a la velocidad U_∞ de la corriente uniforme.

Probablemente lo más interesante de este ejemplo es que hay una fuerza no nula, normal a la corriente uniforme, sobre cualquier región que rodee al núcleo del torbellino, pero dejaremos esta discusión para la próxima sección.

Fila infinita de torbellinos

Consideremos una fila infinita de torbellinos de la misma intensidad K equiespaciados una distancia a, como muestra la Figura 8.7*a*. Se incluye aquí este caso para ilustrar el concepto importante de una *capa de torbellinos*.

Según la Ecuación (8.12*c*), el torbellino i de la Figura 8.7*a* tiene por función de corriente $\psi_i = -K \ln r_i$, de modo que la función de corriente de la fila infinita es

$$\psi = -K \sum_{i=1}^{\infty} \ln r_i \tag{8.21}$$

Puede demostrarse [2, Sección 4.51] que esta suma de infinitos logaritmos es equivalente a la función:

$$\psi = -\frac{1}{2} K \ln\left[\frac{1}{2}\left(\cosh\frac{2\pi y}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}\right)\right] \tag{8.22}$$

Como en la demostración se utiliza la variable compleja $z = x + iy$, $i = (-1)^{1/2}$, no daremos aquí los detalles de la misma.

www.elsolucionario.net

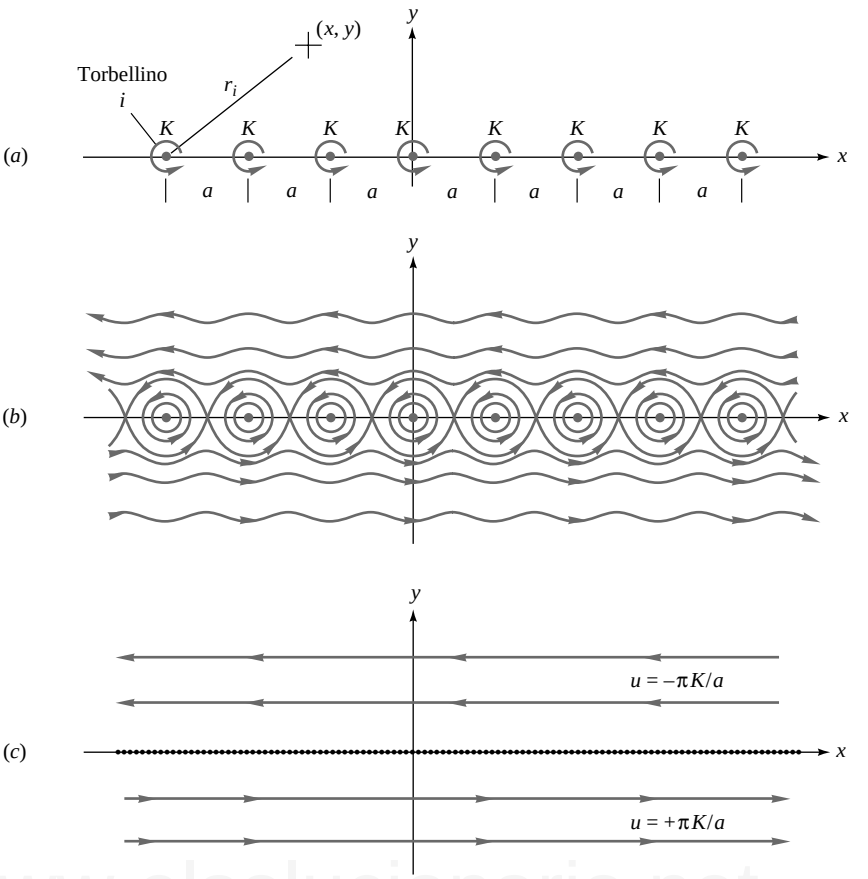


Figura 8.7. Superposición de torbellinos: (*a*) fila de torbellinos de la misma intensidad; (*b*) líneas de corriente del flujo (*a*); (*c*) capa de torbellinos: flujo (*b*) visto desde lejos.

Las líneas de corriente obtenidas de la Ecuación (8.22) se muestran en la Figura 8.7*b*, donde se observa la configuración llamada de *ojo de gato*, con celdas de recirculación que rodean a los torbellinos individuales. Por encima de los ojos de gato el flujo es hacia la izquierda, y por debajo hacia la derecha. Además, estos flujos hacia izquierda y derecha se hacen uniformes para $|y| \gg a$, como se deduce por derivación de la Ecuación (8.22):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}\bigg|_{|y| \gg a} = \pm \frac{\theta K}{a} \tag{8.23}$$

donde el signo más corresponde al flujo por debajo de la fila y el menos por encima. Estas corrientes uniformes hacia la izquierda y la derecha se muestran en la Figura 8.7*c*. Insistimos en que este efecto está inducido por una fila de torbellinos: en este ejemplo no hay corriente uniforme hacia la fila.

Capa de torbellinos

Cuando se observa la Figura 8.7*b* desde lejos, se ve una corriente uniforme hacia la izquierda por arriba y hacia la derecha por abajo, como en la Figura 8.7*c*, y los torbellinos parecen estar tan próximos unos a otros que se ven como una *capa de torbellinos* continua. La intensidad de la capa se define como

$$\mathcal{I} = \frac{2\theta K}{a} \tag{8.24}$$

www.elsolucionario.net

En el caso más general γ puede variar con x. La circulación alrededor de cualquier curva cerrada que encierre una longitud dx de la capa será, de las Ecuaciones (8.15) y (8.23),

$$d\xi = u_i dx - u_s dx = (u_i - u_s)dx = \frac{2K}{a}dx = \gamma dx \tag{8.25}$$

donde los subíndices i y s significan inferior y superior, respectivamente. Por tanto, la intensidad de la capa $\gamma = d\Gamma/dx$ es la circulación de la capa por unidad de longitud. Cuando una capa de torbellinos está inmersa en una corriente uniforme, γ es proporcional a la sustentación, por unidad de longitud, de cualquier superficie que rodee a la capa.

Obsérvese que no hay velocidad perpendicular a la capa en la superficie de la misma. Por tanto, una capa de torbellinos puede simular un cuerpo delgado, como una placa o un perfil delgado. Ésta es la base de la teoría de perfiles delgados que se discute en la Sección 8.7.

El doblete

Cuando nos situamos lejos del par fuente-sumidero de la Figura 4.13, la configuración del flujo se asemeja a una familia de círculos tangentes en el origen, como se muestra en la Figura 8.8. En este límite en que la distancia a se hace muy pequeña, el par fuente-sumidero se denomina *doblete*. Cuando a se hace pequeño, la intensidad debe aumentar para que las velocidades se mantengan finitas; por tanto, mantendremos constante el producto $2am$. Llamémosle λ a esta constante. En este caso la función de corriente del doblete es

$$\psi = \lim_{\substack{a\to 0 \\ 2am=\lambda}} \left[-m \operatorname{tg}^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right] = -\frac{2amy}{x^2 + y^2} = -\frac{\lambda y}{x^2 + y^2} \tag{8.26}$$

Hemos utilizado el hecho de que $\operatorname{tg}^{-1} \alpha \approx \alpha$ cuando α es pequeño. El parámetro λ se denomina *intensidad* del doblete.

La Ecuación (8.26) puede reescribirse en la forma

$$x^2 + \left[y + \frac{\lambda}{2\psi} \right]^2 = \left[\frac{\lambda}{2\psi} \right]^2$$

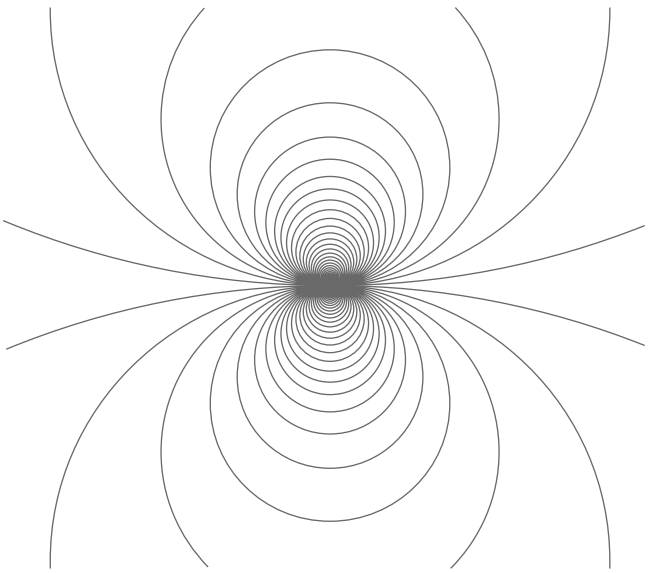


Figura 8.8. Un doblete, o par fuente-sumidero, constituye el caso límite de la Figura 4.13 vista desde lejos. Las líneas de corriente son círculos tangentes al eje x en el origen. Esta figura se generó utilizando el comando *contour* de MATLAB [34, 35].

www.elsolucionario.net

de modo que, como ya se dijo, las líneas de corriente son círculos con centro en el eje *y* y tangentes en el origen. Esta configuración se muestra en la Figura 8.8.

Aunque en el pasado el autor habría dibujado laboriosamente a mano las líneas de corriente, hoy en día ya no es necesario hacerlo así. La Figura 8.8 se dibujó con un ordenador, usando el comando *contour* de la versión para estudiantes de MATLAB [35]. Simplemente establecemos una malla de puntos, escribimos la función de corriente e invocamos el comando *contour*. La Figura 8.8 se obtuvo mediante los siguientes comandos:

```
[X,Y] = meshgrid(-1:.02:1);
PSI = -Y./(X.^2 + Y.^2);
contour(X,Y,PSI,100) [->
```

Se obtienen así 100 líneas ψ constante de la Ecuación (8.26), donde se ha tomado $\lambda = 1$ por conveniencia. La representación incluye líneas de malla, marcas en los ejes y un rectángulo alrededor, y además los círculos pueden parecer un poco elípticos. Pero podemos mejorar la figura usando los siguientes tres comandos:

```
axis square [-> Fuente Matlab]
grid off [-> Fuente Matlab]
axis off [-> Fuente Matlab]
```

La representación final, Figura 8.8, no contiene más información que las propias líneas de corriente. Así pues, MATLAB es una herramienta muy recomendable, que además permite hacer muchísimas otras cosas. En todos los problemas de este capítulo en los que se le pide que «dibuje las líneas de corriente/equipotenciales» puede utilizar el comando *contour*. Para más detalles, consulte la Referencia 34.

De modo análogo se puede obtener el potencial de velocidades del doblete tomando el límite $a \to 0$ y $2am = \lambda$ en la Ecuación (4.133):

www.elsolucionario.net

$$\forall_{\text{doblete}} = \frac{-\text{x}}{x^2 + y^2}$$

o

$$\left[x - \Phi\frac{\rightarrow}{2\forall}\right]^2 + y^2 = \left[\frac{\rightarrow}{2\forall}\right]^2 \tag{8.27}$$

Las líneas equipotenciales son círculos tangentes en el origen con sus centros en el eje *x*. Las líneas equipotenciales se obtienen de la Figura 8.8 sin más que girarla 90° en el sentido de las agujas del reloj, y son perpendiculares a las líneas de corriente.

Las funciones correspondientes al doblete pueden escribirse también en coordenadas polares:

$$\exists = \Phi\frac{-\text{sen}\ \text{x}}{r} \qquad \forall = \frac{-\text{x}\cos\ \text{x}}{r} \tag{8.28}$$

Ésta es la forma más conveniente para el análisis de flujos alrededor de cilindros de la próxima sección.

8.4. FLUJOS PLANOS ALREDEDOR DE CUERPOS CERRADOS

Es posible construir una gran variedad de cuerpos cerrados mediante la superposición de una corriente uniforme con fuentes, sumideros y torbellinos. El cuerpo será cerrado sólo si el caudal neto suministrado por las fuentes es igual al recogido por los sumideros.

Óvalo de Rankine

Cuando una fuente y un sumidero se alinean en la dirección de una corriente uniforme, como en la Figura 8.9*a*, se obtiene una forma cilíndrica denominada *óvalo de Rankine*, que es más largo que ancho.

www.elsolucionario.net

De las Ecuaciones (8.12*a*) y (4.133), la función de corriente del conjunto es

$$\psi = U_\infty y + m\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} = U_\infty r \operatorname{sen}\theta + m(\theta_1 - \theta_2) \tag{8.29}$$

Cuando se dibujan las líneas de corriente ψ constante de la Ecuación (8.29) se obtiene un cuerpo de forma oval como el de la Figura 8.9*b*. La semilongitud L y la semianchura h del óvalo dependen de la intensidad relativa de la fuente y de la corriente uniforme, esto es, de la relación $m/U_\infty a$, que en la Figura 8.9*b* es igual a 1. Las líneas de corriente circulatorias en el interior del óvalo no son interesantes y normalmente no se muestran. La línea oval corresponde a $\psi = 0$.

Hay puntos de remanso en la parte anterior y posterior del óvalo, $x = \pm L$, $y = 0$, y puntos de velocidad máxima y presión mínima en $x = 0$, $y = \pm h$. Todos estos valores son funciones del parámetro adimensional básico $m/(U_\infty a)$, y se pueden determinar de la Ecuación (8.29):

$$\frac{h}{a} = \cot g\frac{h/a}{2m/(U_\infty a)} \qquad \frac{L}{a} = \left[1 + \frac{2m}{U_\infty a}\right]^{1/2}$$
$$\frac{u_{máx}}{U_\infty} = 1 + \frac{2m/(U_\infty a)}{1 + h^2/a^2} \tag{8.30}$$

Cuando aumentamos $m/(U_\infty a)$ desde cero hasta valores grandes, la forma del óvalo aumenta de tamaño y espesor desde una placa plana de longitud $2a$ a un cilindro enorme casi circular. Esto se muestra en la Tabla 8.1. En el límite $m/(U_\infty a) \to \infty$, $L/h \to 1$ y $u_{máx}/U_\infty \to 2$, lo que corresponde al flujo alrededor de un cilindro circular.

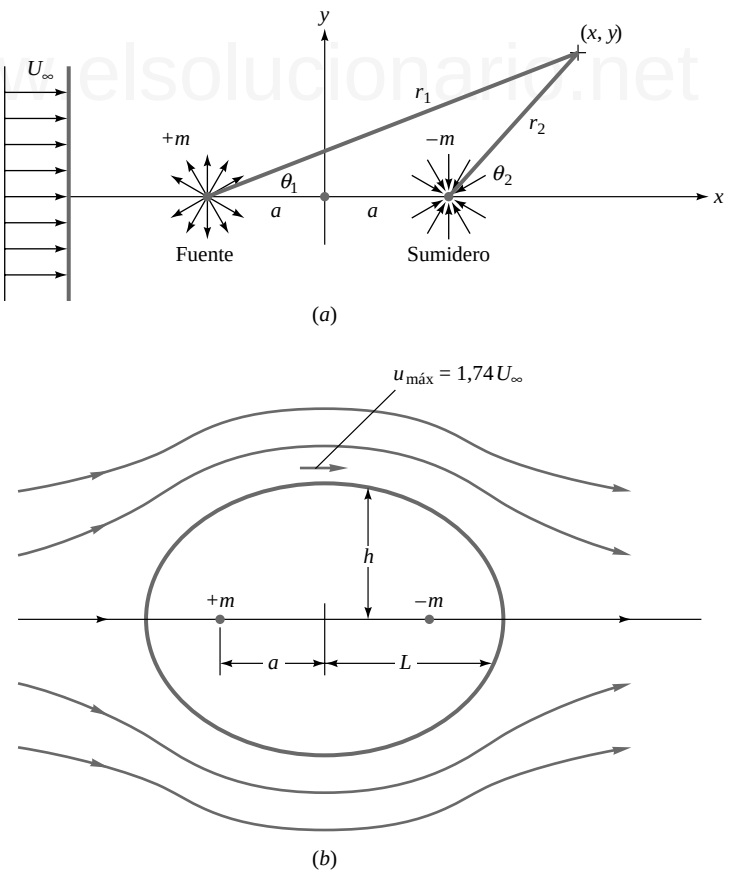


Figura 8.9. Flujo alrededor de un óvalo de Rankine: (*a*) corriente uniforme más un par fuente-sumidero; (*b*) forma oval y líneas de corriente para $m/(U_\infty a) = 1{,}0$.

www.elsolucionario.net

Tabla 8.1. Parámetros del óvalo de Rankine dados en la Ecuación (8.30).

$m/(U_\infty a)$	h/a	L/a	L/h	$U_{máx}/U_\infty$
0,0	0,0	1,0	∞	1,000
0,01	0,031	1,010	32,79	1,020
0,1	0,263	1,095	4,169	1,187
1,0	1,307	1,732	1,326	1,739
10,0	4,435	4,583	1,033	1,968
100,0	14,130	14,177	1,003	1,997
∞	∞	∞	1,000	2,000

Todos los óvalos de Rankine, excepto los muy delgados, tienen un gradiente adverso de presión muy grande en su parte posterior. Así pues, la capa límite se desprende formándose una estela ancha, de modo que el modelo no viscoso no es realista en esta zona.

Flujo alrededor de un cilindro con circulación

Según se deduce de la Tabla 8.1, cuando la intensidad de la fuente es muy grande el óvalo de Rankine se convierte en un círculo de diámetro mucho mayor que la distancia $2a$ entre fuente y sumidero. Mirando con la escala del cilindro, esto es equivalente a una corriente uniforme más un doblete. Añadiremos también un torbellino en el mismo punto que el doblete, lo que no cambia la forma del cilindro.

Por tanto, la función de corriente para el flujo alrededor de un cilindro circular con circulación centrado en el origen es la de una corriente uniforme más un doblete y un torbellino situados en el origen:

$$\psi = U_\infty r \operatorname{sen}\theta - \frac{\mu \operatorname{sen}\theta}{r} - K\ln r + \text{cte} \tag{8.31}$$

La intensidad λ del doblete tiene unidades de velocidad por longitud al cuadrado. Por conveniencia, escribiremos $\lambda = U_\infty a^2$, donde a es una longitud, e igualaremos a K ln a la constante arbitraria de la Ecuación (8.31). La función de corriente toma entonces la forma

$$\boxed{\psi = U_\infty \operatorname{sen}\theta\left(r - \frac{a^2}{r}\right) - K\ln\frac{r}{a}} \tag{8.32}$$

En la Figura 8.10 se han dibujado las líneas de corriente para cuatro valores distintos de la intensidad adimensional del torbellino $K/(U_\infty a)$. En todos los casos la línea $\psi = 0$ corresponde al círculo de radio $r = a$, esto es, al cuerpo de forma cilíndrica. Cuando la circulación $\Gamma = 2\pi K$ aumenta, crece la velocidad en la parte inferior del cilindro y decrece en la parte superior. Las componentes de la velocidad están dadas por

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U_\infty \cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \\ v_\theta &= -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U_\infty \operatorname{sen}\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{K}{r} \end{aligned} \tag{8.33}$$

La velocidad en la superficie $r = a$ del cilindro es tangencial, como era de esperar:

$$v_r(r=a) = 0 \qquad v_\theta(r=a) = -2U_\infty \operatorname{sen}\theta + \frac{K}{a} \tag{8.34}$$

www.elsolucionario.net

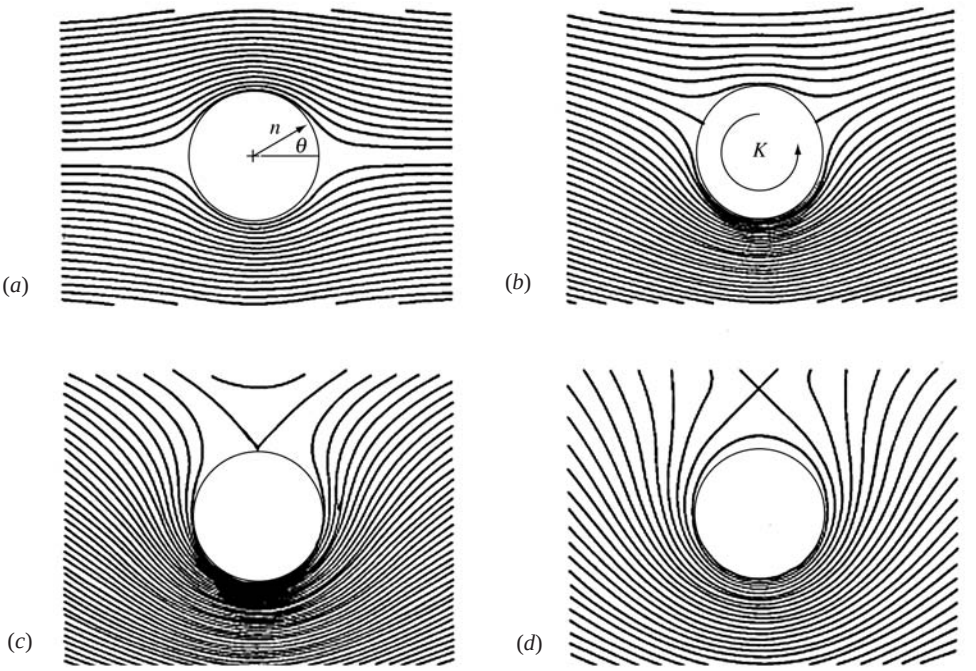


Figura 8.10. Flujo alrededor de un cilindro circular con circulación para valores de $K/U_\infty a$ = (*a*) 0,0; (*b*) 1,0; (*c*) 2,0, y (*d*) 3,0.

Para valores pequeños de K hay dos puntos de remanso sobre la superficie del cilindro, situados a ángulos θ_s donde $v_\theta = 0$; dados, según la Ecuación (8.34), por

$$\text{sen } \theta_s = \frac{K}{2U_\infty a} \tag{8.35}$$

La Figura 8.10*a* corresponde a $K = 0$, $\theta_s = 0$ y 180°, esto es, al flujo no viscoso doblemente simétrico alrededor de un cilindro circular sin circulación. La Figura 8.10*b* corresponde a $K/(U_\infty a) = 1$, $\theta_s = 30$ y 150°, y la Figura 8.10*c* corresponde al caso límite $K/(U_\infty a) = 2$ en que los dos puntos de remanso coinciden en el punto más alto del cilindro, $\theta_s = 90°$.

Para $K > 2U_\infty a$ la Ecuación (8.35) no es válida y sólo hay un punto de remanso fuera del cilindro, como en la Figura 8.10*d*, situado en el punto $y = h$, dado por

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{2}[\varepsilon + (\varepsilon^2 - 4)^{1/2}] \qquad \varepsilon = \frac{K}{U_\infty a} > 2 \tag{8.36}$$

En la Figura 8.10*d*, $K/(U_\infty a) = 3{,}0$ y $h/a = 2{,}6$.

Teorema de Kutta-Joukowski para la sustentación

Para los flujos alrededor del cilindro de las Figuras 8.10*b* a *d* hay una fuerza vertical hacia abajo, o sustentación negativa, denominada *efecto Magnus*, que es proporcional a la velocidad de la corriente uniforme y a la intensidad del torbellino. Del esquema de las líneas de corriente se deduce que la velocidad en la parte superior del cilindro es más grande que en la parte inferior y, según la ecuación de Bernoulli, la presión es más alta en la parte superior, lo que explica que exista esta fuerza. Por supuesto, no hay fuerzas viscosas ya que nuestra teoría es no viscosa.

La velocidad en la superficie está dada por la Ecuación (8.34). La presión p_s se obtiene de la Ecuación de Bernoulli (8.4) despreciando la gravedad, y está dada por

www.elsolucionario.net

$$p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2 = p_s + \frac{1}{2}\rho(2U_{\infty}\ \text{sen}\ \theta)^2 + \frac{K}{a}\Big|^2$$

o

$$p_s = p_{\infty} + \tfrac{1}{2}\rho U_{\infty}^2(1 - 4\ \text{sen}^2\theta + 4\beta\ \text{sen}\ \theta - \beta^2) \tag{8.37}$$

donde $\beta = K/(U_{\infty}a)$ y p_{∞} es la presión en la corriente incidente. Si b es la anchura del cilindro perpendicular al papel, la resistencia D es la integral sobre la superficie de la componente horizontal de las fuerzas de presión:

$$D = -\int_0^{2\pi}(p_s - p_{\infty})\cos\theta\, ba\, d\theta$$

donde $p_s - p_{\infty}$ se sustituye de la Ecuación (8.37). Pero la integral de cos θ multiplicado por cualquier potencia de sen θ extendida a toda la circunferencia 2π es nula. Por tanto, obtenemos el resultado (quizás sorprendente)

$$D(\text{cilindro con circulación}) = 0 \tag{8.38}$$

Éste es un caso particular de la paradoja de D'Alembert mencionada en la Sección 1.14:

> De acuerdo con la teoría no viscosa, cualquier cuerpo de forma arbitraria inmerso en una corriente uniforme no tiene resistencia.

D'Alembert publicó este resultado en 1752, indicando él mismo que no concordaba con lo que ocurría en los flujos de fluidos reales. Esta desafortunada paradoja dio pie a una reacción exagerada y todos rechazaron las teorías no viscosas, hasta que Prandtl, en 1904, mostró cuál era el efecto, tan importante en el flujo, de la delgada capa límite viscosa en la parte posterior del cuerpo, como muestra, por ejemplo, la Figura 7.2*b*.

La sustentación L perpendicular a la corriente incidente, tomada positiva hacia arriba, está dada por la integral de las fuerzas verticales de presión:

$$L = -\int_0^{2\pi}(p_s - p_{\infty})\ \text{sen}\ \theta\, ba\, d\theta$$

Puesto que la integral entre 0 y 2π de cualquier potencia impar de sen θ es cero, sólo el tercer sumando del paréntesis de la Ecuación (8.37) contribuye a la sustentación:

$$L = -\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2\frac{4K}{aU_{\infty}}ba\int_0^{2\pi}\text{sen}^2\theta\, d\theta = -\rho U_{\infty}(2\pi K)b$$

o

$$\boxed{\frac{L}{b} = -\rho U_{\infty}\Gamma} \tag{8.39}$$

Obsérvese que la sustentación es independiente del radio a del cilindro. Sin embargo, en realidad, como veremos en la Sección 8.7, la circulación Γ depende del tamaño y orientación del cuerpo por razones físicas.

La Ecuación (8.39) fue generalizada por W. M. Kutta en 1902 e, independientemente, por N. Joukowski en 1906 en la forma siguiente:

> De acuerdo con la teoría no viscosa, la sustentación por unidad de envergadura de un cilindro de forma arbitraria inmerso en una corriente uniforme es igual a $\rho U_{\infty}\Gamma$, donde Γ es la circulación total alrededor del cuerpo. La dirección de la sustentación se obtiene girando 90° la dirección de la corriente incidente, en el sentido opuesto a la circulación.

www.elsolucionario.net

El problema principal del análisis de perfiles, Sección 8.7, consiste en determinar la circulación Γ como función de la forma y orientación de los mismos.

Valores experimentales de la sustentación y la resistencia en cilindros giratorios

Es casi imposible reproducir experimentalmente el flujo de la Figura 8.10 por medio de un doblete y un torbellino situados en el mismo punto, más una corriente uniforme. Pero se podría conseguir un modelo para su representación física haciendo girar un cilindro en una corriente. La condición de no deslizamiento en un fluido viscoso obliga al fluido en contacto con el cilindro a moverse tangencialmente con la velocidad $v_\theta = a\omega$. Anque debería poderse conseguir una circulación neta Γ mediante este mecanismo de no deslizamiento, el valor real resulta ser menor que el 50 por 100 del valor que proporciona la teoría no viscosa, debido, principalmente, a que hay desprendimiento en la parte posterior del cilindro.

En la Figura 8.11 se muestran los coeficientes experimentales de sustentación y resistencia, basados en el área frontal $2ba$, para cilindros en movimiento giratorio. Según la Ecuación (8.38), la resistencia teórica es nula, pero el C_D real es bastante grande, incluso mayor que el del cilindro fijo de la Figura 5.3. Según la Ecuación (8.67) el coeficiente teórico de sustentación es:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 (2ba)} = \frac{2\rho U_\infty K b}{\rho U_\infty^2 ba} = \frac{2u_{\theta_s}}{U_\infty} \tag{8.40}$$

donde $u_{\theta_s} = K/a$ es la velocidad periférica del cilindro.

La Figura 8.11 muestra que la sustentación teórica, Ecuación (8.40), es demasiado alta, pero la sustentación medida es bastante respetable, de hecho es mayor que la de un perfil típico con la misma cuerda, por ejemplo, véase Figura 7.25. Por tanto, los cilindros giratorios tienen posibilidades prácticas. El barco con rotor de Flettner, construido en Alemania en 1924, utilizaba cilindros giratorios verticales que proporcionaban un empuje perpendicular al viento que soplaba sobre el barco. El diseño de Flettner no alcanzó popularidad, pero tales inventos podrían ser más atractivos en esta época de energía cara.

www.elsolucionario.net

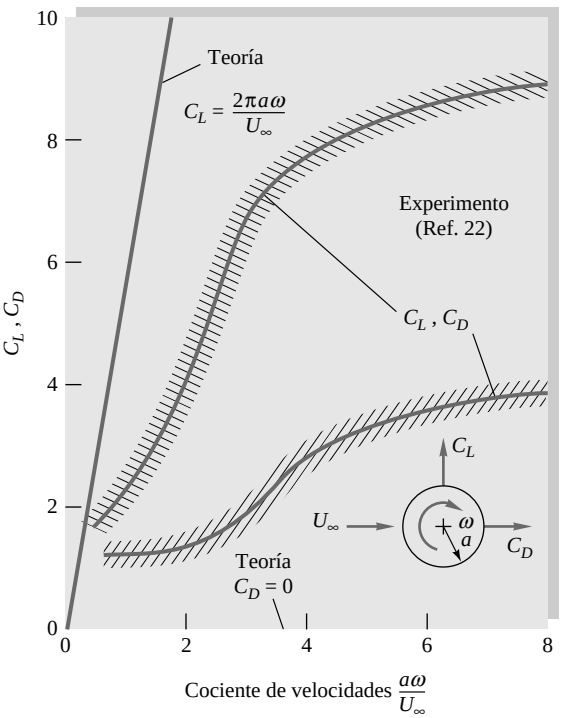


Figura 8.11. Valores teóricos y experimentales de la sustentación y la resistencia en cilindros giratorios. (*De la Referencia 22.*)

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 8.2

La Figura E8.2 muestra el velero experimental con rotor de Flettner de la Universidad de Rhode Island. El rotor tiene 2,5 ft de diámetro y una longitud de 10 ft y gira a 220 rpm gracias a un pequeño motor de cortacésped. Si el viento tiene una velocidad estacionaria de 10 nudos y se desprecia el movimiento relativo del bote, ¿cuál es el empuje máximo que proporciona el rotor? Suponga densidad estándar para el aire.

Solución

Convertimos la velocidad de giro a $\omega = 2\Theta(220)/60 = 23{,}04$ rad/s. La velocidad del viento es de 10 nudos = 16,88 ft/s, luego la relación de velocidades es

$$\frac{a\varnothing}{U_{+}} = \frac{(1{,}25\text{ ft})(23{,}04\text{ rad/s})}{16{,}88\text{ ft/s}} = 1{,}71$$

Entrando en la Figura 8.11, leemos $C_L \Xi 3{,}3$ y $C_D \Xi 1{,}2$. De la Tabla A.6, la densidad del aire estándar es de 0,002377 slug/ft^3. De este modo, los valores estimados para la residencia y la sustentación del rotor son

$$L = C_L \tfrac{1}{2} \Leftarrow U_{+}^2 2ba = 3{,}3(\tfrac{1}{2})(0{,}002377)(16{,}88)^2(2)(10)(1{,}25)$$
$$= 27{,}9\text{ lbf}$$

$$D = C_D \tfrac{1}{2} \Leftarrow U_{+}^2 2ba = L\frac{C_D}{C_L} = 27{,}9\left[\frac{1{,}2}{1{,}3}\right] = 10{,}2\text{ lbf}$$

E8.2. (*Cortesía de R. C. Lessmann, Universidad de Rhode Island.*)

El empuje máximo proporcionado por el rotor es la resultante de estas dos fuerzas:

$$F = [(27{,}9)^2 + (10{,}2)^2]^{1/2} = 29\text{ lbf} \qquad \textit{Resp.}$$

En caso de estar alineado con la quilla, este empuje haría navegar el barco con una velocidad de 5 nudos.

www.elsolucionario.net

Óvalo de Kelvin

Se puede simular una familia de cuerpos más altos que anchos superponiendo una corriente uniforme y un par de torbellinos alineados en dirección perpendicular a la corriente incidente. Si U_∞ es hacia la derecha, se sitúa un torbellino de intensidad $-K$ en $y = +a$ y otro de intensidad $+K$ en $y = -a$, como muestra la Figura 8.12. La función de corriente de dicha combinación es

$$\psi = U_\infty y - \frac{1}{2} K \ln \frac{x^2 + (y+a)^2}{x^2 + (y-a)^2} \tag{8.41}$$

La forma del cuerpo corresponde a la línea $\psi = 0$, y en la Figura 8.12 se dan algunas de estas formas. Para $K/(U_\infty a) > 10$ es, salvo diferencias de un 1 por 100, un óvalo de Rankine (Figura 8.9) girado 90°, pero para valores pequeños de $K/(U_\infty a)$ se estrecha en la parte central, adoptando para 0,5 forma de ocho. Para $K/(U_\infty a) < 0{,}5$ la corriente pasa entre los torbellinos, quedando dos cuerpos aislados, más o menos circulares, rodeando a cada torbellino.

Se puede construir un cuerpo cerrado de forma prácticamente arbitraria mediante la superposición adecuada de fuentes, sumideros y torbellinos con corrientes uniformes. Para más detalles véanse las Referencias 2 a 4. En la Tabla 8.2 se resumen algunos flujos potenciales planos elementales.

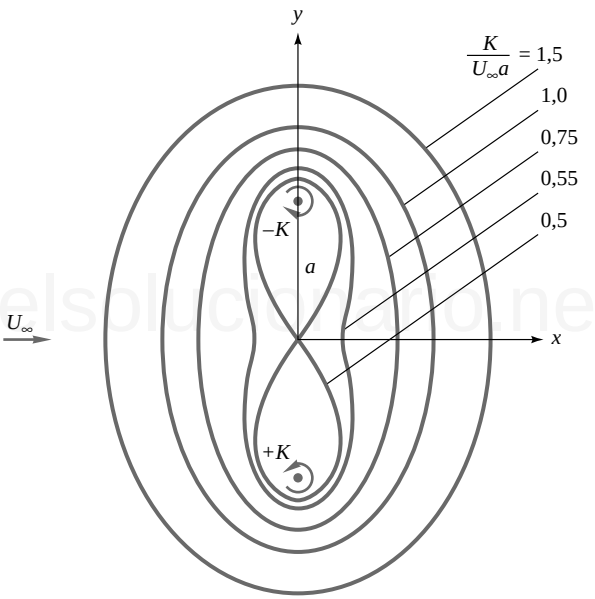


Figura 8.12. Formas del cuerpo oval de Kelvin en función del parámetro de intensidad del torbellino $K/(U_\infty a)$; no se muestran las líneas de corriente exteriores.

Tabla 8.2. Algunos flujos potenciales planos incompresibles.

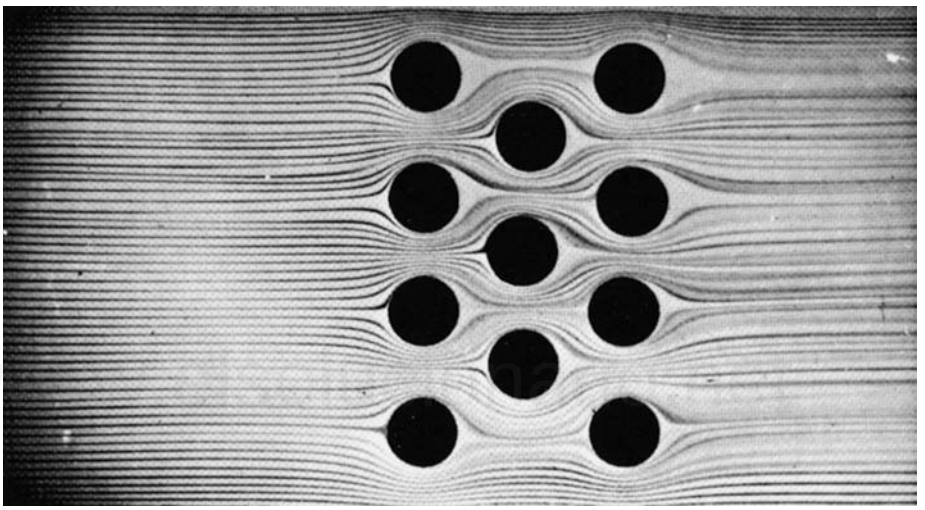
Tipo de flujo	Funciones potenciales	Notas
Corriente uniforme	$\psi = Uy$ $\quad \phi = Ux$	Véase Figura 4.12*a*
Fuente ($m > 0$) o sumidero ($m < 0$)	$\psi = m\theta$ $\quad \phi = m \ln r$	Véase Figura 4.12*b*
Torbellino	$\psi = -K \ln r$ $\quad \phi = K\theta$	Véase Figura 4.12*c*
Cuerpo semiinfinito	$\psi = Ur \operatorname{sen} \theta + m\theta$ $\psi = Ur \cos \theta + m \ln r$	Véase Figura 8.5
Doblete	$\psi = -\frac{K \operatorname{sen} \theta}{r}$ $\quad \phi = \frac{K \cos \theta}{r}$	Véase Figura 8.8
Óvalo de Rankine	$\psi = Ur \operatorname{sen} \theta + m(\theta_1 - \theta_2)$	Véase Figura 8.9
Cilindro con circulación	$\psi = U \operatorname{sen} \theta \left(r - \frac{a^2}{r} \right) + K \ln \frac{r}{a}$	Véase Figura 8.10

www.elsolucionario.net

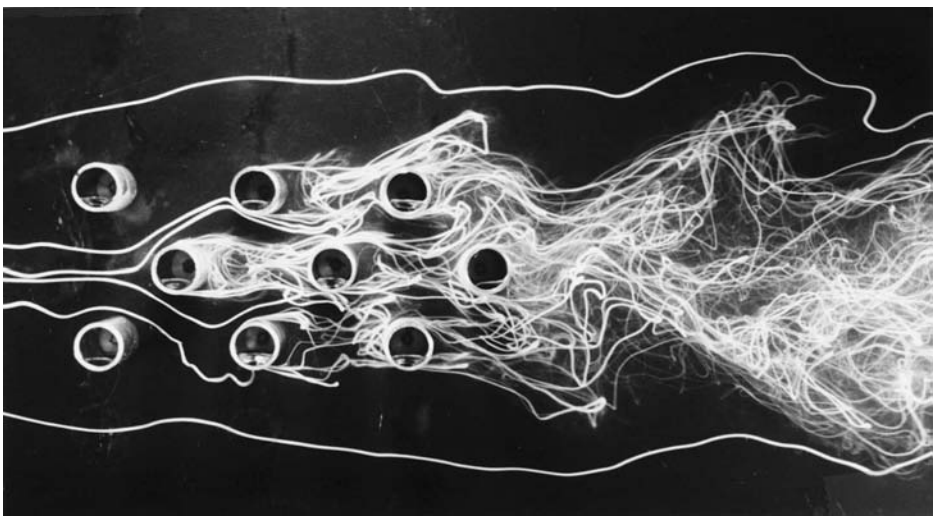
Analogías para flujos potenciales

Para flujos potenciales con geometrías complicadas se pueden utilizar otros métodos distintos al de superposición de fuentes, sumideros y torbellinos. Hay una gran variedad de dispositivos que permiten obtener soluciones de la ecuación de Laplace.

Entre 1897 y 1900 Hele-Shaw [6] desarrolló una técnica mediante la cual un flujo viscoso y laminar, entre dos placas planas paralelas muy próximas, simula el flujo potencial cuando se observa en dirección transversal a las placas. Cuando se colocan obstáculos entre las placas, las líneas de corriente, visualizadas mediante trazas de colorantes, coinciden con las del flujo potencial alrededor de los obstáculos. El aparato de Hele-Shaw permite así hacer representaciones excelentes en el laboratorio de las formas de flujos potenciales [10, págs. 197-198, 219-220]. La Figura 8.13*a* ilustra el flujo experimental de Hele-Shaw alrededor de una distribución de cilindros limitados por dos placas, un flujo que sería difícil de analizar usando simplemente la ecuación de Laplace. Pese a lo bonito que pudiera parecer este flujo, no es una buena aproximación del flujo real (laminar y viscoso) a través de una distribución de cilindros. En la Figura 8.13*b* se muestran las líneas de traza experimentales correspondientes a un flujo similar a Re Ξ 6400. Vemos que la



(*a*)



(*b*)

Figura 8.13. Flujo alrededor de un conjunto de cilindros circulares confinados entre paredes planas: (*a*) flujo potencial visualizado por el método de Hele-Shaw (*TQ Education and Training Ltd.*); (*b*) líneas de traza obtenidas experimentalmente en un flujo real a $Re_D \Xi 6400$. (*Tomada de la Referencia 36, cortesía de Jack Hoyt, con permiso de la American Society of Mechanical Engineers.*)

www.elsolucionario.net

interacción entre las estelas (Figura 8.13*b*) fomenta la mezcla y provoca movimientos transversales fuertes, no el flujo suave que predice el modelo potencial (Figura 8.13*a*). La idea es que se trata de un flujo interno alrededor de múltiples cuerpos y, por tanto, no es un buen candidato para que un modelo de flujo potencial proporcione una aproximación realista.

En la Referencia 8 se discuten otras técnicas de representación de flujos. Los campos electromagnéticos también satisfacen la ecuación de Laplace, siendo el voltaje análogo al potencial de velocidades y las líneas de corriente eléctrica análogas a las líneas de corriente del fluido. Tiempo atrás se empleaban trazadores analógicos comerciales que utilizaban un papel conductor que podía cortarse con la forma geométrica de los contornos del flujo. Probando con el punzón de un potenciómetro se localizaban las líneas equipotenciales. También se usaban procedimientos gráficos manuales. Pero en la actualidad la existencia de métodos numéricos sencillos para el cálculo de flujos potenciales [5 a 7] ha dejado obsoletas este tipo de analogías.

EJEMPLO 8.3

El óvalo de Kelvin de la Figura 8.12 tiene $K/(U_\infty a) = 1$. Calcule la velocidad en el punto superior del óvalo en función de U_∞.

Solución

Determinamos la posición $y = h$ del punto más alto a partir de la Ecuación (8.41) con $\psi = 0$ y $x = 0$, lo que proporciona

$$\frac{h}{a} = \frac{K}{U_\infty a}\ln\frac{h/a+1}{h/a-1}$$

Con $K/(U_\infty a) = 1$ y a la vista de la Figura 8.12 probamos inicialmente el valor $h/a \approx 1{,}5$, e iterando se obtenemos $h/a = 1{,}5434$.

En el punto más alto del óvalo $v = 0$, porque la línea de corriente es horizontal. Por tanto, la velocidad en este punto es, Ecuación (8.41),

$$u\Big|_{y=h} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\Big|_{y=h} = U_\infty + \frac{K}{h-a} - \frac{K}{h+a}$$

Sustituyendo $K = U_\infty a$ y $h = 1{,}5434a$, obtenemos

$$u|_{y=h} = U_\infty(1{,}0 + 1{,}84 - 0{,}39) = 2{,}45U_\infty \qquad \textit{Resp.}$$

Todos los óvalos de Kelvin, por ser más estrechos que un cilindro circular, tienen una velocidad en el punto más alto mayor que la del cilindro, $2U_\infty$, obtenida de la Ecuación (8.34).

8.5. OTROS FLUJOS POTENCIALES PLANOS[2]

Además de los casos presentados en las Secciones 8.3 y 8.4, en las Referencias 2 a 4 se tratan muchos más flujos potenciales de interés. En principio, cualquier flujo potencial plano puede resolverse por el método de la transformación conforme utilizando la variable compleja

$$z = x + iy \qquad i = (-1)^{1/2}$$

Cualquier función analítica de la variable compleja z tiene la propiedad de que tanto su parte real como su parte imaginaria son soluciones de la ecuación de Laplace. Si

$$f(z) = f(x + iy) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$$

[2] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

entonces
$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \tag{8.42}$$

Dejamos para el Problema C8.4 la demostración de esta propiedad. Lo más notable, si nunca lo ha visto antes, es que las líneas f_1 constante son perpendiculares a las líneas f_2 constante en todo el plano complejo:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{f_1=C} = -\frac{1}{(dy/dx)_{f_2=C}} \tag{8.43}$$

Esto es cierto para cualquier función arbitraria $f(z)$ siempre que sea analítica; esto es, que tenga derivada df/dz única en cada punto del dominio.

El resultado de las Ecuaciones (8.42) y (8.43) es que las funciones f_1 y f_2 pueden interpretarse como la función potencial y la función de corriente de un flujo no viscoso. Es costumbre que la parte real de $f(z)$ se asocie al potencial de velocidades y la parte imaginaria a la función de corriente:

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \tag{8.44}$$

Probaremos con varias funciones $f(z)$ para ver si representan algún tipo de flujo interesante. Por supuesto, ya hemos encontrado muchas, y simplemente recopilaremos aquí algunas de ellas.

No entraremos en detalles, pero hay excelentes tratados sobre la técnica de la variable compleja, tanto introductorios [4] como de nivel más avanzado [2, 3]. Hoy en día el método ha perdido parte de su popularidad debido al auge de las técnicas numéricas.

Como ejemplo sencillo, consideremos la función lineal

$$f(z) = U_\infty z = U_\infty x + iU_\infty y$$

De la Ecuación (8.44) se deduce que $\phi = U_\infty x$ y $\psi = U_\infty y$, que representa una corriente uniforme en la dirección del eje x, Ecuación (8.12*a*). Una vez que se acostumbre a utilizar la variable compleja, la solución estará prácticamente a su alcance.

La velocidad puede determinarse a partir de ϕ, o ψ o mediante derivación directa de $f(z)$:

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = u - iv \tag{8.45}$$

Por tanto, la parte real de df/dz es igual a $u(x, y)$ y la parte imaginaria a $-v(x, y)$. Para conseguir un resultado práctico, la derivada df/dz debe existir y ser única; de aquí la condición de que f sea una función analítica. Para $f(z) = U_\infty z$, $df/dz = U_\infty = u$ es real y, por tanto, $v = 0$, como era de esperar.

Algunas veces es conveniente utilizar la variable compleja en coordenadas polares

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta$$

donde
$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \qquad \theta = \text{tg}^{-1}\frac{y}{x}$$

Esta forma es especialmente conveniente cuando aparecen potencias de z.

Corriente uniforme con ángulo de ataque

Todos los flujos elementales planos de la Sección 8.2 pueden formularse en términos de la variable compleja. La corriente uniforme U_∞ con ángulo de ataque α tiene el potencial complejo

$$f(z) = U_\infty z e^{-i\alpha} \tag{8.46}$$

Compare esta expresión con la Ecuación (8.14).

www.elsolucionario.net

Fuente situada en el punto z_0

Considérese una fuente bidimensional de intensidad m situada en un punto arbitrario $z_0 = x_0 + iy_0$. Su potencial complejo es

$$f(z) = m \ln (z - z_0) \tag{8.47}$$

Se puede comparar esta expresión con la Ecuación (8.12*b*), que sólo es válida cuando la fuente está situada en el origen. Para un sumidero bidimensional, la intensidad m es negativa.

Torbellino situado en el punto z_0

Si se sitúa un torbellino bidimensional de intensidad K en el punto z_0, su potencial complejo es

$$f(z) = -iK \ln (z - z_0) \tag{8.48}$$

que se debe comparar con la Ecuación (8.12*c*). Comparando además con la Ecuación (8.47) se observa que al multiplicar el potencial complejo por $-i$ los papeles de ϕ y ψ se invierten.

Flujo alrededor de esquinas y rincones con ángulo arbitrario

El flujo alrededor de esquinas y rincones es un caso que no puede describirse adecuadamente mediante superposición de fuentes, sumideros y torbellinos. Tiene una representación compleja muy simple:

$$f(z) = Az^n = Ar^n e^{in\theta} = Ar^n \cos n\theta + iAr^n \operatorname{sen} n\theta$$

donde A y n son constantes.

Según la Ecuación (8.44) para este flujo se tiene

$$\phi = Ar^n \cos n\theta \qquad \psi = Ar^n \operatorname{sen} n\theta \tag{8.49}$$

En la Figura 8.14 se han representado las líneas de corriente dadas por la Ecuación (8.49) para cinco valores diferentes de n. Se ve que el flujo representa una corriente que gira un ángulo $\beta = \Theta/n$. Los casos de las

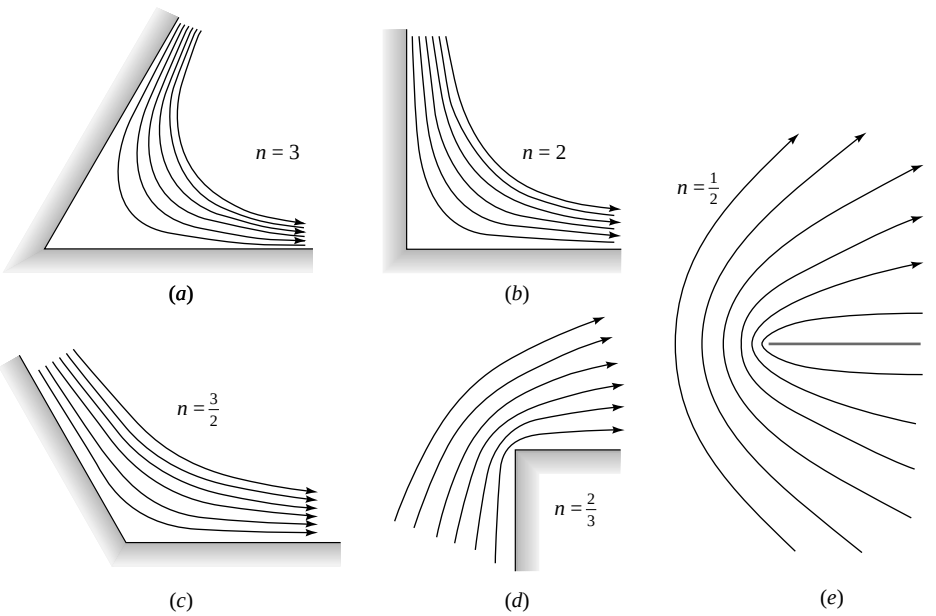


Figura 8.14. Líneas de corriente para el flujo alrededor de rincones y esquinas, Ecuación (8.49): ángulo del rincón o esquina β = (*a*) 60°; (*b*) 90°; (*c*) 120°; (*d*) 270°, y (*e*) 360°.

www.elsolucionario.net

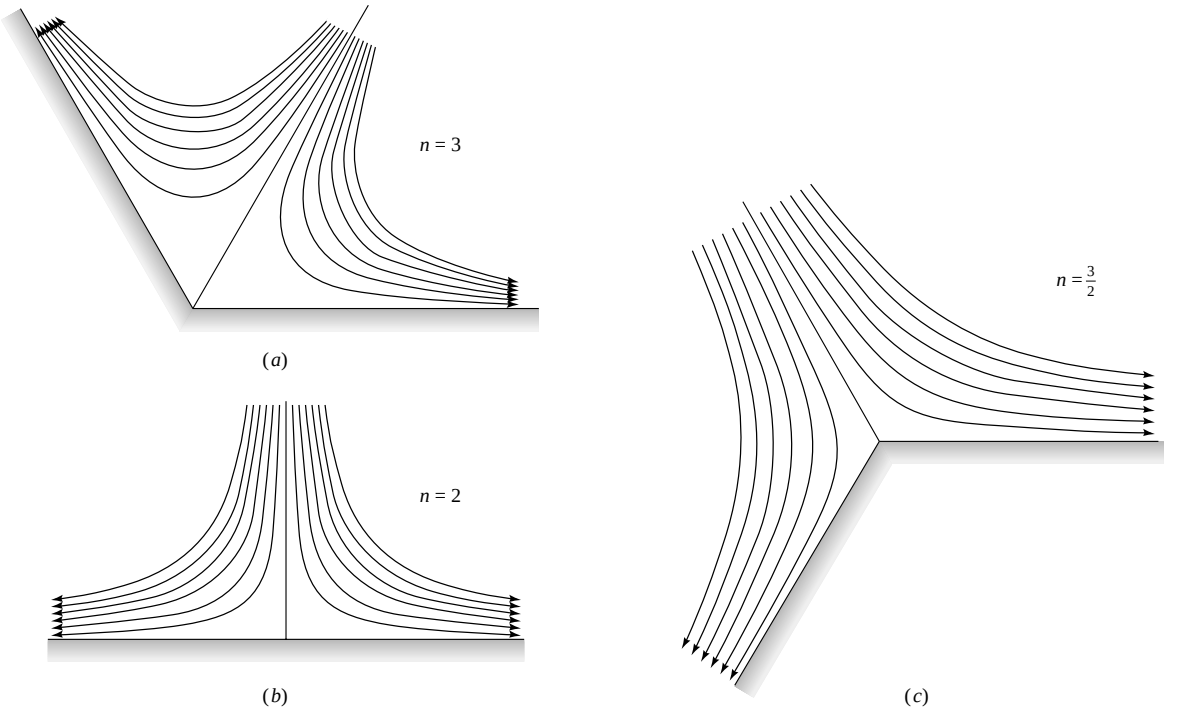


Figura 8.15. Líneas de corriente en el entorno de puntos de remanso, Ecuación (8.49): ángulo del rincón o esquina 2β = (*a*) 120°, (*b*) 180° y (*c*) 240°.

Figuras 8.14*d* y *e* no son realistas, ya que en el lado de aguas abajo de la esquina hay desprendimiento de la capa límite debido al gradiente adverso de presión y al cambio brusco de dirección. En general, el desprendimiento se produce siempre aguas abajo de los salientes, o protuberancias, y esquinas, excepto en movimientos lentos a bajos números de Reynolds, Re < 1.

Puesto que 360° = 2Θes el ángulo máximo que puede tener una esquina, los flujos para $n < \frac{1}{2}$ no representan flujos alrededor de esquinas.

Si duplicamos el dibujo de cada una de las Figuras 8.14*a* a *c*, obtenemos el flujo en el entorno del punto de remanso de un rincón de ángulo $2\beta = 2\Theta/n$. Esto es lo que se ha hecho en la Figura 8.15 para $n = 3$, 2 y 1,5. Estos flujos son muy realistas; aunque el fluido desliza por la pared, se pueden acoplar bien con la capa límite. Con anterioridad ya tratamos brevemente estos flujos, en los Ejemplos 4.5 y 4.9 y en los Problemas P4.49 a 4.51.

Flujo normal a una placa plana

Trataremos este caso por separado porque los óvalos de Kelvin de la Figura 8.12 no llegan a degenerar en una placa plana cuando *K* es pequeño. La placa plana perpendicular a una corriente incidente es un caso extremo digno de interés.

Aunque el resultado es bastante simple, su obtención es muy complicada y se da, por ejemplo, en la Referencia 2, Sección 9.3. Se necesitan tres cambios de variable compleja, o transformaciones, comenzando con la solución del cilindro circular de la Figura 8.10*a*. Primero se gira la corriente uniforme para dejarla dirigida verticalmente hacia arriba, después se aplasta el cilindro hasta convertirlo en una placa plana y, finalmente, la corriente incidente se vuelve a poner horizontal. El resultado final para el potencial complejo es

$$f(z) = \phi + i\psi = U_\infty (z^2 + a^2)^{1/2} \tag{8.50}$$

donde $2a$ es la altura de la placa. Para aislar ϕ o ψ, se elevan al cuadrado ambos miembros y se separan las partes real e imaginaria:

$$\phi^2 - \psi^2 = U_\infty^2 (x^2 - y^2 + a^2) \qquad \phi\psi = U_\infty^2 xy$$

www.elsolucionario.net

La función de corriente ψ se obtiene de

$$\psi^4 - \psi^2 U_{\div}^2 (x^2 - y^2 + a^2) = U_{\div}^4 x^2 y^2 \tag{8.51}$$

En la Figura 8.16*a* se ha representado la Ecuación (8.51), mostrando una configuración doblemente simétrica de líneas de corriente que se acercan mucho a la placa y después se deflectan, con velocidades muy altas y presiones muy bajas cerca de los extremos de la placa.

La velocidad v_s a lo largo de la placa se determina calculando df/dz de la Ecuación (8.50) y quedándonos sólo con la parte imaginaria:

$$\left.\frac{v_s}{U_{\div}}\right|_{\text{superficie de la placa}} = \frac{y/a}{(1 \Phi y^2/d^2)^{1/2}} \tag{8.52}$$

A continuación se tabulan algunos valores de la velocidad en la superficie:

y/a	0,0	0,2	0,4	0,6	0,707	0,8	0,9	1,0
$v_s/U_{\div}$	0,0	0,204	0,436	0,750	1,00	1,33	2,07	÷

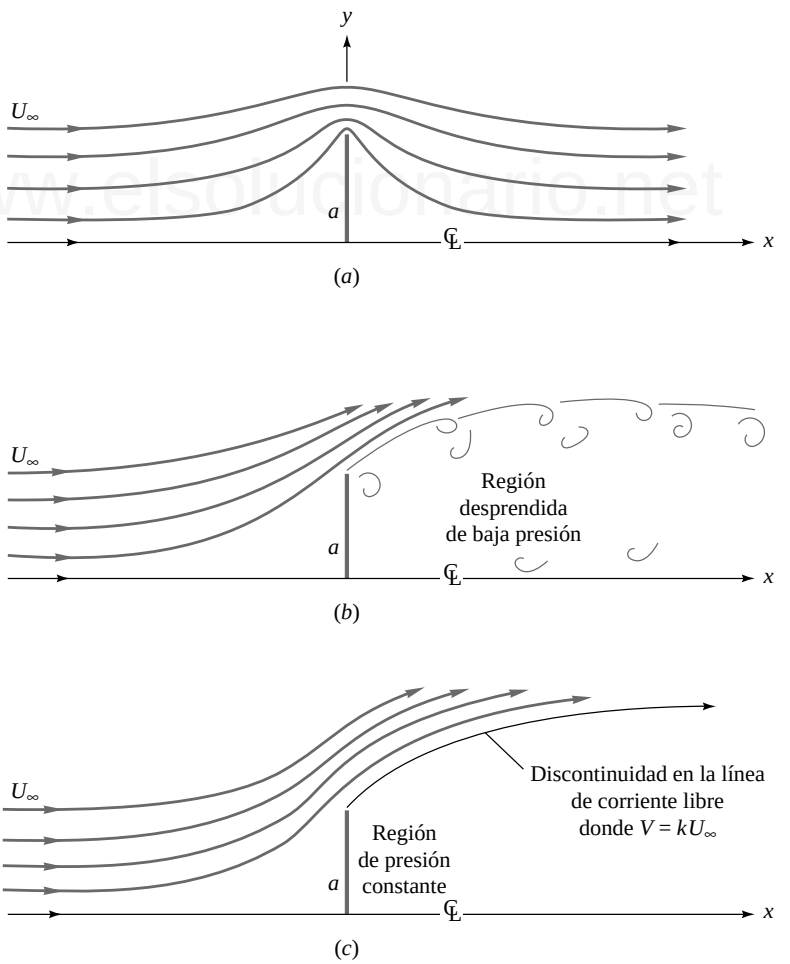


Figura 8.16. Líneas de corriente en el semiplano superior para el flujo alrededor de una placa plana normal a la corriente incidente de altura 2*a*: (*a*) teoría potencial (flujo continuo), Ecuación (8.51); (*b*) flujo real medido; (*c*) teoría potencial discontinua con $k \Xi 1{,}5$.

www.elsolucionario.net

El origen es un punto de remanso; la velocidad crece linealmente al principio y muy rápidamente cerca del borde, siendo infinitas la velocidad y la aceleración en él.

Como podrá imaginarse, la Figura 8.16*a* no es realista. En un flujo real se desprende la corriente en el borde, originándose una estela ancha y de baja presión aguas abajo, como en la Figura 8.16*b*. El coeficiente de resistencia, en lugar de ser cero, es bastante grande, tomando el valor $C_D \Xi 2{,}0$ dado en la Tabla 7.2.

Helmholtz en 1868 y Kirchhoff en 1869 desarrollaron una teoría potencial con discontinuidades que tiene en cuenta el desprendimiento de la corriente. La solución correspondiente a la línea de corriente libre se muestra en la Figura 8.16*c*, con la línea de corriente libre que arranca del borde de la placa, donde la velocidad es constante e igual a $V = kU_\div$. De la ecuación de Bernoulli la presión en la zona de estancamiento detrás de la placa es igual a $p_e = p_\div + \frac{1}{2}\rho U_\div^2(1 - k^2)$ para que coincida con la presión a lo largo de la línea de corriente libre. Para $k = 1{,}5$ esta teoría de Helmholtz-Kirchhoff predice $p_e = p_\div - 0{,}625\rho U_\div^2$ y una presión media en la parte frontal $p_f = p_\div + 0{,}375\rho U_\div^2$, lo que proporciona un coeficiente de resistencia de 2,0, que está de acuerdo con los experimentos. Sin embargo, el coeficiente k es desconocido *a priori* y debe obtenerse del ajuste de los datos experimentales, de modo que la teoría de la línea de corriente libre sólo puede considerarse correcta con ciertas reservas. Para más detalles véase la Referencia 2, Sección 11.2.

8.6. IMÁGENES[3]

En las soluciones previas los flujos eran ilimitados en extensión, como en el caso del cilindro circular en una corriente uniforme de anchura infinita, Figura 8.10*a*. Sin embargo, en muchos problemas prácticos hay paredes rígidas que limitan el flujo, por ejemplo, (1) el flujo de aguas subterráneas cerca de la base de una presa, (2) un perfil cerca del suelo simulando el despegue o aterrizaje, o (3) un cilindro montado en un túnel aerodinámico de pequeña anchura. En tales casos los flujos potenciales básicos no limitados por paredes se pueden modificar incluyendo su efecto mediante el método de las *imágenes*.

Consideremos una fuente bidimensional, o línea de fuentes, situada a una distancia a de una pared, como en la Figura 8.17*a*. Para simular la pared se sitúa una fuente imagen de igual intensidad y a la misma distancia por debajo de la pared. Por simetría, las dos fuentes dan lugar a una línea de corriente horizontal entre ellas, que equivale a la pared.

En la Figura 8.17*b* el torbellino cerca de la pared requiere un torbellino imagen por debajo a la misma distancia, pero con rotación *opuesta*. Hemos sombreado la pared, pero la configuración también puede interpretarse como el flujo en la proximidad de una pareja de torbellinos contrarrotatorios en un fluido ilimitado.

El efecto suelo sobre un perfil en una corriente uniforme se simula añadiendo el perfil imagen por debajo del suelo con circulación y sustentación opuestas, Figura 8.17*c*. Esto parece fácil, pero realmente no lo es porque los perfiles están tan próximos que interaccionan entre ellos y cada uno distorsiona la forma del otro. Como regla, se puede considerar que la distorsión es importante si el cuerpo está a una distancia de la pared inferior a dos veces su cuerda. Para eliminar la distorsión es necesario añadir al flujo una serie de imágenes de «corrección» con objeto de recuperar la forma original del perfil aislado. En la Referencia 2, Sección 7.75, encontrará una buena exposición de este procedimiento, que normalmente requiere el uso de un ordenador para sumar los efectos de las múltiples imágenes necesarias.

En la Figura 8.17*d* se muestra una fuente en presencia de dos paredes. Una pared sólo requiere una imagen, como en la figura 8.17*a*, pero para *dos* paredes se necesita una distribución infinita de fuentes imagen por encima y por debajo de la configuración que se busca describir, tal como se muestra en la Figura 8.17*d*. Normalmente es necesario hacer la suma con ordenador, pero a veces es posible obtenerla en forma analítica, como para la hilera de torbellinos de la Ecuación (8.51).

[3] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

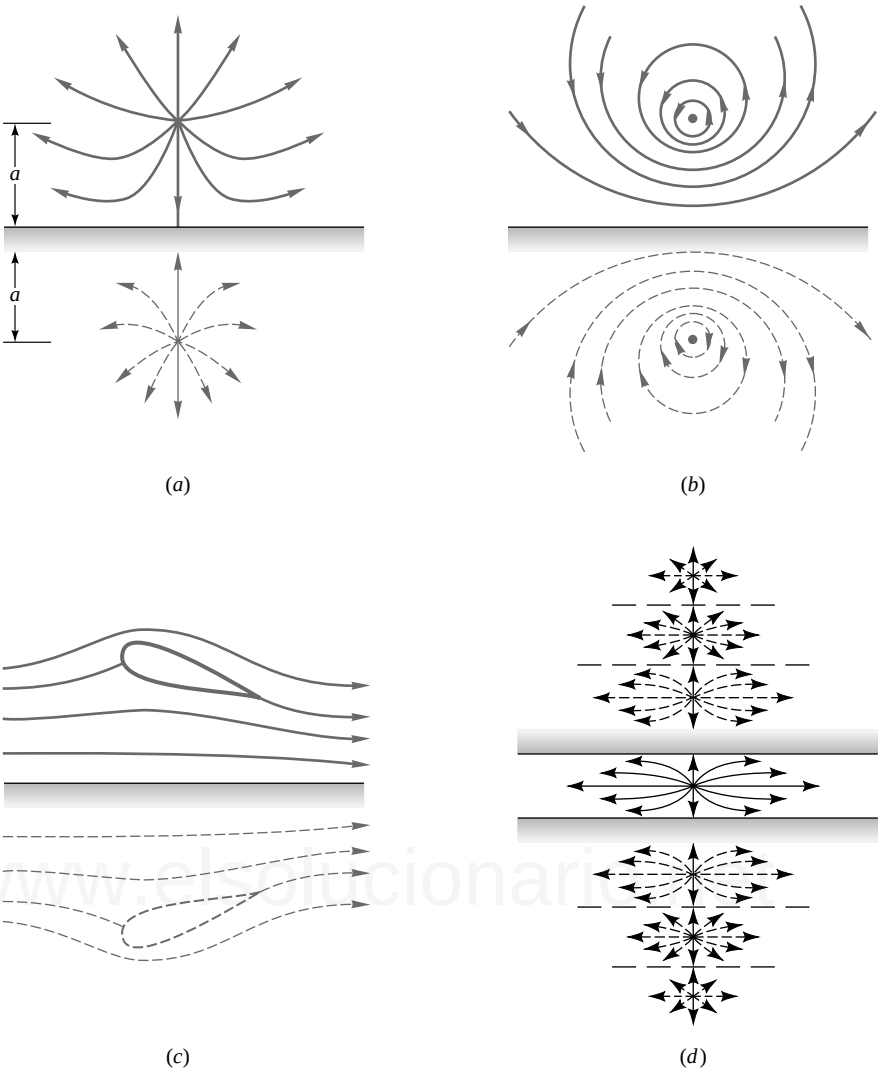


Figura 8.17. Mediante el método de las imágenes se pueden generar flujos con paredes: (*a*) fuente cerca de una pared con fuente imagen idéntica; (*b*) torbellino cerca de una pared con torbellino imagen en sentido opuesto; (*c*) perfil con efecto suelo y perfil imagen de circulación opuesta; (*d*) una fuente entre dos paredes necesita de una hilera infinita de imágenes.

EJEMPLO 8.4

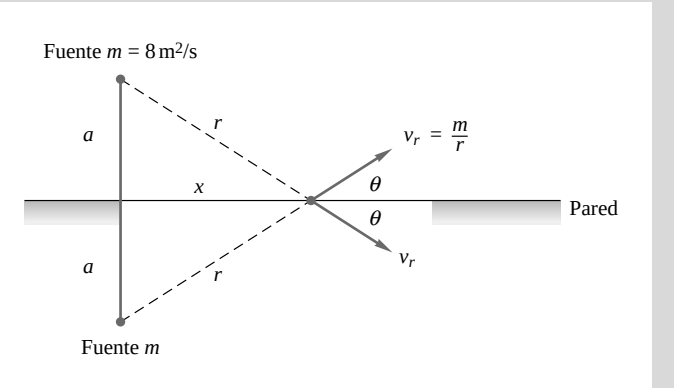
Para la fuente cerca de una pared de la Figura 8.17*a*, la velocidad en la pared es nula entre la fuente y su imagen, alcanza un máximo al desplazarnos a lo largo de la pared, y finalmente decae a cero lejos de las fuentes. Si la intensidad de la fuente es de 8 m^2/s, ¿a qué distancia de la pared debe situarse la fuente para que la máxima velocidad a lo largo de la pared sea de 5 m/s?

Solución

Como se observa en la Figura E8.4, en un punto x situado en la pared cada fuente induce una velocidad radial $v_r = m/r$, que tiene una componente $v_r \cos \theta$ a lo largo de la pared. La velocidad total en la pared es entonces

$$u_{\text{pared}} = 2v_r \cos \theta$$

www.elsolucionario.net



E8.4

De la geometría de la Figura E8.4, $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$ y cos $\theta = x/r$. Por tanto, la velocidad total en la pared se puede expresar como

$$u = \frac{2mx}{x^2 + a^2}$$

La velocidad es nula en $x = 0$ y en $x \to \div$. Para hallar la velocidad máxima, derivamos e igualamos a cero:

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad \text{en} \quad x = a \quad \text{y} \quad u_{máx} = \frac{m}{a}$$

Hemos omitido parte del álgebra al presentar estos resultados. Teniendo en cuenta el valor dado para la intensidad de la fuente y la expresión para la velocidad máxima, la distancia apropiada es

$$a = \frac{m}{u_{máx}} = \frac{8\ m^2/s}{5\ m/s} = 1{,}6\ m \qquad \textit{Resp.}$$

En $x > a$ el gradiente de presiones a lo largo de la pared es adverso, y se debe utilizar la teoría de la capa límite para predecir el desprendimiento.

8.7. TEORÍA DE PERFILES[4]

Como se ha mencionado cuando se habló del teorema de Kutta-Joukowski para la sustentación, Ecuación (8.39), el problema en la teoría de perfiles consiste en determinar la circulación neta Γ como función de la forma del perfil y el ángulo de ataque de la corriente incidente α.

Condición de Kutta

Aunque la forma del perfil y el ángulo de ataque sean conocidos, la solución proporcionada por la teoría potencial no es única: se puede encontrar una familia infinita de soluciones cada una de ellas correspondiente a un valor de Γ. En la Figura 8.10 se mostraron cuatro ejemplos de esta no unicidad para el cilindro circular. Lo mismo ocurre para un perfil, y en la Figura 8.18 se muestran tres «soluciones» para la corriente alrededor de un perfil que son matemáticamente aceptables, con valores pequeños (Figura 8.18*a*), grandes (Figura 8.18*b*) y medianos (Figura 8.18*c*) de la circulación total. De acuerdo con la discusión del capítulo

[4] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

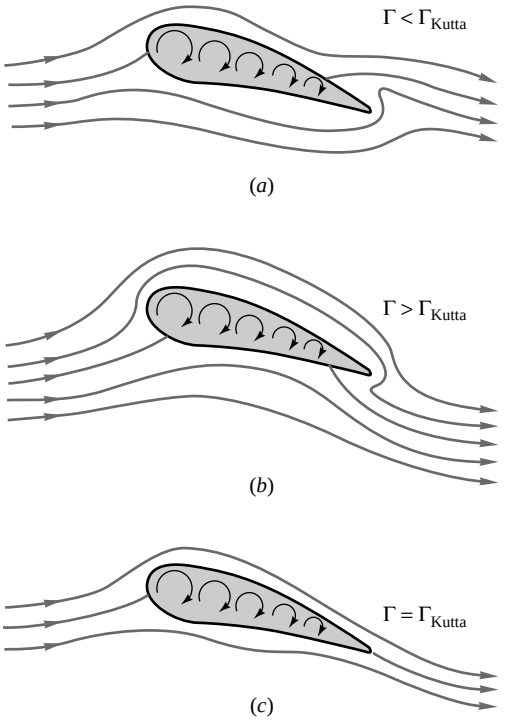


Figura 8.18. La condición de Kutta simula de forma apropiada el flujo alrededor de un perfil; (*a*) circulación menor de la necesaria, el punto de remanso posterior está en la superficie superior; (*b*) circulación excesiva, el punto de remanso posterior está en la superficie inferior; (*c*) circulación correcta, la condición de Kutta implica que la corriente abandona el borde de salida suavemente.

www.elsolucionario.net

anterior acerca del desarrollo de la sustentación, Figura 7.20, debería poder deducir qué caso simula mejor el flujo real alrededor de un perfil. En este caso (Figura 8.18*c*) los flujos superior e inferior se encuentran y abandonan el borde de salida suavemente. Si el borde de salida es ligeramente redondeado, habrá allí un punto de remanso. Si el borde de salida es afilado, como en la mayoría de los perfiles, las velocidades del fluido en las superficies superior e inferior deben ser iguales al abandonar el perfil.

Este razonamiento físico proporciona el valor apropiado de Γ y se atribuye generalmente a W. M. Kutta, de ahí el nombre de *condición de Kutta*; sin embargo, algunos textos se lo acreditan a Joukowski y/o a Chaplygin. Todas las teorías de perfiles utilizan la condición de Kutta, que concuerda muy bien con los experimentos. El valor correcto de la circulación Γ_{Kutta} depende de la velocidad incidente, del ángulo de ataque y de la forma del perfil.

Teoría de la capa de torbellinos para una placa plana

La placa plana es el perfil más sencillo, ya que no tiene ni espesor ni «forma», pero incluso así su teoría no es tan simple. El problema puede resolverse mediante la transformación conforme [2, pág. 480], pero aquí utilizaremos la capa de torbellinos. La Figura 8.19*a* muestra una placa plana de longitud C simulada por una capa de torbellinos de intensidad variable $\gamma(x)$. La corriente libre U_{∞} forma un ángulo de ataque α con la cuerda de la placa.

Para que la sustentación se dirija hacia arriba con el flujo de izquierda a derecha, como se muestra en la figura, la circulación debe ser en el sentido de las agujas del reloj. Recuerde de la Figura 8.7*c* que a través de la capa de torbellinos hay un salto de velocidad tangencial que es igual a la intensidad local:

$$u_s - u_i = \gamma(x) \tag{8.53}$$

Si omitimos la corriente libre, la capa debe originar un flujo hacia la derecha $\delta u = +\frac{1}{2}\gamma$ en la superficie superior, e igual y en sentido contrario en la superficie inferior, como se muestra en la Figura 8.19*a*. La con-

www.elsolucionario.net

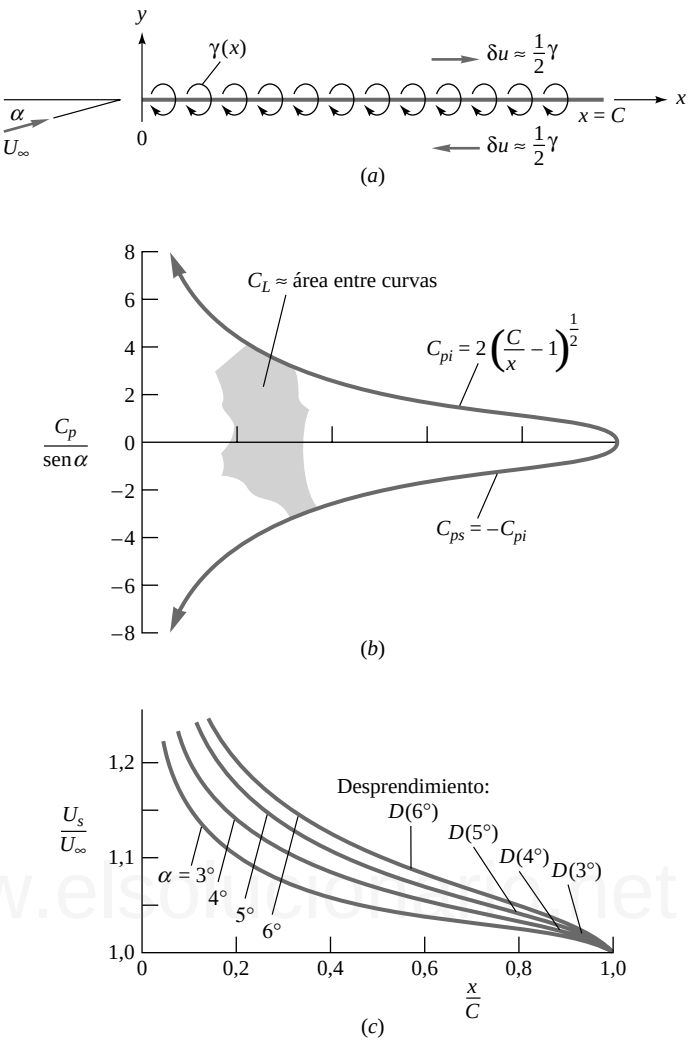


Figura 8.19. Solución para la placa plana con ángulo de ataque utilizando la capa de torbellinos; (*a*) geometría de la capa; (*b*) coeficiente teórico de presión sobre las superficies superior e inferior; (*c*) velocidad en la superficie superior, donde los puntos *D* indican el punto de desprendimiento de la capa límite laminar.

dición de Kutta para este borde de salida afilado se traduce en que esta diferencia de velocidades debe desaparecer en el borde de salida para que el flujo sea allí suave y paralelo:

$$\gamma(C) = 0 \tag{8.54}$$

La solución apropiada debe satisfacer esta condición, después de lo cual se puede calcular la sustentación total sumando la intensidad de la capa sobre todo el perfil. De la Ecuación (8.39) para un perfil de anchura b:

$$L = \rho U_\infty b\Gamma \qquad \Gamma = \int_0^C \gamma(x)dx \tag{8.55}$$

Una forma alternativa de determinar la sustentación es a partir del coeficiente adimensional de presión C_p en las superficies superior e inferior:

$$C_{p_{s,i}} = \frac{p_{s,i} - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 1 - \frac{U_{s,i}^2}{U_\infty^2} \tag{8.56}$$

www.elsolucionario.net

donde la última expresión proviene de la ecuación de Bernoulli. El cuadrado de la velocidad en la superficie se obtiene combinando la corriente uniforme y las componentes de la velocidad debidas a la capa de torbellinos. De la Figura 8.19*a* se tiene:

$$U_{s,i}^2 = (U_\infty \cos\alpha \pm \gamma/2)^2 + (U_\infty \operatorname{sen}\alpha)^2$$
$$= U_\infty^2 \pm U_\infty \gamma \cos\alpha + \gamma^2/4 \approx U_\infty^2 \left(1 \pm \frac{\gamma}{U_\infty}\right) \tag{8.57}$$

donde, en la última expresión, hemos hecho las aproximaciones $\delta u \ll U_\infty$ y $\cos\alpha \approx 1$ por considerar pequeño el ángulo de ataque. En primera aproximación, las Ecuaciones (8.56) y (8.57) se combinan para dar

$$C_{p_{s,i}} = \mp \frac{\gamma}{U_\infty} = \mp \frac{\gamma}{U_\infty} \tag{8.58}$$

La sustentación es la integral de la diferencia de presiones extendida a toda la longitud del perfil, supuesto de anchura b:

$$L = \int_0^C (p_i - p_s) b \, dx$$

o

$$C_L = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 b C} = \int_0^1 (C_{p_i} - C_{p_s}) \frac{dx}{C} = 2\int_0^1 \frac{\gamma}{U_\infty} d\left(\frac{x}{C}\right) \tag{8.59}$$

Las Ecuaciones (8.55) y (8.59) son totalmente equivalentes dentro de la aproximación de ángulo de ataque pequeño.

La intensidad de la capa $\gamma(x)$ se determina de la condición de que la velocidad normal $v(x)$ es cero en la capa ($y = 0$), ya que la capa representa una placa sólida o superficie de corriente. Considerando un elemento de capa $\gamma\,dx$ situado en x_0, la velocidad v en el punto x de la capa es la debida a un torbellino bidimensional de intensidad $d\Gamma = -\gamma\,dx$:

$$dv\Big|_x = \frac{d\xi}{2\pi r}\Big|_{x_0\gamma\ x} = \frac{-\gamma\,dx}{2\pi(x_0 - x)}$$

La velocidad normal en el punto x inducida por toda la capa es

$$v_{\text{capa}} = -\int_0^C \frac{\gamma\,dx}{2\pi(x_0 - x)} \tag{8.60}$$

Mientras tanto, de la Figura 8.19*a*, la corriente uniforme induce una velocidad normal constante en cada punto de la capa dada por

$$v_{\text{corriente}} = U_\infty \operatorname{sen}\alpha$$

Haciendo que la suma de v_{capa} y $v_{\text{corriente}}$ sea igual a cero, se obtiene la ecuación integral

$$\int_0^C \frac{\gamma\,dx}{x_0 - x} = 2\pi U_\infty \operatorname{sen}\alpha \tag{8.61}$$

que debe resolverse para $\gamma(x)$ con la condición de Kutta $\gamma(C) = 0$ dada por la Ecuación (8.54).

www.elsolucionario.net

Aunque la Ecuación (8.61) es bastante difícil (y no sólo para los principiantes), fue resuelta hace tiempo utilizando fórmulas integrales desarrolladas por Poisson en el siglo diecinueve. La intensidad de la capa que satisface la Ecuación (8.61) es

$$\Im(x) = 2U_{\div}\ \text{sen}\angle \left(\frac{C}{x}\Phi 1\right)^{1/2} \tag{8.62}$$

El coeficiente de presión en la superficie se obtiene de la Ecuación (8.58):

$$C_{p_{s,i}} = \mp 2\ \text{sen}\angle \left(\frac{C}{x}\Phi 1\right)^{1/2} \tag{8.63}$$

En textos avanzados [por ejemplo, 11, Capítulo 4] se dan los detalles del cálculo.

En la Figura 8.19*b* se han representado los coeficientes de presión de la Ecuación (8.63), mostrando que en la superficie superior la presión aumenta continuamente con x, esto es, hay un gradiente adverso de presión. La velocidad en la superficie superior $U_s \equiv U_{\div} + \delta u = U_{\div} + \frac{1}{2}\gamma$ se ha representado en la Figura 8.19*c* para varios ángulos de ataque. Por encima de $\alpha = 5°$ la contribución δu de la capa es alrededor del 20 por 100 de $U_{\div}$, luego se viola la hipótesis de pequeñas perturbaciones. En la Figura 8.19*c* también se muestran los puntos de desprendimiento de la capa límite laminar calculados por el método de Thwaites, Ecuaciones (7.54) y (7.55). La predicción, aproximadamente correcta, es que la placa plana sufre un desprendimiento masivo en la superficie superior que provoca la entrada en pérdida para $\alpha > 6°$.

El coeficiente de sustentación del perfil es proporcional al área entre c_{p_i} y c_{p_s} en la Figura 8.19*b*, de la Ecuación (8.59):

$$C_L = 2\int_0^1 \frac{\Im}{U}\, d\left(\frac{x}{C}\right) = 4\ \text{sen}\angle \int_0^1 \left(\frac{C}{x}\Phi 1\right)^{1/2} d\left(\frac{x}{C}\right) = 2\Theta\,\text{sen}\angle \equiv 2\Theta' \tag{8.64}$$

www.elsolucionario.net

Éste es un resultado clásico al que ya aludimos anteriormente en la Ecuación (7.70) sin demostrarlo.

También es interesante el coeficiente de momento alrededor del borde de ataque (BA) del perfil, considerado positivo en el sentido contrario de las agujas del reloj:

$$C_{M_{\text{BA}}} = \frac{M_{\text{BA}}}{\frac{1}{2}\Leftarrow U_{\div}^2 bC^2} = \int_0^1 (C_{p_s}\ \Phi C_{p_i})\frac{x}{C}\, d\left(\frac{x}{C}\right) = \frac{\Theta}{2}\ \text{sen}\angle = \frac{1}{4}C_L \tag{8.65}$$

Por tanto, el *centro de presiones* (CP), o posición de la sustentación resultante, está situado en el punto un cuarto de la cuerda:

$$\left(\frac{x}{C}\right)_{\text{CP}} = \frac{1}{4} \tag{8.66}$$

Este resultado teórico es independiente del ángulo de ataque.

Estos resultados pueden compararse con los resultados experimentales de los perfiles NACA de la Figura 8.20. El perfil NACA más delgado tiene $t/C = 0{,}06$, y el más grueso tiene un espesor del 24 por 100, o $t/C = 0{,}24$. La pendiente de la curva de sustentación $dC_L/d\alpha$ está dentro del 9 por 100 del valor teórico 2Θ para todas las familias de perfiles de todos los espesores. Al aumentar el espesor, $C_{L,\text{máx}}$ y el ángulo de entrada en pérdida tienden a aumentar. El ángulo de entrada en pérdida es aproximadamente de 8° cuando $t/C = 0{,}06$, y puede ser incluso menor para una placa plana, lo que permite verificar las estimaciones hechas para el desprendimiento de la capa límite en la Figura 8.19*c*. Las mejores actuaciones para cualquier tipo de perfil suelen corresponder generalmente a espesores del 12 por 100.

www.elsolucionario.net

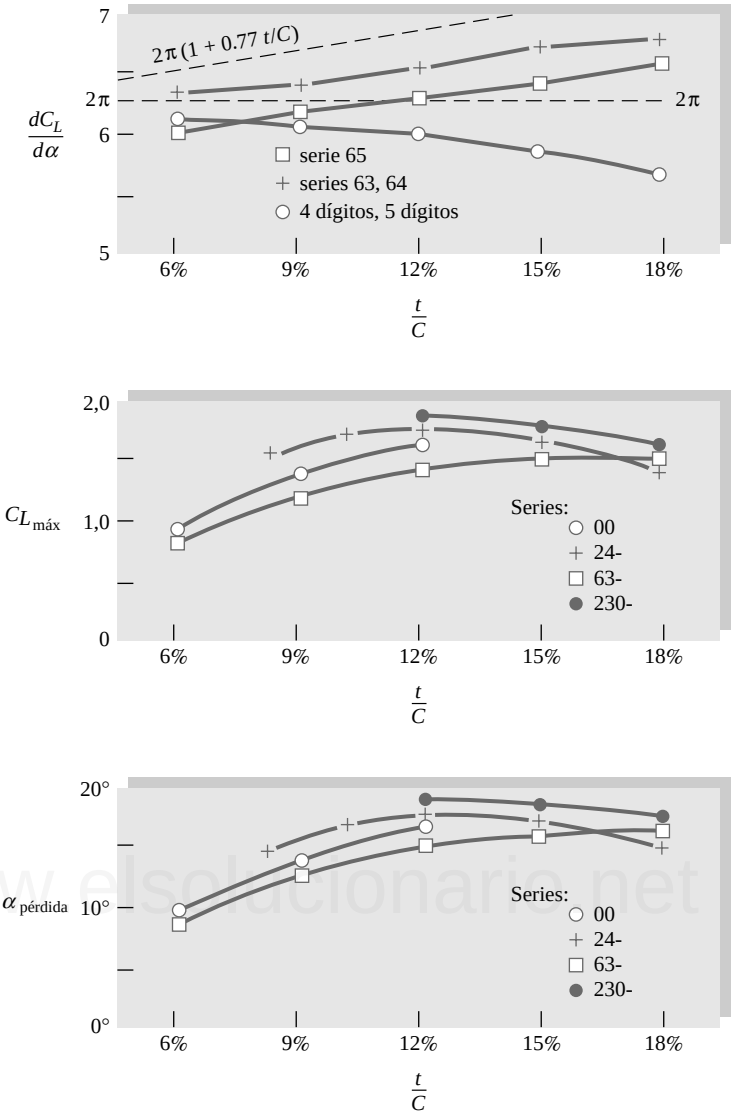


Figura 8.20. Características sustentadoras de perfiles lisos NACA en función de la relación espesor-cuerda, para alargamiento infinito. (*De la Referencia 12.*)

Teoría potencial para perfiles gruesos con curvatura

La teoría de perfiles gruesos con curvatura se da en textos avanzados [por ejemplo, 2 a 4]; en la Referencia 13 hay una revisión completa y detallada del comportamiento de perfiles tanto en flujo viscoso como no viscoso.

Básicamente, la teoría utiliza la transformación conforme para transformar el flujo alrededor de un cilindro circular con circulación, Figura 8.10, en el flujo alrededor de un perfil cualquiera con circulación. La circulación se ajusta entonces para cumplir la condición de Kutta de flujo suave en el borde de salida.

Prescindiendo de la forma exacta del perfil, la transformación conforme predice que la circulación correcta para cualquier perfil grueso con curvatura es

$$\xi_{\text{Kutta}} = \Theta bCU_{\div}{}^{\text{TM}} 1 + 0,77\frac{t}{c}\Big| \operatorname{sen}(\swarrow + \in) \tag{8.67}$$

www.elsolucionario.net

donde $\beta = \text{tg}^{-1}(2h/C)$ y h es la flecha máxima, o desviación máxima de la línea media del perfil con respecto a su cuerda, como muestra la Figura 8.21*a*.

El coeficiente de sustentación para perfiles de alargamiento infinito es

$$C_L = \frac{\text{sustentación}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 bC} = 2\pi\left(1 + 0{,}77\frac{t}{C}\right)\text{sen}(\alpha + \beta) \tag{8.68}$$

que se reduce a la Ecuación (8.64) cuando el espesor y la curvatura son cero. La Figura 8.20 muestra que el efecto teórico del espesor $1 + 0{,}77(t/C)$ no concuerda con los experimentos. En algunos perfiles la sustentación aumenta con el espesor, en otros decrece, y en ningún caso se ajustan demasiado a la teoría. La razón principal de la dificultad está en el crecimiento del espesor de la capa límite en la superficie superior que afecta a la «forma» del perfil. Así pues, es costumbre eliminar de la teoría el efecto del espesor:

$$\boxed{C_L \equiv 2\pi\,\text{sen}(\alpha + \beta)} \tag{8.69}$$

La teoría predice correctamente que un perfil con curvatura tiene sustentación finita a ángulo de ataque nulo y sustentación nula (SN) a un ángulo de ataque

$$\alpha_{SN} = -\beta = -\text{tg}^{-1}\frac{2h}{C} \tag{8.70}$$

La Ecuación (8.102) sobreestima el ángulo de sustentación nula alrededor de 1°, como se muestra en la Tabla 8.3. Los valores medidos son prácticamente independientes del espesor. La designación XX en las series NACA indica el espesor en tanto por ciento, y los otros dígitos se refieren a la curvatura y otros detalles. Por ejemplo, el perfil 2415 tiene una curvatura máxima del 2 por 100 (primer dígito), que se da al 40 por 100 de la cuerda (segundo dígito) con un espesor máximo del 15 por 100 (los dos últimos dígitos). El espesor máximo no se da necesariamente en la misma posición que la curvatura máxima.

La Figura 8.21*b* muestra la posición medida del centro de presiones de varios perfiles NACA, simétricos y con curvatura. En todos los casos x_{CP} dista menos de 0,02 de la longitud de la cuerda del punto un cuarto que predice la teoría, Ecuación (8.66). En los perfiles estándar con curvatura (series 24, 44 y 230) está situado ligeramente delante de $x/C = 0{,}25$ y en los perfiles de baja resistencia (serie 60) ligeramente detrás. En los perfiles simétricos está en 0,25.

La Figura 8.21*c* muestra el coeficiente de resistencia mínimo de los perfiles NACA en función del espesor. Como se mencionó anteriormente con respecto a la Figura 7.25, cuando se alisa su superficie estos perfiles tienen menos resistencia que una placa plana con capa límite turbulenta, especialmente los de la serie 60 de baja resistencia. Sin embargo, con rugosidad estándar todos los perfiles tienen más o menos la misma resistencia mínima, aproximadamente un 30 por 100 mayor que la de una placa plana lisa.

Tabla 8.3. Ángulo de ataque de sustentación nula para perfiles NACA.

Serie de perfiles	Curvatura h/C, %	α_{SN}, grad, medido	Teoría $-\beta$, grad
24XX	2,0	–2,1	–2,3
44XX	4,0	–4,0	–4,6
230XX	1,8	–1,3	–2,1
63-2XX	2,2	–1,8	–2,5
63-4XX	4,4	–3,1	–5,0
64-1XX	1,1	–0,8	–1,2

www.elsolucionario.net

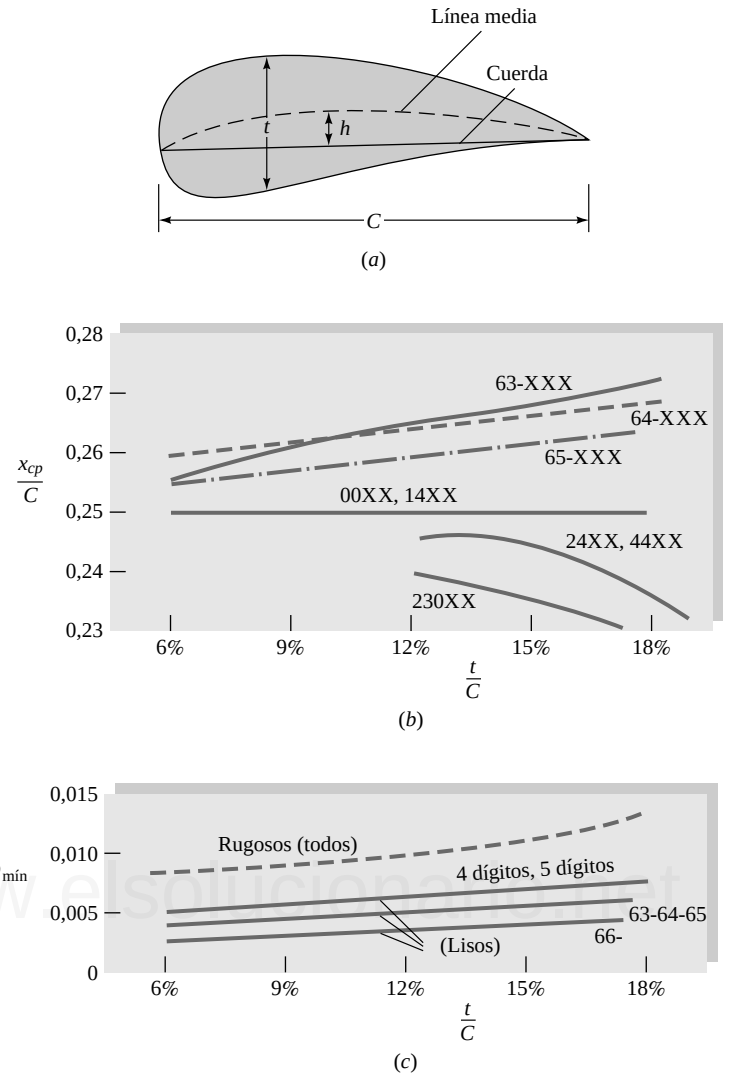


Figura 8.21. Características de perfiles NACA: (*a*) perfil típico grueso y con curvatura; (*b*) centro de presiones, y (*c*) mínimo coeficiente de resistencia.

Alas de alargamiento finito

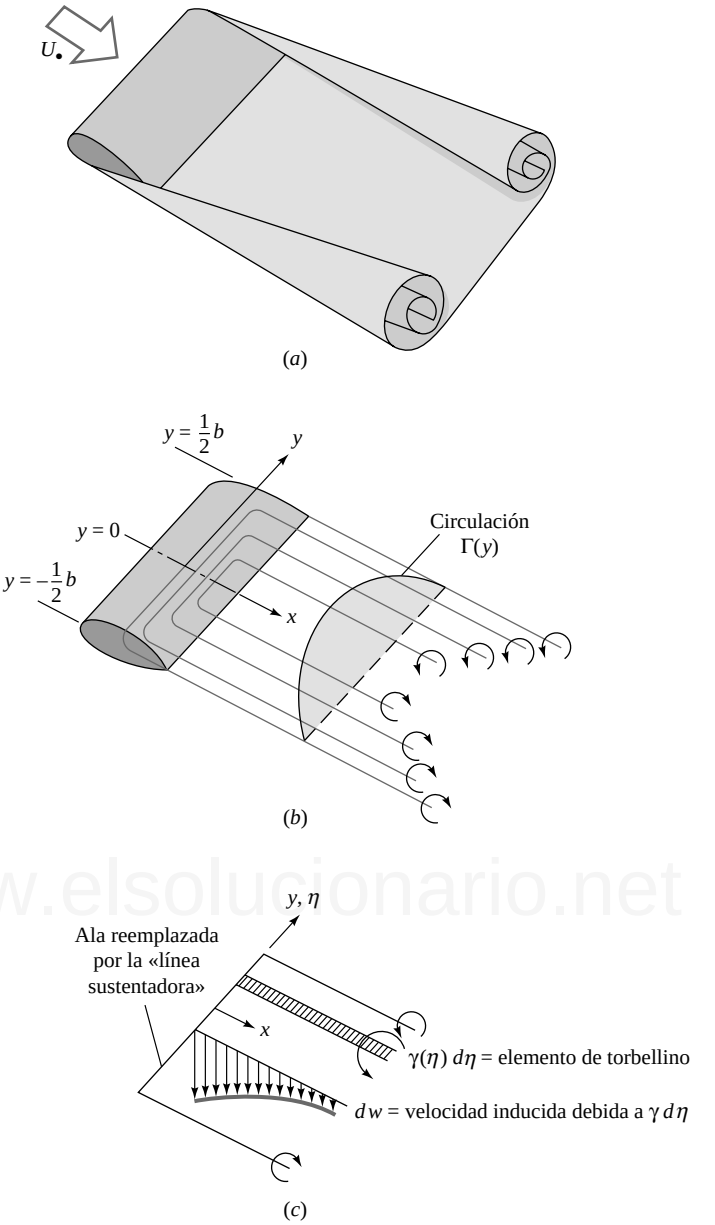
Los resultados de la teoría de perfiles de las subsecciones previas son válidos para alas bidimensionales o de alargamiento infinito. Pero todas las alas reales tienen extremos y son, por tanto, de envergadura finita o alargamiento Λ finito, definido como

$$\upsilon = \frac{b^2}{A_p} = \frac{b}{\overline{C}} \tag{8.71}$$

donde b es la envergadura o distancia entre extremos o puntas del ala y A_p es el área de la forma en planta del ala vista desde arriba. Los coeficientes de sustentación y resistencia de un ala de alargamiento finito dependen fuertemente del alargamiento y muy poco del área de la forma en planta.

Los torbellinos no pueden terminar en el fluido; o bien se extienden hasta los contornos o bien forman un circuito cerrado. La Figura 8.22*a* muestra cómo los torbellinos que proporcionan la circulación alrededor del ala se curvan aguas abajo en los extremos de un ala de alargamiento finito, alineándose con la corriente para unirse lejos aguas abajo formando el torbellino de arranque (Figura 7.23). Los torbellinos de

www.elsolucionario.net



www.elsolucionario.net

Figura 8.22. Teoría de la línea sustentadora para alas finitas: (*a*) sistema de torbellinos real en la estela de un ala; (*b*) simulación del sistema de torbellinos «ligados» al ala; (*c*) velocidad vertical inducida en el ala debida a un elemento infinitesimal de torbellinos desprendidos.

mayor intensidad se desprenden de los extremos, pero algunos se desprenden del interior del ala, como muestra esquemáticamente la Figura 8.22*b*. La circulación efectiva $\Gamma(y)$ de los torbellinos desprendidos es cero en los bordes y, generalmente, tiene un máximo en el plano central, o raíz del ala. En 1918 Prandtl modeló este flujo de forma satisfactoria reemplazando el ala por una línea sustentadora y una capa semiinfinita de torbellinos de intensidad $\gamma(y) = d\Gamma/dy$, como en la Figura 8.22*c*. Cada torbellino elemental $\gamma(\eta)\, d\eta$ induce una velocidad vertical $dw(y)$ dada por

$$dw(y) = \frac{\mathfrak{I}(\Omega)d\Omega}{4\Theta(y\ \Phi\Omega)}$$

en el punto y de la línea sustentadora. Nótese el factor 4Θen el denominador en lugar de 2Θa causa de que los torbellinos se extienden desde 0 hasta $+\div$ en lugar de desde $-\div$ hasta $+\div$.

www.elsolucionario.net

La velocidad vertical total descendente $w(y)$ inducida por el sistema completo de torbellinos desprendidos es

$$w(y) = \frac{1}{4\pi}\int_{-(1/2)b}^{(1/2)b} \frac{\gamma(\eta)\,d\eta}{y-\eta} \tag{8.72}$$

Cuando esta velocidad vertical se suma vectorialmente con la corriente incidente U_∞, el ángulo de ataque efectivo en esta sección del ala es

$$\alpha_{\text{ef}} = \alpha - \alpha_i \qquad \alpha_i = \tan^{-1}\frac{w}{U_\infty} \approx \frac{w}{U_\infty} \tag{8.73}$$

donde hemos hecho uso de la aproximación de pequeña amplitud $w \ll U_\infty$.

El último paso consiste en suponer que la circulación total $\Gamma(y)$ es igual a la de un perfil (bidimensional) de la misma forma y con el mismo ángulo de ataque efectivo. De la teoría de perfiles delgados, Ecuaciones (8.55) y (8.64), tenemos

$$C_L = \frac{\rho U_\infty \Gamma b}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 bC} = 2\pi\alpha_{\text{ef}}$$

o

$$\Gamma = \pi C U_\infty \alpha_{\text{ef}} \tag{8.74}$$

Combinando las Ecuaciones (8.72) a (8.74) obtenemos la teoría de Prandtl de la línea sustentadora para alas de alargamiento finito:

$$\Gamma(y) = \pi C(y) U_\infty \left[\alpha(y) - \frac{1}{4\pi U_\infty}\int_{-(1/2)b}^{(1/2)b} \frac{(d\Gamma/d\eta)\,d\eta}{y-\eta}\right] \tag{8.75}$$

que es una ecuación integrodiferencial para $\Gamma(y)$ con las condiciones $\Gamma(\frac{1}{2}b) = \Gamma(-\frac{1}{2}b) = 0$. Esta ecuación es similar a la ecuación integral (8.61) para perfiles delgados, pero mucho más complicada. Una vez que se ha resuelto, la sustentación del ala y la resistencia inducida están dadas por

$$L = \rho U_\infty \int_{-(1/2)b}^{(1/2)b} \Gamma(y)\,dy \qquad D_i = \rho U_\infty \int_{-(1/2)b}^{(1/2)b} \Gamma(y)\alpha_i(y)\,dy \tag{8.76}$$

Tenemos aquí un caso en que la resistencia no es nula en un flujo no viscoso, debido a que la velocidad vertical hace que la sustentación se incline hacia atrás un ángulo α_i de modo que proporciona una componente de resistencia paralela a la dirección de la corriente incidente, $dD_i = dL \operatorname{sen} \alpha_i \approx dL\,\alpha_i$.

La solución completa de la Ecuación (8.75) para una forma en planta arbitraria $C(y)$ y una torsión arbitraria $\alpha(y)$ se da en textos avanzados [por ejemplo, 11]. Sin embargo, existe una solución sencilla en el caso de un ala de forma en planta elíptica y sin torsión:

$$C(y) = C_0\left[1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right]^{1/2} \tag{8.77}$$

El área y alargamiento del ala son

$$A_p = \int_{-(1/2)b}^{(1/2)b} C\,dy = \frac{1}{4}\pi b C_0 \qquad \text{AR} = \frac{4b}{\pi C_0} \tag{8.78}$$

www.elsolucionario.net

La solución de la Ecuación (8.75) para esta $C(y)$ es una distribución de circulación que también tiene forma elíptica:

$$\xi(y) = \xi_0 \left[1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right]^{1/2} \tag{8.79}$$

Sustituyendo en la Ecuación (8.75) e integrando se obtiene una relación entre Γ_0 y C_0:

$$\xi_0 = \frac{\pi C_0 U_\infty}{1 + 2/\upsilon} \tag{8.80}$$

donde α es constante a lo largo del ala sin torsión.

Sustituyendo en la Ecuación (8.76) se obtiene la sustentación para el ala elíptica:

$$L = \tfrac{1}{4}\pi^2 b C_0 \rho U_\infty^2 / (1 + 2/\upsilon)$$

o

$$C_L = \frac{2\pi\alpha}{1 + 2/\upsilon} \tag{8.81}$$

Si generalizamos esto a un ala finita gruesa con curvatura y de forma en planta aproximadamente elíptica, tenemos

$$\boxed{C_L = \frac{2\pi \operatorname{sen}(\alpha + \varepsilon)}{1 + 2/\upsilon}} \tag{8.82}$$

Este resultado se dio sin demostración en la Ecuación (7.70). De la Ecuación (8.72) la velocidad vertical para el ala elíptica es constante:

$$w(y) = \frac{2U_\infty \alpha}{2 + \upsilon} = \text{cte} \tag{8.83}$$

Finalmente, de la Ecuación (8.76) el coeficiente de resistencia inducida es

$$C_{Di} = C_L \frac{w}{U_\infty} = \frac{C_L^2}{\pi\upsilon} \tag{8.84}$$

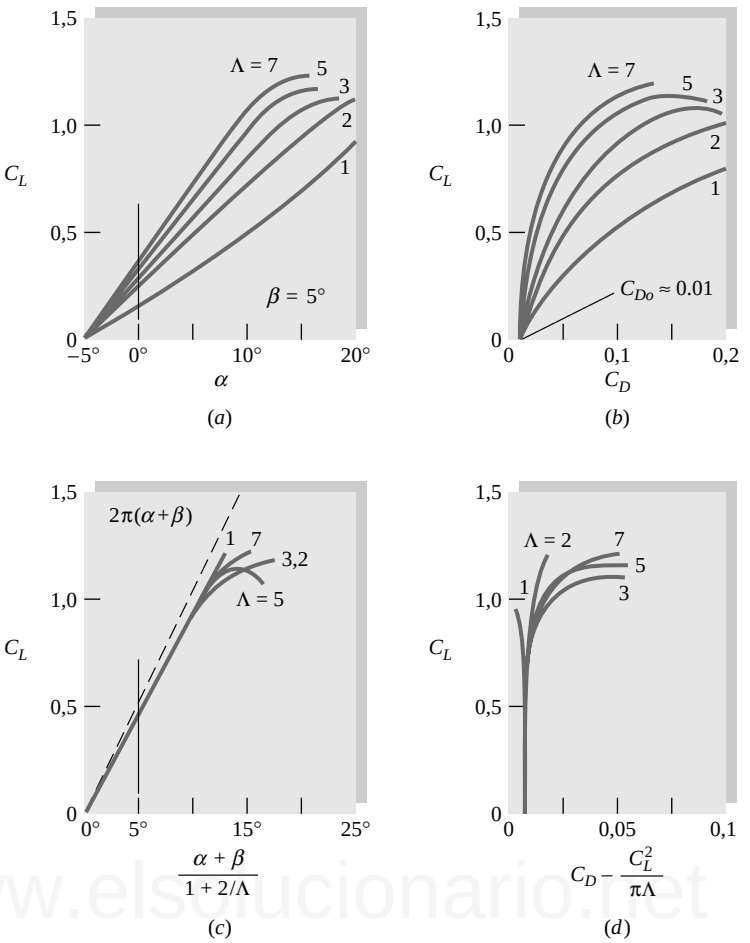
Que también se dio sin demostración en la Ecuación (7.71).

En la Figura 8.23 se muestra la efectividad de esta teoría cuando se compara con los ensayos en alas no elípticas y con curvatura realizados por Prandtl en 1921 [14]. Las Figuras 8.23*a* y *b* muestran las curvas de sustentación y las curvas polares de resistencia para cinco alargamientos diferentes. Obsérvese que hay un incremento del ángulo de entrada en pérdida y de la resistencia y una disminución en la pendiente de la sustentación cuando disminuye el alargamiento.

La Figura 8.23*c* muestra la sustentación representada en función del ángulo de ataque efectivo $\alpha_{ef} = (\alpha + \beta)/(1 + 2/\Lambda)$, como predice la Ecuación (8.82). Estas curvas deberían ser equivalentes a las de un ala de alargamiento infinito, y de hecho todas colapsan excepto cerca del desprendimiento. Su pendiente común $dC_L/d\alpha$ es alrededor de un 10 por 100 menor que el valor teórico 2π, pero esto es consistente con los efectos de espesor y de forma en planta observados en la Figura 8.20.

La polar de la Figura 8.23*d*, que recoge los datos de resistencia, se ha representado ahora restando la resistencia inducida teórica $C_{Di} = C_L^2/(\pi\Lambda)$. De nuevo, excepto cerca de la entrada en pérdida, los datos colapsan en una única línea con coeficiente de resistencia aproximadamente constante correspondiente a alargamiento infinito, $C_{D0} \approx 0{,}01$. Concluimos que la teoría para alas finitas es muy efectiva y se puede utilizar en cálculos de diseño.

www.elsolucionario.net



www.elsolucionario.net

Figura 8.23. Comparación entre la teoría y los experimentos para un ala finita: (*a*) sustentación medida [14]; (*b*) polar medida [14]; (*c*) sustentación reducida al caso de alargamiento infinito; (*d*) polar reducida al caso de alargamiento infinito.

8.8. FLUJO POTENCIAL AXILSIMÉTRICO[5]

En flujo potencial axilsimétrico se puede utilizar la misma técnica de superposición que utilizamos en la Sección 8.3 para el flujo plano. Damos aquí algunos ejemplos.

Muchos de los resultados básicos pueden trasladarse del caso plano al axilsimétrico con ligeros cambios debidos a las diferencias geométricas. Considere los siguientes flujos relacionados:

Flujo plano básico	**Flujo axilsimétrico equivalente**
Corriente uniforme	Corriente uniforme
Fuente o sumidero bidimensional	Fuente o sumidero puntual
Doblete bidimensional	Doblete puntual
Torbellino bidimensional	No tiene equivalente
Cuerpo semiinfinito de Rankine	Cuerpo semiinfinito de revolución de Rankine
Óvalo de Rankine	Óvalo de revolución de Rankine
Cilindro circular	Esfera
Perfil simétrico	Cuerpo en forma de gota

[5] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

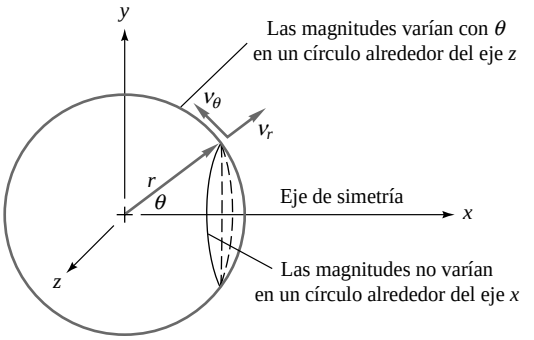


Figura 8.24. Coordenadas polares esféricas para flujo axilsimétrico.

Al no existir el concepto de torbellino puntual, no estudiaremos los efectos de la circulación en cuerpos axilsimétricos. Sin embargo, como saben los fumadores, sí que existen los anillos axilsimétricos de vorticidad, o torbellinos anulares, y también existen las fuentes y sumideros anulares, que dejamos para los textos avanzados [por ejemplo, 3].

Coordenadas esféricas

Los flujos potenciales axilsimétricos se suelen tratar en coordenadas esféricas como las de la Figura 8.24. Sólo intervienen dos coordenadas (r, θ), siendo las magnitudes fluidas constantes en círculos de radio r sen θ alrededor del eje x.

La ecuación de la continuidad para flujo incompresible en estas coordenadas toma la forma

www.elsolucionario.net

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r \operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r v_\theta \operatorname{sen}\theta) = 0 \tag{8.85}$$

donde v_r y v_θ son las velocidades radial y tangencial, como muestra la figura. De este modo, existe una función de corriente[6] en coordenadas polares, tal que

$$v_r = -\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad v_\theta = -\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{8.86}$$

Existe también potencial de velocidades $\phi(r, \theta)$, tal que

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \tag{8.87}$$

Estas fórmulas sirven para determinar las funciones ψ y ϕ para diversos flujos potenciales axilsimétricos elementales.

Corriente uniforme en la dirección del eje x

Una corriente uniforme U_∞ en la dirección x tiene componentes

$$v_r = U_\infty \cos\theta \qquad v_\theta = -U_\infty \operatorname{sen}\theta$$

[6] A menudo se denomina *función de corriente de Stokes*, ya que fue utilizada por Stokes en un trabajo sobre flujo viscoso alrededor de una esfera escrito en 1851.

www.elsolucionario.net

Sustituyendo en las Ecuaciones (8.86) y (8.87) e integrando se obtiene

Corriente uniforme: $$\psi = -\tfrac{1}{2}U_{\infty} r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \qquad \phi = U_{\infty} r \cos \theta \tag{8.88}$$

Como de costumbre, se han anulado las constantes arbitrarias.

Fuente o sumidero puntual

Consideremos un flujo volumétrico Q que proviene de una fuente puntual. El flujo será radial y la velocidad a una distancia r será igual a Q dividido por el área $4\pi r^2$ de la esfera. Por tanto,

$$v_r = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{m}{r^2} \qquad v_{\theta} = 0 \tag{8.89}$$

donde se ha escrito $m = Q/(4\pi)$ por conveniencia. Integrando (8.86) y (8.87) se obtiene

Fuente puntual: $$\psi = m \cos \theta \qquad \phi = \frac{m}{r} \tag{8.90}$$

Para un sumidero puntual hay que cambiar m por $-m$ en la Ecuación (8.90).

Doblete puntual

Al igual que en la Figura 8.8, situando una fuente en $(x, y) = (-a, 0)$ y un sumidero de igual intensidad en $(+a, 0)$ y haciendo tender a a cero manteniendo el producto $2am = \lambda$ constante, se tiene:

$$\psi_{\text{doblete}} = \lim_{\substack{a \to 0 \\ 2am = \lambda}} (m \cos \theta_{\text{fuente}} - m \cos \theta_{\text{sumidero}}) = \frac{-\lambda \operatorname{sen}^2 \theta}{r} \tag{8.91}$$

Dejaremos la demostración de este límite para un problema. El potencial de velocidades para el doblete puntual es

$$\phi_{\text{doblete}} = \lim_{\substack{a \to 0 \\ 2am = \lambda}} \left[\frac{m}{r_{\text{fuente}}} + \frac{m}{r_{\text{sumidero}}} \right] = \frac{-\lambda \cos \theta}{r^2} \tag{8.92}$$

En la Figura 8.25 se muestran las líneas de corriente y las líneas equipotenciales. Al contrario que en el doblete bidimensional de la Figura 8.8, ninguna de estas líneas es un círculo perfecto.

Corriente uniforme más una fuente puntual

Combinando las Ecuaciones (8.88) y (8.90) se obtiene la función de corriente de una corriente uniforme más una fuente puntual en el origen:

$$\psi = -\tfrac{1}{2}U_{\infty} r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + m \cos \theta \tag{8.93}$$

Las componentes de la velocidad se obtienen de acuerdo con la Ecuación (8.86):

$$v_r = U_{\infty} \cos \theta + \frac{m}{r^2} \qquad v_{\theta} = -U_{\infty} \operatorname{sen} \theta \tag{8.94}$$

www.elsolucionario.net

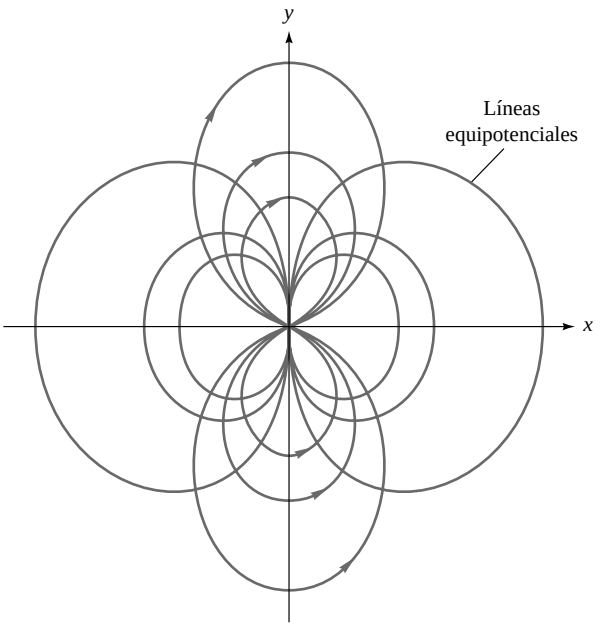


Figura 8.25. Líneas de corriente y equipotenciales debidas a un doblete puntual en el origen, Ecuaciones (8.91) y (8.92).

Igualando a cero estas componentes se obtiene un punto de remanso situado en $\theta = 180°$ y $r = a = (m/U_\infty)^{1/2}$, como se muestra en la Figura 8.26. Si hacemos $m = U_\infty a^2$, la función de corriente se puede reescribir como

www.elsolucionario.net

$$\frac{\psi}{U_\infty a^2} = \cos\theta\left(\frac{1}{2}\left|\frac{r}{a}\right|^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) \tag{8.95}$$

La superficie de corriente que pasa por el punto de remanso $(r, \theta) = (a, \pi)$ toma el valor $\psi = -U_\infty a^2$ y forma un cuerpo semiinfinito de revolución que encierra a la fuente puntual, como se muestra en la Figura 8.26. Este cuerpo semiinfinito puede utilizarse para simular un tubo de pitot. Lejos aguas abajo el radio del cuerpo tiende al valor constante $R = 2a$. El punto de máxima velocidad y mínima presión sobre la superficie del cuerpo se da en $\theta = 70{,}5°$, $r = a$, $V_s = 1{,}155U_\infty$. Aguas abajo de este punto hay un gradiente adverso de presión, ya que V_s decrece lentamente hasta el valor U_∞, pero la teoría de la capa límite indica que no hay desprendimiento. Por tanto, la Ecuación (8.95) representa de forma muy realista el flujo alrededor de un cuerpo semiinfinito de revolución. Pero cuando a la corriente uniforme se le añade un sumidero para re-

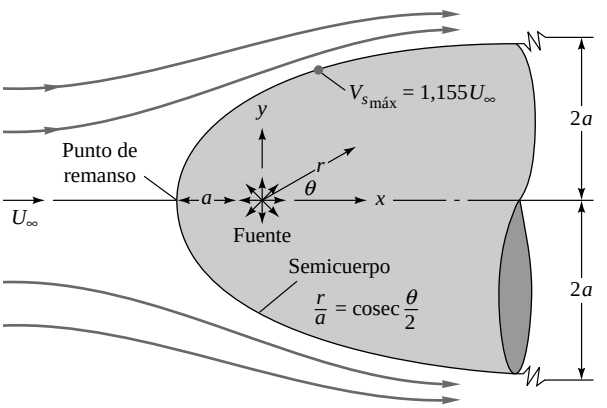


Figura 8.26. Líneas de corriente para el cuerpo semiinfinito de Rankine de revolución.

www.elsolucionario.net

presentar la parte posterior de un cuerpo semiinfinito de revolución, similar al de la Figura 8.5*c*, se produce el desprendimiento y el modelo no viscoso deja de ser realista.

Corriente uniforme más un doblete puntual

Al combinar una corriente uniforme más un doblete puntual, Ecuaciones (8.88) y (8.91), se obtiene

$$\psi = \frac{1}{2}U_\infty r^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{\mu}{r}\operatorname{sen}^2\theta \tag{8.96}$$

Examinando esta relación vemos que la superficie de corriente $\psi = 0$ corresponde a una esfera de radio

$$r = a = \left(\frac{2\mu}{U_\infty}\right)^{1/3} \tag{8.97}$$

Este flujo es análogo al del cilindro circular de la Figura 8.10*a* formado por la combinación de una corriente uniforme y un doblete bidimensional.

Llamando $\lambda = \frac{1}{2}U_\infty a^3$ por conveniencia, reescribimos la Ecuación (8.96) en la forma

$$\frac{\psi}{\frac{1}{2}U_\infty a^2} = \frac{r^2}{a^2}\operatorname{sen}^2\theta\left(1 - \frac{a}{r}\right) \tag{8.98}$$

En la Figura 8.27 se han representado las líneas de corriente de este flujo. Derivando en la Ecuación (8.86) se obtienen las componentes de la velocidad

$$v_r = U_\infty \cos\theta\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \qquad v_\theta = -\frac{1}{2}U_\infty \operatorname{sen}\theta\left(2 + \frac{a^3}{r^3}\right) \tag{8.99}$$

www.elsolucionario.net

Como era de esperar, la velocidad radial se anula en la superficie de la esfera $r = a$. Hay un punto de remanso en la parte anterior (a, π) y otro en la parte posterior $(a, 0)$ de la esfera. La velocidad máxima se da en $(a, \pm\frac{1}{2}\pi)$, donde $v_r = 0$ y $v_\theta = \mp 1{,}5U_\infty$. La velocidad sobre la superficie es

$$V_s = -v_\theta|_{r=a} = \tfrac{3}{2}U_\infty \operatorname{sen}\theta \tag{8.100}$$

Obsérvese la semejanza con la velocidad sobre la superficie de un cilindro sin circulación, según la Ecuación (8.34), igual a $2U_\infty \operatorname{sen}\theta$.

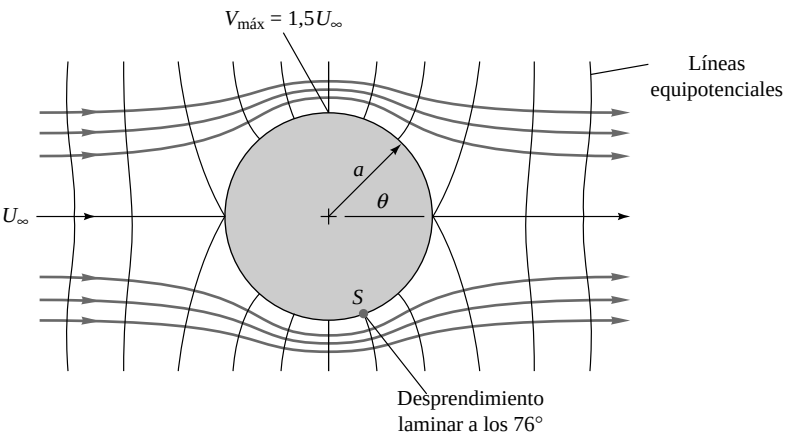


Figura 8.27. Líneas de corriente y equipotenciales para el flujo no viscoso alrededor de una esfera.

www.elsolucionario.net

Como era de esperar, la Ecuación (8.100) predice un gradiente adverso de presión en la parte posterior de la esfera ($\theta < 90°$). Si aplicamos a esta distribución de velocidades la teoría de la capa límite laminar [por ejemplo, 15, pág. 298], el desprendimiento se presenta alrededor de $\theta = 76°$, luego en el flujo real alrededor de una esfera de la Figura 7.14 se forma una estela amplia en la parte posterior. Esta estela interacciona con la corriente libre, haciendo que la Ecuación (8.100) deje de ser válida incluso en la parte frontal de la esfera. La velocidad máxima medida sobre la esfera es sólo $1{,}3U_\infty$ y se presenta en torno a $\theta = 107°$ (véase Referencia 15, Sección 4.10.4, para más detalles).

El concepto de masa añadida

Cuando un cuerpo se mueve a través de un fluido, éste debe empujar el fluido fuera de su camino para poder desplazarse. Si el cuerpo sufre una aceleración, el fluido circundante también debe acelerarse. El cuerpo se comporta entonces como si su masa fuera mayor y el incremento aparente de masa se conoce como *masa añadida* (o bien *masa virtual* o *hidrodinámica*) del fluido. Si la velocidad instantánea del cuerpo es $\mathbf{U}(t)$, el equilibrio de fuerzas debe incluir este efecto:

$$\varphi \mathbf{F} = (m + m_a)\frac{d\mathbf{U}}{dt} \tag{8.101}$$

donde m_a, la masa añadida, es función de la forma del cuerpo, la dirección del movimiento y (en menor medida) de los parámetros del flujo, como el número de Reynolds.

De acuerdo con la teoría potencial [2, Sección 6.4; 3, Sección 9.22], m_a depende sólo de la forma del cuerpo y de la dirección del movimiento y puede calcularse integrando la energía cinética total del fluido en su movimiento respecto al cuerpo e igualando esta energía a una energía equivalente del cuerpo:

$$\mathrm{EC}_{\text{fluido}} = \int \tfrac{1}{2} dm V_{\text{rel}}^2 = \tfrac{1}{2} m_a U^2 \tag{8.102}$$

www.elsolucionario.net

La integración de la energía cinética del fluido también puede obtenerse mediante una integral de superficie, extendida a la superficie del cuerpo, en la que interviene el potencial de velocidades [16, Sección 11].

Considere de nuevo el flujo alrededor de una esfera en una corriente uniforme. Restando la velocidad de la corriente podemos representar el flujo como en la Figura 8.28, donde se muestran las líneas de corriente del movimiento relativo a la esfera. Obsérvese la semejanza con el flujo del doblete de la Figura 8.25. Las componentes de la velocidad relativa se obtienen restando U de las Ecuaciones (8.99):

$$v_r = \Phi\frac{Ua^3 \cos \varkappa}{r^3} \qquad v_\varkappa = \Phi\frac{Ua^3 \operatorname{sen} \varkappa}{2r^3}$$

El elemento de masa del fluido, en coordenadas esféricas, es

$$dm = \rho(2\Theta r \operatorname{sen} \theta) r\, dr\, d\theta$$

Sustituyendo dm y $V_{\text{rel}}^2 = v_r^2 + v_\theta^2$ en la Ecuación (8.102), es posible evaluar la integral:

$$\mathrm{EC}_{\text{fluido}} = \tfrac{1}{3}\rho\pi a^3 U^2$$

o

$$m_a(\text{esfera}) = \tfrac{2}{3}\rho\pi a^3 \tag{8.103}$$

Así pues, de acuerdo con la teoría potencial, la masa añadida de una esfera es igual a la mitad de la masa del fluido desalojado independientemente de la dirección del movimiento.

Se puede obtener un resultado semejante para el movimiento de un cilindro en dirección perpendicular a su eje sin más que restar la velocidad de la corriente de las Ecuaciones (8.33). Suponiendo movimiento bidimensional, el resultado es

$$m_a(\text{cilindro}) = \rho\Theta a^2 L \tag{8.104}$$

para un cilindro de longitud L. La masa añadida de un cilindro es igual a la masa del fluido desalojado.

www.elsolucionario.net

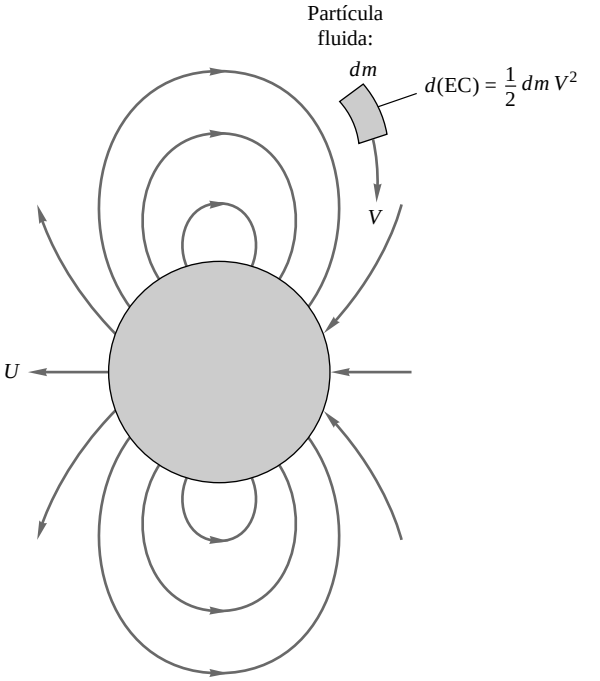


Figura 8.28. Líneas de corriente para el flujo potencial alrededor de una esfera en movimiento. Compárelas con las Figuras 8.25 y 8.27.

Patton [17] proporciona valores de la masa añadida para distintas formas de cuerpos y direcciones del movimiento. Véase también la Referencia 21.

8.9. ANÁLISIS NUMÉRICO

Cuando el flujo potencial presenta geometrías complicadas o condiciones de corriente inusuales, el método clásico de superposición de las Secciones 8.3 y 8.4 resulta menos atractivo. La transformación conforme, basada en las técnicas de la variable compleja de la Sección 8.5, deja de ser útil para generar formas de cuerpos. En este caso, la moderna técnica del análisis numérico constituye el enfoque más apropiado, existiendo al menos tres métodos distintos:

1. El método de elementos finitos (FEM, *Finite Element Method*) [6, 19].
2. El método de diferencias finitas (FDM, *Finite Difference Method*) [5, 20, 23-27].
3. *a*. Métodos integrales de singularidades distribuidas [18].
   b. El método de los elementos de contorno [7, 38].

Los métodos 3*a* y 3*b* están muy relacionados, y fueron desarrollados en la década de 1960 [18] de forma específica para resolver problemas de aerodinámica, aunque pronto, ya en la década de 1970 [7], se generalizaron para convertirse en una técnica con numerosas aplicaciones en mecánica aplicada.

Los métodos 1 (o FEM) y 2 (o FDM), pese a sus diferencias conceptuales, son comparables en cuanto al rango de aplicación, tamaño de malla y precisión alcanzada. Aquí nos concentraremos en el último método con fines ilustrativos.

El método de elementos finitos

El método de elementos finitos [19] se puede aplicar a todos los tipos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, tanto lineales como no lineales, de la física y la ingeniería. El dominio computacional se di-

www.elsolucionario.net

vide en pequeñas regiones, o celdas, típicamente con forma de triángulos o cuadriláteros. Las celdas se definen utilizando un número finito de *nodos* donde queremos calcular las variables de campo como la temperatura, velocidad, presión, función de corriente, etc. La solución en cada celda se aproxima por una combinación algebraica de los valores nodales locales. A continuación se integran estas funciones aproximadas sobre la celda y se minimiza el error, para lo que suelen utilizarse funciones de peso. Se obtiene así un conjunto de N ecuaciones algebraicas para los N valores nodales incógnita. Las ecuaciones nodales se deben resolver de forma simultánea, invirtiendo una matriz o mediante iteración. Para más detalles véanse las Referencias 6 o 19.

El método de diferencias finitas

Aunque en los libros de texto sobre análisis numérico [5, 20] se aplica el método de diferencias finitas a multitud de problemas distintos, aquí nos concentraremos en el flujo potencial. La idea de este método es aproximar las derivadas parciales que aparecen en la ecuación física por «diferencias» entre los valores de la solución en una serie de nodos separados entre sí una cierta distancia finita, si bien los nodos no tienen por qué estar equiespaciados. La ecuación original en derivadas parciales se sustituye así por una serie de ecuaciones algebraicas para los valores nodales.

Para el flujo potencial (no viscoso), estas ecuaciones algebraicas son lineales, pero en general, para el flujo viscoso son no lineales. Finalmente, para obtener los valores nodales se debe iterar o invertir una matriz.

Aquí estudiaremos la ecuación de Laplace bidimensional, eligiendo por conveniencia la ecuación para la función de corriente

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{8.105}$$

con valores conocidos para ψ a lo largo de la superficie de cualquier cuerpo y para $\partial\psi/\partial x$ y $\partial\psi/\partial y$ en la corriente libre.

Para aplicar la técnica de diferencias finitas, dividiremos aquí el campo fluido utilizando nodos equiespaciados, como muestra la Figura 8.29. Para ahorrarnos el uso de paréntesis en la notación funcional, los

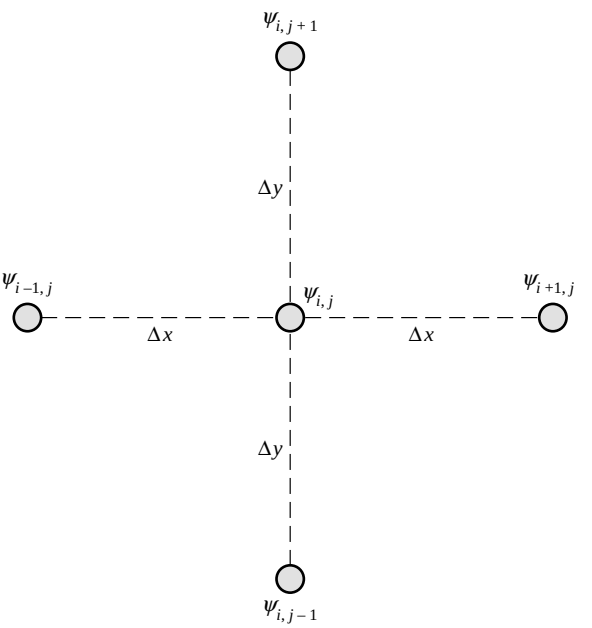


Figura 8.29. Definición esquemática de una malla rectangular de diferencias finitas para un problema bidimensional.

www.elsolucionario.net

subíndices *i* y *j* denotarán la posición de un nodo arbitrario de la malla equiespaciada, y $\psi_{i,j}$ el valor de la función de corriente en dicho nodo:

$$\psi_{i,j} = \psi(x_0 + i\,\Delta x, y_0 + j\,\Delta y)$$

Así $\psi_{i+1,j}$ está situado a la derecha de $\psi_{i,j}$, y $\psi_{i,j+1}$ encima.

Una aproximación algebraica para la derivada Eψ/Ex es

$$\frac{E\psi}{Ex} \approx \frac{\psi(x+\Delta x, y) - \psi(x, y)}{\Delta x}$$

Una aproximación similar para la segunda derivada es

$$\frac{E^2\psi}{Ex^2} \approx \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\psi(x+\Delta x, y) - \psi(x, y)}{\Delta x} - \frac{\psi(x, y) - \psi(x - \Delta x, y)}{\Delta x}\right]$$

La notación de subíndices permite escribir estas expresiones de forma más compacta:

$$\begin{aligned} \frac{E\psi}{Ex} &\approx \frac{1}{\Delta x}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}) \\ \frac{E^2\psi}{Ex^2} &\approx \frac{1}{\Delta x^2}(\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}) \end{aligned} \tag{8.106}$$

Estas fórmulas son exactas en el límite $\Delta x \to 0$, pero en el análisis numérico Δx y Δy se mantienen finitos, de donde proviene el nombre de *diferencias finitas*.

De un modo totalmente análogo podemos obtener las expresiones en diferencias para las derivadas según *y*:

$$\begin{aligned} \frac{E\psi}{Ey} &\approx \frac{1}{\Delta y}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}) \\ \frac{E^2\psi}{Ey^2} &\approx \frac{1}{\Delta y^2}(\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}) \end{aligned} \tag{8.107}$$

El uso de la notación con subíndices permite programar directamente estas expresiones mediante lenguajes de programación científicos tales como BASIC o FORTRAN.

Cuando se sustituyen las expresiones (8.106) y (8.107) en la ecuación de Laplace (8.105), se obtiene la fórmula algebraica

$$2(1 + \beta)\psi_{i,j} \approx \psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \beta(\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) \tag{8.108}$$

donde $\beta = (\Delta x/\Delta y)^2$ depende del tamaño de la malla elegido. Este modelo en diferencias finitas de la ecuación de Laplace indica que cada valor nodal de la función de corriente $\psi_{i,j}$ es una combinación lineal de los valores en los cuatro nodos vecinos más próximos.

El caso programado con más frecuencia es el de una malla cuadrada ($\beta = 1$), en el que la Ecuación (8.108) se reduce a

$$\boxed{\psi_{i,j} \approx \tfrac{1}{4}(\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1})} \tag{8.109}$$

Por tanto, para una malla cuadrada cada valor nodal es igual a la media aritmética de sus cuatro puntos vecinos mostrados en la Figura 8.29. Esta fórmula es fácil de recordar y fácil de programar. Si P(I, J) repre-

www.elsolucionario.net

senta la función de corriente en notación de subíndices, la línea de código BASIC o FORTRAN equivalente a (8.109) es

```
P(I, J) = 0.25 * (P(I + 1, J) + P(I - 1, J) + P(I, J + 1) + P(I, J - 1))
```
(8.110)

Una vez especificados los valores de P en cada uno de los nodos de los contornos, esta fórmula se debe aplicar de forma iterativa barriendo sobre todos los nodos internos (I, J). Se puede especificar cualquier valor inicial para los valores en los nodos internos P(I, J), y el proceso de iteración convergerá a la solución algebraica final en un número finito de iteraciones. El error numérico en relación a la solución exacta de la ecuación de Laplace es proporcional al cuadrado del tamaño de la celda computacional.

La convergencia se puede acelerar usando el método de *sobrerrelajación sucesiva* (SOR, S*uccessive OverRelaxation*), discutido por Patankar [5]. El esquema iterativo del método SOR es

```
P(I, J) = P(I, J) + 0.25 * A * (P(I + 1, J) + P(I - 1, J)
        + P(I, J + 1) + P(I, J - 1) - 4 * P(I, J))
```
(8.111)

El valor óptimo del factor de convergencia A del método SOR es próximo a 1,7. Obsérvese que el valor A = 1,0 convierte la Ecuación (8.111) en la Ecuación (8.110).

Ilustraremos el método de diferencias finitas con un ejemplo.

EJEMPLO 8.5

Utilice el análisis numérico, tomando $\Delta x = \Delta y = 0{,}2$ m, para resolver el flujo potencial en la expansión del conducto que se muestra en la Figura 8.30. En la sección de entrada el conducto tiene 1 m de anchura y la velocidad es uniforme e igual a 10 m/s, mientras que en la sección de salida, de 2 m de anchura, la velocidad es uniforme e igual a 5 m/s. Hay un tramo de sección uniforme de 1 m de largo a la entrada, una sección de expansión de 45° y un nuevo tramo de sección uniforme de 1 m de largo a la salida.

www.elsolucionario.net

Solución

La malla que se muestra en la Figura 8.30 tiene 45 nodos en el contorno y 91 nodos interiores, con *i* variando desde 1 hasta 16 y *j* variando desde 1 hasta 11. Los nodos del interior verifican la Ecuación (8.110). Por conveniencia, tomaremos la función de corriente igual a cero en la pared inferior. De este modo, como el caudal es de

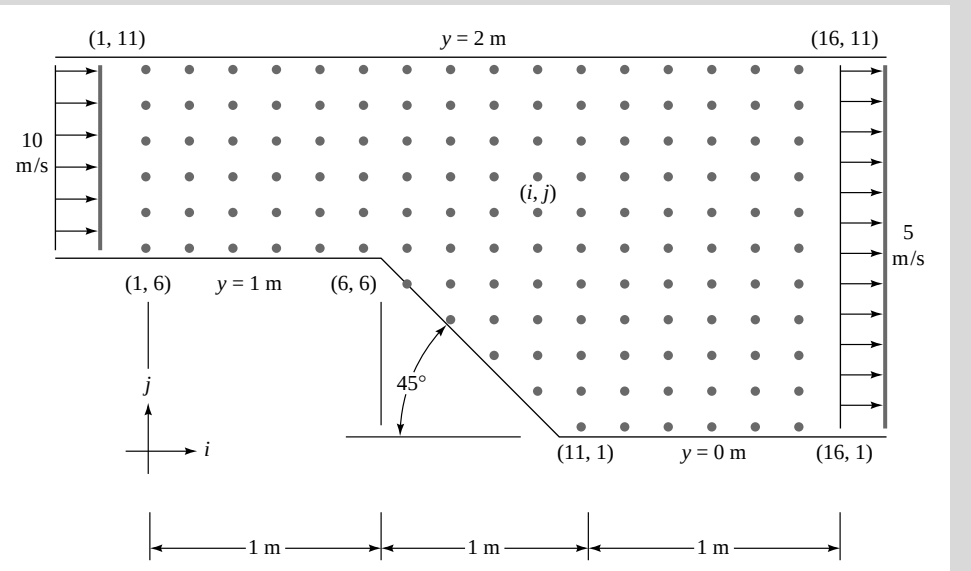


Figura 8.30. Modelo numérico del flujo potencial a través de una expansión bidimensional de 45°. La distancia entre puntos nodales es de 20 cm. Hay 45 nodos de contorno y 95 nodos interiores.

www.elsolucionario.net

(10 m/s)(1 m) = 10 m^2/s por unidad de longitud perpendicular al papel, la función de corriente es igual a 10 m^2/s a lo largo de la pared superior. Para que las velocidades sean uniformes, en las secciones de entrada y salida la función de corriente tiene que variar linealmente con *y*:

Entrada: $\psi(1, J) = 2 * (J - 6)$ para J = 7 hasta 10

Salida: $\psi(16, J) = J - 1$ para J = 2 hasta 10

Todas estas condiciones de contorno deben introducirse en el programa y sus valores se muestran en la Figura 8.31.

También se deben especificar valores iniciales para los puntos interiores, por ejemplo, cero o algún valor intermedio, como 5,0 m^2/s. Comenzando en alguno de los puntos, como el situado en la esquina superior izquierda (2, 10), el programa evalúa entonces la Ecuación (8.110) en cada uno de los puntos nodales, repitiendo la operación hasta que los valores nodales dejan de variar (para lo que hace falta especificar la variación máxima permitida). Los resultados de la simulación mediante diferencias finitas de este flujo potencial se muestran en la Figura 8.31 con tres cifras significativas. Se invita al alumno a seleccionar unos cuantos nodos de la Figura 8.31 y comprobar que la Ecuación (8.110) se verifica en todos los puntos. Resulta difícil estimar la precisión numérica de los resultados, pues no existe una solución exacta para este problema. En la práctica se debería reducir el tamaño de la malla hasta comprobar que no se producen cambios significativos en los valores nodales.

La solución de este problema está al alcance de cualquier ordenador personal. Los valores de la Figura 8.31 se obtuvieron mediante un código BASIC tras 100 iteraciones, con un tiempo de ejecución de 6 minutos, en un ordenador personal Macintosh SE. En el Problema PE8.1 se indica cómo resolver este tipo de problemas usando una hoja de cálculo Excel.

Aunque la Figura 8.31 representa la solución del problema proporcionada por el ordenador, los números deben manipularse para obtener resultados ingenieriles prácticos. Por ejemplo, podemos interpolar los valores de la función de corriente para representar las líneas de corriente del flujo, mostradas en la Figura 8.32*a*. Vemos que las líneas de corriente se curvan aguas arriba y aguas debajo de las esquinas, especialmente cerca de la pared inferior, lo que indica que el flujo no es unidimensional.

Para calcular las velocidades en cualquier punto del flujo debemos utilizar fórmulas en diferencias finitas, como las Ecuaciones (8.106) y (8.107), para evaluar las derivadas de la función de corriente. Por ejemplo, según la Ecuación (8.107), en el punto (I, J) = (3, 6) la componente horizontal de la velocidad es aproximadamente

$$u(3,6) \approx \frac{\partial (3,7) - \partial (3,6)}{\partial y} = \frac{2,09 - 0,00}{0,2} = 10,45 \text{ m/s}$$

y de acuerdo con la Ecuación (8.106) la velocidad vertical es cero. En el punto de la pared superior situado justo encima de éste, podemos estimar

$$u(3,11) \approx \frac{\partial (3,11) - \partial (3,10)}{\partial y} = \frac{10,00 - 8,07}{0,2} = 9,65 \text{ m/s}$$

ψ = 10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00
8,00	8,02	8,04	8,07	8,12	8,20	8,30	8,41	8,52	8,62	8,71	8,79	8,85	8,91	8,95	9,00
6,00	6,03	6,06	6,12	6,22	6,37	6,58	6,82	7,05	7,26	7,44	7,59	7,71	7,82	7,91	8,00
4,00	4,03	4,07	4,13	4,26	4,48	4,84	5,24	5,61	5,93	6,19	6,41	6,59	6,74	6,88	7,00
2,00	2,02	2,05	2,09	2,20	2,44	3,08	3,69	4,22	4,65	5,00	5,28	5,50	5,69	5,85	6,00
ψ = 0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,33	2,22	2,92	3,45	3,87	4,19	4,45	4,66	4,84	5,00
						0,00	1,00	1,77	2,37	2,83	3,18	3,45	3,66	3,84	4,00
							0,00	0,80	1,42	1,90	2,24	2,50	2,70	2,86	3,00
								0,00	0,63	1,09	1,40	1,61	1,77	1,89	2,00
									0,00	0,44	0,66	0,79	0,87	0,94	1,00
										0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 8.31. Valores nodales de la función de corriente para el flujo potencial de la Figura 8.30. Los valores sobre el contorno son datos del problema. Los nodos internos son solución de la Ecuación (8.110).

www.elsolucionario.net

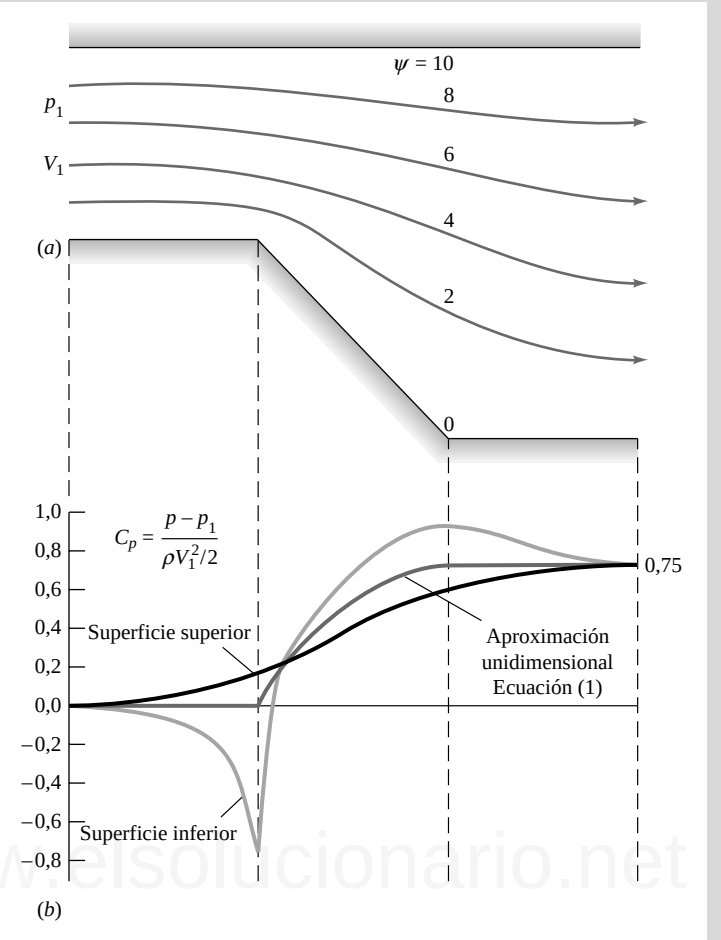


Figura 8.32. Representación gráfica de los resultados derivados de la Figura 8.31: (*a*) líneas de corriente del flujo; (*b*) coeficiente de presión a lo largo de la pared.

El flujo no es realmente unidimensional en el conducto de entrada. El fluido se acelera en la pared inferior, que contiene la sección divergente, y se decelera en la pared superior plana.

Otro resultado del análisis, muy útil para el estudio de las capas límite cerca de la pared, es la distribución de presiones a lo largo de las paredes. Si p_1 y V_1 son la presión y la velocidad en la sección de entrada (I = 1), las condiciones en cualquier otro punto se pueden obtener utilizando la ecuación de Bernoulli (8.3) despreciando efectos gravitatorios:

$$p + \tfrac{1}{2}\rho V^2 = p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V_1^2$$

lo que permite evaluar el coeficiente adimensional de presión:

$$C_p = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2}\rho V_1^2} = 1 - \left[\frac{V}{V_1}\right]^2$$

Esto permite a su vez calcular p una vez conocida V a partir de las diferencias de los valores de la función de corriente de la Figura 8.31.

La Figura 8.32*b* muestra la distribución de presiones calculada a lo largo de la pared junto a la que proporciona la aproximación unidimensional $V_1A_1 = V(x)A(x)$, o

$$C_p(\text{unidim}) = 1 - \left[\frac{A_1}{A}\right]^2 \tag{1}$$

www.elsolucionario.net

La aproximación unidimensional, que resulta bastante burda para una expansión tan pronunciada (45°), proporciona valores de presión intermedios entre los de la pared superior y la inferior. La teoría unidimensional sería mucho más precisa para una expansión de 10°.

Analizando la Figura 8.32*b* se puede predecir que el desprendimiento de la capa límite probablemente ocurra en la pared inferior de la sección de expansión, donde la presión aumenta rápidamente (fuerte gradiente de presión adverso). Por tanto, la teoría potencial no resulta demasiado realista para este flujo, donde los efectos viscosos son importantes. (Recuérdense las Figuras 6.27 y 7.8.)

La teoría potencial es reversible, esto es, si invertimos el sentido del flujo de la Figura 8.32*a*, la Figura 8.32*b* seguirá siendo válida, aunque en este caso representará el flujo en una contracción de 45°. La presión disminuirá a lo largo de ambas paredes desde $x = 3$ m hasta $x = 1$ m, aumentando entre $x = 1$ m y $x = 0$ en la pared inferior. Esto indica el posible desprendimiento de la corriente, que se produciría justo aguas abajo de la esquina.

Este ejemplo debería dar al lector una idea de la utilidad y generalidad del análisis numérico de los flujos.

El método de los elementos de contorno

Una técnica relativamente nueva para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales es el método de los elementos de contorno (BEM, *Boundary Element Method*). La Referencia 7 es un libro de texto de carácter introductorio que resume los conceptos básicos del método BEM, incluyendo varios programas en FORTRAN para su aplicación a la teoría potencial y a la electrostática. En este método no existen elementos interiores. En lugar de eso, todos los nodos se sitúan en la frontera del dominio, como en la Figura 8.33. Cada «elemento» es una pequeña región del contorno que rodea al nodo correspondiente, cuya «intensidad» puede ser constante o variable.

En el flujo potencial plano, el método se basa en la solución particular

$$\exists^* = \frac{1}{2\Theta}\ln\frac{1}{r} \tag{8.112}$$

www.elsolucionario.net

que satisface la ecuación de Laplace, $\nabla^2\psi = 0$. En este caso cada elemento *i* tiene una intensidad distinta ψ_i, y *r* representa la distancia desde dicho elemento hasta cualquier otro punto del campo fluido. Sumando los efectos de todos los elementos e imponiendo las condiciones de contorno apropiadas se obtiene la solución final del problema de flujo potencial.

En cada elemento del contorno conocemos o bien el valor de ψ o bien el valor de $E\psi/En$, donde *n* es la normal al contorno. (También se pueden especificar condiciones de contorno mixtas que combinan ψ y $E\psi/En$, pero que no trataremos aquí.) Los valores apropiados de las intensidades ψ_i son aquellos que permiten satisfacer estas condiciones de contorno en todos los elementos. La suma de estos efectos sobre *N* elementos requiere integración por partes y una evaluación cuidadosa del efecto (singular) del elemento *i* sobre sí mismo. Consúltese la Referencia 7 para los detalles matemáticos. El resultado es un conjunto de *N*

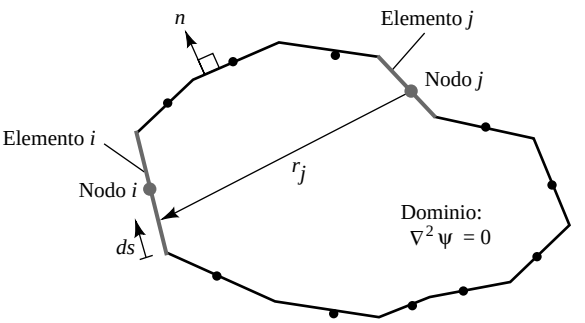


Figura 8.33. Elementos de contorno de intensidad constante para flujo potencial plano.

www.elsolucionario.net

ecuaciones algebraicas para los valores desconocidos en el contorno. En el caso de elementos de intensidad constante, la expresión final es

$$\frac{1}{2}\psi_i + \sum_{j=1}^{N} \psi_j \int_j \frac{\partial \psi^*}{\partial n}\, ds = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \psi}{\partial n}\bigg|_j \left(\int_j \psi^*\, ds \right) \qquad i = 1 \text{ hasta } N \tag{8.113}$$

Las integrales, en las que interviene la solución particular logarítmica ψ^* de la Ecuación (8.112), deben evaluarse numéricamente para cada elemento. La Referencia 7 recomienda el uso de fórmulas de cuadratura gaussiana, y proporciona un programa para ello.

Las Ecuaciones (8.113) contienen $2N$ valores, ψ_i y $\partial\psi_i/\partial n$, de los cuales N están dados por las condiciones de contorno. Los N restantes deben obtenerse resolviendo las Ecuaciones (8.113) de forma simultánea. Generalmente esto completa el análisis; sólo se calcula la solución en el contorno, sin estudiar los puntos interiores. En la mayoría de los casos sólo se necesitan los valores de la velocidad y la presión en el contorno.

Hemos ilustrado el método utilizando la función de corriente ψ. Naturalmente, esta técnica también se puede aplicar al potencial de velocidades ϕ una vez conocidos los valores de ϕ o $\partial\phi/\partial n$ en cada elemento de contorno. La extensión del método a tres dimensiones es inmediata [7, 38].

La Referencia 7 proporciona el listado completo de un programa en FORTRAN que permite resolver las Ecuaciones (8.113) numéricamente para valores constantes y variaciones lineales y cuadráticas de la intensidad de los elementos. A continuación utilizaremos el programa correspondiente a elementos de intensidad constante, POCONBE [7], para resolver de un modo alternativo el problema del Ejemplo 8.5, donde se usó el método de diferencias finitas.

EJEMPLO 8.6

Resuelva el flujo en el conducto con expansión, Ejemplo 8.5, utilizando el método de los elementos de contorno. Utilice elementos del mismo tamaño que el espaciado de la malla, $\Delta x = \Delta y = 0{,}2$ m.

www.elsolucionario.net

Solución

Los nodos del contorno están equiespaciados, como muestra la Figura 8.34. Sólo hay 45 nodos, mientras que necesitamos 91 puntos interiores para obtener la solución del Ejemplo 8.5 usando diferencias finitas. Esperamos obtener la misma precisión con un 50 por 100 menos de nodos. (Si reducimos el tamaño de la malla a 0,1 m, hubié-

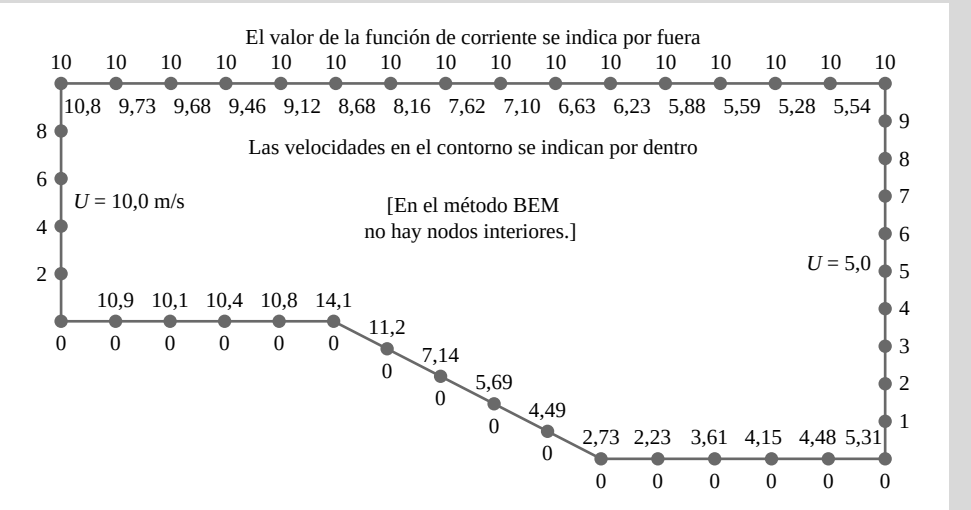


Figura 8.34. Elementos de contorno correspondientes al mismo tamaño de malla de la Figura 8.31. Se muestran los valores calculados en los nodos de la función de corriente y de la velocidad superficial.

www.elsolucionario.net

ramos tenido 90 nodos en lugar de 406 puntos interiores, lo que supone un ahorro del 78 por 100.) El programa POCONBE [7] pide que se introduzca la posición de los 45 nodos. Los valores de la función de corriente se conocen en todo el contorno: ψ es igual a 0 en la pared inferior e igual a 10 en la superior, variando linealmente entre estos dos valores en las secciones de entrada y salida. Los valores de ψ, indicados por fuera en la Figura 8.34, también deben introducirse como datos en el programa.

Una vez finalizada la introducción de los nodos y los valores de ψ correspondientes, inmediatamente el programa calcula, muestra y almacena las 45 incógnitas, que en este caso son los valores de $\partial\psi/\partial n$ en todos los nodos del contorno. Estos valores se indican por dentro en las paredes inferior y superior de la Figura 8.34 y representan la velocidad local en la superficie en las proximidades de cada elemento, en m/s. Los valores de $\partial\psi/\partial n$ a la entrada y la salida representan la componente vertical de la velocidad, y no se han mostrado aquí por ser muy pequeñas.

Con los valores de la velocidad superficial dados en la Figura 8.34, los coeficientes de presión a lo largo de la superficie, calculados como en el Ejemplo 8.5, están dados por curvas muy similares a las de la Figura 8.32. Cuando se usa el mismo número de nodos en la frontera, la precisión del método BEM es comparable a la del método FDM. Para más detalles consúltese la Referencia 7.

Modelos numéricos para flujos viscosos

Nuestro modelo en diferencias finitas de la ecuación de Laplace discutido anteriormente, Ecuación (8.109), se comporta bien y converge apropiadamente con sobrerrelajación o sin ella. Sin embargo, la aproximación numérica de las ecuaciones completas de Navier-Stokes resulta mucho más complicada. Las dificultades son muy numerosas; pese a lo cual casi todas ellas han conseguido superarse, y hoy en día existen numerosos libros de texto [20, 23 a 27] dedicados a la Mecánica de Fluidos Computacional (CFD) de los flujos viscosos. Aunque éste no es un libro sobre CFD, en esta sección trataremos algunos aspectos de este tema.

Flujo unidimensional no estacionario

Comenzamos con un problema simplificado para mostrar que la inclusión de los términos viscosos introduce nuevos efectos y posibles inestabilidades. Recuerde (o repase) el Problema P4.85, donde una pared se movía arrastrando un fluido viscoso paralelamente a sí misma. Despreciemos la gravedad. Supongamos que la pared coincide con el plano $y = 0$ y se mueve con velocidad $U_0(t)$, como en la Figura 8.35. Una malla uniforme en la dirección vertical, de espaciado Δy, está compuesta por nodos n en los cuales queremos calcular la velocidad local u_n^j, donde el superíndice j representa el valor en el paso temporal $j\Delta t$. El nodo $n = 1$ representa la pared. Si la velocidad sólo depende de y y t, es decir, $u = u(y, t)$, y $v = w = 0$, la continuidad, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, se satisface automáticamente y sólo necesitamos resolver la ecuación de cantidad de movimiento según x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{8.114}$$

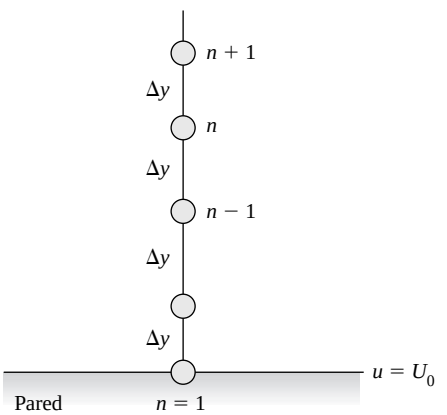


Figura 8.35. Una malla equiespaciada de diferencias finitas para un flujo viscoso unidimensional [Ecuación (8.114)].

www.elsolucionario.net

donde $\nu = \mu/\rho$. Usando la misma discretización en diferencias finitas de la Ecuación (8.106), podríamos aproximar la Ecuación (8.114) usando diferencias centradas en el espacio y descentradas en el tiempo:

$$\frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\Delta t} = \nu \frac{u_{n+1}^j - 2u_n^j + u_{n-1}^j}{\Delta y^2}$$

Reorganizando un poco es posible despejar u_n en el paso temporal $j + 1$:

$$u_n^{j+1} = (1 - 2\sigma)u_n^j + \sigma(u_{n-1}^j + u_{n+1}^j) \qquad \sigma = \frac{\nu \Delta t}{\Delta y^2} \tag{8.115}$$

Por tanto, el valor de u en el nodo n y en el instante $j + 1$ es una media ponderada de tres valores previos, al igual que ocurría en el modelo para la ecuación de Laplace de la Ecuación (8.109) con la media de los valores en los «cuatro vecinos más próximos». Como la velocidad se calcula de forma inmediata, se dice que la Ecuación (8.115) es un modelo *explícito*. Se distingue del modelo de la ecuación de Laplace, sin embargo, en que puede ser *inestable*. Los coeficientes de ponderación de la Ecuación (8.115) deben ser todos positivos para evitar la divergencia. Ahora bien, σ es positivo, pero $(1 - 2\sigma)$ puede no serlo. Por tanto, nuestro modelo explícito para el flujo viscoso debe verificar la condición de estabilidad:

$$\sigma = \frac{\nu \Delta t}{\Delta y^2} \leq \frac{1}{2} \tag{8.116}$$

Normalmente se define primero el tamaño de la malla Δy (véase la Figura 8.35) y la Ecuación (8.116) limita entonces el paso temporal Δt. El esquema que proporciona los valores nodales será entonces estable, pero no necesariamente demasiado preciso. Los tamaños de la malla Δy y Δt podrían reducirse para aumentar la precisión, al igual que ocurría con el modelo de la laplaciana (8.109) para el flujo potencial.

Por ejemplo, para resolver el Problema P4.85 numéricamente deberíamos definir una malla con un número abundante de nodos (30 o más Δy a través del espesor de la capa viscosa), seleccionar Δt de acuerdo con la Ecuación (8.116) y establecer dos condiciones de contorno para todo j: $u_1 = U_0$ sen ωt y $u_N = 0$, donde N es el nodo más lejano a la pared[7]. Como condiciones iniciales, podríamos suponer que el fluido está inicialmente en reposo: $u_n^1 = 0$ para $2 \leq n \leq N - 1$. Usando la Ecuación (8.115) para barrer los nodos $2 \leq n \leq N - 1$ (una hoja de cálculo Excel es ideal para hacer esto), se obtienen los valores numéricos de u_n^j en instantes de tiempo sucesivos. Tras un transitorio inicial, el fluido comienza a oscilar hasta que converge a la solución clásica que se da en los libros de texto de flujo viscoso [15]. Puede intentar reproducir este comportamiento resolviendo el Problema P8.115.

Una alternativa: los métodos implícitos

En muchos problemas de diferencias finitas la existencia de condiciones de estabilidad similares a la Ecuación (8.116) obliga a dar pasos de tiempo extremadamente cortos. Para poder dar pasos más largos, debemos reescribir el problema en forma implícita, evaluando la segunda derivada de la Ecuación (8.114) en el siguiente paso temporal:

$$\frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\Delta t} = \nu \frac{u_{n+1}^{j+1} - 2u_n^{j+1} + u_{n-1}^{j+1}}{\Delta y^2}$$

Este esquema es incondicionalmente estable para cualquier valor de σ, pero ahora tenemos *tres* incógnitas:

$$-\sigma u_{n-1}^{j+1} + (1 + 2\sigma)u_n^{j+1} - \sigma u_{n+1}^{j+1} = u_n^j \tag{8.117}$$

[7] Las diferencias finitas no son un método analítico, por lo que uno debe dar valores numéricos a U_0 y ω.

www.elsolucionario.net

Éste es un modelo *implícito*, lo que significa que debemos resolver un gran sistema de ecuaciones algebraicas para los nuevos valores nodales en el tiempo $j + 1$. Afortunadamente, la matriz de coeficientes de la Ecuación (8.117) es *tridiagonal*, esto es, las incógnitas quedan confinadas a la diagonal principal y a las dos diagonales más próximas, un hecho afortunado. Existe un método directo, conocido como el *algoritmo para matrices tridiagonales* (TDMA, *TriDiagonal Matrix Algorithm*), que se explica en la mayoría de los libros sobre CFD [20, 23 a 27]. El Apéndice A de la Referencia 20 incluye un programa completo para resolver el TDMA. Si aún no conoce el TDMA, la Ecuación (8.117) converge satisfactoriamente por iteración si se reordena de la siguiente forma:

$$u_n^{j+1} \Xi \frac{u_n^j + \sigma(u_{n-1}^{j+1} + u_{n+1}^{j+1})}{1+2\sigma} \tag{8.118}$$

En cada paso temporal $j + 1$ hay que barrer los nodos $2 \le n \le N-1$ una y otra vez, usando la Ecuación (8.118), hasta que los valores nodales hayan convergido. Este método implícito es estable para cualquier valor de σ, da igual lo grande que sea. No obstante, para garantizar la precisión Δt y Δy deben ser pequeños comparados con las escalas espaciales y temporales del problema. Por costumbre, el autor suele mantener Δt y Δy lo suficientemente pequeños para que la variación de un valor nodal (n, j) al siguiente sea menor del 10 por 100.

EJEMPLO 8.7

Una pared en contacto con aceite SAE 30 a 20 °C e inicialmente en reposo comienza a moverse de forma súbita con una velocidad constante de 1 m/s. Utilizando el método explícito de la Ecuación (8.114), estime la velocidad del aceite en $y = 3$ cm 1 segundo después de comenzar el movimiento de la pared.

Solución

www.elsolucionario.net

Según la Tabla A.3, para el aceite SAE 30, $\nu = 0{,}29/891 = 3{,}25 \times 10^{-4}$ m²/s. Elegiremos $\Delta y = 0{,}01$ m por conveniencia, pues nos permitirá situar un nodo exactamente en $y = 3$ cm. La condición de estabilidad (8.116) es $\nu\Delta t/\Delta y^2 < 0{,}5$, o $\Delta t < 0{,}154$ s. De nuevo por conveniencia, para alcanzar exactamente el instante $t = 1$ s, elegiremos $\Delta t = 0{,}1$ s, o $\sigma = 0{,}3255$ y $(1 - 2\sigma) = 0{,}3491$. En este caso, el modelo algebraico explícito (8.115) toma la forma

$$u_n^{j+1} \Xi 0{,}3491\, u_n^j + 0{,}3255(u_{n-1}^j + u_{n+1}^j) \tag{1}$$

Aplicamos esta relación desde $n = 2$ hasta, al menos, $n = N = 15$, para asegurarnos de que el valor deseado de u en $n = 4$, esto es, $y = 3$ cm, es suficientemente preciso. La condición de no deslizamiento en la pared exige $u_1^j = 1{,}0$ m/s = constante para todo j. La condición de contorno en el exterior es $u_N = 0$. Las condiciones iniciales son $u_n^1 = 0$ para $n \ge 2$. Aplicamos entonces la Ecuación (1) una y otra vez para $n \ge 2$ hasta llegar a $j = 11$, que corresponde a $t = 1$ s. Esto se puede programar fácilmente en una hoja de cálculo de Excel. Aquí sólo damos los resultados para $j = 1$, 6 y 11:

j	t	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}
1	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,500	1,000	0,601	0,290	0,107	0,027	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
11	1,000	1,000	0,704	0,446	**0,250**	0,123	0,052	0,018	0,005	0,001	0,000	0,000

Nota: las unidades para t y u son s y m/s, respectivamente.

La estimación numérica es $u_4^{11} = u(3 \text{ cm}, 1 \text{ s}) \Xi 0{,}250$ m/s, alrededor de un 4 por 100 por encima del valor que proporciona la solución exacta de este problema, $u = 0{,}241$ m/s [15]. Podríamos incrementar la precisión de forma arbitraria reduciendo Δy y Δt.

www.elsolucionario.net

Flujo laminar bidimensional estacionario

En el ejemplo anterior, correspondiente a un flujo unidimensional no estacionario, sólo había un término viscoso y no había aceleraciones convectivas. Veamos brevemente qué ocurre en un flujo bidimensional estacionario incompresible, donde hay cuatro de cada uno de esos términos, además de una ecuación de la continuidad no trivial:

Continuidad:
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{8.119a}$$

Cantidad de movimiento según x:
$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{8.119b}$$

Cantidad de movimiento según y:
$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{8.119c}$$

Estas ecuaciones deben resolverse para obtener (u, v, p) en función de (x, y) y nos son familiares de las soluciones analíticas de los Capítulos 4 y 6. Sin embargo, para un analista numérico son ecuaciones complicadas de resolver, pues no existe una *ecuación para la presión*, esto es, una ecuación en la que la presión p aparezca en las derivadas de mayor orden. Esto ha motivado el desarrollo de numerosos esquemas que tratan de «ajustar la presión» [20, 23 a 27], la mayoría de los cuales manipulan la ecuación de continuidad para introducir una corrección de la presión.

Una segunda dificultad de las Ecuaciones (8.119*b* y *c*) es la presencia de aceleraciones convectivas no lineales del tipo $u(\partial u/\partial x)$, que introducen asimetría en el flujo. Los primeros intentos de modelar dichos términos utilizaban esquemas centrados, lo que conducía a inestabilidades numéricas. La solución es aproximar los términos convectivos por esquemas en diferencias que sólo utilicen información de las celdas situadas aguas arriba, ignorando la información de las celdas aguas abajo. Por ejemplo, la derivada $(\partial u/\partial x)$ podría aproximarse, para una cierta celda, como $(u_{\text{aguas arriba}} - u_{\text{celda}})/\Delta x$. Estas mejoras han permitido que los códigos CFD para flujos viscosos sean en la actualidad herramientas muy útiles, existiendo numerosos códigos de fácil manejo en el mercado. Véanse las Referencias 20 y 23 a 27 para más detalles.

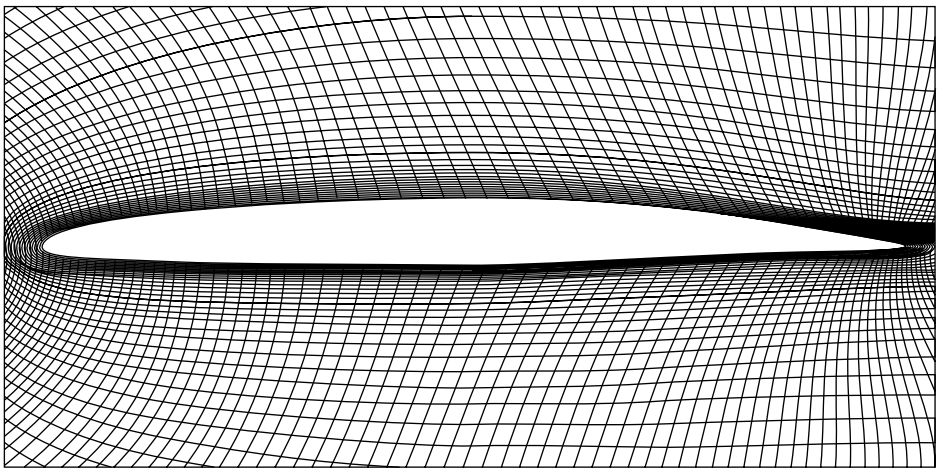
La generación de mallas también ha mejorado sustancialmente en los últimos tiempos. La Figura 8.36 muestra una solución CFD del flujo bidimensional alrededor de un hidroala NACA 66(MOD) [28]. El mallado de la Figura 8.36*a* es de tipo C, rodeando el perfil por el borde de ataque y continuando aguas abajo del mismo tras el borde de salida, lo que permite resolver los detalles importantes del flujo cerca de la pared y en la estela sin tener que desperdiciar nodos por delante o a los lados del perfil. El número de puntos de la malla es de 262 por 91.

El modelo CFD del flujo alrededor del hidroala es también bastante sofisticado: un integrador de las ecuaciones completas de Navier-Stokes que incluye modelos de turbulencia [29] y que reproduce la aparición de burbujas de cavitación cuando la presión en la superficie cae por debajo de la presión de vapor local. La Figura 8.36*b* compara los valores del coeficiente de presión calculados y medidos experimentalmente para un ángulo de ataque de 1°. El coeficiente adimensional de presiones se define como $C_p = (p_{\text{superficie}} - p_\infty)/(\rho V_\infty^2/2)$. El acuerdo es excelente, como también lo es en los casos en que el perfil cavita [28]. Claramente, cuando se implementan correctamente para los distintos flujos, las herramientas CFD pueden ser extremadamente efectivas para el ingeniero.

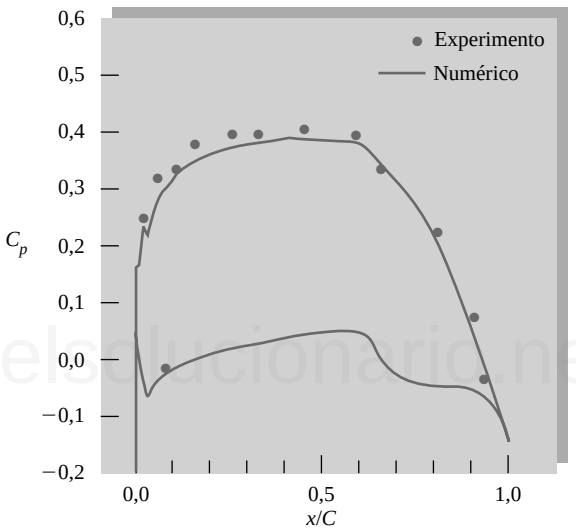
Códigos CFD comerciales

Con la llegada del tercer milenio hemos sido testigos de un enorme auge de las aplicaciones computacionales en casi todos los campos, siendo la Mecánica de Fluidos un ejemplo privilegiado. Hoy en día es posible, al menos para geometrías y flujos moderadamente complicados, modelar de forma razonablemente precisa las ecuaciones del movimiento de los fluidos usando un ordenador, y existen numerosos textos sobre CFD en el mercado [20, 23 a 27]. El campo fluido se divide en una fina malla de elementos y nodos que se utilizan para simular algebraicamente las ecuaciones diferenciales básicas que gobiernan el flujo. Mien-

www.elsolucionario.net



(*a*)



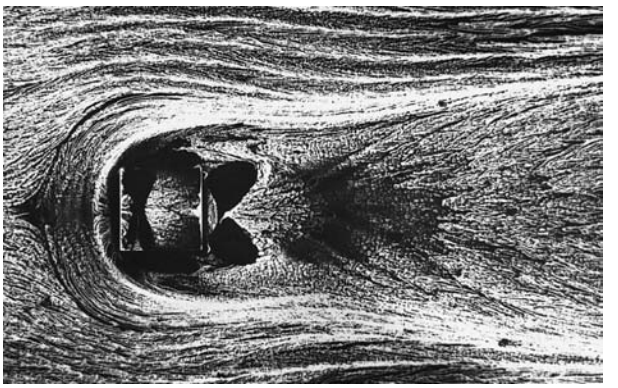
(*b*)

Figura 8.36. Resultados CFD para el flujo de agua alrededor de un perfil hidrodinámico NASA 66(MOD) (*de la Referencia 28, con permiso de la American Society of Mechanical Engineers*): (*a*) malla en forma de C, 262 por 91 nodos; (*b*) distribución de presiones en la superficie para $\alpha = 1°$.

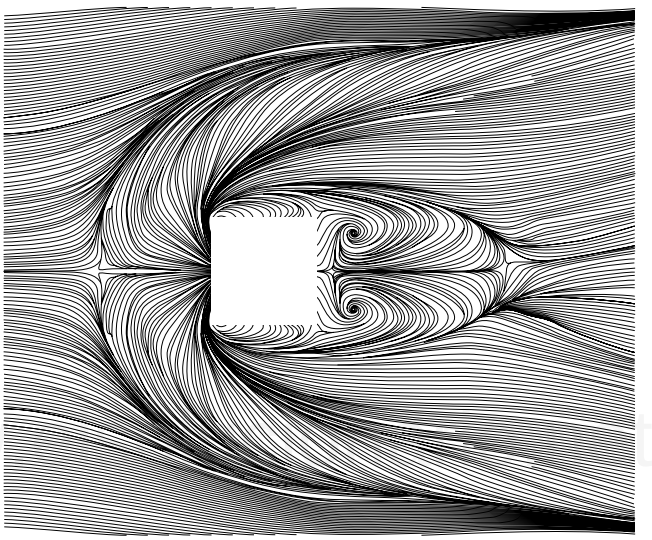
tras que las simulaciones numéricas bidimensionales se han convertido en algo rutinario desde hace tiempo y pueden proponerse como ejercicio a los estudiantes, los flujos tridimensionales, que involucran miles o incluso millones de puntos de malla, sólo pueden resolverse utilizando modernos superordenadores.

Aunque aquí hemos tratado brevemente técnicas elementales del análisis numérico, el estudio general de la Mecánica de Fluidos Computacional es esencialmente objeto de cursos avanzados de postgrado o de la práctica profesional. El principal avance respecto a la pasada década es que hoy en día los ingenieros, en lugar de programar ellos mismos los laboriosos códigos CFD, pueden utilizar alguno de los múltiples códigos CFD comerciales existentes en el mercado. Estos amplios paquetes de software permiten al ingeniero definir la geometría y las condiciones de contorno apropiadas para simular flujos viscosos. A continuación, el programa malla la región fluida y trata de calcular las propiedades del flujo en cada elemento de la malla. Pero esta aparente sencillez conlleva un gran peligro. En realidad los cálculos no son automáticos, como cuando se usa una calculadora manual, sino que requieren de prudencia y precaución por parte del usuario. La convergencia y precisión son problemas de gran importancia para el ingeniero, y la utilización de códigos suele exigir pericia y cierta experiencia. En particular, cuando el número de Reynolds $\mathrm{Re} = \rho VL/\mu$ pasa de moderado (flujo laminar) a alto (flujo turbulento), la precisión de la simulación co-

www.elsolucionario.net



(*a*)



(*b*)

(*c*)

Figura 8.37. El flujo alrededor de un cubo adherido a una superficie presenta una estructura compleja y tal vez inesperada: (*a*) visualización experimental mediante trazas de aceite del flujo superficial para Re = 40.000 (basado en la altura del cubo) (*Cortesía de Robert Martinuzzi con permiso de la American Society of Mechanical Engineers*); (*b*) simulación numérica de grandes torbellinos del flujo (*a*) (*de la Referencia 32, cortesía de Kishan Shah, Stanford University*); y (*c*) vista lateral del flujo (*a*) visualizado mediante humo y un haz plano de luz láser (*Cortesía de Robert Martinuzzi con el permiso de la American Society of Mechanical Engineers*).

www.elsolucionario.net

mienza a verse afectada. La razón es que los flujos turbulentos no pueden resolverse completamente utilizando las ecuaciones básicas del movimiento,[8] y debe recurrirse al uso de modelos aproximados para la turbulencia.

Los modelos de turbulencia [29] suelen desarrollarse para geometrías y condiciones del flujo particulares, pudiendo resultar poco precisos o poco realistas en otras condiciones. Por ejemplo, Freitas [30] comparó los cálculos realizados con ocho códigos comerciales distintos (FLOW-3D, FLOTRAN, STAR-CD, N3S, CFD-ACE, FLUENT, CFDS-FLOW3D y NISA/3D-FLUID) con los resultados correspondientes a cinco experimentos de referencia. La conclusión fue que los cálculos, que habían sido realizados por los propios fabricantes, aunque resultaban prometedores en general, eran poco precisos bajo ciertas condiciones de flujo laminar y turbulento. Aún debe trabajarse más en este campo antes de que los ingenieros puedan fiarse realmente de estos códigos comerciales para hacer predicciones precisas de los flujos.

Pese a las precauciones que se deben tomar al usar códigos CFD, los resultados de las simulaciones pueden llegar a ser espectaculares. La Figura 8.37 ilustra el flujo turbulento alrededor de un cubo pegado al suelo de un canal cuya altura es dos veces la altura del cubo. Cuando se compara la Figura 8.37*a*, que muestra la vista en planta del flujo en la pared del canal [31] visualizado experimentalmente mediante trazas de aceite, con la Figura 8.37*b*, que se obtuvo con un superordenador utilizando el método CFD de simulación de grandes torbellinos (LES, *Large Eddy Simulation*) [32, 33], se observa que el acuerdo entre ambas es excelente. La estructura en forma de C del flujo en la parte frontal del cubo es consecuencia de la formación de un torbellino con forma de herradura, tal y como se observa en la vista lateral del experimento [31] de la Figura 8.37*c*. Los torbellinos de herradura suelen aparecer cuando un flujo de cortadura se encuentra con un obstáculo. Podemos concluir, por tanto, que los métodos computacionales tienen un tremendo potencial de predicción para los flujos.

Resumen

En este capítulo se ha analizado un tipo de flujo altamente idealizado pero muy útil: el flujo irrotacional, incompresible y no viscoso, en el cual tanto el potencial de velocidades, Ecuación (8.1), como la función de corriente (en el caso plano), Ecuación (8.7), verifican la ecuación de Laplace. La base matemática es muy sólida y permite obtener soluciones potenciales para el flujo alrededor de cuerpos de forma prácticamente arbitraria.

Algunas de las técnicas tratadas aquí son (1) la superposición de soluciones elementales bidimensionales o puntuales para el flujo plano y axilsimétrico, (2) las funciones analíticas de la variable compleja, (3) la utilización de capas de torbellinos y (4) el análisis numérico. La teoría potencial está especialmente indicada para cuerpos delgados, como los perfiles aerodinámicos. El único requisito es que la capa límite sea delgada, o en otras palabras, que el número de Reynolds sea grande.

En los flujos alrededor de cuerpos romos o flujos altamente divergentes la teoría potencial sirve como primera aproximación, que debe utilizarse como dato para el análisis de la capa límite. Se invita al lector a consultar textos avanzados [por ejemplo, 2 a 4, 11 a 13] para estudiar otras aplicaciones del flujo potencial. En la Sección 8.9 se discutieron los métodos computacionales para flujos viscosos (no potenciales).

Problemas

La mayoría de los problemas propuestos aquí son bastante sencillos. Los más difíciles, o de final abierto, se indican con un asterisco. Para resolver los problemas señalados con un icono EES se recomienda el uso del Resolvedor de Ecuaciones de Ingeniería (EES, *Engineering Equation Solver*), mientras que los problemas señalados con un disquete pueden requerir el uso de un ordenador. Los problemas estándar de final de capítulo P8.1 a P8.115 (ordenados por temas en la lista siguiente) están seguidos por los problemas conceptuales C8.1 a C8.7, los problemas extensos PE8.1 a PE8.7 y los proyectos de diseño D8.1 a D8.3.

[8] A menos que se utilice un tamaño de malla muy pequeño, o lo que es lo mismo, un gran número de nodos. Sin embargo, esto hace que las simulaciones sean lentas y costosas, lo que las convierte en inviables para las aplicaciones industriales (*N. del T.*).

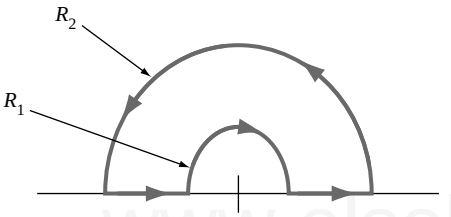
www.elsolucionario.net

Distribución de los problemas

Sección	Tema	Problemas
8.1	Introducción y repaso	P8.1-P8.7
8.2	Soluciones elementales en flujos planos	P8.8-P8.17
8.3	Superposición de flujos planos	P8.18-P8.34
8.4	Flujos planos alrededor de cuerpos cerrados	P8.35-P8.59
8.5	El potencial complejo	P8.60-P8.71
8.6	Imágenes	P8.72-P8.79
8.7	Teoría de perfiles: bidimensional	P8.80-P8.84
8.7	Teoría de perfiles: alas de envergadura finita	P8.85-P8.90
8.8	Flujo potencial axilsimétrico	P8.91-P8.103
8.8	Masa añadida	P8.104-P8.105
8.9	Métodos numéricos	P8.106-P8.115

P8.1 Demuestre que las líneas de corriente $\psi(r, \theta)$ en coordenadas polares, Ecuación (8.10), son perpendiculares a las líneas equipotenciales $\phi(r, \theta)$.

P8.2 El flujo plano estacionario de la Figura P8.2 tiene el siguiente campo de velocidades en coordenadas polares: $v_\theta = \Omega r$ y $v_r = 0$. Determine la circulación Γ alrededor de la curva indicada.



P8.2

P8.3 Utilizando coordenadas cartesianas, muestre que cada componente de la velocidad (u, v, w) de un flujo potencial satisface la ecuación de Laplace.

P8.4 La función $1/r$ ¿representa un potencial de velocidades en coordenadas polares? Si es así, ¿cuál es la función de corriente $\psi(r, \theta)$ asociada?

P8.5 Considérese el campo de velocidades bidimensional $u = -By$, $v = Bx$, donde B es una constante. ¿Tiene este flujo función de corriente? Si es así, determine su forma. Si existiera potencial de velocidades, obténgalo también. Calcule la velocidad angular local, si hubiese, y dé una interpretación de este flujo.

P8.6 Si el potencial de velocidades de un flujo bidimensional realista es $\phi = C \ln(x^2 + y^2)^{1/2}$, donde C es una constante, determine la forma de la función de corriente $\psi(x, y)$. *Consejo:* utilice coordenadas polares.

P8.7 Considérese un flujo con densidad y viscosidad constantes. Si el potencial de velocidades está dado por la Ecuación (8.1), muestre que el flujo satisface idénticamente las ecuaciones completas de Navier-Stokes (4.38). Si es así, ¿por qué en la teoría no viscosa nos olvidamos de las ecuaciones completas de Navier-Stokes?

P8.8 Evalúe la circulación Γ del campo de velocidades del Problema P8.5 alrededor del rectángulo definido por $(x, y) = (1, 1), (3, 1), (3, 2)$ y $(1, 2)$. Interprete el resultado obtenido, en especial con respecto al potencial de velocidades.

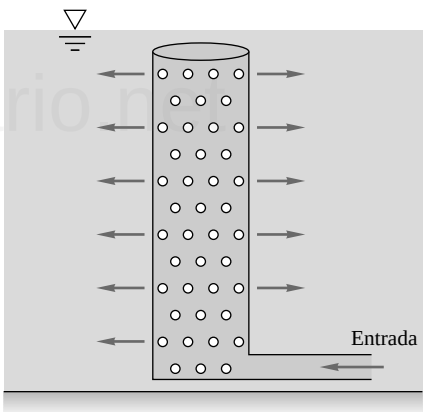
P8.9 Considere el campo de velocidades bidimensional $u = -Ax$, $v = Ay$, donde A es una constante. Evalúe la circulación Γ alrededor del rectángulo definido por $(x, y) = (1, 1), (4, 1), (4, 3)$ y $(1, 3)$. Interprete el resultado obtenido, en especial con respecto al potencial de velocidades.

P8.10 Una relación matemática que se utiliza a veces en Mecánica de Fluidos es el teorema de Stokes [1]:

$$\oint_C \mathbf{V}\,\Delta d\mathbf{s} = \int_A \int (\nabla \times \mathbf{V})\,\Delta \mathbf{n}\, dA$$

donde A es una superficie arbitraria y C es la curva que delimita dicha superficie. El vector $d\mathbf{s}$ es el elemento diferencial de arco a lo largo de la curva C, y $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la superficie A. ¿Cómo se simplifica esta relación en un flujo irrotacional? ¿Qué relación existe entre la integral de línea resultante y el potencial de velocidades?

P8.11 El desagüe del agua de refrigeración de una central térmica es esencialmente un colector vertical de 55 cm de diámetro y 8 m de altura perforado por 25.000 agujeros de 1 cm de diámetro, como se muestra en la Figura P8.11. ¿Se asemeja este colector a una fuente bidimensional? Si es así, ¿cuál es la intensidad m de la fuente equivalente?



P8.11

P8.12 Considérese el flujo debido a un torbellino bidimensional situado en el origen de intensidad K. Determine, con la Ecuación (8.15), la circulación en el sentido de las agujas del reloj a lo largo de un camino que se inicia en el punto $(r, \theta) = (a, 0)$ y pasa por los puntos $(2a, 0)$, $(2a, 3\pi/2)$, $(a, 3\pi/2)$ y vuelve de nuevo al punto $(a, 0)$. Interprete el resultado.

P8.13 Una solución exacta bien conocida de las ecuaciones de Navier-Stokes (4.38) es el movimiento circulatorio no estacionario

$$v_\theta = \frac{K}{2\pi r}\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right], \qquad v_r = v_z = 0$$

donde K es una constante y ν es la viscosidad cinemática. ¿Tiene este flujo función de corriente y/o poten-

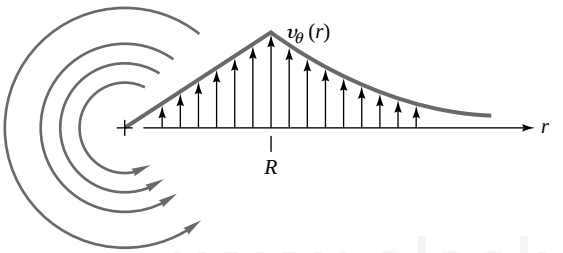
www.elsolucionario.net

cial de velocidades en coordenadas polares? Explíquelo. Determine la circulación Γ alrededor de una curva de radio r y represente Γ frente a r en un instante dado. Interprete el resultado comparándolo con el torbellino bidimensional.

P8.14 Un tornado puede modelarse mediante el flujo circulatorio de la Figura P8.14, con $v_r = v_z = 0$ y $v_\theta(r)$ dado por

$$v_\theta = \begin{cases} Cr & r < R \\ C\dfrac{R^2}{r} & r > R \end{cases}$$

Determine si este flujo es irrotacional en la región interior o en la región exterior. Utilizando la ecuación de cantidad de movimiento radial (D.5) del Apéndice D, calcule la distribución de presiones $p(r)$ en el tornado, suponiendo que $p = p_\infty$ para $r \to \infty$. Determine la posición donde la presión alcanza su valor mínimo y obtenga dicho mínimo.



P8.14

P8.15 En la escala Saffir-Simpson (<www.encyclopedia.com>), un huracán de categoría 3 tiene una velocidad máxima de 130 mi/h. Sea R = 18 km el radio de transición (véase Figura P8.14). Suponiendo condiciones estándar a nivel del mar a distancias r grandes del núcleo del huracán, (*a*) obtenga la presión mínima; (*b*) obtenga la presión en el punto de transición, y (*c*) muestre que tanto la presión mínima como la presión en el punto de transición son independientes de R.

P8.16 Considérese el flujo en un punto de remanso no viscoso, $\psi = Kxy$ (véase Figura 8.15*b*), al que se le añade una fuente en el origen de intensidad m. Represente las líneas de corriente resultantes en el semiplano $y > 0$ utilizando $a = (m/K)^{1/2}$ como escala de longitud. Dé una interpretación física del flujo.

P8.17 Determine la posición (x, y) a lo largo de la superficie del cuerpo semiinfinito de la Figura 8.5*a* donde la velocidad local es igual a la velocidad de la corriente incidente. ¿Qué presión debería haber en ese punto?

P8.18 Dibuje las líneas de corriente y equipotenciales del flujo debido a una fuente bidimensional de intensidad m situada en $(a, 0)$ más una fuente de intensidad $3m$ situada en $(-a, 0)$. ¿Cómo es el flujo visto desde lejos?

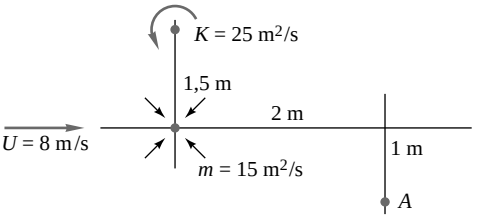
P8.19 Dibuje las líneas de corriente y equipotenciales del flujo debido a una fuente bidimensional de intensidad $3m$ situada en $(a, 0)$ más un sumidero de intensidad $-m$ situado en $(-a, 0)$. ¿Cómo es el flujo visto desde lejos?

P8.20 Dibuje las líneas de corriente del flujo debido a un torbellino bidimensional de intensidad $+K$ situado en $(0, +a)$ y otro torbellino de intensidad $-K$ situado en $(0, -a)$. ¿Cómo es el flujo visto desde lejos?

P8.21 Dibuje las líneas de corriente del flujo debido a un torbellino bidimensional de intensidad $+K$ situado en $(+a, 0)$ y otro torbellino de intensidad $-2K$ situado en $(-a, 0)$. ¿Cómo es el flujo visto desde lejos?

P8.22 Dibuje las líneas de corriente del flujo debido a una corriente uniforme $\mathbf{V} = \mathbf{i}U$ más un torbellino bidimensional en el sentido de las agujas del reloj de intensidad $-K$ situado en el origen. ¿Hay puntos de remanso?

P8.23 Determine el vector velocidad resultante en el punto A de la Figura P8.23 debido a la superposición de la corriente uniforme, el torbellino y la fuente bidimensional.



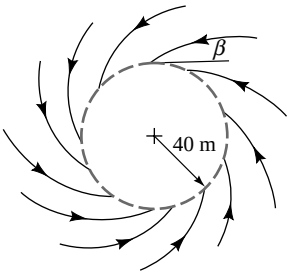
P8.23

P8.24 Dos fuentes bidimensionales de la misma intensidad $m = Ua$, donde U es una velocidad de referencia, se sitúan en $(x, y) = (0, a)$ y $(0, -a)$. Represente esquemáticamente las líneas de corriente y equipotenciales en el semiplano superior. ¿Representa $y = 0$ una «pared»? Si es así, represente el coeficiente de presiones

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

a lo largo de la pared, donde p_0 es la presión en (0, 0). Determine el punto de presión mínima e indique si hay peligro de que la corriente a lo largo de la pared se desprenda.

P8.25 El flujo debido a la combinación torbellino/sumidero de la Ecuación (4.134) puede simular el flujo en un tornado como en la Figura P8.25. Suponga que la circulación alrededor del tornado es Γ = 8500 m²/s y que la presión a r = 40 m es 2200 Pa menor que la presión lejos del centro. Suponiendo flujo no viscoso con densidad estándar a nivel del mar, estime (*a*) la intensi-

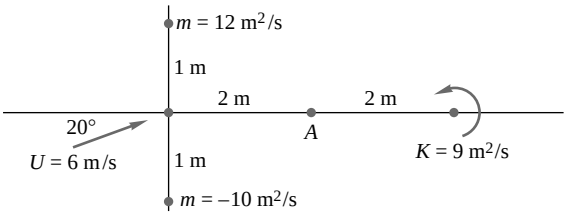


P8.25

www.elsolucionario.net

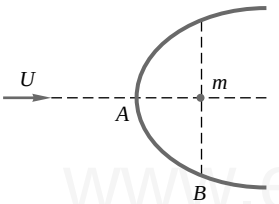
dad $-m$ del sumidero, (*b*) la presión en $r = 15$ m y (*c*) el ángulo β con el que las líneas de corriente cruzan el círculo de radio $r = 40$ m (véase Figura P8.25).

P8.26 Determine el vector velocidad resultante en el punto *A* de la Figura P8.26 debido a la superposición de la corriente uniforme, la fuente bidimensional, el sumidero bidimensional y el torbellino.



P8.26

P8.27 Agua a 20 °C fluye alrededor del cuerpo semiinfinito que se muestra en la Figura P8.27. Las mediciones de presión en los puntos *A* y *B* son 160 kPa y 90 kPa, respectivamente, con incertidumbres de 3 kPa en cada caso. Estime la velocidad de la corriente y la incertidumbre correspondiente.



P8.27

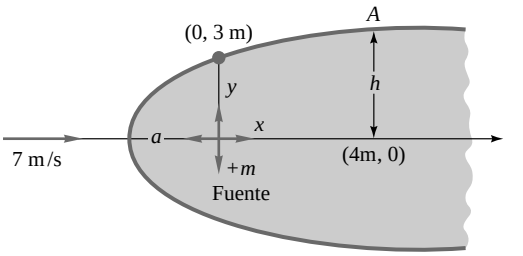
P8.28 Cuatro fuentes de la misma intensidad *m* se sitúan en las cuatro esquinas de un cuadrado $(x, y) = (a, a)$, $(a, -a)$, $(-a, a)$ y $(-a, -a)$. Esquematice las líneas de corriente y equipotenciales. ¿Aparece alguna «pared»?

P8.29 Una corriente uniforme de agua, con $U_\infty = 20$ m/s y $\rho = 998$ kg/m³, se combina con una fuente en el origen para formar un cuerpo semiinfinito. En $(x, y) = (0, 1{,}2$ m), la presión es 12,5 kPa menor que p_∞. (*a*) ¿Está dicho punto fuera del cuerpo? Estime (*b*) la intensidad *m* de la fuente y (*c*) la presión en el punto de remanso.

P8.30 Suponga que el colector de la Figura P8.11 descarga 450 m³/s en una corriente marina que se mueve con una velocidad de 60 cm/s hacia la derecha. Esquematice la estructura del flujo visto desde arriba, mostrando las dimensiones y la región donde queda confinada la descarga de agua de refrigeración.

P8.31 Un cuerpo semiinfinito de Rankine tiene la forma que se muestra en la Figura P8.31. Para la velocidad de la corriente y las dimensiones del cuerpo dadas, determine (*a*) la intensidad *m* de la fuente en m²/s, (*b*) la distancia *a*, (*c*) la distancia *h* y (*d*) la velocidad total en el punto *A*.

P8.32 Represente esquemáticamente las líneas de corriente del flujo debido a la superposición de dos fuentes bidimensionales iguales de intensidad $+m$ situadas en $(+a, 0)$ y $(-a, 0)$ y una corriente uniforme $U_\infty = ma$. ¿Aparece algún cuerpo de forma cerrada?



P8.31

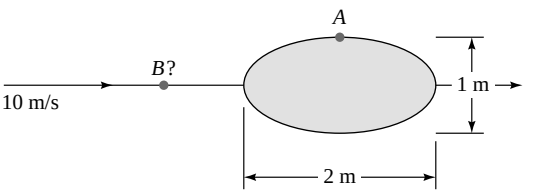
P8.33 Represente esquemáticamente las líneas de corriente del flujo debido a la superposición de dos fuentes bidimensionales iguales de intensidad $+m$ situadas en $(0, +a)$ y $(0, -a)$ y una corriente uniforme $U_\infty = ma$. ¿Aparece algún cuerpo de forma cerrada?

P8.34 Considere tres fuentes bidimensionales iguales de intensidad $+m$ situadas en $(x, y) = (0, +a)$, $(0, 0)$ y $(0, -a)$. Represente esquemáticamente las líneas de corriente resultantes, indicando la posición de los puntos de remanso. ¿Cómo es el flujo visto desde lejos?

P8.35 Considere tres fuentes bidimensionales iguales de intensidad $+m$ dispuestas en forma triangular: una en $(a/2, 0)$, otra en $(-a/2, 0)$ y otra en $(0, a)$. Dibuje las líneas de corriente de este flujo. ¿Hay puntos de remanso? *Consejo*: utilice el comando *contour* de MATLAB [34].

P8.36 Cuando se combina una pareja fuente/sumidero bidimensional de intensidad $m = 2$ m²/s con una corriente uniforme, se forma un óvalo de Rankine cuya altura es de 40 cm. Sabiendo que $a = 15$ cm, ¿cuál es la velocidad de la corriente y la velocidad en el punto más alto del cuerpo? ¿Qué anchura tiene el óvalo?

P8.37 Un óvalo de Rankine de 2 m de largo y 1 m de ancho está inmerso en una corriente uniforme de $U_\infty = 10$ m/s, como en la Figura P8.37. Determine (*a*) la velocidad en el punto *A* y (*b*) la posición del punto *B* donde la aceleración de las partículas que se aproximan al punto de remanso es máxima.



P8.37

P8.38 Represente las líneas de corriente debidas a la combinación de una corriente uniforme *U* en la dirección *x* más una fuente de intensidad *m* situada en $(a, 0)$ y un sumidero de intensidad $-m$ situado en $(-a, 0)$. ¿Hay puntos de remanso?

P8.39 Determine el valor del parámetro $m/(U_\infty a)$ para el cual la velocidad en el punto central del óvalo de Rankine es igual a $3U_\infty$.

P8.40 Represente esquemáticamente las líneas de corriente debidas a una corriente uniforme U_∞, dos fuentes bidimensionales de intensidad $+m$ situadas en $(x, y) = (+a, 0)$ y $(-a, 0)$, y un sumidero bidimensional en el

www.elsolucionario.net

origen de intensidad –2*m*. ¿Se forma un cuerpo de forma cerrada? Si es así, represéntelo para $m/(U_\infty a)$ igual a (*a*) 1 y (*b*) 5.

P8.41 Un óvalo de Kelvin está formado por un par de torbellinos bidimensionales con $K = 9$ m²/s, $a = 1$ m y $U = 10$ m/s. ¿Cuáles son la altura, anchura y velocidad en el punto más alto de este óvalo?

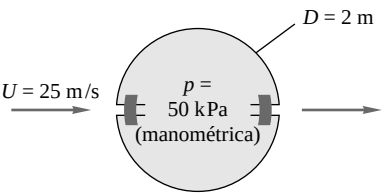
P8.42 ¿Para qué valor de $K/(U_\infty a)$ la velocidad en el punto más alto del óvalo de Kelvin es igual a $4U$? ¿Cuál es la altura h/a de este óvalo?

P8.43 Determine la intensidad λ, en m³/s, que debe tener un doblete para simular el flujo sin circulación de una corriente uniforme a 6 m/s alrededor de un cilindro de 1 m de diámetro. Si el fluido es agua a 20 °C y la presión en la corriente libre es de 200 kPa, utilice la teoría no viscosa para estimar la presión en la superficie del cilindro en θ igual a (*a*) 180° (punto de remanso anterior), (*b*) 135° y (*c*) 90° (punto más alto del cilindro).

P8.44 Suponga que al cilindro del Problema P8.43 se le añade la circulación suficiente para que los puntos de remanso se sitúen en $\theta = 35°$ y 145°. ¿Cuál es la intensidad K en m²/s? Determine la presión y la velocidad en (*a*) los puntos de remanso, (*b*) los puntos más alto y más bajo del cilindro. ¿Cuál será la sustentación teórica del cilindro por metro de longitud?

P8.45 Si se añade una cierta circulación K al flujo alrededor del cilindro del Problema P8.43, (*a*) ¿para qué valor de K empezará el flujo a cavitar sobre la superficie? (*b*) ¿Dónde comenzará la cavitación? (*c*) En esta condición, ¿dónde se situarán los puntos de remanso?

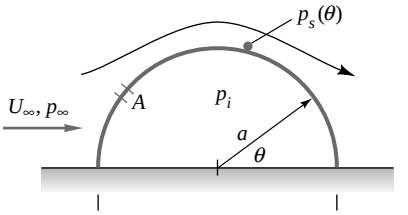
P8.46 Se fabrica un cilindro remachando dos canales semicirculares por el interior, como muestra la Figura P8.46. Hay 10 remaches por metro de longitud en cada lado y la presión manométrica en el interior es de 50 kPa. Utilizando la teoría potencial para determinar la presión exterior, determine la fuerza que debe soportar cada remache si el fluido exterior es agua a nivel del mar.



P8.46

P8.47 Un cilindro circular se instrumenta con dos sondas de presión superficiales que permiten medir las presiones p_a en $\theta = 180°$ y p_b en $\theta = 105°$. La intención es utilizar el cilindro para medir la velocidad de una corriente. Utilizando la teoría no viscosa, obtenga una expresión que permita estimar U_∞ en función de p_a, p_b, ρ y el radio del cilindro a.

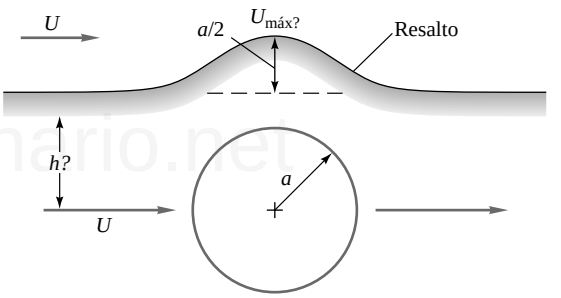
***P8.48** Un viento con velocidad U_∞ y presión p_∞ sopla sobre un cobertizo que tiene forma semicilíndrica de radio a y longitud L (Figura P8.48). La presión interior es p_i. Utilizando la teoría no viscosa, obtenga una expresión para la fuerza vertical sobre el cobertizo debida a la diferencia entre p_i y p_s.



P8.48

P8.49 La fuerza del Problema P8.48 puede ser bastante grande cuando el viento es fuerte. Suponga que se hace un agujero en el punto *A* del cobertizo para igualar p_i a la presión en este punto de la superficie. ¿En qué punto debe situarse el agujero *A* para que la fuerza sea nula?

P8.50 Para simular el flujo alrededor de un obstáculo bidimensional se utiliza una línea de corriente del flujo alrededor de un cilindro circular, como se muestra en la Figura P8.50. La altura del obstáculo es $a/2$, siendo a el radio del cilindro. ¿Cuál es la distancia h entre esta línea de corriente y la línea de corriente central aguas arriba del cilindro? ¿Cuánto vale el cociente entre la velocidad máxima $U_{máx}$ sobre el obstáculo y la velocidad de la corriente U?



P8.50

P8.51 Modifique el Problema P8.50 como sigue. Sea la velocidad máxima sobre el obstáculo $U_{máx} = 1{,}5U$. Determine (*a*) la distancia h y (*b*) la altura del obstáculo.

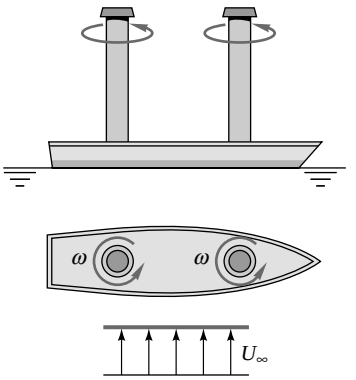
P8.52 El barco con rotor Flettner de la Figura E8.2 tiene un coeficiente de resistencia hidrodinámica de 0,006, basado en una superficie mojada de 45 ft². Si el rotor gira a 220 rpm, determine cuál es la máxima velocidad que puede alcanzar el barco con vientos de 15 mi/h. ¿Cuál es el ángulo óptimo entre el viento y el barco?

P8.53 Modifique el Problema P8.52 como sigue. Con los mismos datos para el barco, determine la velocidad del viento, en mi/h, para que el barco se mueva a la velocidad óptima de 8 nudos paralela a su quilla.

P8.54 El barco original de Flettner movido por cilindros giratorios medía aproximadamente 100 ft de largo, desplazaba 800 toneladas y tenía un área mojada de 3500 ft². Como se muestra en la figura P8.54, disponía de dos rotores de 50 ft de alto y 9 ft de diámetro cada uno, girando a 750 rpm, lo que está fuera del margen de la Figura 8.11. Los coeficientes de sustentación y resistencia medidos son 10 y 4, respectivamente. Si el barco estuviera amarrado y sometido a un viento cruzado

www.elsolucionario.net

de 25 ft/s, como en la Figura P8.54, ¿cuál será la fuerza del viento paralela y normal a la línea central del barco? Estime la potencia necesaria para mover los rotores.



P8.54

P8.55 Suponga que el barco con rotor Flettner de la Figura P8.54 tiene un coeficiente de resistencia de 0,005. ¿A qué velocidad navegaría el barco en agua de mar a 20 °C con vientos de 20 ft/s si la quilla estuviera alineada con la fuerza resultante de los rotores? *Consejo*: éste es un problema de movimiento relativo.

P8.56 Se estudia utilizar un cilindro con sondas de presión en $\theta = 180°$ y 150° como velocímetro en una corriente libre. La diferencia de presiones sería una medida de la velocidad de la corriente U_∞. Para ello, el cilindro se debe alinear exactamente con la corriente incidente para que una de las sondas se enfrente directamente a ella. Sea δ el ángulo de desalineación; esto es, las dos sondas están en $(180° + \delta)$ y $(150° + \delta)$. Represente el porcentaje de error en la medida de velocidad en el intervalo $-20° < \delta < +20°$ y comente qué le parece esta idea.

P8.57 En principio, es posible utilizar cilindros giratorios como alas de avión. Considere un cilindro de 30 cm de diámetro girando a 2400 rpm que se utiliza para sustentar un avión de 55 kN en vuelo de crucero a 100 m/s. ¿Qué longitud debe tener el cilindro? ¿Cuál es la potencia necesaria para mantener su velocidad? Desprecie efectos de borde en el ala giratoria.

P8.58 Dibuje las líneas de corriente debidas a la combinación de un sumidero bidimensional de intensidad $-m$ situado en el origen y dos fuentes de intensidad $+m$ situadas en $(a, 0)$ y $(4a, 0)$. *Consejo*: se formará un cilindro de radio $2a$.

P8.59 Por analogía con el Problema P8.58, dibuje las líneas de corriente debidas a dos torbellinos bidimensionales de intensidad $+K$ en el sentido opuesto a las agujas del reloj situados en (0, 0) y $(4a, 0)$ más otro torbellino de intensidad $-K$, en sentido opuesto, situado en $(a, 0)$. De nuevo aparece un cilindro circular.

P8.60 Uno de los flujos en rincones de la Figura 8.15 está dado en coordenadas cartesianas por la función de corriente $\psi = A(3yx^2 - y^3)$. ¿Cuál es? ¿Puede demostrar la correspondencia a partir de la Ecuación (8.49)?

P8.61 Dibuje las líneas de corriente en el cuadrante superior derecho dadas por la Ecuación (8.49) para $n = 4$. ¿Cómo aumenta la velocidad con la distancia x medida desde el origen a lo largo del eje x? ¿Para qué ángulo del rincón y qué valor de n la velocidad crece linealmente con x? ¿Para qué ángulo del rincón y qué valor de n la velocidad crece como x^5?

P8.62 El potencial complejo del flujo debido a la combinación de un punto de remanso, Figura 8.14*b*, y una fuente en el origen es:

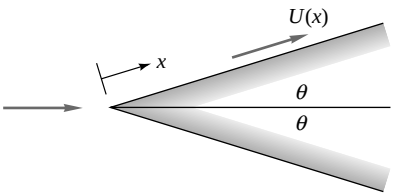
$$f(z) = Az^2 + m \ln z$$

Dibuje las líneas de corriente para $m = AL^2$, donde L es una longitud característica. Interprete el resultado.

P8.63 El flujo del Problema P8.62 simula el punto de remanso cerca de una pared curva con una protuberancia, en lugar de la pared plana de la Figura 8.14*b*. Determine la altura máxima H de la protuberancia en función de las constantes A y m.

P8.64 Considere el potencial de velocidades en coordenadas polares $\phi = B\, r^{1,2} \cos(1{,}2\theta)$, donde B es una constante. Compruebe si $\nabla^2\phi = 0$. Si es así, determine la función de corriente asociada $\psi(r, \theta)$, dibuje la línea de corriente completa que incluye al eje x ($\theta = 0$) e interprete el resultado.

P8.65 El flujo potencial alrededor de una cuña de semiángulo θ conduce a una aplicación muy importante de la teoría de la capa límite laminar, los denominados *flujos de Falkner-Skan* [15, págs. 242-247]. Sea x la distancia a lo largo de la pared de la cuña, como en la Figura P8.65, y tomemos $\theta = 10°$. Utilice la Ecuación (8.49) para calcular la variación de la velocidad $U(x)$ a lo largo de la pared de la cuña. El gradiente de presión ¿es adverso o favorable?



P8.65

***P8.66** De acuerdo con la teoría no viscosa, la velocidad a lo largo de la cuña del Problema P8.65 se puede escribir en la forma analítica $U(x) = Cx^m$, donde $m = n - 1$ y n es el exponente de la Ecuación (8.49). Muestre que, para todos los valores de C y n, el cálculo de la capa límite mediante el método de Thwaites, Ecuaciones (7.53) y (7.54), proporciona un único valor para el parámetro de Thwaites λ. Por este motivo se dice que los flujos en cuñas son *semejantes* [15, pág. 244].

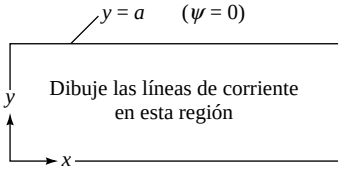
P8.67 Investigue el potencial complejo $f(z) = U_\infty(z + a^2/z)$ e interprete el flujo.

P8.68 Investigue el potencial complejo $f(z) = U_\infty z + m \ln [(z + a)/(z - a)]$ e interprete el flujo.

P8.69 Investigue el potencial complejo $f(z) = A \cosh [\Theta(z/a)]$ y dibuje las líneas de corriente en el interior de la región mostrada en la Figura P8.69.

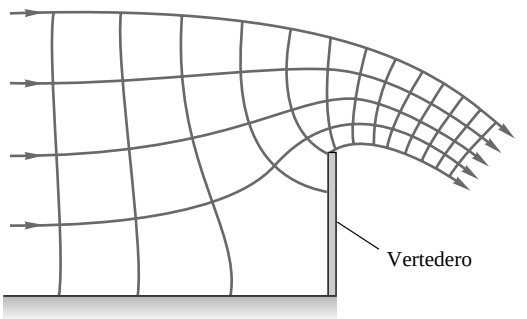
P8.70 Demuestre que el potencial complejo $f(z) = U_\infty \{z + \frac{1}{4}a \coth [\Theta(z/a)]\}$ representa el flujo en torno a un cuerpo de forma oval situado entre dos placas paralelas $y = \pm\frac{1}{2}a$. ¿Cuál es su aplicación práctica?

www.elsolucionario.net



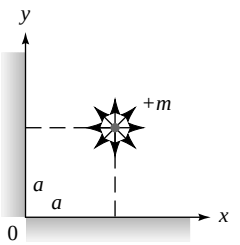
P8.69

P8.71 La Figura P8.71 muestra las líneas de corriente y equipotenciales, calculadas mediante el método del potencial complejo, correspondientes al flujo sobre un vertedero de pared delgada. Compare cualitativamente con la Figura 10.16*a*. Escriba las condiciones de contorno apropiadas en todos los contornos. Las líneas equipotenciales corresponden a valores equiespaciados del potencial de velocidades. ¿Por qué los «cuadrados» de la red que representa el flujo se hacen más pequeños en la región de desbordamiento?



P8.71

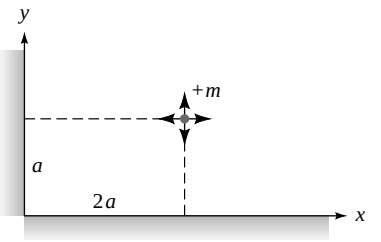
P8.72 Utilice el método de las imágenes para determinar el flujo debido a una fuente bidimensional de intensidad $+m$ cerca de dos paredes, como se muestra en la Figura P8.72. Dibuje esquemáticamente la distribución de velocidades a lo largo de la pared inferior ($y = 0$). ¿Existe algún peligro de desprendimiento a lo largo de esta pared?



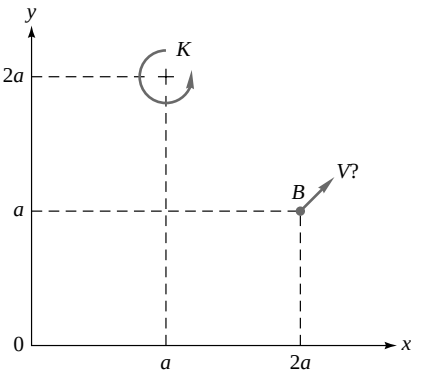
P8.72

P8.73 Explique el sistema de imágenes que se necesita para simular el flujo debido a una fuente bidimensional situada a distancias distintas de dos paredes perpendiculares, como se muestra en la Figura P8.73. Calcule el punto de máxima velocidad a lo largo del eje y.

P8.74 Un torbellino bidimensional de intensidad K está atrapado en una esquina, como en la Figura P8.74. Calcule la velocidad inducida resultante en el punto B, $(x, y) = (2a, a)$, y compárela con la velocidad inducida por un torbellino en un fluido infinito.



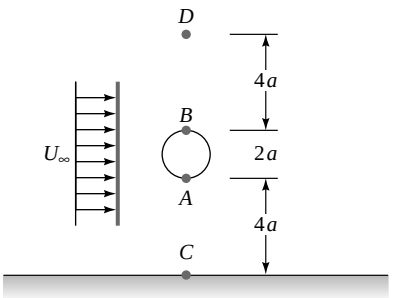
P8.73



P8.74

P8.75 Utilizando las cuatro fuentes necesarias para determinar el flujo de la Figura P8.72 mediante el método de las imágenes, determine la intensidad de la fuente m que induciría una velocidad de 4,0 m/s en el punto $(x, y) = (a, 0)$ situado en la pared debajo de la fuente, sabiendo que $a = 50$ cm.

P8.76 Utilice el método de las imágenes para determinar el flujo alrededor de un cilindro circular a una distancia $4a$ de una pared, como se muestra en la Figura P8.76. Para ilustrar el efecto de la pared, calcule las velocidades en los puntos A, B, C y D, comparándolas con el caso del cilindro en un fluido infinito.



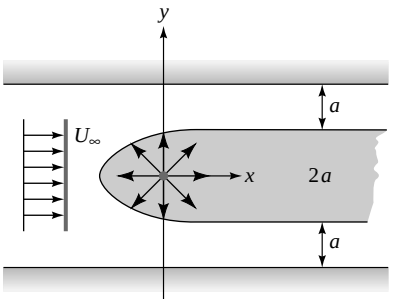
P8.76

P8.77 Discuta cómo se podría interpretar el flujo del Problema P8.58 mediante la construcción de un sistema de imágenes con paredes circulares. ¿Por qué hay dos imágenes en lugar de una?

***P8.78** Indique el sistema de imágenes que se necesita para construir el flujo debido a una corriente uniforme sobre un cuerpo semiinfinito de Rankine confinado entre dos paredes paralelas, como en la Figura P8.78. Para las di-

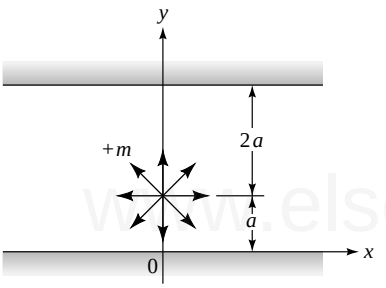
www.elsolucionario.net

mensiones particulares mostradas en esta figura, determine la posición de la nariz del cuerpo resultante.



P8.78

P8.79 Explique el sistema de imágenes que se necesita para simular el flujo debido a una fuente bidimensional situada asimétricamente entre dos paredes paralelas, como en la Figura P8.79. Calcule la velocidad en $x = a$ sobre la pared inferior. ¿Cuántas imágenes son necesarias para estimar esta velocidad con un error de un 1 por 100?



P8.79

***P8.80** La expresión para la sustentación de un perfil bidimensional, Ecuación (8.69), se obtuvo aplicando la transformación de Joukowski, $\zeta = z + a^2/z$, donde $z = x + iy$ y $\zeta = \eta + i\beta$, siendo la constante a una longitud característica. Esta teoría transforma un círculo en el plano z en un perfil en el plano ζ. Tomando, por conveniencia, $a = 1$ unidad, muestre que (*a*) un círculo con centro en el origen y radio > 1 se convierte en una elipse en el plano ζ y (*b*) un círculo con centro en $x = -\epsilon \ll 1$, $y = 0$, y radio $(1 + \epsilon)$ se convierte en un perfil en el plano ζ. *Consejo*: la hoja de cálculo Excel es excelente para resolver este problema.

P8.81 Un ala de gran envergadura provista de un perfil NACA 4412, con una cuerda de 75 cm, se ensaya a 45 m/s a nivel del mar en un túnel de viento. El ala genera una sustentación de 65 lbf por pie de envergadura. Estime el ángulo de ataque bajo estas condiciones.

P8.82 El avión ultraligero *Gossamer Condor*, de propulsión humana, fue el primero en completar, en 1977, el trayecto en forma de ocho del premio Kremer. Su envergadura era de 29 m, con una cuerda media de $C_{med} = 2{,}3$ m y una masa total de 95 kg. El coeficiente de resistencia era aproximadamente de 0,05. La potencia generada por el piloto para propulsar el avión era de $\frac{1}{4}$ hp. Suponiendo flujo bidimensional a nivel del mar, estime (*a*) la velocidad de crucero, (*b*) el coeficiente de sustentación y (*c*) la potencia necesaria para volar a una velocidad de 15 nudos.

P8.83 Los datos de resistencia y sustentación para el flujo bidimensional alrededor de un perfil NACA 2412 con un 2 por 100 de curvatura (tomados de la Referencia 12) se ajustan de forma precisa a la siguiente curva:

$$C_L \equiv 0{,}178 + 0{,}109\alpha - 0{,}00109\alpha^2$$

$$C_D \equiv 0{,}0089 + 1{,}97 \times 10^{-4}\,\alpha + 8{,}45 \times 10^{-5}\,\alpha^2$$

$$-1{,}35 \times 10^{-5}\,\alpha^3 + 9{,}92 \times 10^{-7}\,\alpha^4$$

con α en grados, en el intervalo $-4° < \alpha < +10°$. Compare (*a*) la pendiente de la curva de sustentación y (*b*) el ángulo de sustentación nula con los valores que predice la teoría, Ecuación (8.69). (*c*) Represente la polar del perfil y compárela con la Figura 7.26.

P8.84 La Referencia 12 contiene cálculos de las distribuciones de velocidad $V(x)$ sobre las superficies superior e inferior de un perfil obtenidas mediante la teoría no viscosa. Aquí x es la coordenada en la dirección de la cuerda. Un resultado típico para pequeños ángulos de ataque es el siguiente:

x/c	V/U_∞ (superior)	V/U_∞ (inferior)
0,0	0,00	0,00
0,025	0,97	0,82
0,05	1,23	0,98
0,1	1,28	1,05
0,2	1,29	1,13
0,3	1,29	1,16
0,4	1,24	1,16
0,6	1,14	1,08
0,8	0,99	0,95
1,0	0,82	0,82

Sabiendo que el perfil es simétrico, utilice estos datos para estimar, usando la ecuación de Bernoulli, (*a*) el coeficiente de sustentación y (*b*) el ángulo de ataque.

P8.85 Un ala con una curvatura del 2 por 100, 5 in de cuerda y 30 in de envergadura se ensaya en un túnel a un cierto ángulo de ataque. El aire circula por el túnel a 200 ft/s en condiciones estándar al nivel del mar y el ala proporciona una sustentación de 30 lbf y una resistencia de 1,5 lbf. A partir de la teoría de alas, determine (*a*) el ángulo de ataque, (*b*) la resistencia mínima del ala y el ángulo de ataque correspondiente y (*c*) la relación máxima sustentación-resistencia.

P8.86 En un avión en vuelo horizontal y estacionario la sustentación equilibra al peso. Suponga que un avión tiene una masa de 20.000 kg y vuela a una velocidad de 175 m/s a 5000 m de altura estándar. El ala, rectangular, tiene 3 m de cuerda y un perfil simétrico a 2,5° de ángulo de ataque. Determine (*a*) la envergadura del ala, (*b*) el alargamiento y (*c*) la resistencia inducida.

P8.87 El casco de un barco de 400 kg de masa está soportado por un hidroala rectangular con una curvatura del 2 por 100, un espesor del 12 por 100 y un alargamiento 8. Si el barco navega en agua dulce a 7 m/s y

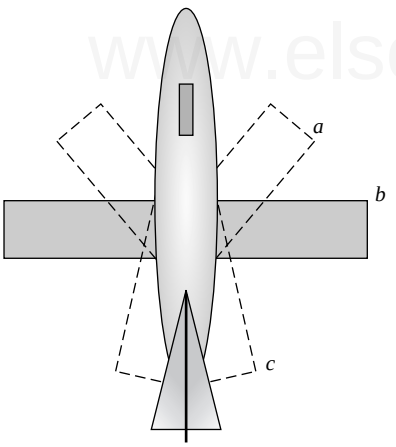
www.elsolucionario.net

$\alpha = 2{,}5°$, estime (*a*) la longitud de la cuerda, (*b*) la potencia requerida si $C_{D_+} = 0{,}01$ y (*c*) la velocidad máxima si el barco dispone de un motor que comunica al agua una potencia de 20 hp.

P8.88 El Boeing 727 tiene un peso total de 125.000 lbf, una superficie alar de 1200 ft^2 y un ala de alargamiento 6. Dispone de dos motores turbofan y alcanza una velocidad de crucero de 532 mi/h a una altura estándar de 30.000 ft. Suponga en este problema que el perfil es el NACA 2412 descrito en el Problema P8.83. Despreciando toda la resistencia del avión salvo la del ala, ¿qué empuje debería proporcionar cada uno de los motores en estas condiciones?

P8.89 El avión Beechcraft T-34C tiene un peso total de 5500 lbf, una superficie alar de 60 ft^2 y vuela a 322 mi/h y 10.000 ft de altura estándar propulsado por una hélice que comunica al aire una potencia de 300 hp. Suponga en este problema que el perfil es el NACA 2412 descrito en el Problema P8.83. Despreciando toda la resistencia del avión salvo la del ala, ¿cuál debe ser el alargamiento de ésta?

P8.90 La NASA está desarrollando un avión con alas de geometría variable denominado *Bird of Prey* [37]. Como se muestra en la Figura P8.90, las alas pivotan como la cuchilla de una navaja: hacia delante (*a*), rectas (*b*), o hacia atrás (*c*). Discuta las posibles ventajas de cada una de estas posiciones. Si no se le ocurre ninguna, lea el artículo [37] y coméntelo.



P8.90

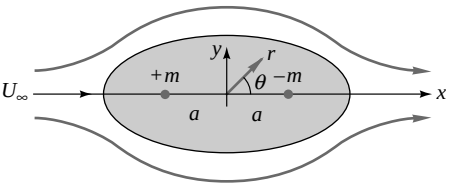
P8.91 Si en un flujo axilsimétrico $\phi(r, \theta)$ se define mediante la Ecuación (8.85) con las coordenadas definidas en la Figura 8.24, determine cuál es la ecuación en derivadas parciales que satisface ϕ.

P8.92 Una fuente puntual cuyo caudal es $Q = 30$ m^3/s se introduce en una corriente uniforme de 4 m/s. Para el cuerpo de Rankine semiinfinito de revolución que se obtiene, calcule (*a*) la distancia de la fuente al punto de remanso y (*b*) los dos puntos (r, θ) sobre la superficie del cuerpo donde la velocidad local es de 4,5 ft/s.

P8.93 El cuerpo de Rankine semiinfinito de revolución (Figura 8.26) puede utilizarse para simular la forma de un tubo de pitot (Figura 6.30). De acuerdo con la teoría no viscosa, ¿a qué distancia aguas abajo del punto de remanso se deben situar las tomas de presión estática para que la velocidad local difiera de U_+ en un ±0,5 por 100? Compare su resultado con el valor $x \Xi 8D$ recomendado en la Figura 6.30.

P8.94 Determine si las líneas de corriente de Stokes, Ecuación (8.86), son perpendiculares en todas partes a las líneas equipotenciales de Stokes, Ecuación (8.87), como ocurre en los flujos planos en cartesianas y polares.

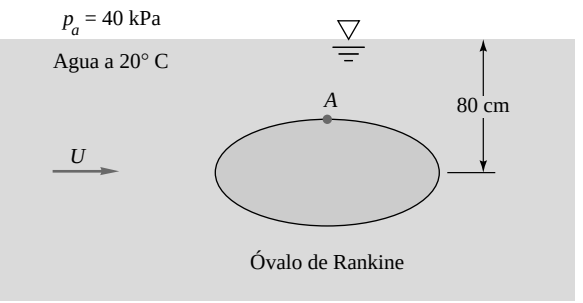
P8.95 Muestre que el potencial axilsimétrico formado por la superposición de una fuente puntual de intensidad $+m$ situada en $(x, y) = (-a, 0)$, un sumidero de intensidad $-m$ situado en $(+a, 0)$ y una corriente uniforme U_+ en la dirección del eje x da lugar a un cuerpo de revolución de Rankine como el de la Figura P8.95. Obtenga expresiones analíticas para determinar la longitud $2L$ y el diámetro máximo $2R$ del cuerpo en función de m, U_+ y a.



P8.95

P8.96 Suponga que queremos usar una esfera con un único agujero como velocímetro. La presión en el agujero se utiliza para calcular la velocidad de la corriente, pero se producen errores si el agujero no está perfectamente alineado con la corriente incidente. Utilizando la teoría incompresible no viscosa, represente el porcentaje de error en la estimación de la velocidad en función del ángulo de desalineación ϕ. ¿Para qué ángulo el error es del 10 por 100?

P8.97 El cuerpo de Rankine semiinfinito de revolución de la Figura P8.97 tiene 60 cm de largo y 30 cm de diámetro. Cuando se sumerge en un túnel hidrodinámico de baja presión, como se muestra en la figura, puede aparecer cavitación en el punto *A*. Ignorando la formación de ondas superficiales, calcule la velocidad de la corriente *U* para la que aparecerá la cavitación.

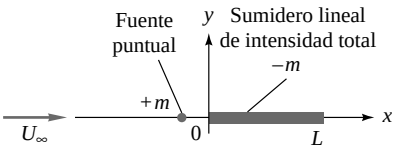


P8.97

P8.98 Hemos estudiado la fuente (sumidero) puntual y la fuente (sumidero) bidimensional, de longitud infinita en la dirección perpendicular al papel. ¿Tiene algún

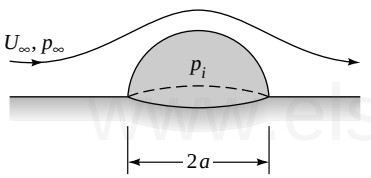
www.elsolucionario.net

sentido definir una línea de longitud finita de sumideros (fuentes) como en la Figura P8.98? Si es así, ¿cómo podría establecer las propiedades matemáticas de tal línea finita de sumideros? Cuando se combina con una corriente uniforme y una fuente puntual de igual intensidad, como en la Figura P8.98, ¿resultará un cuerpo de forma cerrada? Haga alguna conjetura y dibuje esquemáticamente algunas de las posibles formas para varios valores del parámetro adimensional $m/(U_\infty L^2)$.



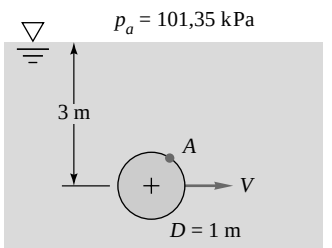
P8.98

***P8.99** Considere el flujo de aire sobre una semiesfera apoyada en una superficie plana, como en la Figura P8.99. Si la presión interna es p_i, obtenga una expresión para la fuerza de presión sobre el hemisferio. Por analogía con el Problema P8.49, ¿en qué punto *A* del hemisferio debería situarse un agujero para que, de acuerdo con la teoría no viscosa, esta fuerza fuese nula?



P8.99

P8.100 Una esfera de 1 m de diámetro se remolca en agua a 20 °C con una velocidad *V*, como se muestra en la Figura P8.100. Suponiendo que la teoría no viscosa es válida y que la superficie libre no está afectada por el movimiento, determine la velocidad *V* en m/s a la cual se presenta la cavitación en la superficie de la esfera. ¿Dónde aparecerá la cavitación? En estas condiciones, ¿cuál será la presión en el punto *A* de la esfera situado por encima del punto de remanso anterior formando un ángulo de 45° con la corriente incidente?



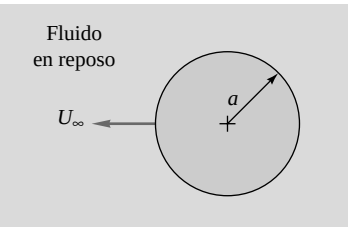
P8.100

P8.101 Considérese una esfera de acero (S = 7,85) de 2 cm de diámetro, que se deja caer desde el reposo en agua a 20 °C. Suponga que el coeficiente de resistencia es constante $C_D = 0{,}47$. Reteniendo el efecto de la masa añadida, estime (*a*) la velocidad límite de caída y (*b*) el tiempo que tarda en alcanzar el 99 por 100 de la velocidad límite. Compare estos valores con los resultados que se obtienen cuando se desprecia el efecto de la masa añadida, $V_{\text{límite}} \Xi 1{,}95$ m/s y $t_{99\%} \Xi 0{,}605$ s, y discuta las diferencias.

P8.102 Una pelota de golf pesa 0,102 lbf y tiene 1,7 in de diámetro. Un golfista profesional golpea la bola con una velocidad inicial de 250 ft/s, un ángulo de 20° con la horizontal, y efecto cortado (la parte delantera de la pelota gira hacia arriba). Suponga que el coeficiente de sustentación de la pelota (basado en el área frontal) está dado por la Figura P7.108. Si el suelo está nivelado y despreciamos la resistencia, realice un análisis sencillo que le permita predecir el punto de impacto (*a*) sin giro y (*b*) con una velocidad de giro de 7500 rpm.

P8.103 Modifique el Problema P8.102 como sigue. Las pelotas de golf tienen hoyuelos, no son lisas, y presentan en realidad mayor sustentación y menor resistencia (típicamente $C_L \Xi 0{,}2$ y $C_D \Xi 0{,}3$ para pelotas con efecto). Usando estos valores, utilice un ordenador para calcular la trayectoria de la pelota con las condiciones iniciales del Problema P8.102. Si tiene tiempo, investigue también el efecto del ángulo inicial dentro del intervalo $10° < \theta_0 < 50°$.

P8.104 Considere un cilindro de radio *a* moviéndose con velocidad U_∞ en un fluido en reposo, como muestra la Figura P8.104. Dibuje las líneas de corriente instantáneas modificando la Ecuación (8.32) para describir el movimiento relativo con $K = 0$. Integre para obtener la energía cinética del fluido puesto en movimiento cerca del cilindro y verifique la expresión para la masa añadida de un cilindro, Ecuación (8.104).



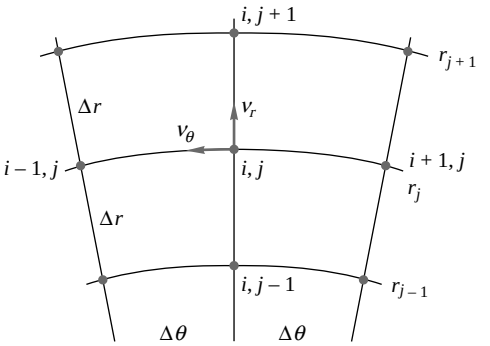
P8.104

***P8.105** Según la Tabla 7.2, el coeficiente de resistencia de un cilindro elíptico con relación de aspecto 4:1 es 0,35 si la capa límite es laminar. De acuerdo con Patton [17], la masa añadida de este cilindro es $\Theta\rho hb/4$, donde *b* es la longitud en la dirección perpendicular al papel y $h/2$ es el semieje menor de la elipse. Utilice estos resultados para obtener una fórmula para la evolución temporal $U(t)$ de la velocidad del cilindro cuando éste es acelerado desde el reposo por la aplicación súbita de una fuerza constante *F*.

P8.106 La ecuación de Laplace en coordenadas polares, Ecuación (8.11), resulta complicada debido a las variaciones del radio. Considere la malla de la Figura P8.106, con nodos (i, j) equiespaciados a distancias $\Delta\theta$ y Δr entre sí. Obtenga una aproximación usando diferencias fi-

www.elsolucionario.net

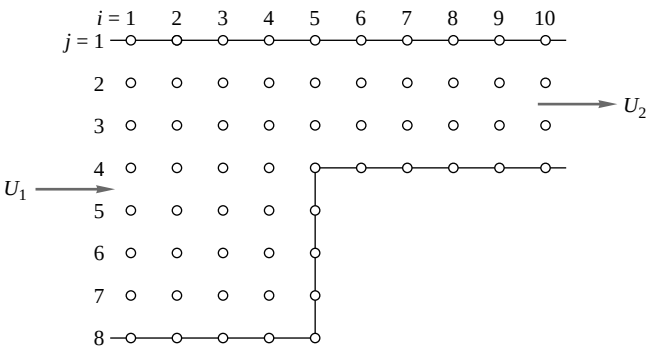
nitas para la Ecuación (8.11) similar a la expresión cartesiana (8.109).



P8.106

P8.107 Establezca un esquema numérico para una expansión de 30° como la de la Figura 8.30. Podría ser necesaria una nueva malla con celdas que no fueran cuadradas. Escriba la ecuación nodal y las condiciones de contorno apropiadas. Si fuera posible, programe la expansión de 30° y resuelva el problema usando un ordenador.

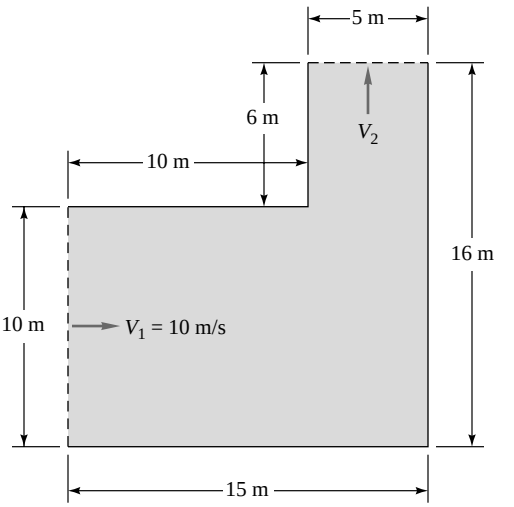
P8.108 Considere el flujo potencial bidimensional a través de una contracción brusca, como se muestra en la Figura P8.108. Las velocidades a la entrada U_1 = 7 m/s y a la salida U_2 son uniformes. Los nodos (i, j) se han numerado en la figura. Establezca el conjunto de relaciones algebraicas en diferencias finitas para los valores de la función de corriente en todos los nodos. Si fuera posible, resuelva el problema usando un ordenador y represente las líneas de corriente del flujo.



P8.108

P8.109 Considere el flujo bidimensional no viscoso alrededor de un giro de 90° con contracción, como se muestra en la Figura P8.109. Suponga flujo uniforme en la entrada y la salida y realice un análisis de diferencias finitas del flujo utilizando celdas de pequeño tamaño (incluya al menos 150 nodos). Determine la distribución de presiones adimensional a lo largo de las paredes y esquematice las líneas de corriente. (Puede usar celdas cuadradas o rectangulares.)

P8.110 En el flujo incompresible laminar completamente desarrollado en un conducto de sección no circular, véase Sección 6.8, las ecuaciones de Navier-Stokes, despreciando el efecto de la gravedad, se reducen a



P8.109

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} = \text{cte} < 0$$

donde (y, z) es el plano de la sección transversal del conducto y x se mide a lo largo del conducto. Obtenga un modelo de diferencias finitas para esta ecuación usando una malla rectangular $(\Delta x, \Delta y)$ e indique cómo podría aplicarse para resolver el flujo en un conducto rectangular de lados a y b.

P8.111 Resuelva el Problema P8.110 numéricamente para un conducto de sección rectangular de lados b y $2b$ usando al menos 100 puntos nodales. Calcule el caudal y el factor de fricción, y compare el resultado con los datos de la Tabla 6.4:

$$Q \equiv 0{,}1143\frac{b^4}{\mu}\left|\frac{dp}{dx}\right| \qquad f\,\mathrm{Re}_{D_h} \equiv 62{,}19$$

donde en este caso $D_h = 4A/P = 4b/3$. Comente los posibles errores de truncación del modelo.

P8.112 En su libro sobre CFD, Patankar [5] sustituye el lado izquierdo de las Ecuaciones (8.119*b* y *c*) por las siguientes dos expresiones, respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(vu) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2)$$

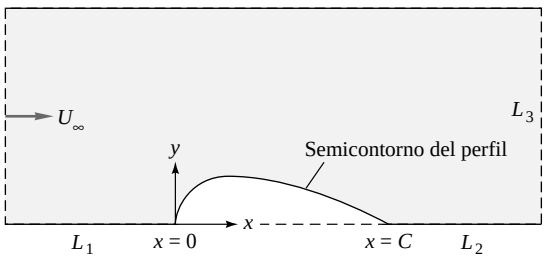
¿Son expresiones equivalentes a las originales, o se trata solamente de expresiones aproximadas? En cualquier caso, ¿qué ventajas presentarían para la aplicación del método de diferencias finitas?

P8.113 Repita el Ejemplo 8.7 utilizando el método implícito de la Ecuación (8.118). Tome Δt = 0,2 s y Δy = 0,01 m, valores para los que el método explícito diverge. Compare la precisión obtenida con la del Ejemplo 8.7.

www.elsolucionario.net

P8.114 Si su institución dispone de un código de elementos de contorno para la resolución de flujos potenciales, considere el flujo alrededor de un perfil simétrico, como en la Figura P8.114. La forma básica de un perfil NACA simétrico está definida por la función [12]

$$\frac{2y}{t_{máx}} = 1{,}4845\zeta^{1/2} - 0{,}63\zeta - 1{,}758\zeta^{2} + 1{,}4215\zeta^{3} - 0{,}5075\zeta^{4}$$



P8.114

donde $\zeta = x/C$ y el espesor máximo $t_{máx}$ se da en $\zeta = 0{,}3$. Utilice esta forma como parte de la condición de contorno en la frontera inferior del dominio. Considere ángulo de ataque nulo y valores suficientemente grandes del espesor, por ejemplo, $t_{máx} = 0{,}12$, 0,15 o 0,18. Utilizando un número grande de nodos (B60), calcule y represente la distribución de velocidades V/U_∞ a lo largo de la superficie del perfil. Compare con los resultados teóricos de la Referencia 12 para los perfiles NACA 0012, 0015 o 0018. Si tiene suficiente tiempo, investigue el efecto de las longitudes de los contornos L_1, L_2 y L_3, que inicialmente pueden tomarse iguales a la longitud C de la cuerda.

P8.115 Utilice el método explícito de la Ecuación (8.115) para resolver el Problema P4.85 numéricamente, considerando aceite SAE 30 a 20 °C con $U_0 = 1$ m/s y $\omega = M$ rad/s, donde M es el número de letras de su apellido. (El autor resolverá el problema tomando $M = 5$.) Una vez que se alcance el régimen de oscilaciones estacionarias, dibuje la velocidad del aceite en $y = 2$ cm en función del tiempo.

Problemas conceptuales

C8.1 ¿Qué simplificaciones se han hecho en la teoría del flujo potencial del presente capítulo que dan lugar a la desaparición de los números de Reynolds, Froude y Mach como parámetros importantes del problema?

C8.2 En este capítulo hemos superpuesto muchas soluciones básicas, algo que sólo se puede hacer cuando las ecuaciones son lineales. Sin embargo, la ecuación de Bernoulli (8.3) es no lineal, pues aparece el cuadrado de la velocidad. ¿Cómo es posible entonces justificar el uso de la superposición en el análisis de los flujos no viscosos?

C8.3 Dé una explicación física de la relación existente entre la circulación Γ y la fuerza de sustentación que experimenta un cuerpo sumergido. Si la integral de línea definida por la Ecuación (8.15) es cero, significa que el integrando es una diferencial exacta, pero ¿de qué variable?

C8.4 Dé una demostración sencilla de la Ecuación (8.42), esto es, que tanto la parte real como la parte imaginaria de una función analítica $f(z)$ de la variable compleja $z = x + iy$ son harmónicas (soluciones de la ecuación de Laplace). ¿Cuál es el secreto de este comportamiento tan extraordinario?

C8.5 La Figura 8.14 muestra el flujo alrededor de cinco esquinas de cuerpos. Sin realizar ningún cálculo, explique utilizando razonamientos físicos cuál debe ser el valor de la velocidad de un fluido no viscoso en cada una de las cinco esquinas. ¿Se producirá el desprendimiento de la capa límite en algún caso?

C8.6 Explique la condición de Kutta desde un punto de vista físico. ¿Por qué es necesaria?

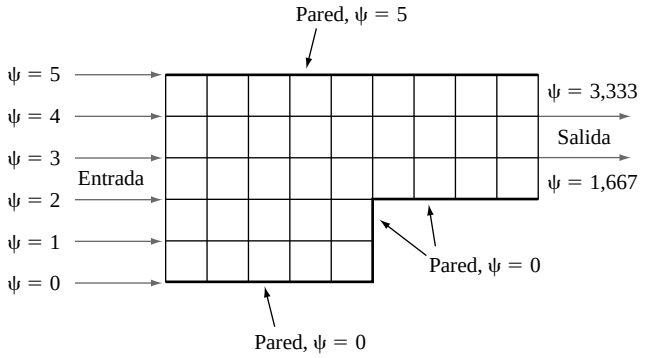
C8.7 Hemos descrito brevemente los métodos de diferencias finitas y de elementos de contorno para los flujos potenciales, pero hemos ignorado el método de elementos finitos. Busque en la literatura y escriba un pequeño trabajo sobre la aplicación del método de elementos finitos a los problemas de flujo potencial.

Problemas extensos

PE8.1 ¿Sabía que es posible resolver problemas sencillos de Mecánica de Fluidos con Microsoft Excel? La técnica de sobrerrelajación sucesiva se puede programar fácilmente en una hoja de cálculo para resolver la ecuación de Laplace, pues la función de corriente en el interior de cada celda es simplemente la media de sus cuatro celdas vecinas. Como ejemplo, resuelva el flujo potencial a través de una contracción, como se muestra en la Figura PE8.1. *Nota*: para evitar el error de «referencia circular», debe activar la opción de iteración. Utilice el índice de la ayuda para más información. Presente una copia impresa de su hoja de cálculo, dando el valor de la función de corriente en cada nodo con cuatro cifras significativas.

PE8.2 Utilice un método explícito, parecido pero no idéntico al de la Ecuación (8.115), para resolver el flujo de aceite SAE 30 a 20 °C inicialmente en reposo cerca de una pared *fija*. Lejos de la pared, la aceleración del

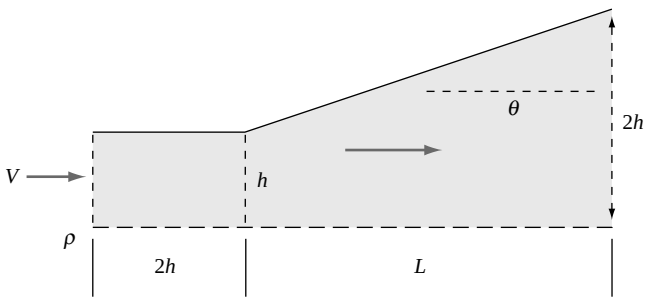
www.elsolucionario.net



PE8.1

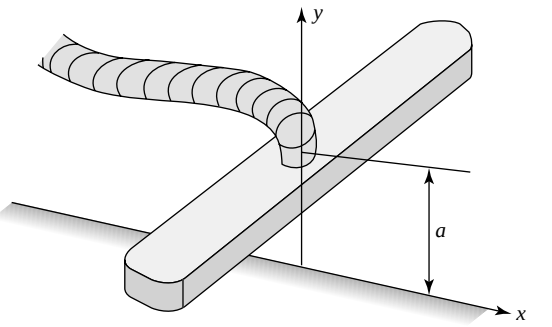
aceite es lineal; esto es, $u_{+} = u_N = at$, donde $a = 9$ m/s^2. Determine, en $t = 1$ s, (*a*) la velocidad del aceite en $y = 1$ cm y (*b*) el espesor instantáneo de la capa límite (posición del punto $u \equiv 0{,}99u_{+}$). *Consejo*: el gradiente de presión en la corriente exterior (irrotacional), $n = N$, es no nulo, lo que debe tenerse en cuenta tanto en la Ecuación (8.114) como en el modelo numérico explícito.

PE8.3 Considere el flujo plano no viscoso a través de un difusor simétrico como el de la Figura PE8.3, donde sólo se muestra la mitad superior. El flujo se expande desde la sección de entrada, de semianchura h, hasta la sección de salida, de semianchura $2h$. El ángulo de expansión θ es de 18,5° ($L \equiv 3h$). Establezca una malla rectangular, resuelva el problema numéricamente y represente (*a*) el campo de velocidades y (*b*) el coeficiente de presiones a lo largo de la línea central. Suponga condiciones uniformes a la entrada y la salida.



PE8.3

PE8.4 El flujo de aire succionado por una aspiradora a través de una boquilla bidimensional, como se muestra en la Figura PE8.4, se puede aproximar por un flujo potencial. Modele el flujo en el plano central de la boquilla, plano xy, como el flujo debido a un sumidero bidimensional de intensidad $(-m)$ situado en la dirección del eje z a una altura a por encima del suelo. (*a*) Represente las líneas de corriente y localice los puntos de remanso del flujo. (*b*) Determine la magnitud $V(x)$ del vector velocidad a lo largo del eje x, esto es, en el suelo, en función de los parámetros a y m. (*c*) Sea p_{+} la presión lejos del sumidero, donde la velocidad es cero. Determine la variación del coeficiente adimensional de presión, $C_p = (p - p_{+})/(\rho U^2/2)$, en el suelo, donde $U = m/a$ es una velocidad característica. (*d*) La efectividad de la aspiradora es máxima donde C_p es mínimo, es decir, donde la velocidad es máxima. Determine la posición de los mínimos del coeficiente de presiones a lo largo del eje x. (*e*) ¿En qué lugar del eje x la aspiradora será más efectiva? ¿Aspira más en $x = 0$, directamente debajo de la boquilla, o en alguna otra posición x del suelo? Realice un experimento científico en casa usando una aspiradora y pequeñas cantidades de polvo o suciedad. Enumere sus resultados y discuta si están de acuerdo con la teoría. Explique las posibles discrepancias.

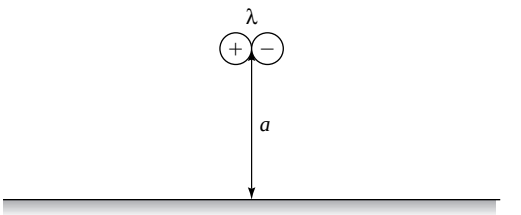


PE8.4

PE8.5 Considere un flujo irrotacional, incompresible y tridimensional. Mediante los siguientes métodos demuestre que el término viscoso de las ecuaciones de Navier-Stokes es idénticamente nulo: (*a*) usando notación vectorial, y (*b*) usando la notación escalar de los esfuerzos viscosos y simplificando la expresión resultante utilizando la definición de irrotacionalidad.

PE8.6 Considere de nuevo los datos de sustentación y resistencia del perfil NACA 4412 del Problema P8.83. (*a*) Vuelva a representar la polar del perfil y compárela cualitativamente con la polar de la Figura 7.26. (*b*) Determine el valor máximo de la relación entre la sustentación y la resistencia. (*c*) Utilice una línea recta en la representación de la polar para determinar el valor máximo de L/D del apartado (*b*). (*d*) Suponiendo que un avión pudiera usar este ala bidimensional en vuelo real (sin resistencia inducida) y tuviera un piloto perfecto, estime la distancia (en millas) que podría planear el avión hasta llegar a una pista de aterrizaje situada a nivel del mar si fallaran los motores a 25.000 ft de altura.

PE8.7 Obtenga una fórmula para la función de corriente del flujo inducido por un doblete de intensidad λ situado a una distancia a de una pared, como en la Figura PE8.7. (*a*) Represente las líneas de corriente. (*b*) ¿Hay algún punto de remanso? (*c*) Determine el valor máximo de la velocidad en la pared y su posición a lo largo de la misma.



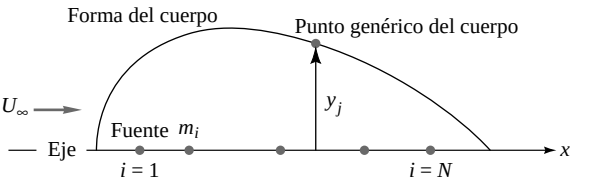
PE8.7

www.elsolucionario.net

Proyectos de diseño

D8.1 En 1927, Theodore von Kármán desarrolló un método que permitía usar una corriente uniforme más una fila de fuentes y sumideros para generar un cuerpo cerrado de forma arbitraria. La Figura D8.1 muestra esta idea de forma esquemática. El cuerpo es simétrico y el ángulo de ataque es nulo. En total se distribuyen N fuentes y sumideros a lo largo del eje x dentro del cuerpo, de intensidad m_i y situados en x_i, con $i = 1$ hasta N. El objetivo es determinar la distribución apropiada de intensidades que permite aproximar la forma $y(x)$ de un cuerpo en un número finito de puntos superficiales para calcular entonces los valores aproximados de la velocidad y la presión. Esta técnica debería funcionar tanto para cuerpos bidimensionales (distribución de fuentes bidimensionales) como para cuerpos de revolución (distribución de fuentes puntuales).

Tomemos como forma del cuerpo la del perfil NACA 0018, dada por la fórmula del Problema P8.114 con $t_{máx} = 0{,}18$. Desarrolle las ideas expuestas aquí y obtenga un sistema de N ecuaciones algebraicas para las intensidades de las N fuentes/sumideros bidimensionales. Programe a continuación dichas ecuaciones con un ordenador, tomando N B 20; obtenga los m_i; calcule la velocidad en la superficie del cuerpo y compárela con la velocidad teórica para este perfil dada en la Referencia 12. Debería obtener los resultados clásicos con una precisión del ±1 por 100. Si fuera necesario, ajuste el número de puntos N y la posición de las fuentes.



D8.1

D8.2 Modifique el Problema D8.1 para obtener la distribución de fuentes y sumideros necesaria para aproximar la forma de un cuerpo de revolución «0018». Como no existen resultados teóricos publicados en la literatura, asegúrese simplemente de que sus resultados convergen con una precisión del ±1 por 100.

D8.3 Considere agua a 20 °C fluyendo por un canal a 12 m/s. Se sitúa un cilindro, de 40 cm de largo y con forma de óvalo de Rankine, paralelo al flujo, allí donde la presión estática del agua es de 120 kPa. El espesor del óvalo es un parámetro de diseño. Represente la presión mínima sobre la superficie del cuerpo en función del espesor del óvalo. En especial, determine el espesor para el cual (*a*) la presión mínima es de 50 kPa y (*b*) aparece cavitación sobre la superficie.

www.elsolucionario.net

Referencias

1. J. L. Doob, *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*, Springer-Verlag, Nueva York, 2001.
2. J. M. Robertson, *Hydrodynamics in Theory and Application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965.
3. L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, 4.ª ed., Macmillan, Nueva York, 1960.
4. T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge Univ. Press, Nueva York, 1995.
5. S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, Nueva York, 1980.
6. J. N. Reddy y D. K. Gartling, *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.
7. C. A. Brebbia y J. Domínguez, *Boundary Elements–An Introductory Course*, 2.ª ed., Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, y McGraw-Hill, Nueva York, 1991.
8. A. D. Moore, «Fields from Fluid Flow Mappers», *J. Appl. Phys.*, vol. 20, 1949, págs. 790-804.
9. H. J. S. Hele-Shaw, «Investigation of the Nature of the Surface Resistance of Water and of Streamline Motion under Certain Experimental Conditions», *Trans. Inst. Nav. Archit.*, vol. 40, 1898, pág. 25.
10. S. W. Churchill, *Viscous Flows: The Practical Use of Theory*, Butterworth, Stoneham, MA, 1988.
11. J. D. Anderson, Jr., *Fundamentals of Aerodynamics*, 3.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2001.
12. I. H. Abbott y A. E. von Doenhoff, *Theory of Wing Sections*, Dover, Nueva York, 1981.
13. F. O. Smetana, *Introductory Aerodynamics and Hydrodynamics of Wings and Bodies: A Software-Based Approach*, AIAA, Reston, VA, 1997.
14. L. Prandtl, «Applications of Modern Hydrodynamics to Aeronautics», *NACA Rep. 116*, 1921.
15. F. M. White, *Viscous Fluid Flow*, 2.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1991.
16. C. S. Yih, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1969.
17. K. T. Patton, «Tables of Hydrodynamic Mass Factors for Translational Motion», *ASME Winter Annual Meeting*, Paper 65-WA/UNT-2, 1965.
18. J. L. Hess y A. M. O. Smith, «Calculation of Nonlifting Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Bodies», *J. Ship Res.*, vol. 8, 1964, págs. 22-44.
19. K. H. Huebner, *The Finite Element Method for Engineers*, 4.ª ed., Wiley, Nueva York, 2001.
20. J. C. Tannehill, D. A. Anderson y R. H. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2.ª ed., Taylor and Francis, Bristol, PA, 1997.
21. J. N. Newman, *Marine Hydrodynamics*, M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1977.
22. H. Rouse, *Elementary Mechanics of Fluids*, Dover, Nueva York, 1978.

www.elsolucionario.net

23. J. H. Ferziger y M. Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Nueva York, 1996.
24. P. J. Roache, *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Pub., Albuquerque, NM, 1998.
25. P. Wesseling, *Principles of Computational Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Nueva York, 2001.
26. J. D. Anderson, *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*, McGraw-Hill, Nueva York, 1995.
27. H. Lomax, T. H. Pulliam y D. W. Zingg, *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Nueva York, 2001.
28. M. Deshpande, J. Feng y C. L. Merkle, «Numerical Modeling of the Thermodynamic Effects of Cavitation», *J. Fluids Eng.*, junio 1997, págs. 420-427.
29. P. A. Libby, *An Introduction to Turbulence*, Taylor and Francis, Bristol, PA, 1996.
30. C. J. Freitas, «Perspective: Selected Benchmarks from Commercial CFD Codes», *J. Fluids Eng.*, vol. 117, junio 1995, págs. 208-218.
31. R. Martinuzzi y C. Tropea, «The Flow around Surface-Mounted, Prismatic Obstacles in a Fully Developed Channel Flow», *J. Fluids Eng.*, vol. 115, marzo 1993, págs. 85-92.
32. K. B. Shah y J. H. Ferzier, «Fluid Mechanicians View of Wind Engineering: Large Eddy Simulation of Flow Past a Cubic Obstacle», *J. Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 67–68, 1997, págs. 221-224.
33. P. Sagaut et al., *Large Eddy Simulations for Incompressible Flows: An Introduction*, Springer-Verlag, Nueva York, 2001.
34. W. J. Palm, *Introduction to MATLAB 6 for Engineers*, McGraw-Hill, Nueva York, 2001.
35. D. Hanselman y B. Littlefield, *The Student Edition of MATLAB*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.
36. J. W. Hoyt y R. H. J. Sellin, «Flow over Tube Banks–A Visualization Study», *J. Fluids Eng.*, vol. 119, junio 1997, págs. 480-483.
37. S. Douglass, «Switchblade Fighter Bomber», *Popular Science*, nov. 2000, págs. 52-55.
38. G. Beer, *Programming the Boundary Element Method: An Introduction for Engineers*, Wiley, Nueva York, 2001.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Esta singular foto muestra un avión de combate F-18 Hornet traspasando la barrera del sonido. Ensign John Gay, un fotógrafo de la U.S. Navy, disparó la foto justo cuando el avión alcanzaba la velocidad del sonido en aire húmedo. La velocidad es ligeramente inferior a Ma = 1, y se observan ondas de choque de condensación sobre las superficies donde la velocidad local es supersónica. En un instante, el F-18 habrá entrado en régimen supersónico y dichas ondas de choque de condensación serán sustituidas por ondas de choque oblicuas adheridas al morro del avión y al borde de ataque del ala. (*Fotografía cedida por la U.S. Navy.*)

www.elsolucionario.net

Capítulo 9
Flujo compresible

Motivación. En los ocho capítulos anteriores se han considerado los flujos a «baja velocidad» o «incompresibles», donde la velocidad del fluido es mucho menor que la velocidad del sonido. De hecho, ni siquiera se dedujo una expresión para la velocidad del sonido de un fluido. Eso se hace en el presente capítulo.

Cuando un fluido se mueve a velocidades comparables a su velocidad del sonido, las variaciones de densidad se hacen importantes y el flujo se denomina *compresible*. Dichos flujos son difíciles de obtener en líquidos, pues se necesitan presiones elevadas del orden de las 1000 atm para generar velocidades sónicas. Sin embargo, en gases basta una relación de presiones de 2:1 para causar flujos sónicos. Por tanto, el flujo compresible de gases es bastante habitual, y esta disciplina se suele denominar *dinámica de gases*.

Probablemente los dos efectos más importantes y distintivos de los flujos compresibles son (1) el *bloqueo*, que limita fuertemente el flujo en conductos cuando se dan condiciones sónicas, y (2) las *ondas de choque*, que son cambios casi discontinuos en las propiedades de los flujos supersónicos. La finalidad de este capítulo es explicar estos intrigantes fenómenos y familiarizar al lector con los cálculos ingenieriles de flujos compresibles.

Respecto a los cálculos, el presente capítulo está pensado para utilizar el Resolvedor de Ecuaciones Ingenieriles (EES, *Engineering Equation Solver*) del Apéndice E. El análisis de los flujos compresibles está lleno de ecuaciones algebraicas complicadas, muchas de ellas difíciles de manipular o invertir. Por ello, durante casi un siglo, los libros de texto sobre flujos compresibles han utilizado extensas tablas de relaciones en función del número de Mach (véase Apéndice B) para el trabajo numérico. Sin embargo, EES permite resolver cualquier conjunto de ecuaciones que aparezcan en este capítulo y obtener cualquiera de las variables; en el apartado *(b)* del Ejemplo 9.13 se presenta un ejemplo especialmente complejo. Con una herramienta así, el Apéndice B sirve únicamente como apoyo y seguramente pronto desaparecerá de los libros de texto.

9.1. INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 4 [Ecuaciones (4.13) a (4.17)] se discutió brevemente cuándo se puede despreciar la compresibilidad inherente a cualquier fluido real. Se halló que el criterio apropiado para un flujo casi incompresible es que el número de Mach sea pequeño,

$$\text{Ma} = \frac{V}{a} \ll 1$$

donde V es la velocidad del flujo y a la velocidad del sonido en el fluido. Si el número de Mach es pequeño, las variaciones de densidad suelen ser pequeñas en todo el campo fluido. La ecuación de la energía queda desacoplada, y los efectos de la temperatura pueden ser omitidos o relegados a un estudio posterior[1]. La ecuación de estado se transforma en el enunciado simple de que la densidad es constante. Por ello, el aná-

[1] Esto sólo ocurre cuando no hay otros efectos, por ejemplo de fricción o de adición de calor, como se verá en las últimas secciones de este capítulo (*N. del T.*).

www.elsolucionario.net

lisis de los flujos incompresibles sólo precisa de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, como se vio con muchos ejemplos en los Capítulos 7 y 8.

El presente capítulo estudia los flujos compresibles, con números de Mach mayores que 0,3, que presentan variaciones de densidad apreciables. Cuando las variaciones de densidad son significativas, la ecuación de estado nos señala que las variaciones de temperatura y presión también lo son. Esas grandes variaciones de temperatura implican que la ecuación de la energía ya no puede suprimirse. Por tanto, el problema se ha complicado al pasar de dos a cuatro ecuaciones:

1. Ecuación de la continuidad
2. Ecuación de la cantidad de movimiento
3. Ecuación de la energía
4. Ecuación de estado

que deben ser resueltas simultáneamente para obtener las cuatro incógnitas: presión, densidad, temperatura y velocidad del flujo (p, ρ, T, V). Por todo ello, la teoría general del flujo compresible es muy complicada y vamos a realizar algunas simplificaciones, especialmente suponer que el flujo es adiabático reversible o *isentrópico*.

El número de Mach

El número de Mach es el parámetro dominante en el análisis de flujos compresibles, con efectos distintos dependiendo de su magnitud. Los estudiosos de la aerodinámica suelen distinguir entre los diferentes rangos del número de Mach, siendo la siguiente clasificación aproximada de uso extendido:

Ma < 0,3:	*flujo incompresible*, donde los efectos de la densidad son despreciables.
0,3 < Ma < 0,8:	*flujo subsónico*, donde los efectos de la densidad son importantes, pero no aparecen ondas de choque.
0,8 < Ma < 1,2:	*flujo transónico*, donde aparecen por primera vez ondas de choque que separan regiones subsónicas y supersónicas dentro del flujo. El vuelo propulsado en régimen transónico resulta difícil a consecuencia del carácter mixto del campo fluido.
1,2 < Ma < 3,0:	*flujo supersónico*, donde hay ondas de choque pero ya no existen regiones subsónicas.
3,0 < Ma:	*flujo hipersónico* [11], donde las ondas de choque y otros cambios que experimenta el flujo son especialmente fuertes.

Los valores numéricos dados son meramente orientativos. Estas cinco categorías de flujo son apropiadas para la aerodinámica externa a alta velocidad. Para flujos internos (conductos), la cuestión más importante es simplemente si el flujo es subsónico (Ma < 1) o supersónico (Ma > 1), porque el efecto de las variaciones de sección es opuesto, como mostraremos en la Sección 9.4. Dado que el comportamiento de los flujos supersónicos resulta bastante poco intuitivo, el lector debería estudiar detenidamente estas diferencias.

El cociente de calores específicos

Además de la geometría y del número de Mach, los cálculos de flujos compresibles también dependen de un segundo parámetro adimensional, la *relación de calores específicos* del gas:

$$\mathcal{J} = \frac{c_p}{c_v} \tag{9.1}$$

Recuerde de la Figura 1.3 que para los gases más comunes γ decrece lentamente con la temperatura y vale entre 1,0 y 1,7. Las variaciones en γ tienen un efecto pequeño sobre los cálculos de flujos compresibles, siendo el aire, $\gamma \Xi 1{,}40$, el fluido de interés dominante. Por tanto, aunque propongamos problemas en los que intervengan otros gases como vapor de agua, CO_2 y helio, las tablas para flujos compresibles del Apéndice B están basadas únicamente en el valor $\gamma = 1{,}40$ para el aire.

www.elsolucionario.net

Este texto incluye un solo capítulo sobre flujo compresible, aunque sobre este tema se han escrito libros enteros. La edición anterior (en inglés) mencionaba unos 30 libros, pero aquí nos ceñiremos a los más recientes y a los clásicos. Las Referencias 1 a 4 son introductorias o de nivel medio, mientras que las Referencias 5 a 10 son libros avanzados. Incluso es posible especializarse dentro de la especialidad de los flujos compresibles. La Referencia 11 trata sobre *flujos hipersónicos*, esto es, a muy altos números de Mach. La Referencia 12 explica la novedosa y excitante técnica de la simulación directa de flujos de gases mediante *modelos de dinámica molecular*. El flujo compresible también resulta muy apropiado para la Mecánica de Fluidos Computacional (CFD, *Computational Fluid Dynamics*), tal como se indica en la Referencia 13. Finalmente, la corta pero detallada lectura (sin cálculos) de la Referencia 14 describe los principios y promesas del vuelo a altas velocidades (supersónico). En ocasiones omitiremos el tratamiento de algunos temas especializados que están recogidos en estos textos.

Advertimos de pasada que hay al menos dos tipos de flujos que dependen fuertemente de variaciones de densidad muy pequeñas: la acústica y la convección natural. La acústica [7, 9] es el estudio de la propagación de las ondas sonoras, que va acompañada de pequeñísimas variaciones de densidad, presión y temperatura. La convección natural es el flujo sutil producido por las fuerzas de flotabilidad en un fluido estratificado, con calentamiento desigual o variaciones en la concentración de sustancias disueltas. Aquí vamos a considerar sólo aquellos flujos compresibles estacionarios en los que la velocidad es del mismo orden de magnitud que la velocidad del sonido.

El gas perfecto

En principio, los cálculos de flujos compresibles se pueden hacer para cualquier ecuación de estado, y vamos a proponer problemas para usar las tablas de vapor [15], tablas de gases [16] o sobre líquidos [Ecuación (1.19)]. Pero de hecho la mayor parte de los análisis elementales se limitan a gases perfectos con calores específicos constantes:

$$p = \Leftarrow RT \qquad R = c_p\ \Phi c_v = \text{cte} \qquad \Im = \frac{c_p}{c_v} = \text{cte} \tag{9.2}$$

www.elsolucionario.net

En todos los gases reales, c_p, c_v y γ varían con la temperatura, aunque moderadamente; por ejemplo, el c_p del aire aumenta un 30 por 100 cuando la temperatura pasa de 0 a 5000 °F. Como es muy poco corriente que tengamos que trabajar con tales variaciones de temperatura, supondremos lógicamente que los calores específicos son constantes.

Recordemos de la Sección 1.6 que la constante del gas es igual a una constante universal Λ divida por el peso molecular:

$$R_{\text{gas}} = \frac{\upsilon}{M_{\text{gas}}} \tag{9.3}$$

donde $\Lambda = 49.720$ ft-lbf/(lbmol · °R) = 8314 J/(kmol · K)

Para el aire, $M = 28{,}97$, y por ello en lo que queda de capítulo tomaremos los siguientes valores para las propiedades del aire:

$$\begin{aligned} R &= 1716\ \text{ft}^2/(\text{s}^2\ \Delta°\text{R}) = 287\ \text{m}^2/(\text{s}^2\ \Delta\text{K}) \qquad \Im = 1{,}400 \\ c_v &= \frac{R}{\Im\,\Phi 1} = 4293\ \text{ft}^2/(\text{s}^2\ \Delta°\text{R}) = 718\ \text{m}^2/(\text{s}^2\ \Delta\text{K}) \\ c_p &= \frac{\Im R}{\Im\,\Phi 1} = 6009\ \text{ft}^2/(\text{s}^2\ \Delta°\text{R}) = 1005\ \text{m}^2/(\text{s}^2\ \Delta\text{K}) \end{aligned} \tag{9.4}$$

En la Figura 1.3 se muestran los valores experimentales de γ para ocho gases comunes. Usando dicha figura y el peso molecular se pueden calcular las demás propiedades de dichos gases, como en las Ecuaciones (9.4).

www.elsolucionario.net

Las variaciones de energía interna $\hat{u}$ y entalpía h de un gas perfecto con calores específicos constantes vienen dadas por

$$\hat{u}_2 - \hat{u}_1 = c_v(T_2 - T_1) \qquad h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) \tag{9.5}$$

Si los calores específicos son variables debemos integrar $\hat{u} = \int c_v dT$ y $h = \int c_p dT$ o utilizar las tablas de gases [16]. La mayoría de los libros modernos sobre termodinámica contienen programas para la evaluación de las propiedades de gases no perfectos [17].

Proceso isentrópico

La aproximación isentrópica es muy usual en la teoría de flujos compresibles. Las variaciones de entropía se calculan a partir de la primera y la segunda ley de la termodinámica para sustancias puras [17 o 18]:

$$T\,ds = dh - \frac{dp}{\rho} \tag{9.6}$$

Introduciendo $dh = c_p dT$ para un gas perfecto, sustituyendo $\rho T = p/R$ y despejando ds obtenemos

$$\int_1^2 ds = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T} - R\int_1^2 \frac{dp}{p} \tag{9.7}$$

Si c_p es variable, se necesitan las tablas del gas, pero para c_p constante podemos obtener resultados analíticos

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1} = c_v \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{9.8}$$

www.elsolucionario.net

Las Ecuaciones (9.8) se usan para calcular la variación de entropía a través de una onda de choque (Sección 9.5), que es un proceso irreversible.

En flujo isentrópico, ponemos $s_2 = s_1$ y obtenemos las siguientes relaciones potenciales para un gas perfecto isentrópico:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left[\frac{T_2}{T_1}\right]^{k/(k-1)} = \left[\frac{\rho_2}{\rho_1}\right]^{k} \tag{9.9}$$

Estas relaciones serán utilizadas en la Sección 9.3.

EJEMPLO 9.1

Un flujo de argón circula por un tubo de modo que pasa de unas condiciones iniciales $p_1 = 1{,}7$ MPa y $\rho_1 = 18$ kg/m^3 a otras finales $p_2 = 248$ kPa y $T_2 = 400$ K. Estime (*a*) la temperatura inicial, (*b*) la densidad final, (*c*) la variación de entalpía y (*d*) la variación de entropía del gas.

Solución

De la Tabla A.4 para el argón, $R = 208$ m^2/(s$^2 \cdot$ K) y $\gamma = 1{,}67$. De la Ecuación (9.4) estimamos el calor específico a presión constante:

$$c_p = \frac{kR}{k-1} = \frac{1{,}67(208)}{1{,}67-1} = 519 \text{ m}^2/(\text{s}^2\,\text{K})$$

www.elsolucionario.net

La temperatura inicial y la densidad final se obtienen de la ley de los gases perfectos, Ecuación (9.2):

$$T_1 = \frac{p_1}{\rho_1 R} = \frac{1{,}7\times10^6\ \text{N/m}^2}{(18\ \text{kg/m}^3)[208\ \text{m}^2/(\text{s}^2\ \Delta\text{K})]} = 454\ \text{K} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{T_2 R} = \frac{284\times10^3\ \text{N/m}^2}{(400\ \text{K})[208\ \text{m}^2/(\text{s}^2\ \Delta\text{K})]} = 2{,}98\ \text{kg/m}^3 \qquad \textit{Resp. (b)}$$

De la Ecuación (9.5) se deduce la variación de entalpía

$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) = 519(400 - 454) \approx -28.000\ \text{J/kg (o m}^2/\text{s}^2) \qquad \textit{Resp. (c)}$$

La temperatura y la entalpía del argón disminuyen aguas abajo. Pero no tiene por qué haber refrigeración exterior: el fluido puede transformar la entalpía en un aumento de energía cinética mediante fricción (Sección 9.7).

Finalmente, la variación de entropía se obtiene de la Ecuación (9.8):

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1} \\ &= 519\ln\frac{400}{454} - 208\ln\frac{0{,}248\times10^6}{1{,}7\times10^6} \\ &= 66 + 400 \approx 334\ \text{m}^2/(\text{s}^2\ \Delta\text{K}) \end{aligned} \qquad \textit{Resp. (d)}$$

La entropía del fluido ha aumentado. En ausencia de transferencia de calor, esto indica un proceso irreversible. Nótese que la entropía tiene las mismas unidades que la constante del gas o los calores específicos.

Los números de este problema no son arbitrarios. Simulan correctamente el comportamiento del argón fluyendo subsónicamente por un tubo con efectos de fricción importantes (Sección 9.7).

www.elsolucionario.net

9.2. LA VELOCIDAD DEL SONIDO

La velocidad del sonido es la velocidad de propagación de un pulso infinitesimal de presión a través de un fluido en reposo. Es una propiedad termodinámica del fluido. Analicémosla primero considerando un pulso de intensidad finita, como en la Figura 9.1. En la Figura 9.1*a* el pulso, u onda de presión, se mueve a velocidad C hacia el fluido en reposo (p, ρ, T, $V = 0$) de la izquierda, dejando detrás al fluido con otras propiedades ($p + \Delta p$, $\rho + \Delta\rho$, $T + \Delta T$) y con una velocidad ΔV hacia la izquierda, siguiendo la onda, pero mucho más despacio. Podemos calcular estos efectos mediante el análisis de un volumen de control que incluya la onda. Para evitar los términos no estacionarios que serían necesarios en la Figura 9.1*a*, adoptamos el volumen de control de la Figura 9.1*b*, que se mueve hacia la izquierda a velocidad C. La onda está ahora fija, y el fluido pasa de la velocidad C a la izquierda a $C - \Delta V$ a la derecha. Las propiedades termodinámicas p, ρ y T no se ven afectadas por este cambio.

En la Figura 9.1*b* el flujo a través de la onda es estacionario y unidimensional. La ecuación de continuidad es, pues, según la Ecuación (3.24),

$$\dot{m} = (\rho + \Delta\rho)(A)(C - \Delta V)$$

o

$$\Delta V = C\frac{\Delta\rho}{\rho + \Delta\rho} \qquad (9.10)$$

Esto prueba nuestra idea de que la velocidad inducida en el flujo de la derecha es mucho menor que la velocidad C de la onda. En el límite de una onda de intensidad infinitesimal (onda sonora) esta velocidad es también infinitesimal.

Nótese que no hay gradientes de velocidad a ambos lados de la onda. Por tanto, aunque la viscosidad del fluido sea alta, los efectos de fricción quedan confinados al interior de la onda. Los textos avanzados [por ejemplo, 9] muestran que el espesor de las ondas de presión en gases es del orden de 10^{-6} ft a la presión at-

www.elsolucionario.net

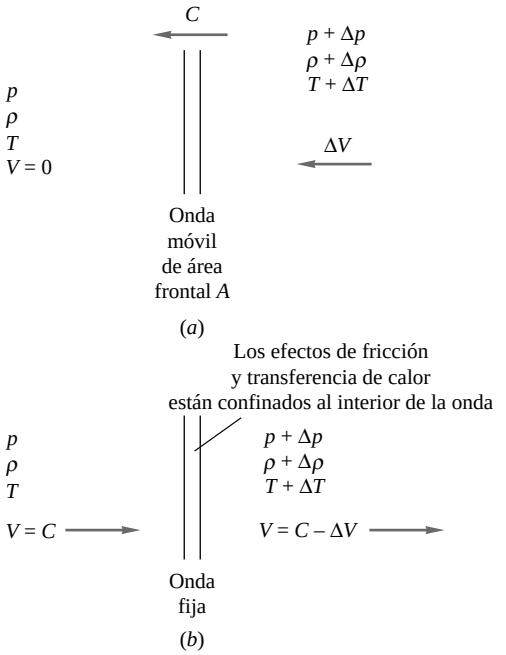


Figura 9.1. Análisis mediante un volumen de control de una onda de presión de intensidad finita: (*a*) volumen de control fijo respecto al fluido en reposo de la izquierda; (*b*) volumen de control que se mueve hacia la izquierda respecto al fluido en reposo a la velocidad *C* de la onda.

mosférica. Por ello podemos despreciar sin problemas la fricción y aplicar la ecuación de cantidad de movimiento unidimensional (3.40) a través de la onda:

$$\Sigma F_{\text{derecha}} = \dot{m}(V_{\text{salida}} - V_{\text{entrada}}) \qquad \text{o} \qquad pA - (p + \Delta p)A = (-\rho AC)(C - V - C) \tag{9.11}$$

De nuevo el área desaparece y podemos despejar la variación de presión:

$$\Delta p = \rho C\, \Delta V \tag{9.12}$$

Si la intensidad de la onda es muy pequeña, la variación de presión también es muy pequeña.

Finalmente, combinando las Ecuaciones (9.10) y (9.12) obtenemos una expresión para la velocidad de la onda:

$$C^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \rho}\left[1 + \frac{\Delta \rho}{\rho}\right] \tag{9.13}$$

Cuanto mayor sea la intensidad $\Delta\rho/\rho$ de la onda, mayor es su velocidad; por tanto, las ondas de una explosión son mucho más rápidas que las ondas sonoras. En el límite de intensidad infinitesimal $\Delta\rho \to 0$, tenemos lo que se define como la velocidad del sonido *a* del fluido:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} \tag{9.14}$$

El cálculo de la derivada requiere conocer el proceso termodinámico que sigue el fluido al atravesar la onda. Sir Isaac Newton cometió en 1686 el error ya famoso de deducir una expresión para la velocidad del sonido que era equivalente a suponer un proceso isotermo, lo que conduce a subestimar la velocidad con un error del 20 por 100 en el aire. Él argumentaba que la discrepancia se debía a la «crasitud» (partículas de

www.elsolucionario.net

polvo, etc.) del aire; este error es comprensible, ya que se cometió 180 años antes de que se estableciera con bases rigurosas la segunda ley de la termodinámica.

Ahora sabemos que el proceso es *adiabático* porque no hay gradientes de temperatura excepto en el interior de la onda. Para ondas sonoras de intensidad casi nula tenemos, por tanto, un proceso adiabático o isentrópico de intensidad infinitesimal. La expresión correcta para la velocidad del sonido es

$$a = \left[\frac{\partial p}{\partial \rho}\right]_s^{1/2} = \left[\gamma \frac{\partial p}{\partial \rho}\right]_T^{1/2} \tag{9.15}$$

para cualquier fluido, gas o líquido. Incluso los sólidos tienen una velocidad del sonido.

Para un gas perfecto, de la Ecuación (9.2) o (9.9), deducimos

$$a = \left[\gamma \frac{p}{\rho}\right]^{1/2} = (\gamma RT)^{1/2} \tag{9.16}$$

La velocidad del sonido aumenta con la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. Para el aire, con $\gamma = 1{,}4$ y $R = 1716$, una fórmula dimensional fácil de memorizar es

$$\begin{aligned} a(\text{ft/s}) &\approx 49[T(^\circ\text{R})]^{1/2} \\ a(\text{m/s}) &\approx 20[T(\text{K})]^{1/2} \end{aligned} \tag{9.17}$$

A nivel del mar en atmósfera estándar, 60 °F = 520 °R, $a = 1117$ ft/s. Disminuye en la alta atmósfera, que está más fría; a 50.000 ft de altura estándar, $T = -69{,}7$ °F = 389,9 °R y $a = 49(389{,}9)^{1/2} = 968$ ft/s, un 13 por 100 menos.

La Tabla 9.1 da algunos valores representativos de las velocidades del sonido en diversos materiales. Para líquidos y sólidos es común definir el *módulo de compresibilidad K* del material:

$$K = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}\bigg|_s = \frac{\partial p}{\partial \rho}\bigg|_s \tag{9.18}$$

www.elsolucionario.net

Tabla 9.1. Velocidad del sonido de diversos materiales a 60 °F (15,5 °C) y 1 atm.

Material	*a*, ft/s	*a*, m/s
Gases:		
H_2	4.246	1.294
He	3.281	1.000
Aire	1.117	340
Ar	1.040	317
CO_2	873	266
CH_4	607	185
$^{238}UF_6$	297	91
Líquidos:		
Glicerina	6.100	1.860
Agua	4.890	1.490
Mercurio	4.760	1.450
Alcohol etílico	3.940	1.200
Sólidos*:		
Aluminio	16.900	5.150
Acero	16.600	5.060
Madera	13.200	4.020
Hielo	10.500	3.200

* Ondas planas. Los sólidos también tienen una *velocidad de onda transversal.*

www.elsolucionario.net

En función del módulo de compresibilidad, $a = (K/\rho)^{1/2}$. Por ejemplo, en condiciones normales, el módulo de compresibilidad del tetracloruro de carbono es de 1,12 GPa y su densidad es de 1590 kg/m^3. Su velocidad del sonido es por tanto $a = (1{,}12 \times 10^9 \text{ Pa}/1590 \text{ kg/m}^3)^{1/2} = 840 \text{ m/s} = 2750 \text{ ft/s}$. El acero tiene un módulo de compresibilidad de $2{,}0 \times 10^{11}$ Pa y el agua de $2{,}2 \times 10^9$ Pa (véase Tabla A.3), 90 veces menor.

En sólidos, se supone a veces que el módulo de compresibilidad es equivalente al módulo de elasticidad E de Young, pero de hecho su cociente depende del coeficiente de Poisson σ:

$$\frac{E}{K} = 3(1 \Phi 2\sigma) \tag{9.19}$$

Los dos son iguales cuando $\sigma = \frac{1}{3}$, que es aproximadamente lo que ocurre en muchos metales comunes como el acero y el aluminio.

EJEMPLO 9.2

Calcule la velocidad del sonido en m/s del monóxido de carbono a 200 kPa de presión y 300 °C.

Solución

De la Tabla A.4, para el CO, tomamos un peso molecular de 28,01 y $\gamma \Xi 1{,}40$. De la Ecuación (9.3) $R_{CO} = 8314/28{,}01 = 297 \text{ m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})$, y la temperatura dada es 300 °C + 273 = 573 K. Por tanto, de la Ecuación (9.16) tenemos

$$a_{CO} = (\gamma RT)^{1/2} = [1{,}40(297)(573)]^{1/2} = 488 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

9.3. FLUJO ESTACIONARIO ADIABÁTICO E ISENTRÓPICO

Como se mencionó en la Sección 9.1, la aproximación isentrópica simplifica enormemente el cálculo del flujo compresible. Lo mismo ocurre con la hipótesis de flujo adiabático, aunque no sea isentrópico.

Considérese el flujo a altas velocidades de un gas cerca de una pared aislada, como en la Figura 9.2. No hay trabajo de partes móviles que sea comunicado al fluido. Por tanto, cualquier tubo de corriente del flujo satisface la ecuación de la energía estacionaria en la forma (3.66):

$$h_1 + \tfrac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = h_2 + \tfrac{1}{2}V_2^2 + gz_2 - q + w_v \tag{9.20}$$

donde el punto 1 está aguas arriba del 2. Deben revisarse los detalles de la Ecuación (3.66) así como su desarrollo. En el Ejemplo 3.16 vimos que las variaciones de energía potencial en un gas son extremadamente pequeñas comparadas con los términos de energía cinética y entalpía. Por ello despreciaremos los términos gz_1 y gz_2 en todos los análisis de dinámica de gases.

Dentro de las capas límite viscosa y térmica de la Figura 9.2, los términos de transferencia de calor y trabajo de los esfuerzos viscosos q y w_v son no nulos. Pero fuera de la capa límite q y w_v son cero por definición, de modo que la corriente exterior satisface la relación

$$h_1 + \tfrac{1}{2}V_1^2 = h_2 + \tfrac{1}{2}V_2^2 = \text{cte} \tag{9.21}$$

La constante en la Ecuación (9.21) es igual a la máxima entalpía que puede alcanzar el fluido cuando se le lleva al reposo adiabáticamente. A este valor h_0 le denominamos *entalpía de remanso*, o de estancamiento, del flujo. Por tanto, la Ecuación (9.21) se puede escribir en la forma

$$h + \tfrac{1}{2}V^2 = h_0 = \text{cte} \tag{9.22}$$

Esto debe cumplirse para el flujo estacionario adiabático de cualquier fluido compresible fuera de la capa límite. La pared en la Figura 9.2 puede ser la superficie de un cuerpo o la pared de un conducto. Los detalles

www.elsolucionario.net

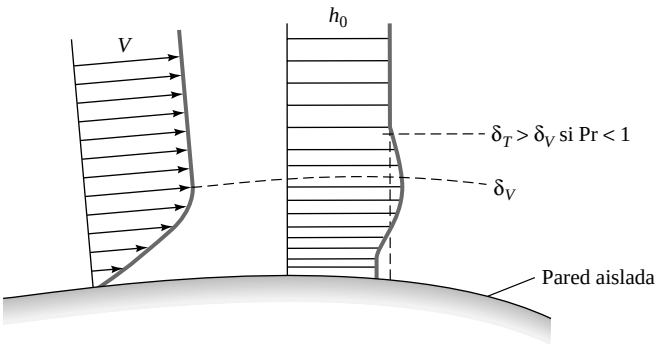


Figura 9.2. Distribuciones de velocidad y entalpía de remanso en las proximidades de una pared aislada en un flujo típico de gases a alta velocidad.

se muestran en la Figura 9.2; normalmente el espesor de la capa límite térmica δ_T es mayor que el espesor de la capa límite viscosa δ_V debido a que la mayoría de los gases tienen un número de Prandtl Pr menor que la unidad (véase, por ejemplo, Referencia 19, Sección 4-3.2). Nótese que la entalpía de remanso varía dentro de la capa límite térmica, pero su valor medio es el mismo que en la corriente exterior debido al aislamiento de la pared.

En gases no perfectos pueden ser necesarias las tablas de vapor [15] o tablas de gases [16] para poder usar la Ecuación (9.22). Pero en gases perfectos $h = c_p T$, y la Ecuación (9.22) queda

$$c_p T + \tfrac{1}{2}V^2 = c_p T_0 \tag{9.23}$$

Ésta es la definición de la temperatura de remanso T_0 del flujo adiabático de un gas perfecto, esto es, la temperatura que alcanzaría si se le decelerase hasta el reposo adiabáticamente.

Una interpretación alternativa de la Ecuación (9.22) se obtiene si hacemos que la entalpía y la temperatura tiendan a cero, de modo que la velocidad alcanza un valor máximo:

$$V_{\text{máx}} = (2h_0)^{1/2} = (2c_p T_0)^{1/2} \tag{9.24}$$

El fluido no puede alcanzar velocidades superiores a ésta sin que se le suministre energía adicional mediante el trabajo de partes móviles o la adición de calor (Sección 9.8).

Relaciones en función del número de Mach

Cuando se adimensionaliza la Ecuación (9.23) utilizando la Ecuación (9.16) para la velocidad del sonido de un gas perfecto, aparece como parámetro el número de Mach. Dividiendo toda la ecuación por $c_p T$ obtenemos

$$1 + \frac{V^2}{2c_p T} = \frac{T_0}{T} \tag{9.25}$$

Pero según la ley de los gases perfectos, $c_p T = [\gamma R/(\gamma - 1)]T = a^2/(\gamma - 1)$, de modo que la Ecuación (9.25) queda

$$1 + \frac{(\gamma - 1)V^2}{2a^2} = \frac{T_0}{T}$$

o

$$\boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}\text{Ma}^2 \qquad \text{Ma} = \frac{V}{a}} \tag{9.26}$$

www.elsolucionario.net

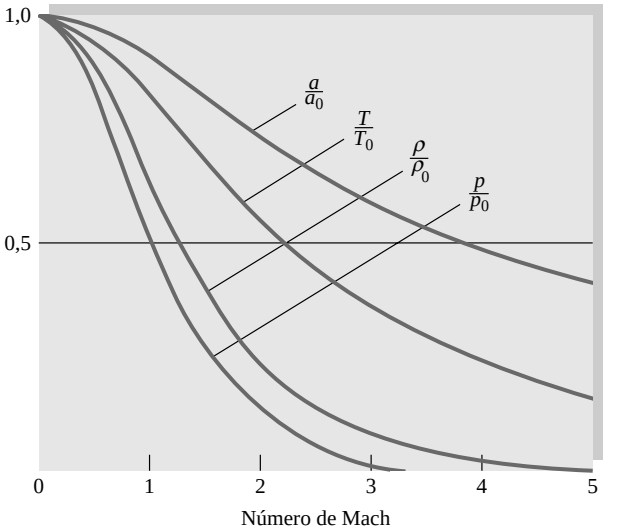


Figura 9.3. Magnitudes adiabáticas (T/T_0 y a/a_0) e isentrópicas (p/p_0 y ρ/ρ_0) en función del número de Mach, para $\gamma = 1{,}4$.

Esta relación está representada en la Figura 9.3 en función del número de Mach para $\gamma = 1{,}4$. A Ma = 5 la temperatura ha caído a $\frac{1}{6}T_0$.

Como $a \propto T^{1/2}$, el cociente a_0/a resulta ser la raíz cuadrada de (9.26):

$$\frac{a_0}{a} = \left[\frac{T_0}{T}\right]^{1/2} = \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\mathrm{Ma}^2\right]^{1/2} \tag{9.27}$$

www.elsolucionario.net

La Ecuación (9.27) también está representada en la Figura 9.3. Para Ma = 5 la velocidad del sonido se ha reducido al 41 por 100 de su valor de remanso.

Relaciones isentrópicas de presión y densidad

Nótese que las Ecuaciones (9.26) y (9.27) sólo requieren que el flujo sea adiabático y siguen siendo válidas en presencia de irreversibilidades tales como las pérdidas por fricción o las ondas de choque.

Si el flujo es además *isentrópico*, en un gas perfecto las relaciones de presión y densidad pueden calcularse como potencias de la relación de temperaturas a partir de la Ecuación (9.9):

$$\frac{p_0}{p} = \left[\frac{T_0}{T}\right]^{\gamma/(\gamma-1)} = \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\mathrm{Ma}^2\right]^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{9.28a}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[\frac{T_0}{T}\right]^{1/(\gamma-1)} = \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\mathrm{Ma}^2\right]^{1/(\gamma-1)} \tag{9.28b}$$

Estas relaciones también están representadas en la Figura 9.3; para Ma = 5 la densidad es el 1,13 por 100 de su valor de remanso, y la presión tan sólo el 0,19 por 100.

Las magnitudes p_0 y ρ_0 son la presión y densidad de remanso, respectivamente, esto es, la presión y densidad que se alcanzarían si el flujo se llevara al reposo adiabáticamente. En un flujo adiabático pero no isentrópico p_0 y ρ_0 conservan su significado local, pero pueden variar a través del flujo a medida que lo hace la entropía por efecto de la fricción o de las ondas de choque. Las magnitudes h_0, T_0 y a_0 son constantes en un flujo adiabático no isentrópico (consúltese la Sección 9.7 para más detalles).

www.elsolucionario.net

Relación con la ecuación de Bernoulli

Las relaciones isentrópicas (9.28) son efectivas, ¿pero son realistas? Sí; vamos a ver por qué calculando la derivada de la Ecuación (9.22):

Adiabático: $$dh + V\,dV = 0 \tag{9.29}$$

Mientras que, de la Ecuación (9.6), si $ds = 0$ (proceso isentrópico),

$$dh = \frac{dp}{\rho} \tag{9.30}$$

Combinando (9.29) y (9.30) vemos que el flujo isentrópico en un tubo de corriente debe ser tal que

$$\frac{dp}{\rho} + V\,dV = 0 \tag{9.31}$$

Pero ésta es exactamente la ecuación de Bernoulli (3.75) para flujo estacionario sin fricción con efectos gravitatorios despreciables. Vemos, pues, que la suposición de flujo isentrópico es equivalente a utilizar la ecuación de Bernoulli, que es la forma sin fricción de la ecuación de la cantidad de movimiento.

Valores críticos en el punto sónico

Las magnitudes de remanso (a_0, T_0, p_0, ρ_0) son una referencia útil en flujo compresible, pero igualmente útiles son las condiciones sónicas, esto es, cuando Ma = 1,0. Estas propiedades sónicas, o *críticas*, se denotan mediante asteriscos: p^*, ρ^*, a^* y T^*. Están relacionadas con las magnitudes de remanso por las Ecuaciones (9.26) a (9.28) con Ma = 1,0; para $\gamma = 1{,}4$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = 0{,}5283 \qquad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)} = 0{,}6339$$
$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1} = 0{,}8333 \qquad \frac{a^*}{a_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/2} = 0{,}9129 \tag{9.32}$$

En todo flujo isentrópico las condiciones críticas son constantes; en un flujo adiabático no isentrópico a^* y T^* son constantes y p^* y ρ^* variables.

La velocidad crítica V^* es por definición igual a la velocidad del sonido a^* y se usa a menudo como velocidad de referencia en un flujo isentrópico o adiabático:

$$V^* = a^* = (\gamma R T^*)^{1/2} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} R T_0\right)^{1/2} \tag{9.33}$$

La utilidad de estas propiedades críticas quedará más clara cuando estudiemos al final de este capítulo el flujo compresible en conductos con fricción o transferencia de calor.

Fórmulas útiles para el aire

Como la mayoría de nuestros cálculos prácticos se refieren al aire, $\gamma = 1{,}4$, las relaciones del tipo p/p_0, etc., resultantes de las Ecuaciones (9.26) a (9.28) se encuentran tabuladas para dicho valor en la Tabla B.1. Los incrementos en número de Mach en dicha tabla son más bien grandes, porque se trata de una simple guía: hoy en día las ecuaciones originales son triviales de manejar con cualquier calculadora manual. Hace

www.elsolucionario.net

treinta años todos los textos incluían extensas tablas de flujo compresible con incrementos de 0,01 en el número de Mach para permitir la interpolación precisa de valores. Incluso hoy en día existen libros de referencia [20, 21] con tablas, gráficas y programas de ordenador para una amplia variedad de casos de flujo compresible. La Referencia 22 contiene fórmulas y gráficas para la termodinámica de flujos de gases *reales* (no perfectos).

Para $\gamma = 1{,}4$ obtenemos las siguientes versiones numéricas de las fórmulas de flujo isentrópico y adiabático:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + 0{,}2\ \mathrm{Ma}^2 \qquad \frac{\overleftarrow{\rho}_0}{\overleftarrow{\rho}} = (1 + 0{,}2\ \mathrm{Ma}^2)^{2{,}5}$$
$$\frac{p_0}{p} = (1 + 0{,}2\ \mathrm{Ma}^2)^{3{,}5} \tag{9.34}$$

O, si lo que se conocen son las propiedades del flujo, podemos despejar el número de Mach (de nuevo con $\gamma = 1{,}4$):

$$\mathrm{Ma}^2 = 5\left[\left(\frac{T_0}{T}\right)^{2/7} - 1\right] = 5\left[\left(\frac{\overleftarrow{\rho}_0}{\overleftarrow{\rho}}\right)^{2/5} - 1\right] = 5\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{2/7} - 1\right] \tag{9.35}$$

Nótese que estas fórmulas para flujo isentrópico son equivalentes a las ecuaciones de la cantidad de movimiento y la energía, adiabáticas y sin fricción. Relacionan la velocidad con las propiedades físicas de un gas perfecto, pero *no* son la «solución» al problema fluido-dinámico. La solución completa no se obtiene hasta que no se satisfaga también la ecuación de la continuidad, bien unidimensional (Sección 9.4) o multidimensional (Sección 9.9).

Una nota final: estas fórmulas que ligan las relaciones isentrópicas con el número de Mach son seductoras, y nos tientan a resolver los problemas utilizando directamente las tablas. En realidad, muchos problemas en los que entra la velocidad (dimensional) y la temperatura se pueden resolver más fácilmente con la ecuación original de la energía (9.23) y la ley de gases perfectos (9.2), como veremos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9.3

Un flujo de aire discurre adiabáticamente por un conducto. En el punto 1 la velocidad es de 240 m/s, con T_1 = 320 K y p_1 = 170 kPa. Calcule (*a*) T_0, (*b*) p_0, (*c*) ρ_0, (*d*) Ma, (*e*) $V_{máx}$ y (*f*) V^*. En el punto 2 aguas abajo V_2 = 290 m/s y p_2 = 135 kPa. (*g*) ¿Cuál es la presión de remanso p_{02}?

Solución

- *Consideraciones.* Tomamos el aire como gas ideal con γ constante. El flujo es adiabático pero *no* isentrópico. Las fórmulas isentrópicas *sólo* se van a usar para calcular los valores locales de p_0 y ρ_0, que varían a través del flujo.
- *Procedimiento.* Emplearemos las fórmulas adiabáticas e isentrópicas para calcular las diversas magnitudes.
- *Parámetros del gas ideal.* Para el aire, R = 287 m^2/(s^2 · K), $\gamma = 1{,}40$ y c_p = 1005 m^2/(s^2 · K).
- *Apartados* (*a, b, c, d*). Conocidas T_1, p_1 y V_1, se obtienen las restantes propiedades en el punto 1:

$$T_{01} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 320 + \frac{(240\ \mathrm{m/s})^2}{2[1005\ \mathrm{m}^2/(\mathrm{s}^2\ \Delta\mathrm{K})} = 320 + 29 = 349\ \mathrm{K} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Usando la Ecuación (9.35) se puede calcular el número de Mach y a continuación se obtienen la presión y densidad de remanso:

$$\mathrm{Ma}_1 = \sqrt{5\left[\left(\frac{T_{01}}{T_1}\right) - 1\right]} = \sqrt{5\left[\frac{349\ \mathrm{K}}{320\ \mathrm{K}} - 1\right]} = \sqrt{0{,}448} = 0{,}67 \qquad \textit{Resp. (d)}$$

www.elsolucionario.net

$$p_{01} = p_1(1 + 0{,}2\ \mathrm{Ma}_1^2)^{3{,}5} = (170\ \mathrm{kPa})[1 + 0{,}2(0{,}67)^2]^{3{,}5} = 230\ \mathrm{kPa} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

$$\rho_{01} = \frac{p_{01}}{RT_{01}} = \frac{230.000\ \mathrm{N/m^2}}{[287\ \mathrm{m^2/(s^2\,K)}](349\ \mathrm{K})} = 2{,}29\frac{\mathrm{N\,s^2/m}}{\mathrm{m^3}} = 2{,}29\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \qquad \textit{Resp. (c)}$$

- *Comentario*. Obsérvese que hemos utilizado fórmulas dimensionales (sin números de Mach) donde nos ha convenido.
- *Apartados* (*e*, *f*). Tanto $V_{\text{máx}}$ como V^* están relacionadas directamente con la temperatura de remanso a través de las Ecuaciones (9.24) y (9.33):

$$V_{\text{máx}} = \sqrt{2c_pT_0} = \sqrt{2[1005\ \mathrm{m^2/(s^2\,K)}](349\ \mathrm{K})} = 837\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \textit{Resp. (e)}$$

$$V^* = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}RT_0} = \sqrt{\frac{2(1{,}4)}{(1{,}4+1)}\left[287\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2\,K}}\right](349\ \mathrm{K})} = 342\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \textit{Resp. (f)}$$

- En el punto 2 aguas abajo la temperatura no es conocida, pero sabemos que el flujo es adiabático y por tanto la temperatura de remanso es constante: $T_{01} = T_{02} = 349$ K. De la Ecuación (9.23),

$$T_2 = T_{02} - \frac{V_2^2}{2c_p} = 349 - \frac{(290\ \mathrm{m/s})^2}{2[1005\ \mathrm{m^2/(s^2\,K)}]} = 307\ \mathrm{K}$$

Luego, de la Ecuación (9.28*a*), la presión de remanso en el punto 2 es

$$p_{02} = p_2\left[\frac{T_{02}}{T_2}\right]^{\gamma/(\gamma-1)} = (135\,\mathrm{kPa})\left[\frac{349\ \mathrm{K}}{307\ \mathrm{K}}\right]^{1{,}4/0{,}4} = 211\ \mathrm{kPa} \qquad \textit{Resp. (g)}$$

- *Comentarios.* En el apartado (*g*) resulta más sencillo utilizar una expresión como la empleada que calcular el número de Mach, que resulta ser $\mathrm{Ma}_2 = 0{,}83$, y usar entonces la fórmula (9.34) en función del número de Mach para obtener p_{02}. Nótese que p_{02} es un 8 por 100 menor que p_{01}. El flujo no es isentrópico: la entropía aumenta aguas abajo y la presión y densidad de remanso disminuyen, debido en este caso a las pérdidas por fricción.

9.4. FLUJO ISENTRÓPICO CON CAMBIOS DE ÁREA

Combinando las relaciones de flujo isentrópico y/o adiabático con la ecuación de continuidad podemos estudiar problemas prácticos de flujos compresibles. Esta sección trata de la aproximación de flujo unidimensional.

La Figura 9.4 ilustra la hipótesis de flujo unidimensional. Un flujo real, Figura 9.4*a*, cumple la condición de no deslizamiento en la pared y su perfil de velocidades $V(x, y)$ varía a través de la sección del conducto (compárese con la Figura 7.8). Sin embargo, si las variaciones de área son pequeñas y el radio de curvatura de la pared es grande,

$$\frac{dh}{dx} \ll 1 \qquad h(x) \ll R(x) \tag{9.36}$$

entonces el flujo es aproximadamente unidimensional, como en la Figura 9.4*b*, con $V \equiv V(x)$ consecuencia de la variación de área $A(x)$. Los flujos compresibles en toberas y difusores no siempre satisfacen las condiciones (9.36), pero de todas formas empleamos la teoría unidimensional debido a su simplicidad.

www.elsolucionario.net

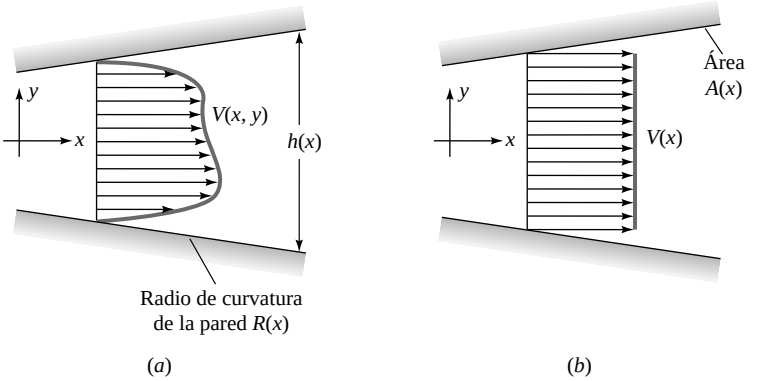


Figura 9.4. Flujo compresible en un conducto: (*a*) perfil de velocidades para un fluido real; (*b*) aproximación unidimensional.

Para flujos estacionarios unidimensionales la ecuación de continuidad, obtenida de la Ecuación (3.24), es

$$\rho(x)V(x)A(x) = \dot{m} = \text{cte} \tag{9.37}$$

Antes de aplicar esta teoría, podemos aprender muchas cosas derivando la Ecuación (9.37):

$$\frac{d\Leftarrow}{\Leftarrow} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \tag{9.38}$$

www.elsolucionario.net

Recordemos por conveniencia las formas diferenciales de la ecuación de cantidad de movimiento sin fricción (9.31) y de la velocidad del sonido (9.15):

Cantidad de movimiento: $$\frac{dp}{\Leftarrow} + V\,dV = 0$$

Velocidad del sonido: $$dp = a^2\,d\rho \tag{9.39}$$

Podemos eliminar dp y $d\rho$ entre (9.38) y (9.39) para obtener la siguiente relación entre las variaciones de velocidad y las variaciones de área en el flujo isentrópico en conductos:

$$\frac{dV}{V} = \frac{dA}{A}\frac{1}{\text{Ma}^2\,\Phi 1} = \Phi\frac{dp}{\Leftrightarrow V^2} \tag{9.40}$$

La inspección de esta ecuación, sin llegar a resolverla, nos revela un aspecto fascinante de los flujos compresibles: las variaciones de las propiedades cambian de signo al pasar de flujo subsónico a supersónico debido al término $\text{Ma}^2 - 1$. Hay cuatro combinaciones de variaciones de área y número de Mach, que se resumen en la Figura 9.5.

De capítulos anteriores estamos acostumbrados al comportamiento subsónico (Ma < 1): al aumentar el área la velocidad disminuye y la presión aumenta, por ejemplo en un difusor subsónico. Pero en flujo supersónico (Ma > 1) la velocidad aumenta al aumentar el área, como en una tobera supersónica. El mismo comportamiento opuesto ocurre al disminuir el área, acelerándose el flujo subsónico y decelerándose el supersónico.

¿Qué ocurre con el punto sónico Ma = 1? Como una aceleración infinita es físicamente imposible, la Ecuación (9.40) indica que dV sólo puede ser finito si $dA = 0$, esto es, en un mínimo de área (garganta) o en un máximo. En la Figura 9.6 se han puesto juntas las configuraciones citadas, empleando las reglas de la Figura 9.5. La garganta o sección convergente-divergente puede acelerar suavemente un flujo subsónico has-

www.elsolucionario.net

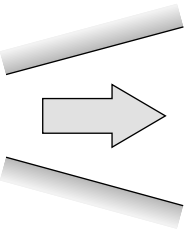
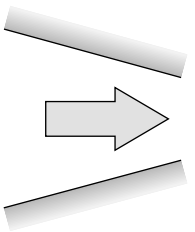
Geometría del conducto	Subsónico Ma < 1	Supersónico Ma > 1
 $dA > 0$	$dV < 0$ $dp > 0$ Difusor subsónico	$dV > 0$ $dp < 0$ Difusor supersónico
 $dA < 0$	$dV > 0$ $dp < 0$ Difusor subsónico	$dV < 0$ $dp > 0$ Difusor supersónico

Figura 9.5. Efecto del número de Mach sobre las variaciones de las propiedades del flujo cuando cambia el área del conducto.

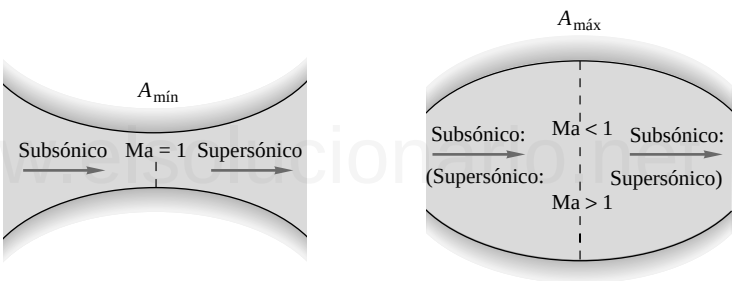


Figura 9.6. La Ecuación (9.40) muestra que el flujo a través de una garganta (*a*) puede acelerarse gradualmente de subsónico a supersónico. El flujo en el vientre (*b*) nunca puede ser sónico por razones físicas.

ta hacerlo supersónico, como en la Figura 9.6*a*. Ésta es la única forma de conseguir un flujo supersónico a partir de la expansión de un gas contenido en un depósito. La sección en vientre no puede; el número de Mach se aleja de la condición sónica en lugar de acercarse a ella.

Aunque un flujo supersónico aguas abajo de la tobera exige una garganta sónica, el recíproco no es cierto: un gas compresible puede atravesar la garganta sin alcanzar condiciones sónicas.

Relaciones para un gas perfecto

Usando las relaciones de gas perfecto y flujo isentrópico podemos convertir la ecuación de la continuidad (9.37) en una expresión algebraica que relacione el número de Mach con el área. Igualemos el gasto másico en cualquier sección al gasto másico en condiciones sónicas (que no tienen por qué darse en el conducto):

$$\rho V A = \rho^* V^* A^*$$

o

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rightleftharpoons^*}{\Leftarrow} \frac{V^*}{V} \tag{9.41}$$

www.elsolucionario.net

Los dos factores del segundo miembro son únicamente funciones del número de Mach en flujo isentrópico. De las Ecuaciones (9.28) y (9.32)

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{\rho^*}{\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left[1+\frac{1}{2}(\gamma-1)\mathrm{Ma}^2\right]^{1/(\gamma-1)} \tag{9.42}$$

De las Ecuaciones (9.26) y (9.32) obtenemos

$$\frac{V^*}{V} = \frac{(\mathcal{R}T^*)^{1/2}}{V} = \frac{(\mathcal{R}T)^{1/2}}{V}\left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{1/2}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Ma}}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left[1+\frac{1}{2}(\gamma-1)\mathrm{Ma}^2\right]^{1/2} \tag{9.43}$$

Combinando las Ecuaciones (9.41) y (9.43) llegamos al resultado deseado:

$$\boxed{\frac{A}{A^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}}\left[\frac{1+\frac{1}{2}(\gamma-1)\mathrm{Ma}^2}{\frac{1}{2}(\gamma+1)}\right]^{(1/2)(\gamma+1)/(\gamma-1)}} \tag{9.44}$$

Para $\gamma = 1{,}4$, la Ecuación (9.44) se puede escribir

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}}\frac{(1+0{,}2\ \mathrm{Ma}^2)^3}{1{,}728} \tag{9.45}$$

www.elsolucionario.net

que está representada en la Figura 9.7. Las Ecuaciones (9.34) y (9.45) nos permiten resolver cualquier problema isentrópico y unidimensional de aire si conocemos, por ejemplo, la forma del conducto $A(x)$ y las condiciones de remanso y suponemos que no hay ondas de choque.

La Figura 9.7 muestra que el área mínima que puede haber en un flujo isentrópico en un conducto es la garganta o área sónica (o crítica). Todas las demás secciones del conducto deben tener un área A mayor que A^*. En muchos flujos no llegan a darse las condiciones sónicas y por tanto el flujo es subsónico o, más raramente, supersónico en todo el conducto.

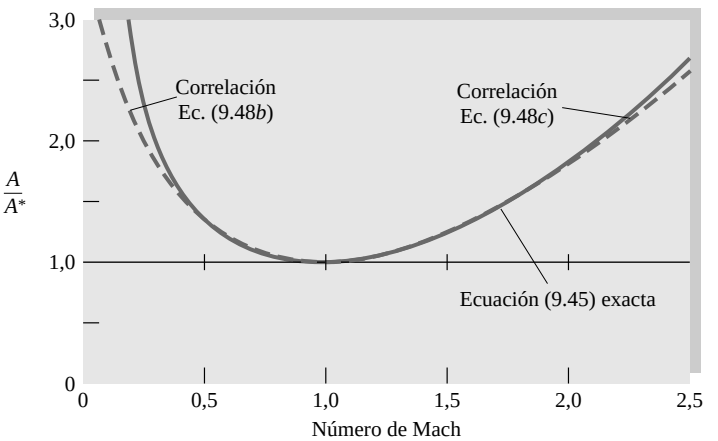


Figura 9.7. Relación de áreas en función del número de Mach para el flujo isentrópico de un gas perfecto con $\gamma = 1{,}4$.

www.elsolucionario.net

Bloqueo

De la Ecuación (9.41) vemos que el cociente inverso A^*/A es igual a $\rho V/(\rho^* V^*)$, el gasto másico por unidad de área en cualquier sección comparado con el de condiciones críticas. En la Figura 9.7 vemos que este cociente inverso pasa de cero para Ma = 0 a uno para Ma = 1, y vuelve luego a cero para grandes Ma. Así, para condiciones de remanso dadas, el gasto másico máximo que puede atravesar un conducto se da cuando en la garganta hay condiciones críticas o sónicas. Decimos entonces que el conducto está *bloqueado* y no puede haber un gasto másico mayor a no ser que se agrande la garganta. Si la garganta se constriñe aún más, el gasto másico a través del conducto debe disminuir.

De las Ecuaciones (9.32) y (9.33) tenemos que el gasto másico máximo es

$$\dot{m}_{\text{máx}} = \rho^* A^* V^* = \rho_0 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)} A^* \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} RT_0\right)^{1/2}$$

$$= \gamma^{1/2} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(1/2)(\gamma+1)/(\gamma-1)} A^* \rho_0 (RT_0)^{1/2} \tag{9.46a}$$

Para $\gamma = 1{,}4$ esta expresión se reduce a

$$\boxed{\dot{m}_{\text{máx}} = 0{,}6847 A^* \rho_0 (RT_0)^{1/2} = \frac{0{,}6847 A^*}{(RT_0)^{1/2}}} \tag{9.46b}$$

Para un flujo isentrópico a través de un conducto, el máximo gasto másico posible es proporcional al área de la garganta y a la presión de remanso, e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura de remanso. Esto es algo abstracto, así que lo ilustraremos con algunos ejemplos.

www.elsolucionario.net

La función de gasto másico local

Las Ecuaciones (9.46) proporcionan el *máximo* gasto másico, que se produce cuando se dan condiciones de bloqueo (salida sónica). Dichas ecuaciones pueden modificarse para predecir el gasto másico real (no máximo) en cualquier sección donde el área local A y la presión p sean conocidas.[2] El álgebra es laboriosa, por lo que únicamente daremos el resultado final, expresado en forma adimensional:

$$\boxed{\text{Función de gasto másico} = \frac{\dot{m}}{A}\frac{\sqrt{RT_0}}{p_0} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{2/\gamma}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]}} \tag{9.47}$$

Enfatizamos que en esta relación p y A son los valores *locales* en la posición x. A medida que p/p_0 decae, esta función crece rápidamente y se nivela con el máximo dado por las Ecuaciones (9.46). Aquí damos algunos valores para $\gamma = 1{,}4$:

p/p_0	1,0	0,98	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	A0,5283
Función	0,0	0,1978	0,3076	0,4226	0,5607	0,6383	0,6769	0,6847

La Ecuación (9.47) es muy útil cuando se conocen las condiciones de remanso y el flujo no está bloqueado.

El único proceso arduo en estos problemas es invertir la Ecuación (9.45) para calcular el número de Mach cuando A/A^* es dato. Ésta es una situación ideal para EES, que obtendrá el valor de Ma en un ins-

[2] El autor está en deuda con Georges Aigret, de Chimay, Bélgica, por sugerirle esta función tan útil.

www.elsolucionario.net

tante. A falta de EES, sugerimos las siguientes expresiones aproximadas, que permiten calcular el número de Mach a partir del valor de A/A^* con un 2 por 100 de error, para $\gamma = 1{,}4$, siempre que se respeten los rangos de validez de cada una de las fórmulas:

$$\mathrm{Ma} \approx \begin{cases} \dfrac{1 + 0{,}27(A/A^*)^{-2}}{1{,}728 A/A^*} & 1{,}34 < \dfrac{A}{A^*} < \infty \quad (9.48a) \\ 1 + 0{,}88\left[\ln \dfrac{A}{A^*}\right]^{0{,}45} & 1{,}0 < \dfrac{A}{A^*} < 1{,}34 \quad (9.48b) \end{cases} \text{ flujo subsónico}$$

$$\mathrm{Ma} \approx \begin{cases} 1 + 1{,}2\left[\dfrac{A}{A^*} - 1\right]^{1/2} & 1{,}0 < \dfrac{A}{A^*} < 2{,}9 \quad (9.48c) \\ \left\{ 2{,}16 \dfrac{A}{A^*} - 2{,}54 \left[\dfrac{A}{A^*}\right]^{2/3} \right\}^{1/5} & 2{,}9 < \dfrac{A}{A^*} < \infty \quad (9.48d) \end{cases} \text{ flujo supersónico}$$

Las expresiones (9.48*a*) y (9.48*d*) son correctas asintóticamente cuando $A/A^* \to \infty$, mientras que (9.48*b*) y (9.48*c*) son simples correlaciones. Aun así, estas últimas, representadas en la Figura 9.7, son precisas dentro de sus respectivos rangos.

Nótese que para cada valor de A/A^* hay dos posibles soluciones, una subsónica y otra supersónica. La solución adecuada no puede escogerse sin más información adicional, como por ejemplo la presión o la temperatura en alguna sección del conducto.

EJEMPLO 9.4

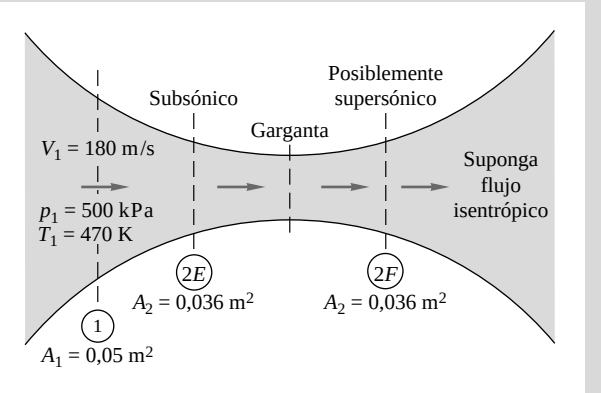
Un flujo de aire circula isentrópicamente por un conducto. En la sección 1 el área es de 0,05 m^2 y V_1 = 180 m/s, p_1 = 500 kPa y T_1 = 470 K. Calcule (*a*) T_0, (*b*) Ma_1, (*c*) p_0 y (*d*) A^* y $\dot{m}$. Si en la sección 2 el área es de 0,036 m^2, calcule Ma_2 y p_2 suponiendo que el flujo es (*e*) subsónico o (*f*) supersónico. Suponga $\gamma = 1{,}4$.

Solución

Apartado (*a*)

La Figura E9.4 muestra un diagrama general del problema. Conocidas V_1 y T_1, la ecuación de la energía (9.23) proporciona

$$T_0 = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 470 + \frac{(180)^2}{2(1005)} = 486 \text{ K} \qquad \textit{Resp. (a)}$$



E9.4

www.elsolucionario.net

Apartado (*b*)

La velocidad local del sonido $a_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = [(1,4)(287)(470)]^{1/2} = 435$ m/s. De donde

$$\mathrm{Ma}_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{180}{435} = 0,414 \qquad \textit{Resp. (b)}$$

Apartado (*c*)

Conocido Ma_1, la presión de remanso se deduce de la Ecuación (9.34):

$$p_0 = p_1(1 + 0,2\ \mathrm{Ma}_1^2)^{3,5} = (500\ \text{kPa})[1 + \ 0,2(0,414)^2]^{3,5} = 563\ \text{kPa} \qquad \textit{Resp. (c)}$$

Apartado (*d*)

Análogamente, de la Ecuación (9.45), obtenemos el área crítica de la garganta

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{(1+0,2\ \mathrm{Ma}_1^2)^3}{1,728\ \mathrm{Ma}_1} = \frac{[1+0,2(0,414)^2]^3}{1,728(0,414)} = 1,547$$

o

$$A^* = \frac{A_1}{1,547} = \frac{0,05\ \text{m}^2}{1,547} = 0,0323\ \text{m}^2 \qquad \textit{Resp. (d)}$$

Si el flujo aguas abajo va a ser realmente supersónico, *debe haber una garganta* en alguna sección del conducto.

Una vez conocido el valor de A^*, para calcular el gasto másico utilizamos las Ecuaciones (9.46), que siguen siendo válidas independientemente de que el área de la garganta sea o no la crítica:

$$\dot{m} = 0,6847\frac{p_0 A^*}{\sqrt{RT_0}} = 0,6847\frac{(563.000)(0,0323)}{\sqrt{(287)(486)}} = 33,4\ \text{kg/s} \qquad \textit{Resp. (d)}$$

www.elsolucionario.net

O bien podemos hacer uso de la Ecuación (9.47) para el «gasto másico local» empleando, por ejemplo, la presión y el área en la sección 1. Con $p_1/p_0 = 500/563 = 0,889$, la Ecuación (9.47) proporciona

$$\dot{m}\frac{\sqrt{287(486)}}{563.000(0,05)} = \sqrt{\frac{2(1,4)}{0,4}(0,889)^{2/1,4}[1\,\Phi(0,889)^{0,4/1,4}]} = 0,444 \quad \dot{m} = 33,4\frac{\text{kg}}{\text{s}} \qquad \textit{Resp. (d)}$$

Apartado (*e*)

La hipótesis de flujo *subsónico* corresponde a la sección 2*E* de la Figura E9.4. El conducto se contrae con una relación de áreas $A_2/A^* = 0,036/0,0323 = 1,115$, que se encuentra en el lado izquierdo de la Figura 9.7 o en la parte subsónica de la Tabla B.1. Pero ni la figura ni la tabla proporcionan resultados demasiado precisos. Para obtener una precisión mayor tenemos dos opciones. La primera es usar la Ecuación (9.48*b*) para estimar $\mathrm{Ma}_2 \Xi 1 - 0,88 \ln (1,115)^{0,45} \Xi 0,676$ (error menor que el 0,5 por 100). La segunda es utilizar EES (Apéndice E), que proporciona la solución con la precisión deseada con sólo tres instrucciones (en unidades SI):

```
A2 = 0,036
Astar = 0,0323
A2/Astar = (1 + 0,2*Ma2^2)^3/1,2^3/Ma2
```

Si especificamos que la solución debe ser *subsónica* (por ejemplo, limitando $\mathrm{Ma}_2 < 1$) EES proporciona

$$\mathtt{Ma_2 = 0,6758} \qquad \textit{Resp. (e)}$$

[Si deseamos una solución supersónica (exigiendo $\mathrm{Ma}_2 > 1$) obtenemos $\mathtt{Ma_2 = 1,4001}$, que es la respuesta del apartado (*f*).] La presión viene dada entonces por la fórmula isentrópica

$$p_2 = \frac{p_0}{[1+0,2(0,676)^2]^{3,5}} = \frac{563\ \text{kPa}}{1,358} \Xi 415\ \text{kPa} \qquad \textit{Resp. (e)}$$

www.elsolucionario.net

El apartado (*e*) *no* requiere la existencia de una garganta; el flujo podría simplemente contraerse subsónicamente de A_1 a A_2.

Apartado (*f*)

Suponga en este caso que el flujo es *supersónico*, lo que corresponde a la sección 2*F* de la Figura E9.4. La relación de áreas es ahora $A_2/A^* = 0{,}036/0{,}0323 = 1{,}115$, que se encuentra en el lado *derecho* de la Figura 9.7 o en la parte supersónica de la Tabla B.1 (esta última proporciona una estimación bastante precisa para $\text{Ma}_2 \Xi 1{,}40$). Pero vuelve a haber otras dos opciones más precisas. La primera es usar la Ecuación (9.48*c*), que proporciona la aproximación $\text{Ma}_2 \Xi 1 + 1{,}2(1{,}115 - 1)^{1/2} \Xi 1{,}407$, sólo un 0,5 por 100 por encima del valor real. La segunda es usar EES, que proporcionará una solución muy precisa con las mismas instrucciones que en el apartado (*e*). Así, si especificamos que deseamos una solución *supersónica* (por ejemplo, limitando $\text{Ma}_2 > 1$) EES responde

$$\texttt{Ma}_2 \texttt{ = 1,4001} \qquad \textit{Resp. (f)}$$

La presión viene dada de nuevo por la relación isentrópica para el nuevo valor del número de Mach:

$$p_2 = \frac{p_0}{[1 + 0{,}2(1{,}4001)^2]^{3{,}5}} = \frac{563 \text{ kPa}}{3{,}183} = 177 \text{ kPa} \qquad \textit{Resp. (f)}$$

Nótese que el nivel de la presión en el flujo supersónico es mucho menor que el valor p_2 del apartado (*e*), y que *debe existir* una garganta crítica entre las secciones 1 y 2*F*.

EJEMPLO 9.5

Se desea expansionar aire desde $p_0 = 200$ kPa y $T_0 = 500$ K a través de una tobera hasta alcanzar un número de Mach de salida 2,5. Si el gasto másico debe ser de 3 kg/s, calcule (*a*) el área de la garganta y (*b*) la presión, (*c*) la temperatura, (*d*) la velocidad y (*e*) el área a la salida, suponiendo que el flujo es isentrópico con $\gamma = 1{,}4$.

www.elsolucionario.net

Solución

El área de la garganta se obtiene de la Ecuación (9.47), ya que ésta debe ser sónica para producir una salida supersónica:

$$A^* = \frac{\dot{m}(RT_0)^{1/2}}{0{,}6847 p_0} = \frac{3{,}0[287(500)]^{1/2}}{0{,}6847(200.000)} = 0{,}00830 \text{ m}^2 = \frac{1}{4}\pi D^{*2}$$

o

$$D_{\text{garganta}} = 10{,}3 \text{ cm} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Conocido el número de Mach a la salida, las relaciones de flujo isentrópico proporcionan la presión y la temperatura:

$$p_S = \frac{p_0}{[1 + 0{,}2(2{,}5)^2]^{3{,}5}} = \frac{200.000}{17{,}08} = 11.700 \text{ Pa} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

$$T_S = \frac{T_0}{1 + 0{,}2(2{,}5)^2} = \frac{500}{2{,}25} = 222 \text{ K} \qquad \textit{Resp. (c)}$$

La velocidad de salida se deduce del número de Mach y de la temperatura:

$$V_S = \text{Ma}_S(\gamma RT_S)^{1/2} = 2{,}5[1{,}4(287)(222)]^{1/2} = 2{,}5(299 \text{ m/s}) = 747 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp. (d)}$$

El área de salida se deduce del área de la garganta, del número de Mach a la salida y de la Ecuación (9.45):

$$\frac{A_S}{A^*} = \frac{[1 + 0{,}2(2{,}5)^2]^3}{1{,}728(2{,}5)} = 2{,}64$$

www.elsolucionario.net

o $A_s = 2{,}64A^* = 2{,}64(0{,}0083\ \text{m}^2) = 0{,}0219\ \text{m}^2 = \frac{1}{4}\pi D_s^2$

o $D_S = 16{,}7\ \text{cm}$ *Resp.* (*e*)

Un punto a destacar: el cálculo de A^* no depende en absoluto del valor numérico del número de Mach a la salida. La salida es supersónica; por tanto, la garganta es sónica y está bloqueada y no se necesita información adicional.

9.5. LA ONDA DE CHOQUE NORMAL

Una irreversibilidad habitual en flujos supersónicos internos y externos es la onda de choque normal, esquematizada en la Figura 9.8. Excepto a muy bajas presiones (cercanas al vacío), estas ondas de choque son muy delgadas (unas micras de espesor) y se comportan como discontinuidades en el campo fluido. Seleccionamos un volumen de control inmediatamente por delante y por detrás de la onda, como en la Figura 9.8.

El análisis es idéntico al de la Figura 9.1, esto es, la onda de choque es una onda de presión intensa. Para calcular los cambios de todas las propiedades, no sólo la velocidad de la onda, utilizaremos nuestras relaciones básicas de flujo unidimensional estacionario, tomando la sección 1 aguas arriba y la sección 2 aguas abajo:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{cte} \tag{9.49a}$$

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2 \tag{9.49b}$$

Energía: $$h_1 + \tfrac{1}{2}V_1^2 = h_2 + \tfrac{1}{2}V_2^2 = h_0 = \text{cte} \tag{9.49c}$$

Gas perfecto: $$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2} \tag{9.49d}$$

www.elsolucionario.net

c_p constante: $$h = c_p T \qquad \gamma = \text{cte} \tag{9.49e}$$

Nótese que hemos suprimido las áreas, escribiendo $A_1 \equiv A_2$, lo que está justificado, incluso en conductos de sección variable, por la delgadez de la onda. Los primeros análisis serios de estas relaciones se deben a W. J. M. Rankine (1870) y A. Hugoniot (1887), de ahí su nombre de *relaciones de Rankine-Hugoniot*. Si suponemos conocidas las condiciones aguas arriba (p_1, V_1, ρ_1, h_1, T_1), las Ecuaciones (9.49) nos permiten calcular

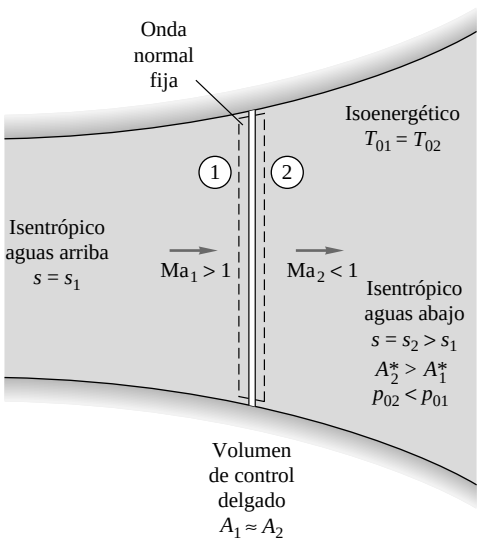


Figura 9.8. Flujo a través de una onda de choque normal fija.

www.elsolucionario.net

las cinco incógnitas (p_2, V_2, ρ_2, h_2, T_2). Debido al término cuadrático de la velocidad, existen dos soluciones, de las cuales sólo es correcta aquella en que $s_2 > s_1$, como indica la segunda ley de la termodinámica.

Las velocidades V_1 y V_2 pueden ser eliminadas de las Ecuaciones (9.49*a*) a (9.49*c*) para llegar a la relación de Rankine-Hugoniot:

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}\right) \tag{9.50}$$

Esta relación contiene únicamente propiedades termodinámicas y es independiente de la ecuación de estado. Introduciendo la ley de los gases perfectos $h = c_p T = \gamma p/[(\gamma - 1)\rho]$, esta relación se puede rescribir en la forma

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \epsilon p_2/p_1}{\epsilon + p_2/p_1} \qquad \epsilon = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \tag{9.51}$$

Podemos comparar esta expresión con la relación de flujo isentrópico, correspondiente a una onda de presión muy débil en un gas perfecto:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma} \tag{9.52}$$

También se puede calcular la variación de entropía a través de la onda de choque para un gas perfecto:

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln\left[\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma}\right] \tag{9.53}$$

www.elsolucionario.net

Suponiendo una cierta intensidad p_2/p_1, podemos calcular la relación de densidades y la variación de entropía para $\gamma = 1{,}4$, que damos en la tabla siguiente:

$\frac{p_2}{p_1}$	ρ_2/ρ_1		$\frac{s_2 - s_1}{c_v}$
	Ec. (9.51)	**Isentrópico**	
0,5	0,6154	0,6095	–0,0134
0,9	0,9275	0,9275	–0,00005
1,0	1,0	1,0	0,0
1,1	1,00704	1,00705	0,00004
1,5	1,3333	1,3359	0,0027
2,0	1,6250	1,6407	0,0134

Vemos que la variación de entropía es negativa cuando la presión decrece al atravesar la onda, lo que viola la segunda ley de la termodinámica. Por tanto, una onda de rarefacción es imposible en un gas perfecto.[3] También vemos que las ondas de choque débiles (p_2/p_1 A 2,0) son prácticamente isentrópicas.

Relaciones en función del número de Mach

En un gas perfecto, los cocientes de las diversas propiedades a través de una onda de choque normal son únicamente funciones de γ y del número de Mach aguas arriba Ma_1. Por ejemplo, si eliminamos ρ_2 y V_2 de las Ecuaciones (9.49*a*) a (9.49*c*) e introducimos $h = \gamma p/[(\gamma - 1)\rho]$, obtenemos

[3] Esto también es cierto para la mayoría de los gases perfectos. Véase la Sección 7.3 de la Referencia 9.

www.elsolucionario.net

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\gamma+1}\left(2\gamma\frac{\rho_1 V_1^2}{p_1} - (\gamma-1)\right) \tag{9.54}$$

Pero para un gas perfecto $\rho_1 V_1^2/p_1 = \gamma V_1^2/(\gamma R T_1) = \gamma \mathrm{Ma}_1^2$, de forma que la Ecuación (9.54) es equivalente a

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\gamma+1}[2\gamma \mathrm{Ma}_1^2 - (\gamma-1)]} \tag{9.55}$$

De esta ecuación vemos que para cualquier γ, $p_2 > p_1$ sólo si $\mathrm{Ma}_1 > 1{,}0$. Así, el número de Mach aguas arriba de una onda de choque normal debe ser supersónico para satisfacer la segunda ley de la termodinámica.

¿Qué ocurre con el número de Mach aguas abajo? Con la identidad $\rho V^2 = \gamma p\ \mathrm{Ma}^2$, para gases perfectos, podemos rescribir la Ecuación (9.49*b*) de la siguiente forma

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1+\gamma \mathrm{Ma}_1^2}{1+\gamma \mathrm{Ma}_2^2} \tag{9.56}$$

que relaciona el cociente de presiones con ambos números de Mach. Igualando las Ecuaciones (9.55) y (9.56) tenemos

$$\boxed{\mathrm{Ma}_2^2 = \frac{(\gamma-1)\,\mathrm{Ma}_1^2 + 2}{2\gamma \mathrm{Ma}_1^2 - (\gamma-1)}} \tag{9.57}$$

Como Ma_1 debe ser supersónico, esta ecuación predice que, para todo $\gamma > 1$, Ma_2 debe ser subsónico. Por tanto, una onda de choque normal decelera bruscamente el flujo de condiciones supersónicas a condiciones subsónicas.

Manipulando aún más las ecuaciones básicas (9.49) podemos obtener numerosas relaciones adicionales que relacionan entre sí las variaciones de las propiedades de un gas perfecto a través de una onda de choque normal:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)\,\mathrm{Ma}_1^2}{(\gamma-1)\,\mathrm{Ma}_1^2 + 2} = \frac{V_1}{V_2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = [2 + (\gamma-1)\,\mathrm{Ma}_1^2]\frac{2\gamma \mathrm{Ma}_1^2 - (\gamma-1)}{(\gamma+1)^2\,\mathrm{Ma}_1^2} \tag{9.58}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \left(\frac{(\gamma+1)\,\mathrm{Ma}_1^2}{2 + (\gamma-1)\,\mathrm{Ma}_1^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma \mathrm{Ma}_1^2 - (\gamma-1)}\right)^{1/(\gamma-1)}$$

De especial interés es el hecho de que el área A^* de la garganta sónica o crítica aumenta al atravesar la onda de choque:

$$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{\mathrm{Ma}_2}{\mathrm{Ma}_1}\left(\frac{2 + (\gamma-1)\,\mathrm{Ma}_1^2}{2 + (\gamma-1)\,\mathrm{Ma}_2^2}\right)^{(1/2)(\gamma+1)/(\gamma-1)} \tag{9.59}$$

Todas estas relaciones están tabuladas en la Tabla B.2 y aparecen representadas en la Figura 9.9 como funciones del número de Mach Ma_1 para $\gamma = 1{,}4$. Vemos que la presión aumenta considerablemente, mientras que la temperatura y la densidad lo hacen de forma moderada. El área crítica A^* de la garganta aumenta suavemente al principio y rápidamente después. Un error frecuente entre los estudiantes en el cálculo de ondas de choque es no tener en cuenta estos cambios de A^*.

www.elsolucionario.net

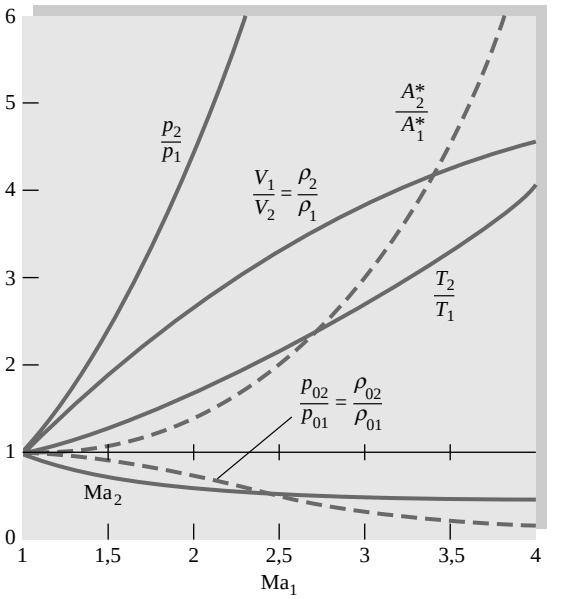


Figura 9.9. Salto de las magnitudes fluidas a través de una onda de choque normal, para $\gamma = 1{,}4$.

La temperatura de remanso permanece invariante, pero la presión y la densidad de remanso decrecen en la misma proporción; esto es, el flujo a través de la onda de choque es adiabático pero no isentrópico. Otros principios básicos que gobiernan el comportamiento de las ondas de choque pueden ser resumidos así:

1. El flujo es supersónico aguas arriba y subsónico aguas abajo.
2. En gases perfectos (y también en los fluidos reales, excepto en condiciones termodinámicas extremas) las ondas de rarefacción son imposibles, y únicamente puede haber ondas de compresión.
3. La entropía aumenta a través de una onda de choque, con la consecuente caída de la presión y la densidad de remanso y aumento del área crítica A^*.
4. Las ondas de choque débiles son prácticamente isentrópicas.

Las ondas de choque normales se forman en conductos bajo condiciones transitorias, como por ejemplo en tubos de choque, y en flujos estacionarios para ciertos rangos de la presión aguas abajo. La Figura 9.10*a* muestra una onda de choque en una tobera supersónica. El flujo es de izquierda a derecha. Las ondas de choque oblicuas que aparecen delante de la onda de choque normal se deben a la rugosidad de la pared de la tobera e indican que el flujo es supersónico aguas arriba. Nótese la ausencia de estas ondas de Mach (véase Sección 9.10) en la región subsónica aguas abajo.

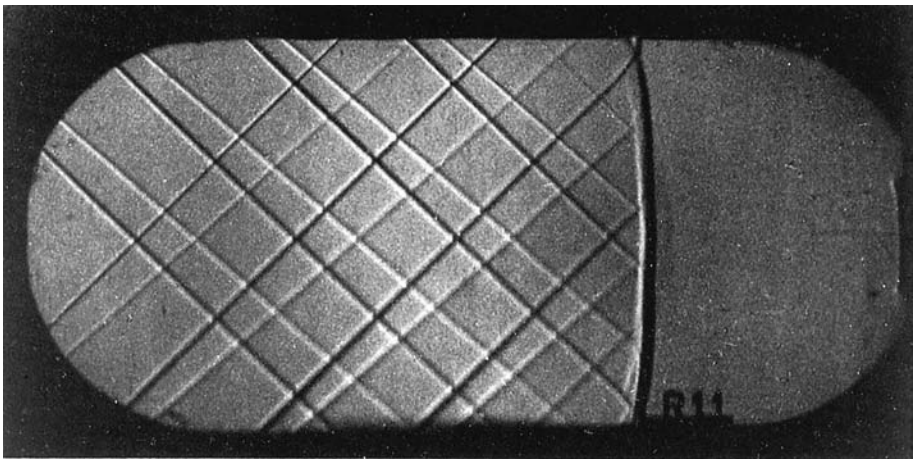
Las ondas de choque normales no sólo aparecen en flujo supersónico en conductos, sino también en una gran variedad de flujos supersónicos externos. Un ejemplo es el flujo supersónico alrededor de un cuerpo romo, como muestra la Figura 9.10*b*. La onda de choque delantera es curva, con una parte esencialmente normal a la corriente incidente. Esta región normal de la onda de choque satisface las relaciones de variación de las propiedades expuestas en esta sección. El flujo detrás de la onda de choque y cerca del morro del cuerpo es por tanto subsónico y está a una temperatura relativamente alta $T_2 > T_1$, de modo que la transferencia convectiva de calor es especialmente alta en esta región.

Las partes no normales de la onda de choque frontal de la Figura 9.10*b* satisfacen las relaciones de onda de choque oblicua que se verán en la Sección 9.9. Nótense también las ondas oblicuas de recompresión a los lados del cuerpo. Lo que ha sucedido es que el flujo subsónico frontal se ha acelerado en las esquinas volviéndose de nuevo supersónico y a baja presión, y debe aproximarse a las condiciones de alta presión que existen aguas abajo atravesando una segunda onda de choque.

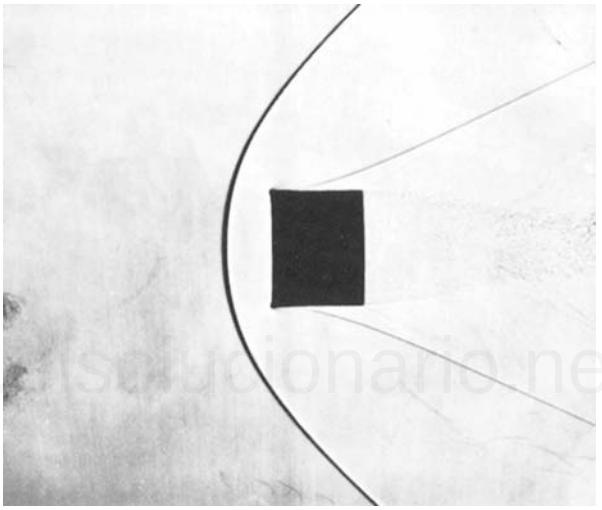
Es de señalar la estructura fina de la estela turbulenta en la parte de atrás del cuerpo en la Figura 9.10*b*. La capa límite turbulenta a lo largo de las paredes laterales del cuerpo es también fácilmente visible.

El análisis de un flujo supersónico tridimensional complejo como el de la Figura 9.10 queda más allá de los objetivos de este libro. Para más información vea, por ejemplo, el Capítulo 9 de la Referencia 9 o el Capítulo 16 de la Referencia 5.

www.elsolucionario.net



(*a*)



(*b*)

Figura 9.10. Las ondas de choque normales se forman tanto en flujos internos como externos. (*a*) Onda de choque normal en un conducto; nótese la estructura de ondas de Mach a la izquierda (aguas arriba), indicando que el flujo es supersónico. (*Cortesía del U.S. Air Force Arnold Engineering Development Center.*) (*b*) El flujo supersónico alrededor de un cuerpo romo crea una onda de choque normal desprendida delante del cuerpo; el espesor aparente de la onda de choque y la curvatura de las esquinas del cuerpo se deben a efectos ópticos. (*Cortesía del U.S. Army Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground.*)

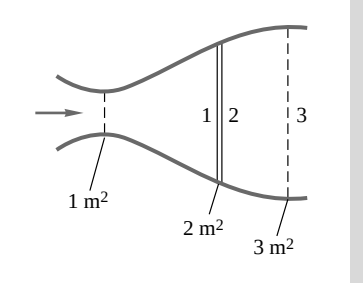
Ondas de choque normales móviles

El análisis precedente de una onda de choque fija también es aplicable a una onda de choque móvil si invertimos la transformación utilizada en la Figura 9.1. Para simular que el fluido aguas arriba está en reposo, movemos la onda de choque de la Figura 9.8 hacia la izquierda con una velocidad V_1; esto es, fijamos nuestro sistema de referencia al volumen de control que se mueve con la onda de choque. Entonces el fluido aguas abajo aparecerá moviéndose hacia la izquierda con una velocidad menor $V_1 - V_2$ siguiendo la onda de choque. Las propiedades termodinámicas no se ven alteradas por esta transformación, de modo que todas nuestras Ecuaciones (9.50) a (9.59) siguen siendo válidas.

EJEMPLO 9.6

Desde un depósito donde $p = 300$ kPa y $T = 500$ K fluye aire a través de la garganta de la Figura E9.6 hacia la sección 1, donde hay una onda de choque normal. Calcule (*a*) p_1, (*b*) p_2, (*c*) p_{02}, (*d*) A_2^*, (*e*) p_{03}, (*f*) A_3^*, (*g*) p_3 y (*h*) T_{03}.

www.elsolucionario.net



E9.6

Solución

- *Diagrama del sistema.* Se ha representado en la Figura E9.6. La onda de choque normal se encuentra entre las secciones 1 y 2.
- *Consideraciones*. El flujo es isentrópico antes y después de la onda de choque. p_0 y ρ_0 disminuyen a través de la onda.
- *Procedimiento*. Tras comprobar que la garganta es *sónica*, calcularemos la evolución entre las secciones 1, 2 y 3.
- *Valores de las propiedades.* Para el aire, $R = 287\ \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})$, $\gamma = 1{,}40$ y $c_p = 1005\ \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})$. La presión de remanso a la entrada de 300 kPa es constante hasta el punto 1.
- *Solución del apartado* (*a*). No puede existir una onda de choque a no ser que Ma_1 sea supersónico. Por tanto, la garganta es sónica y se encuentra bloqueada: $A_{\text{garganta}} = A_1^* = 1\ \text{m}^2$. El cociente de áreas proporciona Ma_1, para $\gamma = 1{,}4$, de la Ecuación (9.45):

$$\frac{A_1}{A_1^*} = \frac{2\ \text{m}^2}{1\ \text{m}^2} = 2{,}0 = \frac{1}{\text{Ma}_1}\frac{(1 + 0{,}2\ \text{Ma}_1^2)^3}{1{,}728} \quad \text{proporciona} \quad \text{Ma}_2 = 2{,}1972$$

www.elsolucionario.net

Una precisión de cuatro dígitos puede requerir iteración o el uso de EES. La correlación (9.48*c*) proporcionaría $\text{Ma}_1 \approx 1 + 1{,}2(2{,}0 - 1)^{1/2} \approx 2{,}20$, una estimación excelente. Si se interpolara linealmente en la Tabla B.1 se obtendría $\text{Ma}_1 \approx 2{,}197$, que también es aceptable. La presión en la sección 1 se deriva de la relación isentrópica (9.28):

$$p_1 = \frac{p_{01}}{(1 + 0{,}2\ \text{Ma}_1^2)^{3{,}5}} = \frac{300\ \text{kPa}}{[1 + 0{,}2(2{,}197)^2]^{3{,}5}} = 28{,}2\ \text{kPa} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

- *Apartados* (*b, c, d*). La presión p_2 se obtiene de la ecuación de onda de choque normal (9.55) o de la Tabla B.2:

$$p_2 = \frac{p_1}{(\gamma + 1)}[2\gamma \text{Ma}_1^2\ \Phi(\gamma\ \Phi 1)] = \frac{28{,}2\ \text{kPa}}{(1{,}4 + 1)}[2(1{,}4)(2{,}197)^2\ \Phi(1{,}4\ \Phi 1)] = 154\ \text{kPa} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

Análogamente, para $\text{Ma}_1 \approx 2{,}20$ la Tabla B.2 proporciona $p_{02}/p_{01} \approx 0{,}628$ (EES da 0,6294) y $A_2^*/A_1^* \approx 1{,}592$ (EES da 1,5888). Así pues, tenemos

$$p_{02} \approx 0{,}628 p_{01} = 0{,}628(300\ \text{kPa}) \approx 188\ \text{kPa} \qquad \textit{Resp. (c)}$$

$$A_2^* = 1{,}59 A_1^* = 1{,}59(1{,}0\ \text{m}^2) \approx 1{,}59\ \text{m}^2 \qquad \textit{Resp. (d)}$$

- *Comentario*. Para calcular A_2^* directamente, sin usar la Tabla B.2, necesitaríamos calcular previamente $\text{Ma}_2 \approx 0{,}547$ de la Ecuación (9.57), puesto que en la Ecuación (9.59) intervienen tanto Ma_1 como Ma_2.
- *Apartados* (*e, f*). El flujo de 2 a 3 es isentrópico (pero con una entropía mayor que aguas arriba de la onda de choque); por tanto

$$p_{03} = p_{02} \approx 188\ \text{kPa} \qquad \textit{Resp. (e)}$$

$$A_3^* = A_2^* \approx 1{,}59\ \text{m}^2 \qquad \textit{Resp. (f)}$$

www.elsolucionario.net

- *Apartados* (*g*, *h*). El flujo es adiabático en todo el conducto, de modo que la temperatura de remanso es constante:

$$T_{03} = T_{02} = T_{01} = 500 \text{ K} \qquad \textit{Resp. } (h)$$

El cociente de áreas, empleando la *nueva* área sónica, proporciona el número de Mach en la sección 3:

$$\frac{A_3}{A_3^{\rangle}} = \frac{3 \text{ m}^2}{1{,}59 \text{ m}^2} = 1{,}89 = \frac{1}{\text{Ma}_3}\frac{(1+0{,}2\ \text{Ma}_3^2)^3}{1{,}728} \quad \text{proporciona} \quad \text{Ma}_3 \,\Xi\, 0{,}33$$

Con EES hubiéramos obtenido $\text{Ma}_3 = 0{,}327$, y usando nuestra correlación (9.48*a*), $\text{Ma}_3 \,\Xi\, 0{,}329$. Finalmente, conocida p_{02}, la Ecuación (9.28) proporciona p_3:

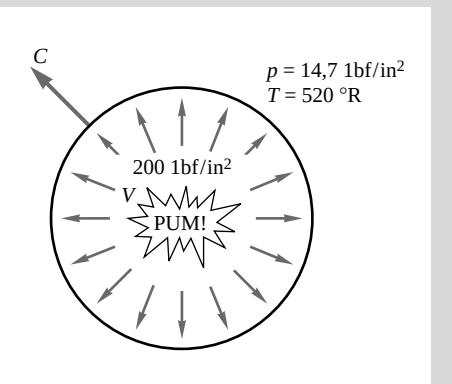
$$p_3 = \frac{p_{02}}{(1+0{,}2\ \text{Ma}_3^2)^{3{,}5}} \,\Xi\, \frac{188 \text{ kPa}}{[1+0{,}2(0{,}33)^2)]^{3{,}5}} \,\Xi\, 174 \text{ kPa} \qquad \textit{Resp. (g)}$$

- *Comentarios*. EES proporciona $p_3 = 175$ kPa, luego vemos que tanto la Tabla B.2 como las expresiones (9.48) resultan satisfactorias para este tipo de problemas. Un conducto con una onda de choque normal requiere la aplicación directa de relaciones algebraicas para gases perfectos y cierta noción sobre qué fórmulas deben aplicarse en función de las propiedades conocidas.

EJEMPLO 9.7

Una explosión en aire, $\gamma = 1{,}4$, genera una onda de choque esférica que se propaga radialmente en aire en reposo y en condiciones normales. En el instante mostrado en la Figura E9.7, la presión detrás de la onda es de 200 lbf/in^2. Calcule (*a*) la velocidad *C* de la onda de choque y (*b*) la velocidad del aire *V* justo detrás de ésta.

www.elsolucionario.net



E9.7

Solución

Apartado (*a*)

A pesar de la geometría esférica el flujo a través de la onda de choque se mueve perpendicularmente a ésta; por ello se pueden utilizar las relaciones (9.50) a (9.59) para ondas de choque normales. Fijando nuestro volumen de control a la onda móvil, vemos que las condiciones apropiadas en el problema, aplicables a la Figura 9.8, son

$$C = V_1 \qquad p_1 = 14{,}7 \text{ lbf/in}^2 \qquad T_1 = 520 \text{ °R}$$
$$V = V_1 - V_2 \qquad p_2 = 200 \text{ lbf/in}^2$$

www.elsolucionario.net

La velocidad del sonido justo delante de la onda de choque es $a_1 = 49T_1^{1/2} = 1117$ ft/s. Podemos calcular Ma_1 a partir del salto de presiones:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{200 \text{ lbf/in}^2}{14,7 \text{ lbf/in}^2} = 13,61$$

De la Ecuación (9.55) o de la Tabla B.2

$$13,61 = \frac{1}{2,4}(2,8 \text{ Ma}_1^2 \Phi 0,4) \quad \text{o} \quad \text{Ma}_1 = 3,436$$

Entonces, por definición de número de Mach, tenemos

$$C = V_1 = \text{Ma}_1 a_1 = 3,436(1117 \text{ ft/s}) = 3840 \text{ ft/s} \qquad \textit{Resp.} (a)$$

Apartado (*b*)

Para calcular V_2 necesitamos la temperatura o la velocidad del sonido en el interior de la onda de choque. Como $\text{Ma}_1 = 3,436$ es conocido, de la Ecuación (9.58) o de la Tabla B.2 obtenemos $T_2/T_1 = 3,228$. Entonces

$$T_2 = 3,228T_1 = 3,228(520°\text{R}) = 1679°\text{R}$$

A temperaturas tan elevadas deberíamos tener en cuenta que el gas no es perfecto o utilizar las tablas [16], pero no lo haremos. Simplemente estimaremos mediante la ecuación de la energía (9.34) para un gas perfecto que

$$V_2^2 = 2c_p(T_1 - T_2) + V_1^2 = 2(6010)(520 - 1679) + (3840)^2 = 815.000$$

o

$$V_2 \Xi 903 \text{ ft/s}$$

Nótese que no nos hemos preocupado aquí de calcular Ma_2, igual a 0,454, ni $a_2 \Xi 49T_2^{1/2} = 2000$ ft/s.

Finalmente, la velocidad del aire detrás de la onda de choque es

$$V = V_1 - V_2 = 3840 - 903 \Xi 2940 \text{ ft/s} \qquad \textit{Resp.} (b)$$

Vemos que una explosión potente genera un viento breve pero muy intenso al pasar.[4]

9.6. OPERACIÓN DE TOBERAS CONVERGENTES Y DIVERGENTES

Combinando las relaciones de flujo isentrópico y ondas de choque normales con el concepto de bloqueo sónico, podremos indicar las características de las toberas convergentes y divergentes.

Tobera convergente

Consideremos en primer lugar la tobera convergente de la Figura 9.11*a*. Aguas arriba hay un depósito con una presión de remanso p_0. El flujo se induce bajando la presión exterior, o *ambiente*, p_a aguas abajo por debajo de p_0, lo que origina la secuencia de situaciones *a* hasta *e* que se muestran en las Figuras 9.11*b* y *c*.

Si p_a es moderadamente baja, casos *a* y *b*, la presión en la garganta es mayor que el valor crítico p^* que haría sónica la garganta. El flujo es subsónico en toda la tobera y la presión p_s en el chorro de salida es igual a la presión ambiente p_a. El gasto másico que predice la teoría isentrópica resulta ser menor que el valor crítico $\dot{m}_{\text{máx}}$, como muestra la Figura 9.11*c*.

[4] Éste es el principio de los *tubos de choque*, en los cuales una explosión controlada genera un flujo breve a muy altos números de Mach, que se capta con instrumentos de respuesta rápida. Véase, por ejemplo, la Sección 4.5 de la Referencia 2.

www.elsolucionario.net

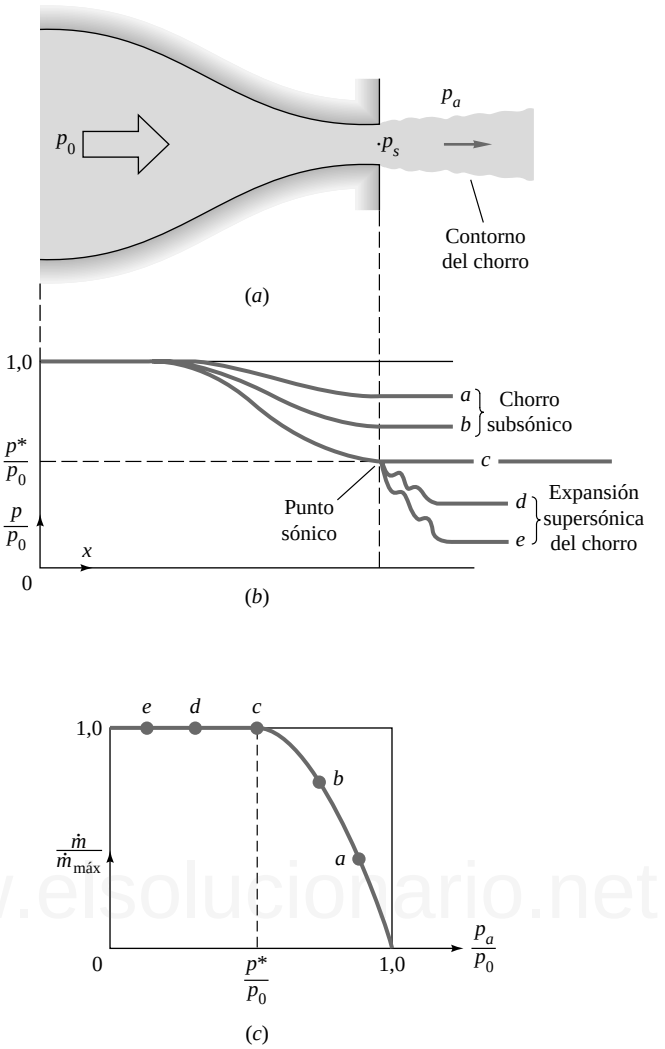


Figura 9.11. Funcionamiento de una tobera convergente: (*a*) geometría de la tobera mostrando las presiones características; (*b*) distribuciones de presión originadas por distintas presiones ambiente; (*c*) gasto másico en función de la presión ambiente.

En el caso *c*, la presión ambiente es exactamente igual a la presión crítica p^* de la garganta. La garganta se hace sónica, el chorro de salida es sónico, con $p_s = p_a$, y el gasto másico es máximo, con el valor dado por la Ecuación (9.46). El flujo aguas arriba de la garganta es subsónico y obedece a las relaciones isentrópicas basadas en la relación de áreas local $A(x)/A^*$ y la Tabla B.1.

Finalmente, si p_a disminuye por debajo de p^*, casos *d* y *e*, la tobera ya no responde porque el flujo está bloqueado en su valor máximo. La garganta sigue siendo sónica con $p_s = p^*$ y la distribución de presión es la misma que en el caso *c*, como muestra la Figura 9.11*b*. A la salida el chorro se expande supersónicamente y la presión baja de p^* hasta p_a. La estructura del chorro es compleja y tridimensional y no la mostramos aquí. Al ser supersónico, el chorro no puede enviar ninguna señal aguas arriba para variar las condiciones de bloqueo del flujo en la tobera.

Si el depósito es grande o está alimentado por un compresor, y si la cámara de descarga es grande o está suplementada con una bomba de vacío, el flujo en la tobera será estacionario o casi estacionario. En cualquier otro caso, el flujo irá disminuyendo a medida que el depósito se descarga a través de la tobera, p_0 disminuirá y p_a aumentará, y el flujo irá cambiando desde el caso *e* hasta el *a*. Los cálculos de descargas suelen hacerse suponiendo flujo casi estacionario isentrópico, utilizando los valores instantáneos de $p_0(t)$ y $p_a(t)$.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 9.8

Una tobera convergente tiene 6 cm^2 de área de garganta y condiciones de remanso de 120 kPa y 400 K. Calcule la presión de salida y el gasto másico si la presión ambiente es de (*a*) 90 kPa y (*b*) 45 kPa. Suponga $\gamma = 1{,}4$.

Solución

De la Ecuación (9.32), con $\gamma = 1{,}4$, tenemos que la presión en la garganta crítica (sónica) vale

$$\frac{p^*}{p_0} = 0{,}5283 \quad \text{o} \quad p^* = (0{,}5283)(120\ \text{kPa}) = 63{,}4\ \text{kPa}$$

Si la presión ambiente es menor, el flujo en la tobera estará bloqueado.

Apartado (*a*)

Para $p_a = 90$ kPa > p^*, el flujo es subsónico y no está bloqueado. La presión a la salida es $p_s = p_a$. El número de Mach a la salida se obtiene de la relación isentrópica (9.35) o de la Tabla B.1:

$$\text{Ma}_S^2 = 5\left[\left(\frac{p_0}{p_S}\right)^{2/7} - 1\right] = 5\left[\left(\frac{120}{90}\right)^{2/7} - 1\right] = 0{,}4283 \quad \text{Ma}_S = 0{,}654$$

Para determinar el gasto másico podríamos obtener de forma secuencial Ma$_s$, T_s, a_s, V_s y ρ_s, para calcular finalmente $\rho_s A_s V_s$. Sin embargo, como la presión local es conocida en este apartado resulta más apropiado utilizar la «función adimensional de gasto másico» de la Ecuación (9.47). Con $p_s/p_0 = 90/120 = 0{,}75$, obtenemos

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{Ap_0} = \sqrt{\frac{2(1{,}4)}{0{,}4}(0{,}75)^{2/1{,}4}[1 - (0{,}75)^{0{,}4/1{,}4}]} = 0{,}6052$$

www.elsolucionario.net

luego
$$\dot{m} = 0{,}6052\frac{(0{,}0006)(120.000)}{\sqrt{287(400)}} = 0{,}129\ \text{kg/s} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

para
$$p_S = p_a = 90\ \text{kPa} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Apartado (*b*)

Para $p_a = 45$ kPa < p^*, el flujo está bloqueado, como en el caso *d* en la Figura 9.11*b*. La presión de *salida* es sónica:

$$p_S = p^* = 63{,}4\ \text{kPa} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

El gasto másico máximo (bloqueado) se obtiene de la Ecuación (9.46*b*):

$$\dot{m} = \dot{m}_{\text{máx}} = \frac{0{,}6847 p_0 A_S}{(RT_0)^{1/2}} = \frac{0{,}6847(120.000)(0{,}0006)}{[287(400)]^{1/2}} = 0{,}145\ \text{kg/s} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

Cualquier presión ambiente inferior a 63,4 kPa producirá el mismo gasto másico bloqueado. Nótese que el incremento en un 50 por 100 del número de Mach de salida, de 0,654 a 1,0, sólo aumenta el gasto másico en un 12 por 100, de 0,128 a 0,145 kg/s.

Tobera convergente-divergente

Consideremos ahora el caso de la tobera convergente-divergente de la Figura 9.12*a*. Si la presión ambiente p_a es suficientemente baja, habrá flujo supersónico en la parte divergente y pueden darse varias situa-

www.elsolucionario.net

ciones con ondas de choque, como se indica en la Figura 9.12*b*. Veamos qué ocurre al reducir gradualmente la presión ambiente.

En los casos *A* y *B* de la Figura 9.12*b*, la presión ambiente no es lo suficientemente baja como para provocar flujo sónico en la garganta, y el flujo es subsónico en toda la tobera. La distribución de presiones se calcula a partir de las relaciones isentrópicas subsónicas con cambios de área, por ejemplo, de la Tabla B.1. La presión de salida es $p_s = p_a$ y el chorro es subsónico.

En el caso *C*, la relación de áreas A_s/A_g es igual a la crítica A_s/A^* para el Ma_s subsónico en la Tabla B.1. La garganta se hace sónica y el gasto másico alcanza un máximo como se ve en la Figura 9.12*c*. El resto de la tobera es subsónica, incluyendo el chorro de salida, y $p_s = p_a$.

Pasemos momentáneamente a la curva *H*. Aquí p_a es tal que p_a/p_0 corresponde exactamente con la relación de áreas crítica A_s/A^* para un Ma_s *supersónico* en la Tabla B.1. El flujo divergente es enteramente supersónico, incluyendo el chorro de salida, y $p_s = p_a$. Esta situación se denomina *tobera adaptada* y corresponde a la presión de diseño de un túnel de viento supersónico o de un motor de cohete.

Volvamos ahora atrás y supongamos que p_a está entre *C* y *H*, lo cual es imposible según la teoría de flujo isentrópico. Veamos lo que ocurre en los casos *D* a *F* de la Figura 9.12*b*. La garganta sigue estando bloqueada en los valores sónicos y podemos hacer que $p_s = p_a$ situando una onda de choque normal en el lugar adecuado de la sección divergente, dando lugar a un *difusor subsónico* que lleve la presión al valor correcto. El gasto másico sigue siendo máximo, según la Figura 9.12*c*. En el caso *F* la onda de choque normal está exactamente en la sección de salida. En la configuración *G* ninguna onda de choque normal es capaz de pro-

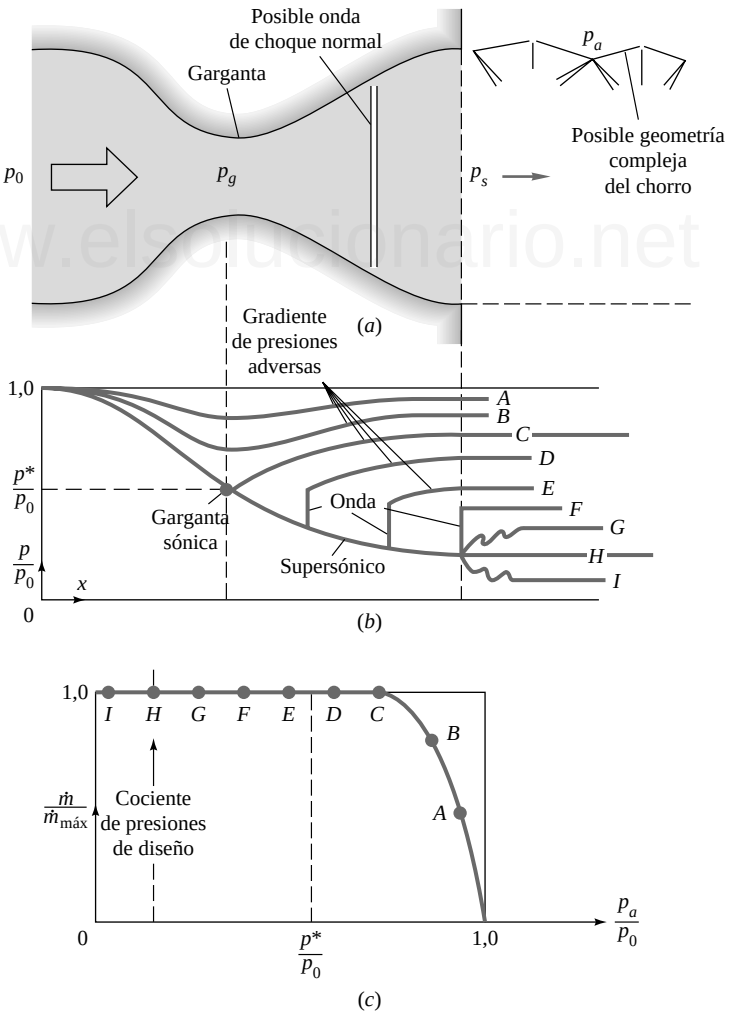


Figura 9.12. Funcionamiento de una tobera convergente-divergente: (*a*) geometría de la tobera con las posibles configuraciones del flujo; (*b*) distribuciones de presión originadas por distintas presiones ambiente; (*c*) gasto másico en función de la presión ambiente.

www.elsolucionario.net

ducir la expansión necesaria, y por ello el flujo se comprime en el exterior mediante una serie compleja de ondas de choque oblicuas hasta que se alcanza p_a.

Finalmente, en la configuración *I*, p_a es menor que la presión de diseño, curva *H*, pero la tobera está bloqueada y no responde. El chorro de salida se expande en una serie compleja de ondas supersónicas hasta que se alcanza la baja presión ambiente. Para más detalles sobre estas configuraciones fuera de diseño, véase, por ejemplo, la Sección 5.4 de la Referencia 7.

Nótese que para p_a menor que la del caso *C*, el flujo en la tobera es supersónico y por tanto la garganta no puede recibir ninguna señal del exterior. El flujo permanece bloqueado y la garganta no tiene información de las condiciones exteriores.

También conviene advertir que la idea del acoplamiento con la onda de choque normal está idealizada. Aguas abajo de la onda aparece un gradiente adverso de presión que puede producir la separación de la capa límite en la pared. La capa desprendida interacciona fuertemente con el núcleo del flujo bloqueándolo (recuérdese la Figura 6.27) y suele producir una serie de ondas de compresión bidimensionales débiles en lugar de una única onda de choque normal (véanse, por ejemplo, las págs. 292 y 293 de la Referencia 9 para más detalles).

EJEMPLO 9.9

Una tobera convergente-divergente (Figura 9.12*a*) tiene un área de garganta de 0,002 m^2 y un área de salida de 0,008 m^2. Las condiciones de remanso del aire son p_0 = 1000 kPa y T_0 = 500 K. Calcule la presión de salida y el gasto másico para (*a*) la condición de diseño, y la presión de salida y el gasto másico si (*b*) p_a Ξ 300 kPa y si (*c*) p_a Ξ 900 kPa. Suponga γ = 1,4.

Solución

Apartado (*a*)

La condición de diseño corresponde al flujo isentrópico supersónico con relación de áreas A_s/A_g = 0,008/0,002 = 4,0. Podemos encontrar el número de Mach de diseño mediante iteración en la fórmula para cocientes de área (9.45), usando EES, o mediante la curva de correlación (9.48*d*):

$$\mathrm{Ma}_{S,\text{diseño}} \Xi [216(4,0) - 254(4,0)^{2/3}]^{1/5} \Xi 2,95 \quad (\text{exacto} = 2,9402)$$

Como puede verse, la precisión proporcionada por la correlación es satisfactoria. La relación de presiones de diseño se obtiene de la Ecuación (9.34):

$$\frac{p_0}{p_S} = [1 + 0,2(2,95)^2]^{3,5} = 34,1$$

o

$$p_{S,\text{diseño}} = \frac{1000 \text{ kPa}}{34,1} = 29,3 \text{ kPa} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Como la garganta es sónica en las condiciones de diseño, podemos aplicar la Ecuación (9.46*b*):

$$\dot{m}_{\text{diseño}} = \dot{m}_{\text{máx}} = \frac{0,6847 p_0 A_g}{(RT_0)^{1/2}} = \frac{0,6847(10^6 \text{ Pa})(0,002 \text{ m}^2)}{[287(500)]^{1/2}} = 3,61 \text{ kg/s} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Apartado (*b*)

Para p_a = 300 kPa estamos claramente por debajo de la condición subsónica isentrópica *C* de la Figura 9.12*b*, pero incluso podemos estar por debajo del caso *F*, en que hay una onda de choque normal a la salida, o sea, podemos estar en el caso *G*, donde tenemos ondas de choque oblicuas aguas abajo de la sección de salida. En el caso *G*, p_s = $p_{S,\text{diseño}}$ = 29,3 kPa, ya que no ha habido ninguna onda hasta la salida. Para verlo, calculamos la condición *F* suponiendo una onda de choque normal a la salida con Ma_1 = 2,95, esto es, el número de Mach de diseño justo aguas arriba de la onda de choque. De la Ecuación (9.55)

www.elsolucionario.net

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2,4}[2,8(2,95)^2\ \Phi 0,4] = 9,99$$

o $$p_2 = 9,99p_1 = 9,99p_{S,\text{diseño}} = 293 \text{ kPa}$$

Como es menor que p_a = 300 kPa, hay una onda de choque un poco antes de la salida (condición *E*). El flujo a la salida es subsónico e igual a la presión ambiente:

$$p_S = p_a = 300 \text{ kPa} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

Además $$\dot{m} = \dot{m}_{\text{máx}} = 3,61 \text{ kg/s} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

La garganta es sónica y está bloqueada y el gasto másico es máximo.

Apartado (*c*)

Finalmente, para p_a = 900 kPa, estamos cerca de la condición *C*, así que calculamos Ma_s y p_s en el caso *C* para comparar. De nuevo A_s/A_g = 4,0 para esta condición, con un Ma_s subsónico estimado a partir de la correlación (9.48*a*):

$$\text{Ma}_S(C) \Xi \frac{1 + 0,27/(4,0)^2}{1,728(4,0)} = 0,147 \quad (\text{exacto} = 0,14655)$$

La relación de presión isentrópica en esta condición es:

$$\frac{p_0}{p_S} = [1 + 0,2(0,147)^2]^{3,5} = 1,0152$$

o $$p_S = \frac{1000}{1,0152} = 985 \text{ kPa}$$

www.elsolucionario.net

La presión ambiente de 900 kPa es menor que este valor, correspondiendo, pues, a la condición *D* de la Figura 9.12*b*. Por tanto, en este caso habrá una onda de choque normal justo aguas abajo de la garganta y ésta quedará bloqueada:

$$p_S = p_a = 900 \text{ kPa} \qquad \dot{m} = \dot{m}_{\text{máx}} = 3,61 \text{ kg/s} \qquad \textit{Resp.}\ (c)$$

Con esta relación de áreas tan grande la presión a la salida debe ser mayor que 985 kPa para tener flujo subsónico en la garganta y un gasto másico menor que el máximo.

9.7. FLUJO COMPRESIBLE EN CONDUCTOS CON FRICCIÓN[5]

La Sección 9.4 ha mostrado el efecto de las variaciones de área sobre un flujo compresible despreciando la fricción y la transferencia de calor. Ahora podríamos añadir estos efectos y considerar la interacción entre ellos, como se hace en textos avanzados (véase, por ejemplo, Referencia 5, Capítulo 8). En lugar de esto, a título de introducción elemental, esta sección trata solamente del efecto de la fricción despreciando las variaciones de área y la transferencia de calor. Las hipótesis básicas son:

1. Flujo adiabático estacionario unidimensional.
2. Gas perfecto con calores específicos constantes.
3. Conducto recto de área constante.
4. El trabajo motor (de posibles partes móviles) y las variaciones de energía potencial son despreciables.
5. El esfuerzo en la pared responde a correlaciones de coeficientes de fricción de Darcy.

[5] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

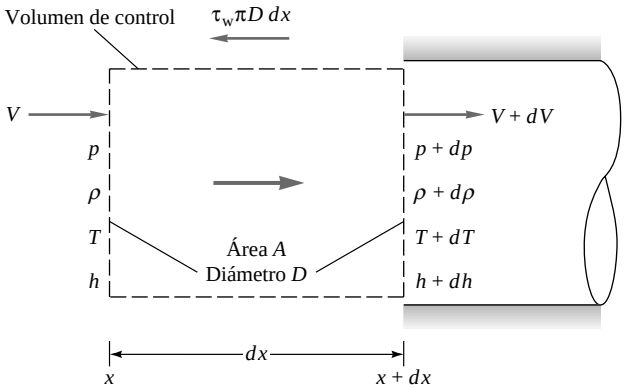


Figura 9.13. Volumen de control infinitesimal para el flujo en conductos de sección constante con fricción.

Así, estamos estudiando un problema de fricción en un tubo, tipo Moody, pero con grandes variaciones de energía cinética, entalpía y presión.

Este tipo de flujo en conductos, con área constante, entalpía de remanso constante, gasto másico constante, pero cantidad de movimiento variable (a consecuencia de la fricción), se denomina *flujo de Fanno*, en honor a Gino Fanno, un ingeniero italiano nacido en 1882 que estudió por primera vez este tipo de flujos. Para valores dados del gasto másico y la entalpía de remanso, el gráfico que representa la entalpía frente a la entropía para todos los posibles estados del flujo, subsónico o supersónico, se denomina *curva de Fanno*. Véanse los Problemas P9.94 y P9.111 para ejemplos de curvas de Fanno.

Consideremos el volumen de control de área A y longitud dx de la Figura 9.13. El área es constante, pero las demás propiedades del flujo (p, ρ, T, h, V) pueden variar con x. Aplicando las tres leyes de conservación a este volumen de control obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales:

www.elsolucionario.net

Continuidad:
$$\cancel{V} = \frac{\dot{m}}{A} = G = \text{cte}$$

o
$$\frac{d\cancel{\rho}}{\cancel{\rho}} + \frac{dV}{V} = 0 \tag{9.60a}$$

Cantidad de movimiento según x: $pA - (p + dp)A - \tau_w \pi D\, dx = \dot{m}(V + dV - V)$

o
$$dp + \frac{4\cancel{\tau}_w dx}{D} + \cancel{V}\, dV = 0 \tag{9.60b}$$

Energía:
$$h + \tfrac{1}{2}V^2 = h_0 = c_p T_0 = c_p \mathrm{T} + \tfrac{1}{2}V^2$$

o
$$c_p\, dT + V\, dV = 0 \tag{9.60c}$$

Como estas tres ecuaciones tienen cinco incógnitas, p, ρ, T, V y τ_w, necesitamos dos relaciones adicionales. Una de ellas es la ley de los gases perfectos:

$$p = \cancel{\rho} RT \quad \text{o} \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\cancel{\rho}}{\cancel{\rho}} + \frac{dT}{T} \tag{9.61}$$

Para eliminar τ_w, suponemos que el esfuerzo de fricción local en la pared puede obtenerse a partir del valor local del coeficiente de fricción de Darcy f:

$$\tau_w = \tfrac{1}{8} f \rho V^2 = \tfrac{1}{8} f \gamma p\, \mathrm{Ma}^2 \tag{9.62}$$

www.elsolucionario.net

donde la última forma procede de la definición de la velocidad del sonido para un gas perfecto $a^2 = \gamma p/\rho$. En la práctica f está relacionado con el número de Reynolds local y la rugosidad de la pared, por ejemplo, mediante el diagrama de Moody, Figura 6.13.

Las Ecuaciones (9.60) y (9.61) son ecuaciones diferenciales de primer orden que, complementadas con datos sobre el coeficiente de fricción, pueden ser integradas, desde una sección de entrada 1, donde p_1, T_1, V_1, etc., son conocidas, para determinar $p(x)$, $T(x)$, etc., a lo largo del conducto. Es prácticamente imposible eliminar todas las variables menos una para tener una sola ecuación diferencial, por ejemplo para $p(x)$, aunque todas las ecuaciones se pueden reescribir en función del número de Mach $\text{Ma}(x)$ y del coeficiente de fricción, utilizando la siguiente definición del número de Mach:

$$V^2 = \text{Ma}^2 \gamma RT$$

o

$$\frac{2\,dV}{V} = \frac{2d\,\text{Ma}}{\text{Ma}} + \frac{dT}{T} \tag{9.63}$$

Flujo adiabático

Eliminando las variables entre las Ecuaciones (9.60) a (9.63) obtenemos las siguientes relaciones prácticas:

$$\frac{dp}{p} = \Phi\Im\text{Ma}^2 \frac{1+(\Im\Phi 1)\text{Ma}^2}{2(1\Phi\text{Ma}^2)} f\frac{dx}{D} \tag{9.64a}$$

$$\frac{d\Leftarrow}{\Leftarrow} = \Phi\frac{\Im\text{Ma}^2}{2(1\Phi\text{Ma}^2)} f\frac{dx}{D} = \Phi\frac{dV}{V} \tag{9.64b}$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{d\Leftarrow_0}{\Leftarrow_0} = \Phi\frac{1}{2}\Im\text{Ma}^2 f\frac{dx}{D} \tag{9.64c}$$

$$\frac{dT}{T} = \Phi\frac{\Im(\Im\Phi 1)\,\text{Ma}^4}{2(1\Phi\text{Ma}^2)} f\frac{dx}{D} \tag{9.64d}$$

$$\frac{d\text{Ma}^2}{\text{Ma}^2} = \Im\text{Ma}^2 \frac{1+\frac{1}{2}(\Im\Phi 1)\,\text{Ma}^2}{1\Phi\text{Ma}^2} f\frac{dx}{D} \tag{9.64e}$$

Todas ellas, excepto dp_0/p_0, tienen el factor $1 - \text{Ma}^2$ en el denominador, de modo que muestran, al igual que las fórmulas de variación de área de la Figura 9.5, que los flujos subsónicos y supersónicos tienen efectos opuestos:

Propiedad	Subsónico	Supersónico
p	Disminuye	Aumenta
ρ	Disminuye	Aumenta
V	Aumenta	Disminuye
p_0, ρ_0	Disminuye	Disminuye
T	Disminuye	Aumenta
Ma	Aumenta	Disminuye
Entropía	Aumenta	Aumenta

www.elsolucionario.net

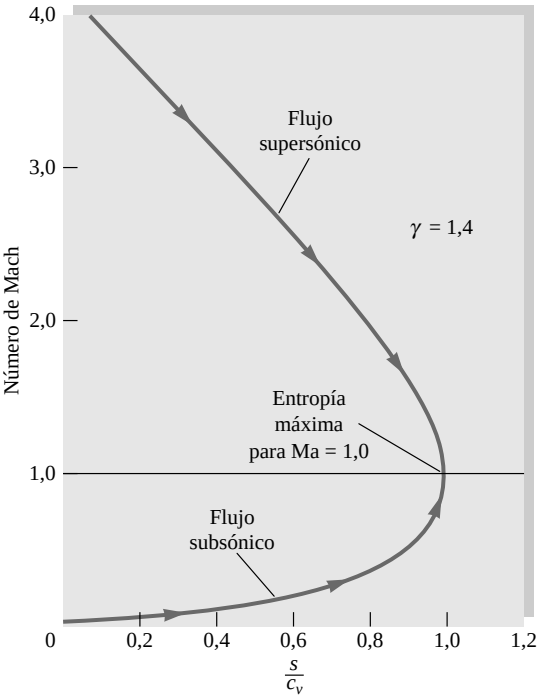


Figura 9.14. El flujo adiabático y con fricción en un conducto con sección constante siempre tiende a Ma = 1 para satisfacer el segundo principio de la termodinámica. La curva calculada es independiente del valor del coeficiente de fricción.

Hemos añadido a esta lista que la entropía aumenta a lo largo del conducto tanto en flujo subsónico como supersónico, como consecuencia de la segunda ley de la termodinámica para flujo adiabático. Por la misma razón, la presión y densidad de remanso disminuyen.

El parámetro clave en esta discusión es el número de Mach. Sea el flujo a la entrada subsónico o supersónico, el número de Mach tiende siempre aguas abajo hacia Ma = 1, ya que es la evolución en la cual aumenta la entropía. Calculando la presión y la densidad con las Ecuaciones (9.64*a*) y (9.64*b*), y la entropía con la Ecuación (9.53), el resultado puede ser representado en función del número de Mach para $\gamma = 1{,}4$, como se muestra en la Figura 9.14. La máxima entropía se da para Ma = 1, y por ello la segunda ley exige que el flujo en el conducto tienda continuamente hacia el punto sónico. Como p_0 y ρ_0 decrecen continuamente a lo largo del conducto a consecuencia de las pérdidas por fricción (no isentrópico), éstas no son útiles como propiedades de referencia. En su lugar, las propiedades sónicas p^*, ρ^*, T^*, p_0^* y ρ_0^* son las magnitudes constantes de referencia más apropiadas en el flujo adiabático en conductos. Con la teoría podemos calcular los cocientes p/p^*, T/T^*, etc., en función del número de Mach local y el efecto integrado de la fricción.

Para obtener fórmulas útiles, abordamos primero la Ecuación (9.64*e*), que relaciona el número de Mach con la fricción. Separando variables e integrando obtenemos:

$$\int_0^{L^*} f\frac{dx}{D} = \int_{\mathrm{Ma}^2}^{1,0} \frac{1-\mathrm{Ma}^2}{\mathfrak{I}\mathrm{Ma}^4[1+\frac{1}{2}(\mathfrak{I}\Phi 1)\,\mathrm{Ma}^2]}\,d\,\mathrm{Ma}^2 \tag{9.65}$$

El límite superior es el punto sónico, sea o no alcanzado en el conducto. El límite inferior es situado arbitrariamente en $x = 0$, donde el número de Mach es Ma. El resultado de la integración es

$$\boxed{\frac{\bar{f}L^*}{D} = \frac{1\Phi\mathrm{Ma}^2}{\mathfrak{I}\mathrm{Ma}^2} + \frac{\mathfrak{I}+1}{2\mathfrak{I}}\ln\frac{(\mathfrak{I}+1)\,\mathrm{Ma}^2}{2+(\mathfrak{I}\Phi 1)\,\mathrm{Ma}^2}} \tag{9.66}$$

donde $\bar{f}$ es el coeficiente de fricción medio entre 0 y L^*. En la práctica siempre se considera un f medio, y no se tienen en cuenta las pequeñas variaciones del número de Reynolds a lo largo del conducto. Si el con-

www.elsolucionario.net

ducto es de sección no circular D se sustituye por el diámetro hidráulico D_h = (4 × área)/perímetro, como en la Ecuación (6.59).

La Ecuación (9.66) está tabulada en función del número de Mach en la Tabla B.3. La longitud L^* es la longitud necesaria para que un flujo a número de Mach Ma alcance las condiciones sónicas. Muchos problemas se refieren a conductos cortos en los que el flujo nunca llega a hacerse sónico; en ellos utilizaremos diferencias entre longitudes «máximas», o sónicas, tabuladas. Por ejemplo, la longitud ΔL necesaria para pasar de Ma_1 a Ma_2 viene dada por

$$\bar{f}\frac{\Delta L}{D} = \left(\frac{\bar{f}L^*}{D}\right)_{1} - \left(\frac{\bar{f}L^*}{D}\right)_{2} \tag{9.67}$$

Así se evita la necesidad de tabulaciones adicionales para conductos cortos.

Se recomienda estimar el coeficiente de fricción $\bar{f}$ utilizando el diagrama de Moody (Figura 6.13) con valores medios del número de Reynolds y de la rugosidad del conducto. Los datos disponibles [23] sobre fricción de flujos compresibles en conductos muestran buena concordancia con el diagrama de Moody en flujo subsónico, pero en supersónico los valores medidos son hasta un 50 por 100 menores que los dados por el coeficiente de fricción equivalente de Moody.

EJEMPLO 9.10

A través de un conducto de 2 cm de diámetro fluye aire subsónica y adiabáticamente. El coeficiente de fricción medio vale 0,024. ¿Cuál es la longitud de conducto necesaria para acelerar el flujo de $\text{Ma}_1 = 0{,}1$ a $\text{Ma}_2 = 0{,}5$? ¿Qué longitud adicional se precisaría para alcanzar $\text{Ma}_3 = 1{,}0$? Suponga $\gamma = 1{,}4$.

Solución

www.elsolucionario.net

Utilizamos la Ecuación (9.67) con valores de $\bar{f}L^*/D$ obtenidos de la Ecuación (9.66) o de la Tabla B.3:

$$\bar{f}\frac{\Delta L}{D} = \frac{0{,}024\,\Delta L}{0{,}02\text{ m}} = \left(\frac{\bar{f}L^*}{D}\right)_{\text{Ma}=0{,}1} - \left(\frac{\bar{f}L^*}{D}\right)_{\text{Ma}=0{,}5}$$
$$= 66{,}9216 - 1{,}0691 = 65{,}8525$$

Luego
$$\Delta L = \frac{65{,}8525(0{,}02\text{ m})}{0{,}024} = 55\text{ m} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

La longitud adicional $\Delta L'$ para pasar de Ma = 0,5 a Ma = 1,0 se obtiene directamente de la Tabla B.2:

$$f\frac{\Delta L'}{D} = \left(\frac{fL^*}{D}\right)_{\text{Ma}=0{,}5} = 1{,}0691$$

o
$$\Delta L' = L\rangle_{\text{Ma}=0{,}5} = \frac{1{,}0691(0{,}02\text{ m})}{0{,}024} = 0{,}9\text{ m} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

Esto es muy típico en este tipo de cálculos: se precisan 55 m para acelerar el flujo hasta Ma = 0,5 y sólo 0,9 m más para alcanzar condiciones sónicas.

Las fórmulas para otras propiedades del flujo a lo largo del conducto se pueden deducir de las Ecuaciones (9.64). La Ecuación (9.64*e*) puede usarse para eliminar $f\,dx/D$ de las demás relaciones, dando, por ejemplo, dp/p en función sólo de Ma y $(d\text{Ma}^2)/\text{Ma}^2$. Por conveniencia en la tabulación de los resultados, cada expresión se integra desde (p, Ma) hasta el punto sónico (p^*, 1,0). Los resultados integrados son

www.elsolucionario.net

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{\text{Ma}}\left(\frac{2 + (\gamma - 1)\,\text{Ma}^2}{\gamma + 1}\right)^{1/2} \tag{9.68a}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{V^*}{V} = \frac{1}{\text{Ma}}\left(\frac{2 + (\gamma - 1)\,\text{Ma}^2}{\gamma + 1}\right)^{1/2} \tag{9.68b}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{a^2}{a^{*2}} = \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)\,\text{Ma}^2} \tag{9.68c}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{\rho_0}{\rho_0^*} = \frac{1}{\text{Ma}}\left(\frac{2 + (\gamma - 1)\,\text{Ma}^2}{\gamma + 1}\right)^{(1/2)(\gamma+1)/(\gamma-1)} \tag{9.68d}$$

Todas estas relaciones están también tabuladas en la Tabla B.3. Para hallar las variaciones entre los puntos Ma_1 y Ma_2 que no son sónicos, se utilizan productos de estos cocientes. Por ejemplo,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p^*}\frac{p^*}{p_1} \tag{9.69}$$

ya que p^* es un valor de referencia constante del flujo.

EJEMPLO 9.11

Suponga, para el flujo del Ejemplo 9.10, que para $\text{Ma}_1 = 0{,}1$ tenemos $p_1 = 600$ kPa y $T_1 = 450$ K. En la sección 2 aguas abajo, $\text{Ma}_2 = 0{,}5$. Calcule (*a*) p_2, (*b*) T_2, (*c*) V_2 y (*d*) p_{02}.

www.elsolucionario.net

Solución

Como información preliminar calculamos V_1 y p_{01} a partir de los datos conocidos:

$$V_1 = \text{Ma}_1\, a_1 = 0{,}1[(1{,}4)(287)(450)]^{1/2} = 0{,}1(425 \text{ m/s}) = 42{,}5 \text{ m/s}$$

$$p_{01} = p_1(1 + 0{,}2\,\text{Ma}_1^2)^{3{,}5} = (600 \text{ kPa})[1 + 0{,}2(0{,}1)^2]^{3{,}5} = 604 \text{ kPa}$$

Ahora entramos en la Tabla B.3 o en la Ecuación (9.68) para obtener:

Sección	Ma	p/p^*	T/T^*	V/V^*	p_0/p_0^*
1	0,1	10,9435	1,1976	0,1094	5,8218
2	0,5	2,1381	1,1429	0,5345	1,3399

Con estos cocientes calculamos todas las propiedades aguas abajo:

$$p_2 = p_1\frac{p_2/p^*}{p_1/p^*} = (600 \text{ kPa})\frac{2{,}1381}{10{,}9435} = 117 \text{ kPa} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

$$T_2 = T_1\frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = (450 \text{ K})\frac{1{,}1429}{1{,}1976} = 429 \text{ K} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

$$V_2 = V_1\frac{V_2/V^*}{V_1/V^*} = (42{,}5 \text{ m/s})\frac{0{,}5345}{0{,}1094} = 208\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \textit{Resp. (c)}$$

www.elsolucionario.net

$$p_{02} = p_{01}\frac{p_{02}/p_0^{\rangle}}{p_{01}/p_0^{\rangle}} = (604\text{ kPa})\frac{1{,}3399}{5{,}8218} = 139\text{ kPa} \qquad \textit{Resp. (d)}$$

Obsérvese la reducción del 77 por 100 de la presión de remanso a consecuencia de la fricción. Las fórmulas son seductoras, de modo que compruebe sus resultados por otros medios. Por ejemplo, compruebe que $p_{02} = p_2(1 + 0{,}2\ \text{Ma}_2^2)^{3{,}5}$.

Comentario sobre el software. En este tipo de problemas el uso de EES resulta un tanto laborioso, pues requiere que se introduzcan dos veces las relaciones básicas para la fricción en un tubo, Ecuaciones (9.68), una para la sección 1 y otra para la sección 2. Además, deben calcularse V_1, a_1 y p_{01} como acabamos de mostrar. Lo interesante es que una vez hecho esto el número de Mach deja de ser el parámetro dominante, y uno podría especificar p_2 o T_2 o V_2 o p_{02} y EES proporcionaría inmediatamente la solución completa en la sección 2.

Bloqueo debido a la fricción

La teoría que se acaba de exponer predice que, en un flujo adiabático con fricción en un conducto de sección constante, el flujo aguas abajo tiende hacia el punto sónico independientemente del número de Mach Ma_1 a la entrada. Existe una cierta longitud $L^*(\text{Ma}_1)$ para la cual el número de Mach a la salida es exactamente la unidad. El conducto está entonces bloqueado.

Pero ¿qué ocurre si la longitud real L es mayor que esta longitud «máxima» L^* predicha por la teoría? En ese caso las condiciones del flujo deben cambiar, y hay dos posibilidades.

Entrada subsónica. Si $L > L^*(\text{Ma}_1)$, el flujo se ralentiza hasta que se alcanza un número de Mach en la entrada Ma_2 tal que $L = L^*(\text{Ma}_2)$. El flujo en la salida es sónico, y el gasto másico se ha reducido por *bloqueo de fricción*. Aumentos ulteriores en la longitud del conducto continuarán disminuyendo el Ma en la entrada y el gasto másico.

Entrada supersónica. En la Tabla B.3 vemos que la fricción tiene un efecto muy importante sobre el flujo supersónico en un conducto. Incluso un número de Mach infinito en la entrada se reduce a condiciones sónicas en tan sólo 41 diámetros para $\bar{f} = 0{,}02$. En la Figura 9.15 se muestran algunos valores numéricos tí-

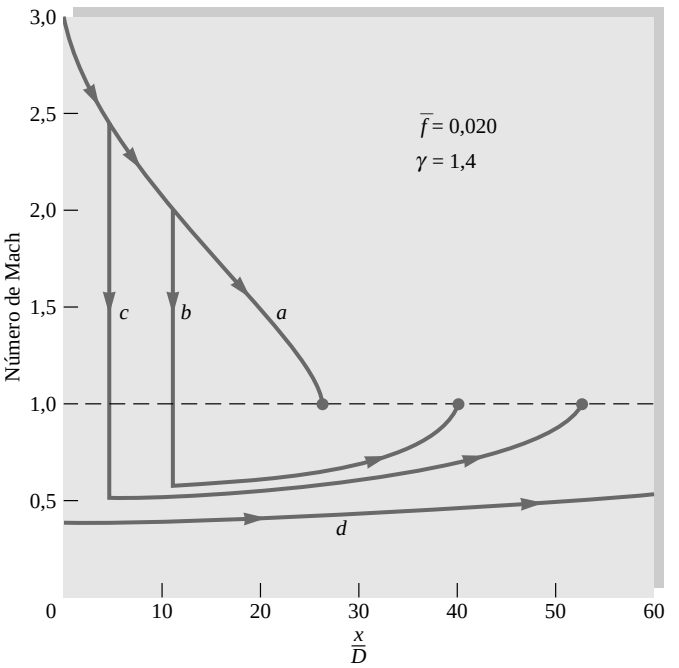


Figura 9.15. Comportamiento del flujo en un conducto con la condición a la entrada Ma = 3,0: (*a*) L/D A 26, flujo supersónico en todo el conducto; (*b*) $L/D = 40 > L^*/D$, onda de choque normal donde Ma = 2,0, con flujo subsónico posterior que se acelera hasta condiciones sónicas a la salida; (*c*) $L/D = 53$, la onda de choque se forma ahora donde Ma = 2,5; (*d*) $L/D > 63$, flujo totalmente subsónico y bloqueado a la salida.

www.elsolucionario.net

picos, suponiendo Ma = 3,0 en la entrada y $\bar{f}$ = 0,02. Para esta condición, L^* = 26 diámetros. Si L aumenta por encima de 26D, el flujo no se bloqueará, sino que aparecerá una onda de choque normal en el lugar preciso para que el flujo subsónico con fricción resultante sea sónico a la salida. La Figura 9.15 muestra dos ejemplos, para L/D = 40 y 53. A medida que aumenta la longitud, la onda de choque necesaria se desplaza aguas arriba hasta que, para la Figura 9.15, la onda alcanza la entrada para L/D = 63. Si L aumenta aún más, la onda de choque se desplazará aguas arriba de la entrada hacia la tobera supersónica que alimenta el conducto. A pesar de todo, el gasto másico sigue siendo el mismo que para el conducto corto, debido a que presumiblemente la tobera de alimentación tiene todavía una garganta sónica. Eventualmente, un conducto muy largo puede provocar el bloqueo de la garganta de la tobera de alimentación, reduciendo, por tanto, el gasto másico. Así, la fricción supersónica cambia la configuración del flujo si $L > L^*$, pero no bloquea el flujo hasta que L es mucho mayor que L^*.

EJEMPLO 9.12

A la entrada de un conducto, por el que circula aire, se tiene p_0 = 200 kPa, T_0 = 500 K y V_1 = 100 m/s. El coeficiente de fricción es 0,02. Calcule (*a*) la longitud máxima del conducto para estas condiciones, (*b*) el gasto másico si la longitud del conducto es de 15 m y (*c*) el gasto másico reducido si L = 30 m.

Solución

Apartado (*a*)

En primer lugar calculamos

$$T_1 = T_0 \Phi \frac{\frac{1}{2}V_1^2}{c_p} = 500 \Phi \frac{\frac{1}{2}(100\ \text{m/s})^2}{1005\ \text{m}^2/(\text{s}^2\ \Delta\text{K})} = 500 \Phi 5 = 495\ \text{K}$$

$$a_1 = (\Im RT_1)^{1/2}\ \Xi\ 20(495)^{1/2} = 445\ \text{m/s}$$

Luego

$$\text{Ma}_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{100}{445} = 0,225$$

Para este Ma_1, de la Ecuación (9.66) o interpolando en la Tabla B.3,

$$\frac{\bar{f}L^*}{D} = 11,0$$

La máxima longitud posible del conducto para estas condiciones a la entrada es

$$L^* = \frac{(\bar{f}L^*/D)D}{\bar{f}} = \frac{11,0(0,03\ \text{m})}{0,02} = 16,5\ \text{m} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Apartado (*b*)

Dado que L = 15 m es menor que L^*, el conducto no está bloqueado y el gasto másico se obtiene a partir de las condiciones a la entrada:

$$\Leftarrow_{01} = \frac{p_{01}}{RT_0} = \frac{200.000\ \text{Pa}}{287(500\ \text{K})} = 1,394\ \text{kg/m}^3$$

$$\Leftarrow_1 = \frac{\Leftarrow_{01}}{[1 + 0,2(0,225)^2]^{2,5}} = \frac{1,394}{1,0255} = 1,359\ \text{kg/m}^3$$

www.elsolucionario.net

de donde $$\dot{m} = \rho_1 A V_1 = (1{,}359\ \text{kg/m}^3)\left(\frac{\pi}{4}\right)(0{,}03\ \text{m})^2 (100\ \text{m/s})$$

$$= 0{,}0961\ \text{kg/s} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

Apartado (*c*)

Como $L = 30$ m es mayor que L^*, el conducto debe estar bloqueado de manera que $L = L^*$, lo que corresponde a un Ma_1 inferior a la entrada:

$$L^* = L = 30\ \text{m}$$

$$\frac{fL^*}{D} = \frac{0{,}02(30\ \text{m})}{0{,}03\ \text{m}} = 20{,}0$$

Resulta difícil interpolar en la Tabla B.3 para $fL/D = 20$ e imposible invertir la Ecuación (9.66) para obtener el número de Mach sin necesidad de una laboriosa iteración. Pero resulta trivial resolver la Ecuación (9.66) para obtener el número de Mach usando EES mediante las siguientes tres instrucciones:[6]

```
k = 1,4
fLD = 20
fLD = (1 – Ma^2)/k/Ma^2 + (k + 1)/2/k*LN((k + 1)*Ma^2/(2 + (k - 1)*Ma^2))
```

Especificando simplemente Ma < 1 en el menú «Variable Info», EES responde

$$\text{Ma}_{choked} = 0{,}174 \quad \text{(23 percent less)}$$

$$T_{1,new} = \frac{T_0}{1 + 0{,}2(0{,}174)^2} = 497\ \text{K}$$

$$a_{1,new} = 20(497\ \text{K})^{1/2} = 446\ \text{m/s}$$

$$V_{1,new} = \text{Ma}_1 a_1 = 0{,}174(446) = 77{,}6\ \text{m/s}$$

$$\rho_{1,new} = \frac{\rho_{01}}{[1 + 0{,}2(0{,}174)^2]^{2{,}5}} = 1{,}373\ \text{kg/m}^3$$

$$\dot{m}_{new} = \rho_1 A V_1 = 1{,}373\left(\frac{\pi}{4}\right)(0{,}03)^2 (77{,}6)$$

$$= 0{,}0753\ \text{kg/s} \quad \text{(22 percent less)} \qquad \textit{Resp. (c)}$$

Pérdidas localizadas en flujo compresible

En el flujo incompresible en conductos, véase la Ecuación (6.78), el coeficiente de pérdida K es el cociente entre la pérdida de carga ($\Delta p/\rho g$) y la altura cinética o de velocidad ($V^2/2g$) en el conducto. Este valor es inadecuado para el flujo compresible, donde ρ y V ya no son constantes. Benedict [24] sugiere que se relacione la pérdida de presión estática ($p_1 - p_2$) con las condiciones aguas abajo usando un *coeficiente de pérdida estática* K_S:

$$K_S = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho_2 V_2^2} \tag{9.70}$$

[6] En la literatura anglosajona la relación de calores específicos suele denotarse con la letra *k*. Por este motivo tanto las entradas y salidas del programa EES que aparecen en el texto como los ejemplos incluidos en el CD que acompaña a este libro utilizan la nomenclatura sajona (*N. del T.*).

www.elsolucionario.net

Benedict [24] proporciona ejemplos de pérdidas compresibles en contracciones y expansiones súbitas. En ausencia de datos experimentales, se podría emplear el valor $K_S \Xi K$ dado en la Sección 6.9 como primera aproximación.

Flujo isotermo con fricción: conductos largos

La hipótesis de flujo adiabático con fricción es apropiada para flujos con alta velocidad en conductos cortos. Para flujos en conductos largos, como los gaseoductos de gas natural, el estado del gas se aproxima más a un flujo isotermo. El análisis es el mismo, excepto que la ecuación de la energía (9.60*c*) se sustituye por la relación

$$T = \text{cte} \qquad dT = 0$$

De nuevo es posible escribir las variaciones de todas las propiedades en función del número de Mach. La integración de la relación entre el número de Mach y el coeficiente de fricción da

$$\frac{\bar{f}L_{\text{máx}}}{D} = \frac{1 \Phi \Im \text{Ma}^2}{\Im \text{Ma}^2} + \ln(\Im \text{Ma}^2) \tag{9.71}$$

que es la analogía isoterma a la Ecuación (9.66) del flujo adiabático.

Esta relación proporciona el resultado interesante de que $L_{\text{máx}}$ no se hace cero en el punto sónico, sino en $\text{Ma}_{\text{crít}} = 1/\gamma^{1/2} = 0{,}845$, para $\gamma = 1{,}4$. El flujo a la entrada, sea subsónico o supersónico, tiende aguas abajo hacia este valor límite $1/\gamma^{1/2}$ del número de Mach. Si la longitud L del tubo es mayor que el valor $L_{\text{máx}}$ que proporciona la Ecuación (9.71), un flujo subsónico se bloqueará a un Ma_1 y gasto másico menores y un flujo supersónico sufrirá un ajuste mediante una onda de choque normal similar a la de la Figura 9.15.

La salida isoterma bloqueada no es sónica, y por ello el uso del asterisco es inadecuado. Sean p', ρ' y V' las propiedades en el punto de bloqueo $L = L_{\text{máx}}$. El análisis isotermo proporciona entonces las siguientes relaciones de las propiedades del flujo con el número de Mach:

$$\frac{p}{p\nabla} = \frac{1}{\text{Ma}\,\Im^{1/2}} \qquad \frac{V}{V\nabla} = \frac{\Leftarrow\nabla}{\Leftarrow} = \text{Ma}\,\Im^{1/2} \tag{9.72}$$

En textos avanzados se pueden encontrar el análisis completo y diversos ejemplos (véase, por ejemplo, Referencia 5, Sección 6.4).

Gasto másico para una caída de presión dada

Un interesante subproducto del análisis isotermo es la relación explícita entre la caída de presión y el flujo másico en el conducto. En flujo adiabático, el problema usual de predecir el flujo másico para una caída de presión dada sólo puede resolverse mediante un proceso de iteración laborioso. En flujo isotermo, sin embargo, podemos sustituir $dV/V = dp/p$ y $V^2 = G^2/[p/(RT)]^2$ en la Ecuación (9.63) para obtener

$$\frac{2p\,dp}{G^2 RT} + f\frac{dx}{D}\Phi\frac{2\,dp}{p} = 0$$

Como G^2RT es constante en flujo isotermo, esta expresión se puede integrar entre $(x, p) = (0, p_1)$ y (L, p_2) por ser una diferencial exacta:

$$G^2 = \left|\frac{\dot{m}}{A}\right|^2 = \frac{p_1^2 \Phi p_2^2}{RT[\bar{f}L/D + 2\ln(p_1/p_2)]} \tag{9.73}$$

De esta manera en flujo isotermo tenemos una expresión explícita para el gasto másico en función de la caída de presiones, sin necesidad de números de Mach o tablas.

www.elsolucionario.net

El autor no conoce de ninguna analogía directa de la Ecuación (9.73) para flujo adiabático. Sin embargo, en varios libros de texto [Referencia 2, pág. 212] se deriva la siguiente relación adiabática que involucra velocidades en vez de presiones:

$$V_1^2 = \frac{a_0^2[1 - (V_1/V_2)^2]}{k\bar{f}L/D + (k+1)\ln(V_2/V_1)} \tag{9.74}$$

donde $a_0 = (kRT_0)^{1/2}$ es la velocidad del sonido de remanso, constante en flujo adiabático. Esta relación se puede combinar con la ecuación de la continuidad $V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$ para conductos de sección constante y con la siguiente combinación de la ley de los gases perfectos y la ecuación de la energía en flujo adiabático:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_2}{p_1}\left[\frac{2a_0^2 - (k-1)V_1^2}{2a_0^2 - (k-1)V_2^2}\right] \tag{9.75}$$

Si nos dan las presiones de entrada y salida, no conoceremos ni V_1 ni V_2 de antemano. Si no se dispone de EES, recomendamos únicamente el siguiente método sencillo. Empiece tomando $a_0 = a_1$ y haga el término entre corchetes de la Ecuación (9.75) igual a 1,0. Resuelva la Ecuación (9.75) para obtener una primera estimación de V_1/V_2 y utilice este valor en la Ecuación (9.74) para obtener una estimación mejor de V_1. Utilice V_1 para obtener un nuevo valor de a_0 y repita el proceso. El método debería converger en unas pocas iteraciones.

Las Ecuaciones (9.73) y (9.74) tienen un defecto: eliminado el número de Mach no se puede reconocer el fenómeno del bloqueo por fricción. Por tanto, se debe calcular el número de Mach Ma_2 a la salida para comprobar que no es mayor que $1/k^{1/2}$ en flujo isotermo o 1,0 en flujo adiabático. Con el siguiente ejemplo vamos a ilustrar ambos tipos de flujo, el adiabático y el isotermo.

EJEMPLO 9.13

www.elsolucionario.net

En un conducto de 1 cm de diámetro y 1,2 m de longitud entra aire a $p_1 = 220$ kPa y $T_1 = 300$ K. Si $\bar{f} = 0{,}025$ y la presión de salida es $p_2 = 140$ kPa, estime el gasto másico para (*a*) un flujo isotermo y (*b*) un flujo adiabático.

Solución

Apartado (*a*)

Si el flujo es isotermo se puede utilizar la Ecuación (9.73) sin necesidad de iterar:

$$\frac{\bar{f}L}{D} + 2\ln\frac{p_1}{p_2} = \frac{(0{,}025)(1{,}2\text{ m})}{0{,}01\text{ m}} + 2\ln\frac{220}{140} = 3{,}904$$

$$G^2 = \frac{(220.000\text{ Pa})^2}{[287\text{ m}^2/(\text{s}^2\cdot\text{K})](300\text{ K})(3{,}904)} = 85.700 \quad \text{o} \quad G = 293\text{ kg/(s}\cdot\text{m}^2)$$

Como $A = (\pi/4)(0{,}01\text{ m})^2 = 7{,}85 \times 10^{-5}\text{ m}^2$, la estimación para el gasto másico en flujo isotermo es

$$\dot{m} = GA = (293)(7{,}85 \times 10^{-5}) = 0{,}0230\text{ kg/s} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Finalmente comprobamos que el número de Mach a la salida no está bloqueado:

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT} = \frac{140.000}{(287)(300)} = 1{,}626\text{ kg/m}^3 \qquad V_2 = \frac{G}{\rho_2} = \frac{293}{1{,}626} = 180\text{ m/s}$$

o

$$\text{Ma}_2 = \frac{V_2}{\sqrt{kRT}} = \frac{180}{[1{,}4(287)(300)]^{1/2}} = \frac{180}{347} = 0{,}52$$

Este valor está bastante por debajo del bloqueo, luego la solución es correcta.

www.elsolucionario.net

Apartado (*b*)

Si el flujo es adiabático podemos iterar a mano, a la antigua usanza, utilizando las Ecuaciones (9.74) y (9.75) y la definición de la velocidad del sonido de remanso. Hace algunos años sólo habríamos podido hacer eso, trabajando laboriosamente. Sin embargo, hoy en día EES hace que la manipulación de ecuaciones resulte innecesaria, aunque aún es necesario programar las ecuaciones y dar una buena estimación inicial. Si ignoramos resultados superfluos como T_2 y V_2, basta con trece instrucciones. En primer lugar, especificamos las propiedades físicas conocidas (en unidades SI):

```
k = 1,4
P1 = 220000
P2 = 140000
T1 = 300
```

A continuación, aplicamos las relaciones adiabáticas de fricción, Ecuaciones (9.66) y (9.67), a los puntos 1 y 2:

```
fLD1 = (1 – Ma1^2)/k/Ma1^2 + (k + 1)/2/k*LN((k + 1)*Ma1^2/(2 +
(k – 1)*Ma1^2))
fLD2 = (1 – Ma2^2)/k/Ma2^2 + (k + 1)/2/k*LN((k + 1)*Ma2^2/(2 +
(k – 1)*Ma2^2))
DeltafLD = 0,025*1,2/0,01
fLD1 = fLD2 + DeltafLD
```

Y aplicamos también la fórmula para el cociente de presión (9.68*a*) a estos mismos puntos:

```
P1/Pstar = ((k + 1)/(2 + (k – 1)*Ma1^2))^0,5/Ma1
P2/Pstar = ((k + 1)/(2 + (k – 1)*Ma2^2))^0,5/Ma2
```

Éstas son relaciones *adiabáticas*, por lo que no hace falta calcular magnitudes como T_0 o a_0 a no ser que queramos sus valores como resultados adicionales.

Las diez instrucciones anteriores forman un sistema algebraico cerrado que EES resolverá para obtener Ma_1 y Ma_2. Como el problema pregunta por el gasto másico, completaremos el sistema:

```
V1 = Ma1*sqrt(1,4*287*T1)
Rho1 = P1/287/T1
Mdot = Rho1*(pi/4*0,01^2)*V1
```

Si no imponemos condiciones adicionales, EES dice que no puede resolver el sistema, porque por defecto permite que todas las variables tomen valores entre $-\div$ y $+\div$. Por tanto, entramos en el menú «Variable Info» y limitamos Ma_1 y Ma_2 entre 0 y 1 (flujo subsónico). EES sigue diciendo que no es capaz de resolver el sistema e indica que se necesita una mejor estimación inicial. De hecho, EES utiliza por defecto el valor 1,0 como estimación inicial para las variables, que es demasiado grande para los números de Mach. Si se propone 0,8 o incluso 0,5 como valor inicial para los números de Mach EES sigue quejándose por una razón sutil: dado que $f\Delta L/D = 0{,}025(1{,}2/0{,}01) = 3{,}0$, Ma_1 no puede ser mayor que 0,36 (véase Tabla B.3). Así pues, tomando finalmente 0,3 o 0,4 como estimación inicial para Ma_1 y Ma_2, EES proporciona la solución:

$$Ma_1 = 0{,}3343 \quad Ma_2 = 0{,}5175 \quad \frac{fL}{D_1} = 3{,}935 \quad \frac{fL}{D_2} = 0{,}9348$$

$$p^* = 67.892 \text{ Pa} \quad \dot{m} = 0{,}0233 \text{ kg/s}$$ *Resp. (b)*

Aunque la programación sea complicada, la utilización de EES resulta ventajosa frente a la iteración manual; y por supuesto podemos guardar el programa para usarlo en otra ocasión con valores distintos.

www.elsolucionario.net

9.8. FLUJO EN CONDUCTOS SIN FRICCIÓN Y CON ADICIÓN DE CALOR[7]

La adición o sustracción de calor tiene un efecto interesante sobre los flujos compresibles. En textos avanzados [por ejemplo, la Referencia 5, Capítulo 8] se considera el efecto combinado de la transferencia de calor, la fricción y las variaciones de área en un conducto. Aquí nos restringiremos al análisis de la transferencia de calor sin fricción en un conducto de sección constante.

Este tipo de flujo en un conducto, con sección constante, cantidad de movimiento constante, gasto másico constante, pero entalpía de remanso variable (debido a la transferencia de calor) se denomina *flujo de Rayleigh* en honor a John William Strutt, Lord Rayleigh (1842-1919), que fue un famoso físico e ingeniero. Para un gasto másico y una cantidad de movimiento dadas, la representación de la entalpía frente a la entropía para todos los posibles regímenes del flujo, subsónico o supersónico, forma la *curva de Rayleigh*. Véanse los Problemas P9.110 y P9.111 para ejemplos de curvas de Rayleigh.

Consideremos el volumen de control elemental de la Figura 9.16. Entre las secciones 1 y 2 se añade (o se extrae) una cantidad de calor δQ a cada masa elemental δm que pasa a través del volumen. En ausencia de fricción y de variaciones de área, las relaciones de conservación para este volumen de control son bastante simples:

Continuidad: $$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{cte} \tag{9.76a}$$

Cantidad de movimiento según x: $$p_1 - p_2 = G(V_2 - V_1) \tag{9.76b}$$

Energía: $$\dot{Q} = \dot{m}(h_2 + \tfrac{1}{2}V_2^2 - h_1 - \tfrac{1}{2}V_1^2)$$

o $$q = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = \frac{\delta Q}{\delta m} = h_{02} - h_{01} \tag{9.76c}$$

El calor transferido da lugar a un cambio en la entalpía de remanso del flujo. No especificaremos cómo se transfiere el calor —combustión, reacción nuclear, evaporación, condensación, o intercambio a través de las paredes—, simplemente diremos que se transfiere una cantidad de calor q por unidad de masa entre las secciones 1 y 2. Conviene indicar que la transferencia de calor a través de la pared no es un buen candidato para esta teoría debido a que la convección desde la pared está inevitablemente acoplada con la fricción, que hemos despreciado.

Para completar el análisis utilizaremos la ecuación de estado y las relaciones que definen el número de Mach en los gases perfectos:

$$\frac{p_2}{\rho_2 T_2} = \frac{p_1}{\rho_1 T_1} \qquad h_{02} - h_{01} = c_p(T_{02} - T_{01})$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\text{Ma}_2 a_2}{\text{Ma}_1 a_1} = \frac{\text{Ma}_2}{\text{Ma}_1}\left[\frac{T_2}{T_1}\right]^{1/2} \tag{9.77}$$

Para un calor $q = \delta Q/\delta m$ dado o, análogamente, para un incremento $h_{02} - h_{01}$ dado, las Ecuaciones (9.76) y (9.77) se pueden resolver algebraicamente para obtener las relaciones p_2/p_1, Ma_2/Ma_1, etc., entre la entrada y la salida. Obsérvese que el segundo principio no impone ninguna restricción a esta solución porque la transferencia de calor puede hacer que la entropía aumente o disminuya.

Antes de escribir estas funciones cociente, ilustraremos el efecto de la transferencia de calor con la Figura 9.17, la cual muestra T_0 y T en función del número de Mach en el conducto. El calentamiento aumenta T_0 y el enfriamiento la disminuye. El valor máximo de T_0 se da para Ma = 1,0 y se ve que el calentamiento lleva siempre el número de Mach del conducto hacia la unidad, tanto si la entrada es subsónica como supersónica. Esto es análogo al efecto de la fricción descrito en la sección anterior. La temperatura de un gas perfecto aumenta cuando el Mach evoluciona desde Ma = 0 hasta Ma = $1/\gamma^{1/2}$ y después decrece. Por tanto existe una región peculiar, o al menos inesperada, donde el calentamiento (incremento de T_0) hace disminuir

[7] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

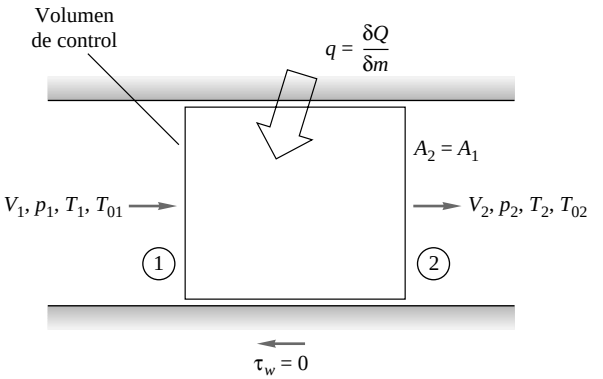


Figura 9.16. Volumen de control infinitesimal para el flujo en un conducto de sección constante sin fricción y con adición de calor. La longitud del elemento no interviene en esta teoría simplificada.

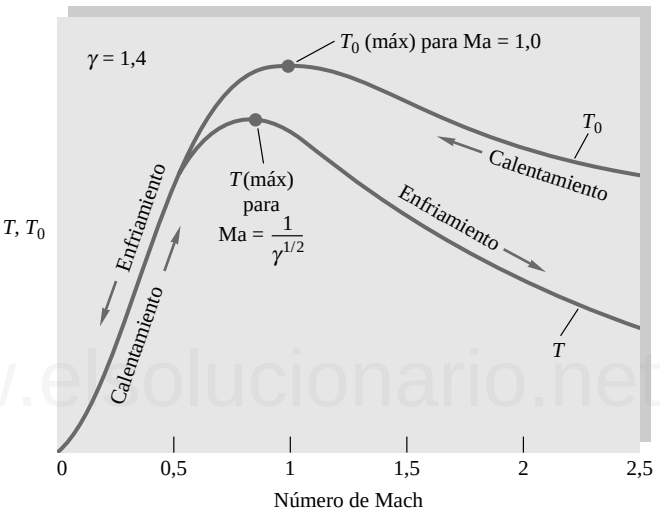


Figura 9.17. Efecto de la adición de calor en el número de Mach.

la temperatura del gas, quedando reflejada la diferencia en un gran incremento de la energía cinética. Para $\gamma = 1{,}4$ esta zona peculiar se encuentra entre Ma = 0,845 y Ma = 1,0 (información interesante, pero no muy útil).

La lista completa de los efectos del cambio de T_0 sobre las propiedades del flujo en el conducto es la siguiente:

	Calentamiento		Enfriamiento	
	Subsónico	**Supersónico**	**Subsónico**	**Supersónico**
T_0	Crece	Crece	Decrece	Decrece
Ma	Crece	Decrece	Decrece	Crece
p	Decrece	Crece	Crece	Decrece
ρ	Decrece	Crece	Crece	Decrece
V	Crece	Decrece	Decrece	Crece
p_0	Decrece	Decrece	Crece	Crece
s	Crece	Crece	Decrece	Decrece
T	*	Crece	†	Decrece

* Crece hasta Ma = $1/\gamma^{1/2}$ y decrece después.
† Decrece hasta Ma = $1/\gamma^{1/2}$ y crece después.

www.elsolucionario.net

Probablemente lo más significativo de esta lista es que la presión de remanso p_0 siempre decrece durante el calentamiento, independientemente de si el flujo es subsónico o supersónico. Por tanto, aunque el calentamiento aumenta el número de Mach del flujo, conlleva una pérdida en la presión susceptible de recuperación.

Relaciones en función del número de Mach

Las Ecuaciones (9.76) y (9.77) pueden reescribirse en función del número de Mach y tabularse los resultados. Por conveniencia consideramos que la sección de salida es sónica, Ma = 1, con magnitudes de referencia T_0^*, T^*, p^*, ρ^*, V^* y p_0^*. Consideraremos un número de Mach arbitrario Ma a la entrada. Las Ecuaciones (9.76) y (9.77) toman entonces la siguiente forma:

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(\gamma+1)\,\mathrm{Ma}^2[2+(\gamma-1)\,\mathrm{Ma}^2]}{(1+\gamma\mathrm{Ma}^2)^2} \tag{9.78a}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{(\gamma+1)^2\,\mathrm{Ma}^2}{(1+\gamma\mathrm{Ma}^2)^2} \tag{9.78b}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{\gamma+1}{1+\gamma\mathrm{Ma}^2} \tag{9.78c}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{\rho^* c^*}{\rho c} = \frac{(\gamma+1)\,\mathrm{Ma}^2}{1+\gamma\mathrm{Ma}^2} \tag{9.78d}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{\gamma+1}{1+\gamma\mathrm{Ma}^2}\left[\frac{2+(\gamma-1)\,\mathrm{Ma}^2}{\gamma+1}\right]^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{9.78e}$$

www.elsolucionario.net

Estas fórmulas están tabuladas en función del número de Mach en la Tabla B.4. Estas tablas son muy útiles si se conocen las propiedades Ma_1, V_1, etc., a la entrada, pero son poco prácticas si los datos se refieren a T_{01} y T_{02}. Ilustrémoslo mediante un ejemplo.

EJEMPLO 9.14

Una mezcla combustible-aire, que puede aproximarse como aire, con $\gamma = 1{,}4$, entra en una cámara de combustión, con forma de conducto, con $V_1 = 75$ m/s, $p_1 = 150$ kPa y $T_1 = 300$ K. La adición de calor debida a la combustión es de 900 kJ por kg de mezcla. Calcule (*a*) las propiedades V_2, p_2 y T_2 a la salida y (*b*) la adición total de calor necesaria para conseguir condiciones sónicas a la salida.

Solución

Apartado (*a*)

En primer lugar calculamos $T_{01} = T_1 + V_1^2/(2c_p) = 300 + (75)^2/[2(1005)] = 303$ K. A continuación calculamos la variación de la temperatura de remanso del gas:

$$q = c_p(T_{02} - T_{01})$$

o

$$T_{02} = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 303\ \mathrm{K} + \frac{900.000\ \mathrm{J/kg}}{1005\ \mathrm{J/(kg\,K)}} = 1199\ \mathrm{K}$$

www.elsolucionario.net

Disponemos de suficiente información para calcular el número de Mach inicial:

$$a_1 = \sqrt{\Im RT_1} = [1,4(287)(300)]^{1/2} = 347 \text{ m/s} \quad \text{Ma}_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{75}{347} = 0,216$$

Para este número de Mach, tanto la Ecuación (9.78a) como la Tabla B.4 permiten determinar el valor sónico T_0^*:

$$\text{Para} \quad \text{Ma}_1 = 0,216: \quad \frac{T_{01}}{T_0^\rangle} \Xi 0,1992 \quad \text{o} \quad T_0^\rangle = \frac{303 \text{ K}}{0,1992} \Xi 1521 \text{ K}$$

Entonces el cociente de temperaturas de remanso de la sección 2 es T_{02}/T_0^* = 1199/1521 = 0,788, que corresponde en la Tabla B.4 a un número de Mach $\text{Ma}_2 \Xi 0,573$.

Utilizando ahora la Tabla B.4 con los valores de Ma_1 y Ma_2 podemos tabular los cocientes de velocidad, presión y temperatura del modo siguiente:

Sección	Ma	*V/V**	*p/p**	*T/T**
1	0,216	0,1051	2,2528	0,2368
2	0,573	0,5398	1,6442	0,8876

Por tanto, las propiedades a la salida están dadas por:

$$V_2 = V_1 \frac{V_2/V^*}{V_1/V^*} = (75 \text{ m/s}) \frac{0,5398}{0,1051} = 385 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

$$p_2 = p_1 \frac{p_2/p^*}{p_1/p^*} = (150 \text{ kPa}) \frac{1,6442}{2,2528} = 109 \text{ kPa} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

$$T_2 = T_1 \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = (300 \text{ K}) \frac{0,8876}{0,2368} = 1124 \text{ K} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Apartado (*b*)

La máxima adición de calor permitida sin que se produzca bloqueo es aquella que hace el Mach de salida igual a la unidad:

$$T_{02} = T_0^* = 1521 \text{ K}$$

$$q_{\text{máx}} = c_p(T_0^* - T_{01}) = [1005 \text{ J/kg} \cdot \text{K})](1521 - 303 \text{ K}) \Xi 1,22 \times 10^6 \text{ J/kg} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

Efectos de bloqueo debidos al calentamiento simple

La Ecuación (9.78*a*) y la Tabla B.4 indican que la máxima temperatura de remanso alcanzable, debida al calentamiento simple, corresponde a T_0^*, o salida sónica. Por tanto, para unas condiciones a la entrada dadas, sólo se puede añadir una cierta cantidad de calor al flujo; por ejemplo, 1,22 MJ/kg en el Ejemplo 9.14. Si el flujo es subsónico a la entrada no existe un límite teórico a la adición de calor: el flujo se bloquea más y más a medida que se añade más calor, tendiendo a cero la velocidad a la entrada. Para flujo supersónico, incluso si Ma_1 es infinito, hay un valor finito de la relación $T_{01}/T_0^* = 0,4898$ para $\gamma = 1,4$. Por tanto, si se añade calor sin límite a un flujo supersónico, se forma una onda de choque normal para acomodar el flujo a los valores requeridos de las magnitudes fluidas.

En flujo subsónico no hay un límite teórico para el enfriamiento: el flujo a la salida simplemente se hace más y más lento y la temperatura tiende a cero. En flujo supersónico sólo es posible un enfriamiento finito antes de que el número de Mach a la salida alcance un valor infinito, con $T_{02}/T_0^* = 0,4898$ y temperatura de salida nula. El enfriamiento supersónico se presenta en muy pocas aplicaciones prácticas.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 9.15

¿Qué le ocurrirá al flujo de entrada del Ejemplo 9.14 si se aumenta la adición de calor hasta los 1400 kJ/kg manteniendo la presión y la temperatura de remanso a la entrada? ¿Cuánto debe disminuir el gasto másico?

Solución

Para q = 1400 kJ/kg, la salida estará bloqueada a la temperatura de remanso:

$$T_0\rangle = T_{01} + \frac{q}{c_p} = 303 + \frac{1{,}4 \times 10 \text{ J/kg}}{1005 \text{ J/(kg K)}} = 1696 \text{ K}$$

Ésta es mayor que el valor de T_0^* = 1521 K del Ejemplo 9.14, luego la condición 1 se bloqueará en un número de Mach menor. El valor apropiado se obtiene del cociente T_{01}/T_0^* = 303/1696 = 0,1787. De la Tabla B.4 o de la Ecuación (9.78*a*) se tiene, para esta condición, el nuevo valor reducido del número de Mach a la entrada: $\text{Ma}_{1,\text{nuevo}} = 0{,}203$. Conocidas T_{01} y p_1, las otras magnitudes a la entrada deberán cambiar de acuerdo con este número de Mach:

$$T_1 = \frac{T_{01}}{1 + 0{,}2\ \text{Ma}_1^2} = \frac{303}{1 + 0{,}2(0{,}203)^2} = 301 \text{ K}$$

$$a_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = [1{,}4(287)(301)]^{1/2} = 348 \text{ m/s}$$

$$V_1 = \text{Ma}_1 a_1 = (0{,}203)(348 \text{ m/s}) = 71 \text{ m/s}$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{150.000}{(287)(301)} = 1{,}74 \text{ kg/m}^3$$

Finalmente, el nuevo gasto másico por unidad de área es

$$\frac{\dot{m}_{\text{nuevo}}}{A} = \rho_1 V_1 = (1{,}74 \text{ kg/m}^3)(71 \text{ m/s}) = 123 \text{ kg/(s m}^2)$$

www.elsolucionario.net

Este valor es un 7 por 100 menor que el del Ejemplo 9.14 debido al bloqueo ocasionado por el exceso de adición de calor.

Relación con la onda de choque normal

Las relaciones para las ondas de choque normales de la Sección 9.5 están ocultas como un caso particular de las relaciones para la transferencia de calor. En la Tabla B.4 o en la Figura 9.17 vemos que para una temperatura de remanso menor que T_0^* existen dos estados del flujo que satisfacen las relaciones para la transferencia de calor, uno subsónico y otro supersónico. Estos dos estados tienen (1) el mismo valor de T_0, (2) el mismo gasto másico por unidad de área y (3) el mismo valor de $p + \rho V^2$. Por tanto, estos dos estados son exactamente equivalentes a las condiciones en cada lado de una onda de choque normal. El segundo principio obliga de nuevo a que el número de Mach Ma_1 del flujo aguas arriba sea supersónico.

Para ilustrar este punto, tomando $\text{Ma}_1 = 3{,}0$ de la Tabla B.4 se obtiene $T_{01}/T_0^* = 0{,}6540$ y $p_1/p^* = 0{,}1765$. Ahora, para el mismo valor $T_{02}/T_0^* = 0{,}6540$, utilizando la Tabla B.4 o la Ecuación (9.78*a*) se obtiene $\text{Ma}_2 = 0{,}4752$ y $p_2/p^* = 1{,}8235$. El valor de Ma_2 es exactamente el que se lee en la Tabla B.2 para ondas de choque como número de Mach aguas abajo cuando $\text{Ma}_1 = 3{,}0$. El cociente de presiones para estos dos estados es $p_2/p_1 = (p_2/p^*)/(p_1/p^*) = 1{,}8235/0{,}1765 = 10{,}33$, que de nuevo es justo el que se lee en la Tabla B.2 para $\text{Ma}_1 = 3{,}0$. Esta ilustración sólo pretende demostrar el fundamento físico de las relaciones para la transferencia simple de calor; sería estúpido calcular las ondas de choque normales de este modo.

9.9. FLUJO SUPERSÓNICO BIDIMENSIONAL

Hasta este momento sólo hemos considerado flujo compresible unidimensional. De este modo se han ilustrado muchos efectos importantes, pero en un mundo completamente unidimensional no tendrían cabi-

www.elsolucionario.net

da los «movimientos ondulatorios» tan características de los flujos supersónicos. El único «movimiento ondulatorio» que podríamos mostrar en una teoría unidimensional es la onda de choque normal, que sólo representa una discontinuidad en el flujo en un conducto.

Ondas de Mach

Cuando añadimos una segunda dimensión al flujo, la propagación de ondas en seguida se hace evidente si el flujo es supersónico. La Figura 9.18 muestra una construcción gráfica célebre que aparece en todo libro de texto de Mecánica de Fluidos y que fue presentada por primera vez por Ernst Mach en 1887. La figura muestra el esquema de las perturbaciones de presión (ondas sonoras) emitidas por una pequeña partícula moviéndose a la velocidad U a través de un fluido en reposo cuya velocidad del sonido es a.

A medida que la partícula se mueve, choca continuamente con las partículas fluidas de los alrededores, enviando ondas sonoras esféricas que emanan de cada punto a lo largo de su recorrido. En la Figura 9.18 se muestran algunos de estos frentes de perturbación esféricos. El comportamiento de estos frentes es bastante diferente según sea subsónica o supersónica la velocidad de la partícula.

En la Figura 9.18*a*, la partícula se mueve subsónicamente, $U < a$, $\text{Ma} = U/a < 1$. Las perturbaciones esféricas se desplazan en todas las direcciones sin alcanzarse unas a otras. También avanzan por delante de la partícula, porque recorren una distancia $a\,dt$ en el intervalo de tiempo δt durante el cual la partícula sólo ha recorrido la distancia $U\,\delta t$. Por tanto, cuando un cuerpo se mueve subsónicamente su presencia se percibe en todo el campo fluido: se puede «oír» o «sentir» el incremento de presión ocasionado por un cuerpo que se acerca antes de que llegue. Aparentemente, éste es el motivo por el cual una paloma en la carretera remonta el vuelo para evitar ser atropellada por un coche, sin darse la vuelta para mirar.

A la velocidad sónica, $U = a$, Figura 9.18*b*, las perturbaciones de presión se mueven exactamente a la velocidad de la partícula y por tanto se acumulan a la izquierda de la posición de la partícula formando una especie de «frente» que lleva el nombre de *Onda de Mach*, en honor a Ernst Mach. Ninguna perturbación se

www.elsolucionario.net

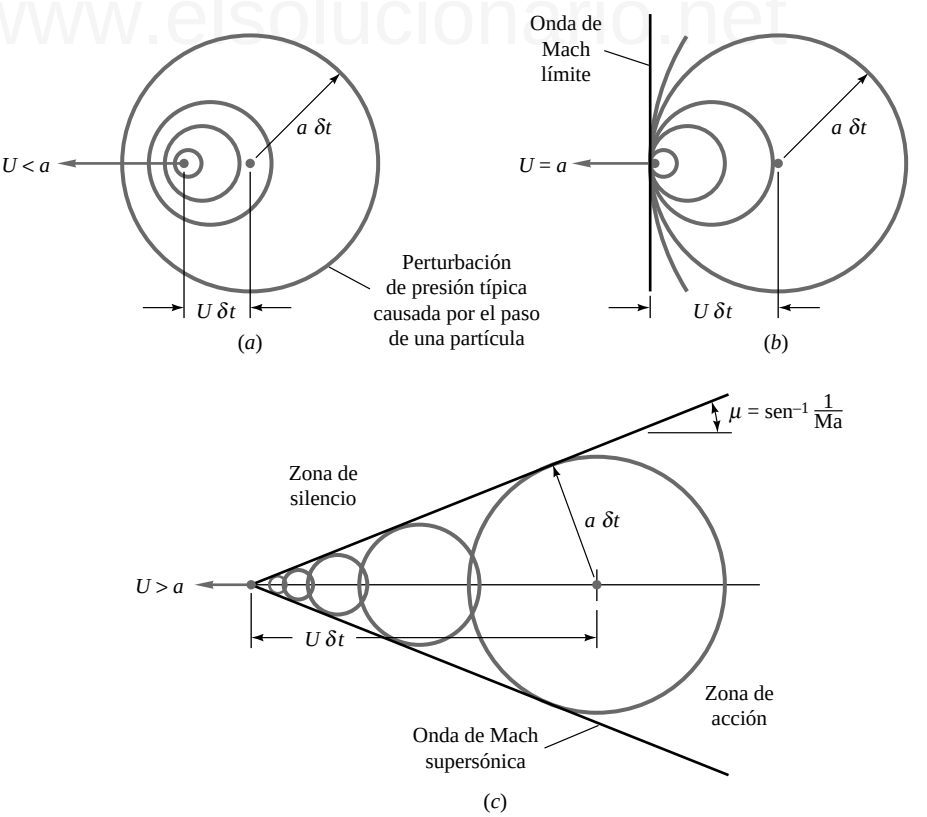


Figura 9.18. Tipos de ondas generadas por una partícula que se mueve a velocidad U en un fluido en reposo cuya velocidad del sonido es a: (*a*) movimiento subsónico, (*b*) sónico y (*c*) supersónico.

www.elsolucionario.net

desplaza aguas arriba que la partícula. Si nos situamos a la izquierda de la partícula, no «oiremos» al móvil que se acerca. Si la partícula tocara su bocina, tampoco podríamos escucharla: la paloma no oiría un coche que se acercase a la velocidad del sonido.

En un movimiento supersónico, $U > a$, la ausencia de aviso previo del peligro es incluso más pronunciada. Las esferas de la perturbación no pueden seguir el rápido movimiento de la partícula que las originó. Todas ellas son arrastradas detrás de la partícula y son tangentes a una superficie cónica llamada *cono de Mach*. De acuerdo con la Figura 9.18*c*, el ángulo del cono de Mach es

$$\mu = \operatorname{sen}^{\Phi 1} \frac{a}{U} \frac{\not{\partial}}{\not{\partial}} = \operatorname{sen}^{\Phi 1} \frac{a}{U} = \operatorname{sen}^{\Phi 1} \frac{1}{\text{Ma}} \tag{9.79}$$

Cuanto mayor es el número de Mach de la partícula, tanto más esbelto es el cono de Mach; por ejemplo, $\mu = 30°$ para Ma = 2,0 y 11,5° para Ma = 5,0. Para el caso límite de flujo sónico, Ma = 1, $\mu = 90°$; el cono de Mach degenera en un frente plano que se mueve con la partícula, como indica la Figura 9.18*b*.

No podríamos «oír» la perturbación ocasionada por la partícula supersónica de la Figura 9.18*c* a menos que estemos en la *zona de acción* del cono de Mach. No hay peligro de que las perturbaciones alcancen nuestro oído si estamos en la *zona de silencio*, fuera del cono. Por tanto, un observador en tierra debajo de un avión supersónico no oye el *estampido* o *bang sónico* ocasionado por el cono que viaja ligado al avión hasta cierto tiempo después de haber pasado éste.

La onda de Mach no tiene por qué ser cónica: se forman ondas similares a causa de pequeñas perturbaciones de forma cualquiera en movimientos supersónicos respecto al fluido ambiente. Por ejemplo, la «partícula» de la Figura 9.18*c* podría ser el borde de ataque de una placa plana afilada que formaría una cuña de Mach del mismo ángulo μ. Las ondas de Mach también se forman a causa de las pequeñas rugosidades o irregularidades de la capa límite en un túnel supersónico o en la superficie de un cuerpo supersónico. Observe de nuevo la Figura 9.10: las ondas de Mach son claramente visibles a lo largo de la superficie del cuerpo aguas abajo de la onda de choque, especialmente en la esquina posterior. Su ángulo es más o menos de 30°, indicando que el número de Mach es aproximadamente 2,0 a lo largo de su superficie. Un sistema más complicado de ondas de Mach es el que emana del proyectil supersónico de la Figura 9.19. Los

www.elsolucionario.net

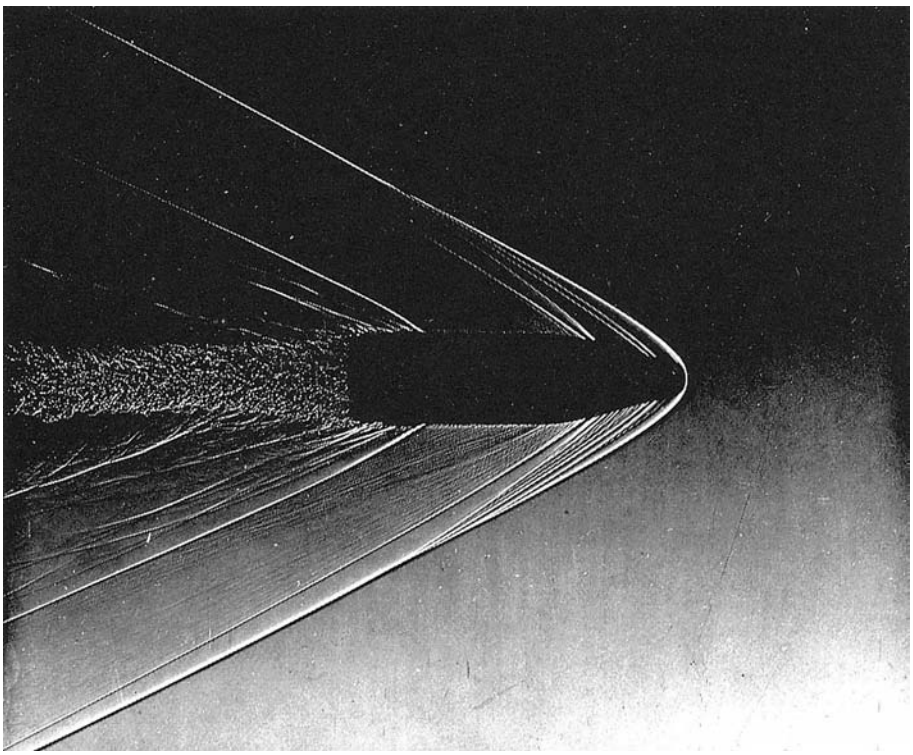


Figura 9.19. Sistema de ondas supersónicas que genera un proyectil que se mueve a Ma Ξ 2. Las líneas gruesas son ondas de choque oblicuas y las líneas delgadas son ondas de Mach. (*Por cortesía del U.S. Army Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground.*)

www.elsolucionario.net

ángulos de Mach cambian, indicando un número de Mach variable sobre la superficie del cuerpo. A lo largo de la superficie también se forman ondas de choque oblicuas.

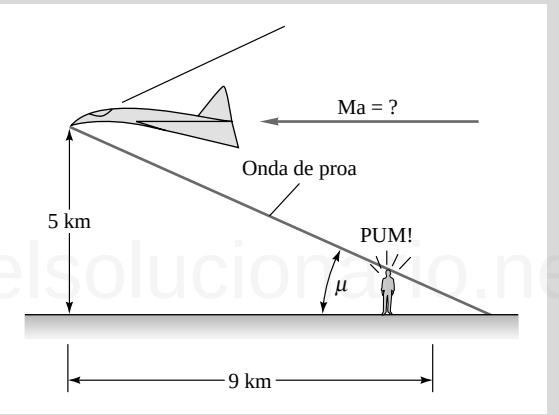
EJEMPLO 9.16

Un observador en el suelo no oye el estampido sónico originado por un avión que se desplaza a una altitud de 5 km hasta que éste no se ha alejado 9 km. ¿Cuál es aproximadamente el número de Mach del avión? Suponga que la perturbación es pequeña y desprecie la variación del número de Mach con la altura.

Solución

Una perturbación finita como la originada por un avión genera ondas de choque oblicuas de intensidad finita cuyo ángulo es mayor que el ángulo μ de la onda de Mach y que se curvan hacia abajo debido a la variación de la velocidad del sonido en la atmósfera. Si despreciamos estos efectos, la altura y distancia miden el ángulo μ, como se ve en la Figura E9.16. Entonces

$$\text{tg}\,\mu = \frac{5\text{ km}}{9\text{ km}} = 0{,}5556 \quad \text{o} \quad \mu = 29{,}05°$$



E9.16

Por tanto, de la Ecuación (9.79),

$$\text{Ma} = \text{cosec}\,\mu = 2{,}06 \qquad \textit{Resp.}$$

La onda de choque oblicua

Las Figuras 9.10 y 9.19 y nuestras observaciones anteriores indican que se puede formar una onda de choque formando un ángulo con la corriente supersónica incidente. Dicha onda deflectará la corriente un ángulo θ, al contrario que las ondas de choque normales, para las cuales el flujo aguas abajo mantiene la misma dirección. En esencia, una onda de choque oblicua se debe a la necesidad de deflectar una corriente supersónica un cierto ángulo. Una cuña finita en el borde de ataque de un cuerpo o una rampa en la pared de un túnel supersónico pueden ser ejemplos típicos.

La Figura 9.20 muestra los aspectos geométricos del flujo a través de una onda de choque oblicua. Al igual que para las ondas de choque normales de la Figura 9.8, el estado 1 denota las condiciones aguas arriba y el estado 2 aguas abajo. La onda de choque tiene un ángulo β arbitrario y la velocidad V_2 del flujo aguas abajo aparece deflectada un ángulo θ que es función de β y de las condiciones del estado 1 aguas arriba. El flujo aguas arriba siempre es supersónico, pero el número de Mach aguas abajo $\text{Ma}_2 = V_2/a_2$ puede ser subsónico, sónico o supersónico, dependiendo de las condiciones.

www.elsolucionario.net

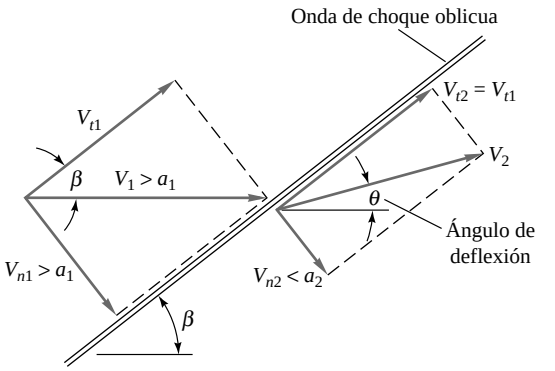


Figura 9.20. Geometría del flujo a través de una onda de choque oblicua.

Es conveniente analizar el flujo descomponiéndolo en sus componentes normal y tangencial con respecto a la onda, como se muestra en la Figura 9.20. Para un volumen de control delgado que incluya a la onda, podemos obtener las siguientes relaciones integrales, donde se han omitido las áreas por ser $A_1 = A_2$ a cada lado de la onda:

Continuidad: $$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2} \tag{9.80a}$$

Cantidad de movimiento normal: $$p_1 - p_2 = \rho_2 V_{n2}^2 - \rho_1 V_{n1}^2 \tag{9.80b}$$

Cantidad de movimiento tangencial: $$0 = \rho_1 V_{n1}(V_{t2} - V_{t1}) \tag{9.80c}$$

Energía: $$h_1 + \tfrac{1}{2}V_{n1}^2 + \tfrac{1}{2}V_{t1}^2 = h_2 + \tfrac{1}{2}V_{n2}^2 + \tfrac{1}{2}V_{t2}^2 = h_0 \tag{9.80d}$$

www.elsolucionario.net

De la Ecuación (9.80*c*) vemos que no hay cambio en la velocidad tangencial a través de la onda de choque oblicua:

$$V_{t2} = V_{t1} = V_t = \text{cte} \tag{9.81}$$

Por tanto, el único efecto de la velocidad tangencial es añadir un término constante $\frac{1}{2}V_t^2$ a la energía cinética en cada miembro de la ecuación de la energía (9.80*d*). Podemos concluir que las Ecuaciones (9.80) son idénticas a las relaciones (9.49) para ondas de choque normales, con V_1 y V_2 reemplazadas por las componentes normales V_{n1} y V_{n2}. Todas las relaciones de la Sección 9.5 pueden usarse para calcular los saltos de las propiedades a través de una onda de choque oblicua. El truco consiste en utilizar los números de Mach «normales» en lugar de Ma_1 y Ma_2:

$$\boxed{\text{Ma}_{n1} = \frac{V_{n1}}{a_1} = \text{Ma}_1 \text{ sen } \epsilon} \qquad \boxed{\text{Ma}_{n2} = \frac{V_{n2}}{a_2} = \text{Ma}_1 \text{ sen } (\epsilon - \theta)} \tag{9.82}$$

Por tanto, para un gas perfecto con calores específicos constantes, los cocientes entre las propiedades a través de la onda de choque oblicua son análogos a las Ecuaciones (9.55) a (9.58) con Ma_1 sustituido por Ma_{n1}:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\gamma + 1}[2\gamma \text{Ma}_1^2 \text{ sen}^2 \epsilon - (\gamma - 1)] \tag{9.83a}$$

www.elsolucionario.net

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\tan\epsilon}{\tan(\epsilon-\theta)} = \frac{(\gamma+1)\,M_1^2\,\operatorname{sen}^2\epsilon}{(\gamma-1)\,M_1^2\,\operatorname{sen}^2\epsilon+2} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} \tag{9.83b}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = [2+(\gamma-1)\,M_1^2\,\operatorname{sen}^2\epsilon]\frac{2\gamma M_1^2\,\operatorname{sen}^2\epsilon-(\gamma-1)}{(\gamma+1)\,M_1^2\,\operatorname{sen}^2\epsilon} \tag{9.83c}$$

$$T_{02} = T_{01} \tag{9.83d}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[\frac{(\gamma+1)\,M_1^2\,\operatorname{sen}^2\epsilon}{2+(\gamma-1)\,M_1^2\,\operatorname{sen}^2\epsilon}\right]^{\gamma/(\gamma-1)} \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2\,\operatorname{sen}^2\epsilon-(\gamma-1)}\right]^{1/(\gamma-1)} \tag{9.83e}$$

$$M_{n2}^2 = \frac{(\gamma-1)\,M_{n1}^2+2}{2\gamma M_{n1}^2-(\gamma-1)} \tag{9.83f}$$

Todos estos resultados están tabulados en la Tabla B.2 para ondas de choque normales. Si en su momento le pareció extraño el uso en esta tabla de los números de Mach Ma_{n1} y Ma_{n2}, ahora debería quedar claro que la tabla también es válida para las ondas de choque oblicuas.

Reflexionando sobre todo esto, podemos comprender que el flujo a través de una onda de choque oblicua es el flujo que vería un observador desplazándose a lo largo de la onda de choque normal (Figura 9.8) con una velocidad tangencial constante V_t. Por tanto, las ondas de choque normales y oblicuas están relacionadas entre sí por una transformación galileana, o inercial, de velocidades y, por tanto, satisfacen las mismas ecuaciones básicas.

Si continuamos con esta analogía del observador que se desplaza a lo largo de la onda de choque, encontramos que el ángulo de deflexión θ incrementa con la velocidad V_t hasta un máximo y luego decrece. De la geometría de la Figura 9.20, el ángulo de deflexión está dado por

www.elsolucionario.net

$$\theta = \tan^{-1}\frac{V_t}{V_{n2}} - \tan^{-1}\frac{V_t}{V_{n1}} \tag{9.84}$$

Si derivamos θ con respecto a V_t e igualamos el resultado a cero, encontramos que la deflexión máxima se da para $V_t/V_{n1} = (V_{n2}/V_{n1})^{1/2}$. Si sustituimos esto en la Ecuación (9.84) obtenemos

$$\theta_{\text{máx}} = \tan^{-1} r^{1/2} - \tan^{-1} r^{1/2} \qquad r = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} \tag{9.85}$$

Por ejemplo, si $Ma_{n1} = 3{,}0$, de la Tabla B.2 encontramos que $V_{n1}/V_{n2} = 3{,}8571$, cuya raíz cuadrada es 1,9640. Entonces la Ecuación (9.85) predice una deflexión máxima de $\tan^{-1} 1{,}9640 - \tan^{-1}(1/1{,}9640) = 36{,}03°$. La deflexión está bastante limitada incluso para Ma_{n1} infinito; para este caso, de la Tabla B.2, $V_{n1}/V_{n2} = 6{,}0$, y de la Ecuación (9.85) obtenemos $\theta_{\text{máx}} = 45{,}58°$.

La idea de la deflexión limitada y otros hechos se hacen más evidentes si representamos algunas de las soluciones de las Ecuaciones (9.83). Para valores dados de V_1 y a_1, suponiendo como siempre $\gamma = 1{,}4$, podemos representar todas las soluciones posibles de V_2 aguas abajo de la onda de choque. En la Figura 9.21 se hace esto utilizando como coordenadas las componentes de la velocidad V_x y V_y, con x paralela a V_1. Tal representación se denomina *hodógrafa*. La línea gruesa, que parece un perfil aerodinámico de gran espesor, es el lugar, o *polar de la onda*, de todas las soluciones físicamente posibles para un Ma_1 dado. Las dos líneas discontinuas en forma de cola de pez son soluciones asociadas a expansiones con incrementos de V_2; son físicamente imposibles por violar la segunda ley de la termodinámica.

Examinando la polar de la onda en la Figura 9.21, vemos que para una deflexión dada de ángulo θ pequeño, la línea correspondiente cruza la polar en dos posibles soluciones que corresponden a la onda de choque *intensa*, que decelera mucho el flujo, y la onda de choque *débil*, que provoca una deceleración mucho más pequeña. El flujo aguas abajo de la onda intensa es siempre subsónico, mientras que detrás de la onda débil es normalmente supersónico, aunque puede ser subsónico si la deflexión es grande. Ambos tipos de

www.elsolucionario.net

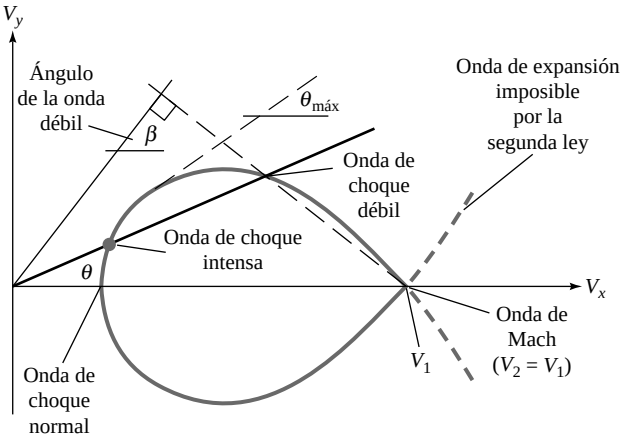


Figura 9.21. Hodógrafa polar de las ondas de choque oblicuas mostrando las dos soluciones (intensa y débil) para ángulos de deflexión pequeños y la ausencia de solución para grandes deflexiones.

ondas de choque se dan en la práctica. La onda débil es la más corriente, pero la onda intensa se da cuando hay un bloqueo fuerte del flujo o altas presiones aguas abajo.

La Figura 9.21 muestra que, dado que la polar de la onda es de tamaño finito, hay una deflexión máxima $\theta_{máx}$ que corresponde a la tangente a la polar trazada desde el origen. Esto concuerda con el análisis cinemático que nos condujo a la Ecuación (9.85). ¿Qué ocurriría si se intentase forzar a un flujo supersónico a deflectarse un ángulo mayor que $\theta_{máx}$? La respuesta se muestra en la Figura 9.22 para el flujo alrededor de un cuerpo en forma de cuña.

En la Figura 9.22*a*, el semiángulo θ de la cuña es menor que $\theta_{máx}$ y entonces la onda de choque oblicua se forma en el vértice con el ángulo β adecuado para hacer que la corriente incidente se deflecte en el ángulo θ de la cuña. A excepción del pequeño efecto del crecimiento de la capa límite (véase, por ejemplo, Referencia 19, Sección 7-5.2), el número de Mach Ma_2 es constante a lo largo de la superficie de la cuña y está dado por la solución de las Ecuaciones (9.83). La presión, densidad y temperatura a lo largo de la superficie también son aproximadamente constantes, como predicen las Ecuaciones (9.83). Cuando el flujo alcanza

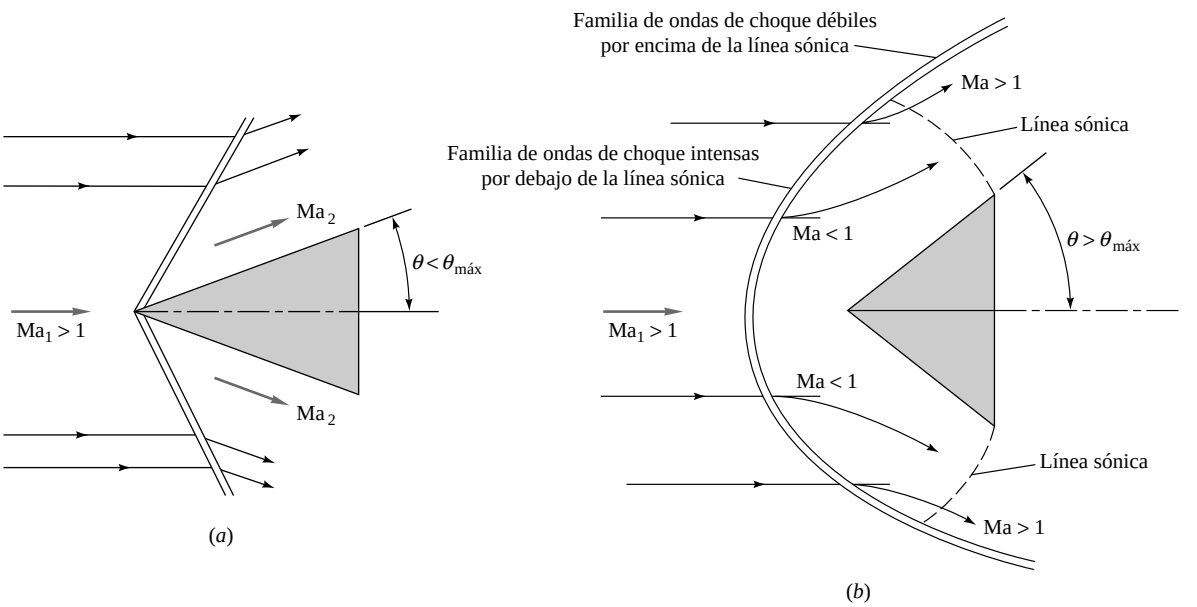


Figura 9.22. Flujo supersónico alrededor de una cuña: (*a*) ángulo de la cuña pequeño, se forman ondas de choque oblicuas adheridas al vértice; (*b*) ángulo de la cuña grande, no son posibles ondas adheridas, se forma una onda de choque desprendida.

www.elsolucionario.net

el borde final de la cuña, se expande a un número de Mach más alto y se forma una estela (que no se muestra) similar a la de la Figura 9.10.

En la Figura 9.22*b*, el semiángulo de la cuña es mayor que $\theta_{máx}$ y la onda de choque deja de estar adherida. El flujo no puede deflectarse un ángulo superior a $\theta_{máx}$ con una sola onda de choque, pero de algún modo debe de bordear la cuña. Delante del cuerpo se forma una onda de choque desprendida que induce en el flujo deflexiones con ángulos menores que $\theta_{máx}$. Posteriormente el flujo se curva, se expande y se deflecta subsónicamente alrededor de la cuña, haciéndose sónico y luego supersónico cuando pasa por la región de la esquina. El flujo en cada punto de la onda curvada satisface las relaciones (9.83) para las ondas de choque oblicuas para el valor particular de β en el punto considerado y el valor de Ma_1 dado. Cada punto a lo largo de la onda curvada se corresponde con un punto sobre la polar de la onda de la Figura 9.21. Los puntos de la onda curvada cercanos al vértice de la cuña pertenecen a la familia de las ondas de choque fuertes, y los puntos de la onda aguas abajo de la línea sónica son de la familia de las ondas débiles. El análisis de ondas de choque desprendidas es extremadamente complejo, y se acude frecuentemente a la experimentación utilizando, por ejemplo, la técnica óptica de las sombras (umbrioscopía) de la Figura 9.10.

Partiendo de las Ecuaciones (9.83) se puede dibujar o calcular la familia completa de soluciones para la onda de choque oblicua. Para un valor dado de γ, el ángulo β de la onda varía con Ma_1 y θ según la Ecuación (9.83*b*). Utilizando la identidad trigonométrica para tg $(\beta - \theta)$, esta expresión se puede reescribir en la forma más conveniente

$$\text{tg}\,\theta = \frac{2\,\text{cotg}\,\beta(Ma_1^2\,\text{sen}^2\beta - 1)}{Ma_1^2(\gamma + \cos 2\beta) + 2} \tag{9.86}$$

En la Figura 9.23 se muestran todas las posibles soluciones de la Ecuación (9.86) para $\gamma = 1{,}4$. Para deflexiones $\theta < \theta_{máx}$ existen dos soluciones, como era de esperar: una onda de choque débil (β pequeño) y una onda de choque intensa (β grande). La línea de puntos y rayas corresponde a $\theta_{máx}$ y está dada por la Ecuación (9.85). Se ha añadido una línea a trazos para mostrar los puntos donde Ma_2 es exactamente sónico. Vemos que hay una pequeña región cerca de la deflexión máxima en la que el flujo aguas abajo de la onda de choque débil es subsónico.

www.elsolucionario.net

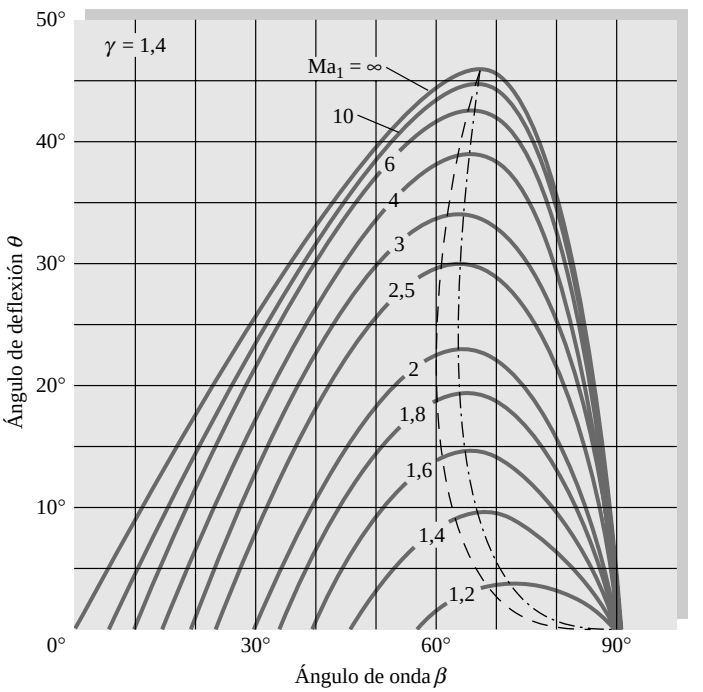


Figura 9.23. Ángulo de deflexión de la corriente en función del de la onda de choque oblicua para varios números de Mach de la corriente incidente, $\gamma = 1{,}4$; la línea de trazos y puntos es el lugar geométrico de los $\theta_{máx}$ que divide las ondas de choque en fuertes (derecha) y débiles (izquierda); la línea discontinua es el lugar geométrico de los puntos sónicos que divide a Ma_2 en subsónico (derecha) y supersónico (izquierda).

www.elsolucionario.net

Para deflexiones nulas ($\theta = 0$), la familia de ondas de choque débiles satisface la siguiente relación para el ángulo de la onda:

$$\epsilon = \mu = \text{sen}^{-1}\frac{1}{\text{Ma}_1} \tag{9.87}$$

Por tanto, las ondas de choque débiles con deflexión muy pequeña son equivalentes a las ondas de Mach. Por otra parte, también las ondas de choque intensas convergen a las ondas de choque normales, $\beta = 90°$, cuando la deflexión se anula.

En el Apéndice B se dan dos diagramas adicionales para ondas de choque oblicuas: la Figura B.1 proporciona el número de Mach aguas abajo Ma_2, y la Figura B.2 la relación de presiones p_2/p_1, en ambos casos en función de Ma_1 y θ. Las Referencias 20 y 21 proporcionan gráficos, tablas y programas de ordenador adicionales.

Ondas de choque muy débiles

Para cualquier valor finito de θ el ángulo β de una onda débil es mayor que el ángulo de Mach μ. Para valores pequeños de θ la Ecuación (9.86) puede desarrollarse en serie de potencias de tg θ, obteniéndose la siguiente relación linealizada para el ángulo de la onda:

$$\text{sen}\,\epsilon = \text{sen}\,\mu + \frac{\gamma+1}{4\cos\mu}\text{tg}\,\theta + \cdots + \mathcal{O}(\text{tg}^2\,\theta) + \cdots \tag{9.88}$$

Para Ma_1 entre 1,4 y 20,0 y deflexiones menores que 6°, esta relación predice el valor de β con un error menor de 1° para las ondas débiles. Para obtener la solución de la Ecuación (9.86) para deflexiones más grandes, se puede utilizar la expresión anterior como valor inicial en un proceso iterativo.

www.elsolucionario.net

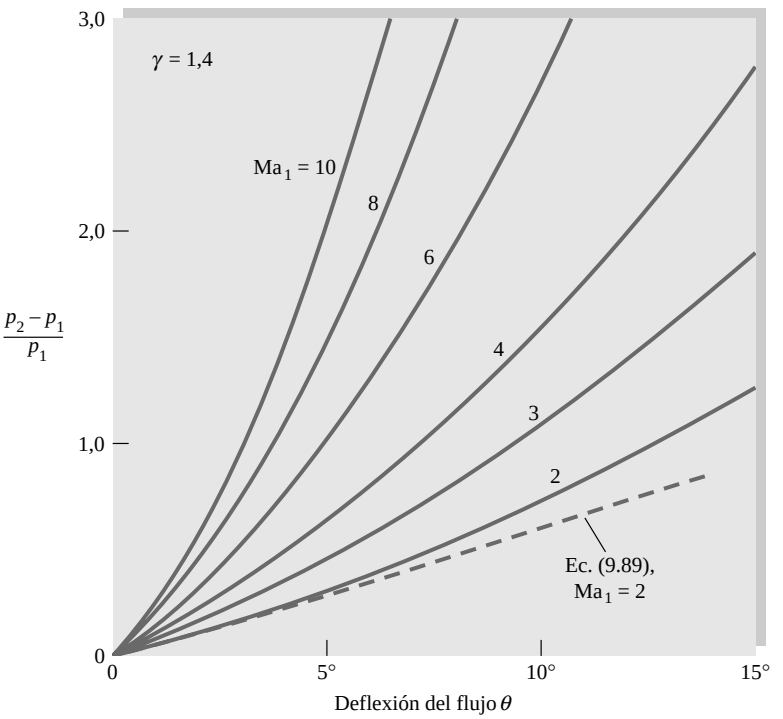


Figura 9.24. Salto de presión a través de una onda de choque oblicua débil, Ecuación (9.83*a*), para $\gamma = 1{,}4$. Para deflexiones de la corriente se puede utilizar la Ecuación (9.89).

www.elsolucionario.net

También se pueden utilizar desarrollos en serie de potencias del ángulo de deflexión para calcular los saltos a través de la onda de choque oblicua de las demás magnitudes fluidas. De particular interés es el salto de presiones dado por la Ecuación (9.83*a*), para el cual el resultado linealizado para una onda de choque débil es

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\gamma \mathrm{Ma}_1^2}{(\mathrm{Ma}_1^2 - 1)^{1/2}} \tan\theta + \cdots + O(\tan^2\theta) + \cdots \tag{9.89}$$

La forma diferencial de esta relación se utilizará en la próxima sección para desarrollar una teoría para las expansiones supersónicas debidas a cambios de pendiente. La Figura 9.24 muestra el incremento de presiones exacto calculado mediante la Ecuación (9.83*a*) en función del ángulo de deflexión; las curvas, para deflexiones pequeñas, se hacen rectas, con pendientes dadas por la Ecuación (9.89).

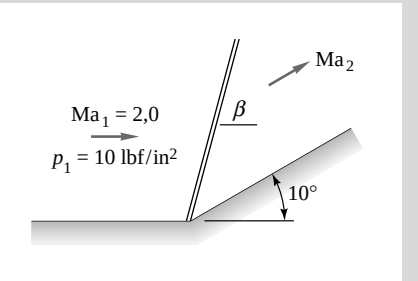
Finalmente, es instructivo determinar el salto de entropía a través de una onda de choque muy débil. Utilizando la misma técnica de desarrollo en serie de potencias, se puede obtener el siguiente resultado válido para deflexiones pequeñas:

$$\frac{s_2 - s_1}{c_p} = \frac{(\gamma^2 - 1)\,\mathrm{Ma}_1^6}{12(\mathrm{Ma}_1^2 - 1)^{3/2}} \tan^3\theta + \cdots + O(\tan^4\theta) + \cdots \tag{9.90}$$

El incremento de entropía varía con el cubo del ángulo de deflexión θ. Por tanto, las ondas de choque muy débiles son prácticamente isentrópicas, un hecho que también se utilizará en la próxima sección.

EJEMPLO 9.17

Una corriente de aire, con Ma = 2,0 y p = 10 lbf/in^2, es forzada a girar 10° mediante una rampa en la superficie de un cuerpo. Se forma una onda de choque oblicua débil, como se observa en la Figura E9.17. Para γ = 1,4, calcule mediante la teoría exacta de ondas de choque oblicuas (*a*) el ángulo de la onda β, (*b*) Ma_2 y (*c*) p_2. Utilice también la teoría linealizada para estimar (*d*) β y (*e*) p_2.



E9.17

Solución

Conocidos Ma_1 = 2,0 y θ = 10°, podemos estimar $\beta \approx 40° \pm 2°$ de la Figura 9.23. Para mayor precisión debemos resolver la Ecuación (9.86) mediante iteración. O podemos programar la Ecuación (9.86) en EES mediante seis instrucciones (en unidades SI, con los ángulos en grados):

```
Ma = 2,0
k = 1,4
Tetah = 10
Num = 2*(Ma^2*SIN(Beta)^2 – 1)/TAN(Beta)
Denom = Ma^2*(k + COS(2*Beta)) + 2
Theta = ARCTAN(Num/Denom)
```

www.elsolucionario.net

Especificando `Beta>0`, EES devuelve el valor más exacto:

$$\beta = 39{,}32° \qquad \textit{Resp. } (a)$$

Así, la componente normal a la onda del número de Mach aguas arriba es

$$\text{Ma}_{n1} = \text{Ma}_1 \operatorname{sen} \beta = 2{,}0 \operatorname{sen} 39{,}32° = 1{,}267$$

Conocido Ma_{n1} podemos utilizar las relaciones para ondas de choque normales (Tabla B.2), la Figura 9.9 o las Ecuaciones (9.56) a (9.58) para determinar

$$\text{Ma}_{n2} = 0{,}8031 \qquad \frac{p_2}{p_1} = 1{,}707$$

Luego el número de Mach y la presión aguas abajo son

$$\text{Ma}_2 = \frac{\text{Ma}_{n2}}{\operatorname{sen}(\text{€}\Phi\aleph)} = \frac{0{,}8031}{\operatorname{sen}(39{,}32° - 10°)} = 1{,}64 \qquad \textit{Resp. (b)}$$

$$p_2 = (10 \text{ lbf/m}^2)(1{,}707) = 17{,}07 \text{ lbf/in}^2 \qquad \textit{Resp. } (c)$$

Obsérvese que la relación de presiones calculada concuerda con la de las Figuras 9.24 y B.2.

Para la teoría linealizada el ángulo de Mach es $\mu = \operatorname{sen}^{-1}(1/2{,}0) = 30°$. Por tanto, mediante la Ecuación (9.88) obtenemos

$$\operatorname{sen} \text{€}\Xi \operatorname{sen} 30° + \frac{2{,}4 \operatorname{tg} 10°}{4 \cos 30°} = 0{,}622$$

o $$\beta \Xi 38{,}5° \qquad \textit{Resp. } (d)$$

www.elsolucionario.net

Y la Ecuación (9.89) permite estimar

$$\frac{p_2}{p_1} \Xi 1 + \frac{1{,}4(2)^2 \operatorname{tg} 10°}{(2^2 \Phi 1)^{1/2}} = 1{,}57$$

o $$p_2 \Xi 1{,}57(10 \text{ lbf/in}^2) \Xi 15{,}7 \text{ lbf/in}^2 \qquad \textit{Resp. } (e)$$

Estas estimaciones son razonables a pesar de que 10° no es realmente una deflexión «pequeña» del flujo.

9.10. ONDAS DE EXPANSIÓN DE PRANDTL-MEYER

La solución para la onda de choque oblicua de la Sección 9.9 corresponde a una deflexión θ finita y de compresión, que obstaculiza el paso de una corriente supersónica y por tanto disminuye su número de Mach y su velocidad. En esta sección se tratan los cambios graduales, principalmente de *expansión*, en la dirección de la corriente; esto es, aquellos casos en que se aumenta el área de paso del flujo, con lo que aumentan el número de Mach y la velocidad. Las variaciones de las propiedades se realizan mediante incrementos infinitesimales, y se pueden aplicar las relaciones linealizadas (9.88) y (9.89). Las deflexiones locales de la corriente son infinitesimales, de modo que el flujo es casi isentrópico de acuerdo con la Ecuación (9.90).

En la Figura 9.25 se muestran cuatro ejemplos, uno de los cuales (Figura 9.25*c*) no corresponde a un cambio gradual. La compresión gradual de la Figura 9.25*a* es esencialmente isentrópica, con un suave incremento de la presión a lo largo de la superficie, pero el ángulo de Mach decrece a lo largo de la superficie y las ondas tienden a coalescer a cierta distancia de la pared originando una onda de choque oblicua. En la expansión gradual de la Figura 9.25*b* el número de Mach aumenta gradualmente a lo largo de la pared, las ondas de Mach que se forman divergen sin interseccionar nunca y el proceso es isentrópico.

www.elsolucionario.net

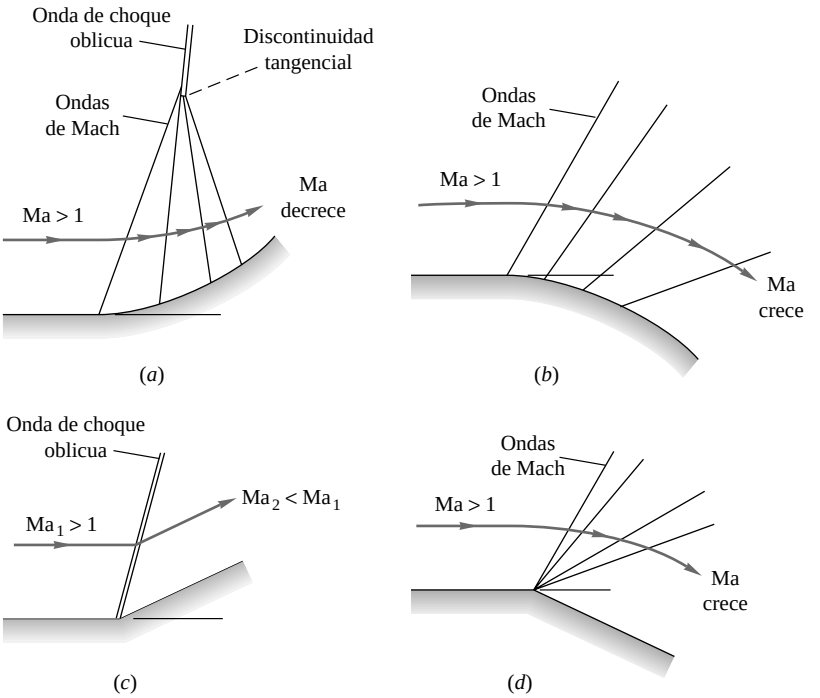


Figura 9.25. Algunos ejemplos de expansiones y compresiones supersónicas: (*a*) compresión isentrópica gradual sobre una superficie cóncava, las ondas de Mach coalescen más arriba para formar una onda de choque oblicua; (*b*) expansión isentrópica gradual sobre una superficie convexa, las ondas de Mach divergen; (*c*) compresión brusca, se forma una onda de choque no isentrópica; (*d*) expansión brusca, se forma un abanico centrado e isentrópico de ondas de Mach.

www.elsolucionario.net

La compresión brusca de la Figura 9.25*c* no puede conseguirse mediante ondas de Mach: se forma una onda de choque oblicua y el flujo no es isentrópico. Esto es lo que podríamos ver en la Figura 9.25*a* si nos situamos lejos de la pared. Por último, la expansión brusca de la Figura 9.25*d* es isentrópica, formándose un abanico de ondas de Mach que arrancan de la esquina. Obsérvese que a lo largo de cualquier línea de corriente que pase a través del abanico, el flujo experimenta un aumento suave y gradual del número de Mach y la velocidad. Cuando nos encontramos muy cerca de la esquina, el flujo se expande de forma casi discontinua. Los casos en las Figuras 9.25*a*, *b* y *d* se pueden abordar mediante la teoría de las ondas supersónicas de Prandtl-Meyer que presentamos en esta sección, y que fue desarrollada por Ludwig Prandtl y su estudiante Theodor Meyer en 1907-1908.

Nótese que ninguna de estas observaciones tiene sentido si el número de Mach aguas arriba es subsónico, ya que no existen ondas de Mach ni ondas de choque en flujos subsónicos.

La función de Prandtl-Meyer para un gas perfecto

Consideremos una deflexión infinitesimal del flujo $d\theta$, tal como la de las dos primeras ondas de Mach de la Figura 9.25*a*. En este límite, las Ecuaciones (9.88) y (9.89) se reducen a

$$\mu = \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{\mathrm{Ma}} \tag{9.91a}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{-\mathrm{Ma}^2}{(\mathrm{Ma}^2 - 1)^{1/2}}\, d\theta \tag{9.91b}$$

Dado que el flujo es prácticamente isentrópico, partiendo de la ecuación diferencial de cantidad de movimiento para el flujo no viscoso de un gas perfecto tenemos:

$$dp = -\rho V\, dV = -\gamma p\, \mathrm{Ma}^2 \frac{dV}{V} \tag{9.92}$$

www.elsolucionario.net

Combinando las Ecuaciones (9.91*a*) y (9.92) para eliminar *dp*, obtenemos una relación entre el incremento del ángulo de deflexión y el incremento de velocidad:

$$d\nu = \sqrt{(\mathrm{Ma}^2 - 1)}\,\frac{dV}{V} \tag{9.93}$$

Esta ecuación puede integrarse, si somos capaces de relacionar V con Ma, para darnos una relación útil para ángulos de deflexión finitos. Hacemos esto mediante la definición del número de Mach:

$$V = \mathrm{Ma}\, a$$

o

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\mathrm{Ma}}{\mathrm{Ma}} + \frac{da}{a} \tag{9.94}$$

Finalmente, podemos eliminar da/a por ser el flujo isentrópico y por tanto ser a_0 una constante para un gas perfecto:

$$a = a_0\left[1 + \tfrac{1}{2}(\gamma - 1)\,\mathrm{Ma}^2\right]^{-1/2}$$

o

$$\frac{da}{a} = \frac{-\frac{1}{2}(\gamma - 1)\,\mathrm{Ma}\,d\,\mathrm{Ma}}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\,\mathrm{Ma}^2} \tag{9.95}$$

Eliminando dV/V y da/a entre las Ecuaciones (9.93) a (9.95), obtenemos una relación entre el ángulo de deflexión y el número de Mach:

www.elsolucionario.net

$$d\nu = -\frac{\sqrt{(\mathrm{Ma}^2 - 1)}}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\,\mathrm{Ma}^2}\,\frac{d\mathrm{Ma}}{\mathrm{Ma}} \tag{9.96}$$

Antes de integrar esta expresión hagamos la observación de que su uso principal es para las expansiones: Ma aumenta cuando θ disminuye. Por tanto, por conveniencia, definiremos el ángulo de Prandtl-Meyer $\omega(\mathrm{Ma})$, que aumenta cuando θ disminuye y es cero en el punto sónico:

$$d\omega = -d\theta \qquad \omega = 0 \qquad \text{cuando} \qquad \mathrm{Ma} = 1 \tag{9.97}$$

Por consiguiente, integramos la Ecuación (9.96) desde el punto sónico hasta un valor arbitrario de Ma:

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_1^{\mathrm{Ma}} \frac{\sqrt{(\mathrm{Ma}^2 - 1)}}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\,\mathrm{Ma}^2}\,\frac{d\mathrm{Ma}}{\mathrm{Ma}} \tag{9.98}$$

Evaluando las integrales se obtiene el siguiente resultado, expresado en radianes,

$$\boxed{\omega(\mathrm{Ma}) = K^{1/2}\,\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{\mathrm{Ma}^2 - 1}{K}\right]^{1/2} - \mathrm{tg}^{-1}(\mathrm{Ma}^2 - 1)^{1/2}} \tag{9.99}$$

donde

$$\boxed{K = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}$$

www.elsolucionario.net

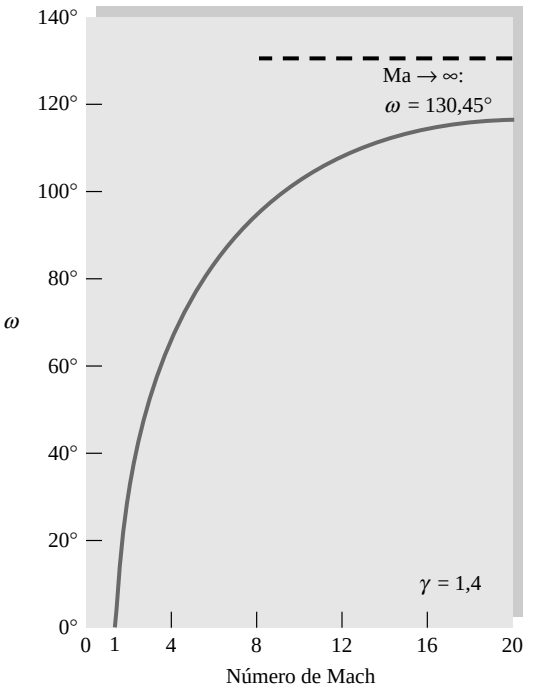


Figura 9.26. La expansión supersónica de Prandtl-Meyer, Ecuación (9.99), para $\gamma = 1{,}4$.

Esta es la *función de Prandtl-Meyer para la expansión supersónica*, que se ha representado en la Figura 9.26 y tabulado en la Tabla B.5 para $\gamma = 1{,}4$, $K = 6$. El ángulo ω cambia rápidamente al principio y acaba tendiendo a un valor límite cuando Ma $\rightarrow \div$:

$$\varnothing_{\text{máx}} = \frac{\Theta}{2}(K^{1/2}\ \Phi 1) = 130,45° \quad \text{si} \quad \Im = 1,4 \tag{9.100}$$

Por tanto, basta una deflexión finita para expandir un flujo supersónico hasta número de Mach infinito, con velocidad máxima y temperatura nula.

Una expansión o compresión gradual entre dos números de Mach finitos Ma_1 y Ma_2, ninguno de ellos menor que la unidad, se puede describir refiriendo el ángulo de deflexión $\Delta\omega$ a la diferencia de ángulos de Prandtl-Meyer para las dos condiciones, mediante la relación

$$\Delta\omega_{1\rightarrow 2} = \omega(\text{Ma}_2) - \omega(\text{Ma}_1) \tag{9.101}$$

El cambio $\Delta\omega$ puede ser positivo (expansión) o negativo (compresión), siempre y cuando los números de Mach inicial y final sean supersónicos. Ilustrémoslo con un ejemplo.

EJEMPLO 9.18

Supóngase que fluye aire ($\gamma = 1{,}4$) a $\text{Ma}_1 = 3{,}0$ y $p_1 = 200$ kPa. Calcule el número de Mach y la presión aguas abajo para (*a*) una expansión cuya deflexión es de 20° y (*b*) una compresión gradual cuya deflexión es también de 20°.

Solución

Apartado (*a*)

La presión de remanso es

$$p_0 = p_1[1 + 0{,}2(3{,}0)^2]^{3,5} = 7347 \text{ kPa}$$

www.elsolucionario.net

que debe ser la misma aguas abajo por tratarse de un flujo isentrópico. Para $Ma_1 = 3{,}0$, de la Tabla B.5 o de la Ecuación (9.99) obtenemos $\omega_1 = 49{,}757°$. El flujo se expande hasta unas nuevas condiciones tales que

$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega = 49{,}757° + 20° = 69{,}757°$$

Mediante interpolación lineal en la Tabla B.5 se obtiene un resultado bastante preciso, $Ma_2 \cong 4{,}32$. Pero es imposible invertir la Ecuación (9.99), para obtener Ma a partir de ω, sin iterar. De nuevo, nuestro amigo EES es capaz de resolver la Ecuación (9.99) con sólo cuatro instrucciones (ángulos especificados en grados):

```
k = 1,4
C = ((k + 1)/(k – 1))^0,5
Omega = 69,757
Omega = C*ARCTAN((Ma^2-1)^0,5/C) – ARCTAN((Ma^2-1)^0,5)
```

Especificando Ma > 1, EES proporciona la siguiente solución:[8]

$$Ma_2 = 4{,}32 \qquad \textit{Resp. (a)}$$

La presión en las nuevas condiciones es

$$p_2 = \frac{p_0}{[1 + 0{,}2(4{,}32)^2]^{3{,}5}} = \frac{7347}{230{,}1} = 31{,}9 \text{ kPa} \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Apartado (*b*)

El flujo se comprime a un valor más bajo del ángulo de Prandtl-Meyer:

$$\omega_2 = 49{,}757° - 20° = 29{,}757°$$

De nuevo, de la Ecuación (9.99), de la Tabla B.5 o con EES obtenemos

$$Ma_2 = 2{,}125 \qquad \textit{Resp. (b)}$$

$$p_2 = \frac{p_0}{[1 + 0{,}2(2{,}125)^2]^{3{,}5}} = \frac{7347}{9{,}51} = 773 \text{ kPa} \qquad \textit{Resp. (b)}$$

Análogamente, las variaciones de densidad y temperatura se calculan teniendo en cuenta que T_0 y ρ_0 son constantes en un flujo isentrópico.

Aplicación a perfiles supersónicos

Las teorías de la onda de choque oblicua y de la expansión de Prandtl-Meyer se pueden utilizar conjuntamente para analizar un cierto número de flujos supersónicos de interés práctico. Este matrimonio, que se traduce en la *teoría de ondas de choque y expansiones*, está sujeto a dos condiciones: (1) el flujo debe ser, salvo en algunos casos especiales, supersónico en todas partes, y (2) las ondas no deben sufrir interferencias con otras ondas que se formen en otras partes del campo fluido.

Una aplicación muy fructífera de la teoría de ondas de choque y expansiones se refiere a los perfiles aerodinámicos supersónicos. La Figura 9.27 muestra dos ejemplos, una placa plana y un perfil en forma de diamante. Estos perfiles, en contraste con los diseños de perfiles subsónicos (Figura 8.21), deben tener bordes de ataque afilados, donde se forman ondas oblicuas adheridas o abanicos de expansión. En flujo supersónico, los bordes de ataque redondeados originarían ondas de choque desprendidas, como en las Figuras 9.19 o 9.22*b*, que aumentan mucho la resistencia y reducen la sustentación.

[8] El autor almacena estos pequeños programas para su uso posterior, dándoles nombres tales como *Prandtl-Meyer*.

www.elsolucionario.net

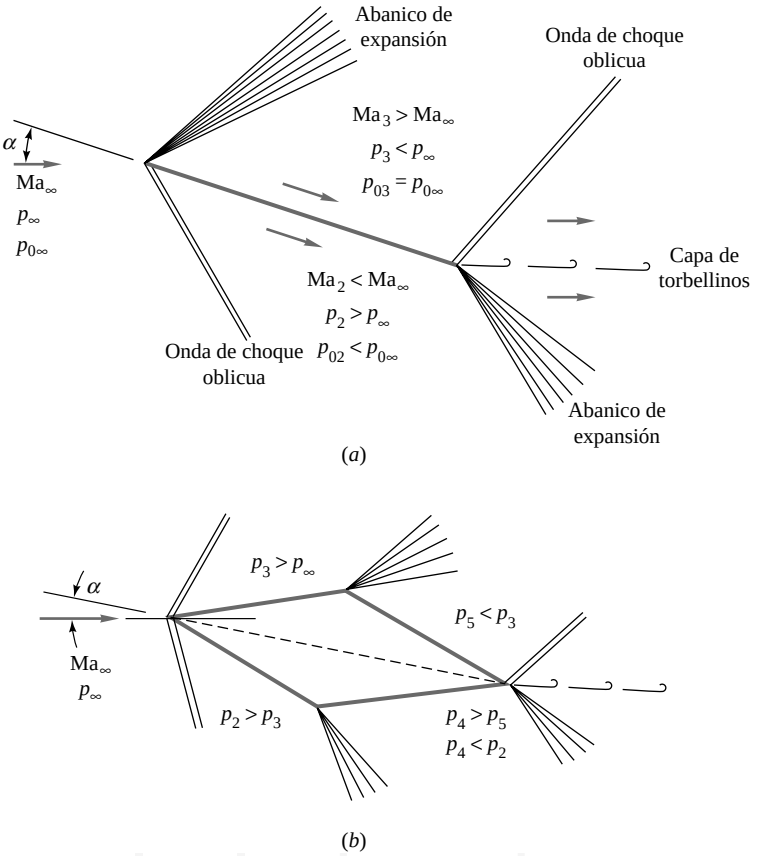


Figura 9.27. Perfiles supersónicos: (*a*) placa plana, presión más alta en la superficie inferior, resistencia debida a la pequeña componente de la fuerza neta de presión en la dirección de la corriente; (*b*) perfil en diamante o doble cuña, presiones más altas en las dos caras inferiores, resistencia adicional a consecuencia del espesor del perfil.

Al aplicar la teoría de ondas de choque y expansiones se debe examinar cada ángulo de deflexión de la superficie para ver cuándo da lugar a una expansión («apertura») o a una compresión («obstrucción») del flujo en la superficie. La Figura 9.27*a* muestra una placa plana con ángulo de ataque. Hay una onda de choque en la parte inferior, que arranca del borde de ataque, con una deflexión del flujo $\theta = \alpha$, mientras que en la parte superior hay un abanico de expansión con un incremento del ángulo de Prandtl-Meyer $\Delta\omega = \alpha$. Calcularemos p_3 con la teoría de expansión y p_2 con la teoría de ondas de choque oblicuas. La fuerza sobre la placa es, por tanto, $F = (p_2 - p_3)Cb$, donde C es la longitud de la cuerda y b la envergadura (suponiendo que no hay efectos del borde de ala). Esta fuerza es normal a la placa, de modo que la sustentación, perpendicular a la corriente incidente, es $L = F \cos \alpha$ y la resistencia, paralela a la corriente incidente, es $D = F$ sen α. Los coeficientes adimensionales C_L y C_D tienen las mismas definiciones que en el flujo a bajas velocidades, Ecuaciones (7.66), excepto que aquí se usa frecuentemente la identidad $\frac{1}{2}\rho V^2 = \frac{1}{2}\gamma p \mathrm{Ma}^2$ para un gas perfecto:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\gamma p_\infty \mathrm{Ma}_\infty^2 bC} \qquad C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\gamma p_\infty \mathrm{Ma}_\infty^2 bC} \tag{9.102}$$

Los valores típicos del coeficiente de sustentación en movimiento supersónico son mucho más pequeños que el valor subsónico $C_L \approx 2\pi\alpha$, pero la sustentación puede ser mucho mayor a causa del valor mucho más grande de $\frac{1}{2}\rho V^2$ a velocidades supersónicas.

En el borde de salida de la Figura 9.27*a* se forma una onda de choque y un abanico de expansión, en posiciones inversas a las del borde de ataque, que deflectan las dos corrientes para que queden paralelas y a la misma presión en la estela. Estas corrientes no tienen, sin embargo, la misma velocidad a causa de las di-

www.elsolucionario.net

ferentes intensidades de las ondas de choque de las superficies superior e inferior[9]; por tanto, se forma una capa de torbellinos detrás del perfil. Aunque esto es muy interesante, en la teoría se puede ignorar por completo la estructura del flujo detrás del perfil, ya que no afecta a la presión en la superficie: en flujo supersónico el perfil no puede «oír» las perturbaciones de la estela.

En el perfil en forma de diamante de la Figura 9.27*b* hay que añadir dos ondas más al flujo. Para el ángulo de ataque α de la figura, menor que el semiángulo de la cuña del borde de ataque, hay dos ondas de choque en el borde de ataque, la de la parte superior mucho más débil que la de la inferior. Después hay dos abanicos de expansión que arrancan desde los puntos angulares situados en la parte central del perfil: el incremento del ángulo de Prandtl-Meyer $\Delta\omega$ es igual a la suma de los semiángulos de las cuñas del borde de ataque y del borde de salida. Finalmente, la configuración del borde de salida es similar a la de la placa plana (9.27*a*) y puede ignorarse en los cálculos. Las presiones p_2 y p_4 sobre las superficies inferiores son mayores que las correspondientes de las superficies superiores, y la sustentación es casi la misma que la de la placa plana. Hay una resistencia adicional debida al espesor, ya que las presiones p_4 y p_5 sobre las superficies posteriores son menores que las correspondientes p_2 y p_3 de las superficies anteriores. La resistencia del perfil en forma de diamante es mayor que la de la placa plana, pero esto debe tolerarse en la práctica para conseguir una estructura del ala lo suficientemente resistente para soportar estas fuerzas.

La teoría esbozada en la Figura 9.27 concuerda bien con la sustentación y la resistencia medidas en estos perfiles en régimen supersónico, siempre que el número de Reynolds no sea demasiado pequeño (capa límite gruesa) y el número de Mach no sea demasiado grande (flujo hipersónico). Para grandes Re_C y moderados Ma_∞, las capas límite son delgadas y es raro que se presente la separación, de modo que la teoría de ondas de choque y expansión, aunque sea no viscosa, es bastante útil. Veamos ahora un ejemplo.

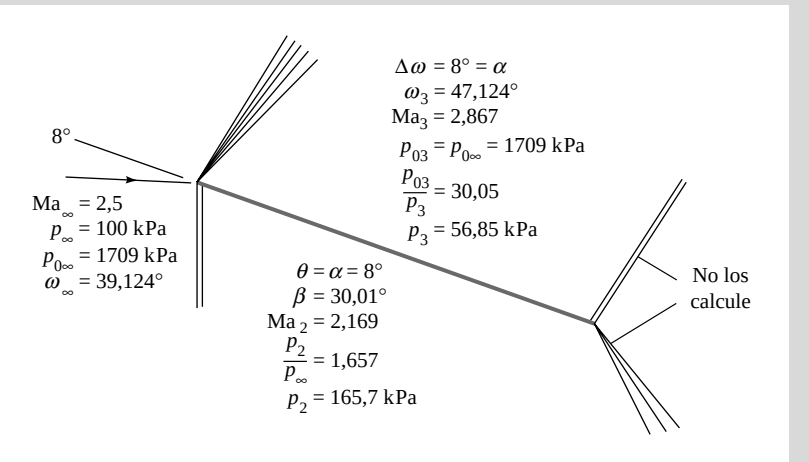
EJEMPLO 9.19

Una placa plana con $C = 2$ m y $\alpha = 8°$ está inmersa en una corriente con $\mathrm{Ma}_\infty = 2{,}5$ y $p_\infty = 100$ kPa. Calcule (*a*) C_L y (*b*) C_D y compare con los valores respectivos para perfiles de baja velocidad. Calcule (*c*) la sustentación y (*d*) la resistencia en newtones por unidad de envergadura.

www.elsolucionario.net

Solución

En lugar de utilizar mucho espacio detallando los cálculos de las ondas de choque oblicuas y de las expansiones de Prandtl-Meyer, daremos en la Figura E9.19 una lista de los resultados sobre las superficies superior e inferior. Debería verificar cada uno de los cálculos de la Figura E9.19 utilizando las teorías de las Secciones 9.9 y 9.10 para asegurarse que ha entendido todos los detalles de la teoría de ondas de choque y expansiones.



E9.19

[9] Las superficies superior e inferior de un perfil aerodinámico reciben el nombre de extradós e intradós, respectivamente, en el ámbito aeronáutico (*N. del T.*).

www.elsolucionario.net

Los resultados finales importantes son p_2 y p_3, a partir de los cuales se determina la fuerza total sobre la placa por unidad de envergadura

$$F = (p_2 - p_3)bC = (165{,}7 - 56{,}85)(\text{kPa})(1\text{ m})(2\text{ m}) = 218\text{ kN}$$

Los valores de la sustentación y resistencia, por metro de envergadura, son

$$L = F\cos 8° = 216\text{ kN} \qquad \textit{Resp. (c)}$$

$$D = F\,\text{sen}\,8° = 30\text{ kN} \qquad \textit{Resp. (d)}$$

Éstas son fuerzas muy grandes para un ala de sólo 2 m^2 de área.

De la Ecuación (9.102), el coeficiente de sustentación vale

$$C_L = \frac{216\text{ kN}}{\frac{1}{2}(1{,}4)(100\text{ kPa})(2{,}5)^2(2\text{ m}^2)} = 0{,}246 \qquad \textit{Resp. (a)}$$

En el caso de bajas velocidades, la Ecuación (8.64) proporciona $C_L = 2\pi\,\text{sen}\,8° = 0{,}874$, que es 3,5 veces mayor.

De la Ecuación (9.102), el coeficiente de resistencia es

$$C_D = \frac{30\text{ kN}}{\frac{1}{2}(1{,}4)(100\text{ kPa})(2{,}5)^2(2\text{ m}^2)} = 0{,}035 \qquad \textit{Resp. (b)}$$

Para el perfil NACA 0009 de la Figura 7.25, el C_D para $\alpha = 8°$ es aproximadamente 0,009, unas 4 veces menor.

Obsérvese que esta teoría supersónica predice una resistencia finita a pesar de considerar un flujo no viscoso con alargamiento infinito. Esta resistencia se denomina *resistencia de onda*, y vemos que la paradoja de d'Alembert, resultante de valor nulo de la resistencia de un cuerpo, no se da en un flujo supersónico.

www.elsolucionario.net

Teoría de perfiles delgados

A pesar de la simplicidad de la geometría de la placa plana, los cálculos en el Ejemplo 9.19 fueron laboriosos. En 1925 Ackeret [28] desarrolló unas expresiones simples pero muy efectivas para el cálculo de la sustentación, la resistencia y el centro de presiones en perfiles supersónicos, partiendo de la hipótesis de que el espesor y el ángulo de ataque son pequeños.

La teoría está basada en la expresión linealizada (9.89), donde tg θ es aproximadamente igual a la deflexión de la superficie relativa a la corriente incidente, que denominamos con el subíndice 1, $\text{Ma}_1 = \text{Ma}_\infty$. Para la placa plana la fuerza total F está basada en

$$\frac{p_2 - p_3}{p_\infty} = \frac{p_2 - p_\infty}{p_\infty} - \frac{p_3 - p_\infty}{p_\infty}$$

$$= \frac{\gamma \text{Ma}_\infty^2}{(\text{Ma}_\infty^2 - 1)^{1/2}}[\theta - f(\theta)] \tag{9.103}$$

Sustituyendo en la Ecuación (9.102) se obtiene el coeficiente de sustentación linealizado de una placa plana supersónica:

$$C_L = \frac{(p_2 - p_3)bC}{\frac{1}{2}\gamma p_\infty \text{Ma}_\infty^2 bC} = \frac{4\theta}{(\text{Ma}_\infty^2 - 1)^{1/2}} \tag{9.104}$$

Los cálculos para el perfil en forma de diamante y para otros perfiles de espesor finito muestran que el espesor no afecta en primera aproximación a la sustentación. Por tanto, la Ecuación (9.104) es válida para cualquier perfil supersónico delgado con bordes afilados a ángulo de ataque pequeño.

www.elsolucionario.net

El coeficiente de resistencia de la placa plana es

$$C_D = C_L \text{ tg} \alpha \approx C_L \alpha \approx \frac{4\alpha^2}{(\text{Ma}_\infty^2 - 1)^{1/2}} \tag{9.105}$$

Sin embargo, el espesor de un perfil introduce una resistencia adicional. Elijamos como eje x la línea de la cuerda del perfil, y sea $y_s(x)$ la superficie superior e $y_i(x)$ la inferior. En ese caso, la teoría de Ackeret para la resistencia (para más detalles véase Referencia 5, Sección 14.6) muestra que la resistencia adicional depende del valor medio del cuadrado de las pendientes de las superficies superior e inferior, definido por

$$\overline{y'^2} = \frac{1}{C}\int_0^C \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \tag{9.106}$$

La expresión final para la resistencia [5, pág. 442] es

$$C_D \approx \frac{4}{(\text{Ma}_\infty^2 - 1)^{1/2}}\left[\left(\frac{\tau_{TE}}{q_\infty}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\overline{y_s'^2} + \overline{y_i'^2}\right)\right] \tag{9.107}$$

Todos estos resultados concuerdan razonablemente con cálculos más exactos, y su extrema simplicidad los hace atractivos frente a la teoría, laboriosa pero más exacta, de ondas de choque y expansiones. Considere el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9.20

Repita los apartados (*a*) y (*b*) del Ejemplo 9.19 utilizando la teoría linealizada de Ackeret.

Solución

De las Ecuaciones (9.104) y (9.105), para $\text{Ma}_\infty = 2{,}5$ y $\alpha = 8° = 0{,}1396$ rad, tenemos

$$C_L \approx \frac{4(0{,}1396)}{(2{,}5^2 - 1)^{1/2}} = 0{,}244 \qquad C_D = \frac{4(0{,}1396)^2}{(2{,}5^2 - 1)^{1/2}} = 0{,}034 \qquad \textit{Resp.}$$

Estos resultados difieren en menos de un 3 por 100 de los cálculos más exactos del Ejemplo 9.19.

Un resultado adicional de la teoría linealizada de Ackeret es una expresión para la posición x_{CP} del centro de presiones (CP) de la distribución de fuerzas sobre el perfil:

$$\frac{x_{\text{CP}}}{C} = 0{,}5 + \frac{S_S - S_i}{2\alpha C^2} \tag{9.108}$$

donde S_s es el área del perfil comprendida entre la superficie superior y la cuerda, y S_i el área entre la cuerda y la superficie inferior. Para un perfil simétrico ($S_i = S_s$) obtenemos que el punto x_{CP} coincide con el punto medio de la cuerda, en contraste con el resultado para perfiles a bajas velocidades, Ecuación (8.66), donde el valor de x_{CP} corresponde al punto un cuarto de la cuerda.

La diferencia en dificultad entre la teoría simplificada de Ackeret y la teoría de ondas de choque y expansiones es incluso mayor para un perfil grueso, como se muestra en el siguiente ejemplo.

www.elsolucionario.net

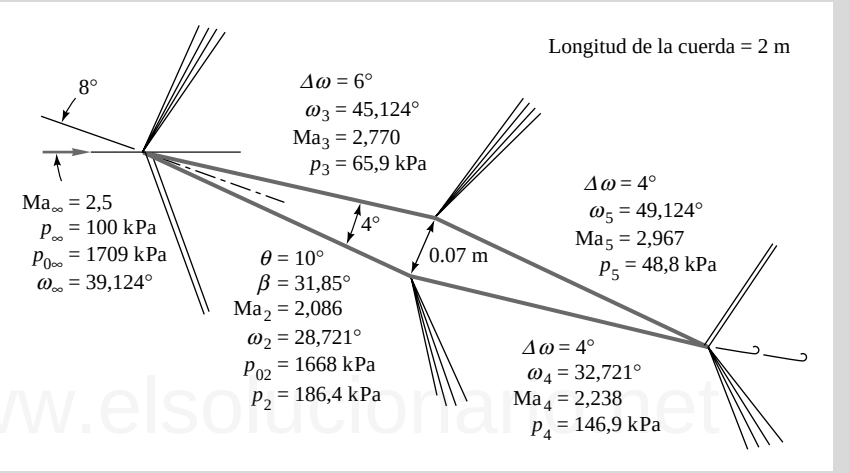
EJEMPLO 9.21

Por analogía con el Ejemplo 9.19, analice el perfil en forma de diamante, o de doble cuña, con un semiángulo de 2° y $C = 2$ m para $\alpha = 8°$ y $\text{Ma}_+ = 2{,}5$. Calcule C_L y C_D mediante (*a*) la teoría de ondas de choque y expansiones y (*b*) la teoría de Ackeret. Indique la diferencia con el Ejemplo 9.19.

Solución

Omitiremos de nuevo los detalles de la teoría de ondas de choque y expansiones, dando solamente una lista de resultados en la Figura E9.21. Supongamos que $p_+ = 100$ kPa. Hay tanto una fuerza F normal a la cuerda como una fuerza P paralela a la cuerda. Para la fuerza normal, la diferencia de presiones en la primera mitad del perfil es $p_2 - p_3 = 186{,}4 - 65{,}9 = 120{,}5$ kPa, y en la segunda mitad es $p_4 - p_5 = 146{,}9 - 48{,}8 = 98{,}1$ kPa. El valor medio de la diferencia de presiones es $\frac{1}{2}(120{,}5 + 98{,}1) = 109{,}3$ kPa, de modo que la fuerza normal es

$$F = (109{,}3 \text{ kPa})(2 \text{ m}^2) = 218{,}6 \text{ kN}$$



E9.21

Para la fuerza P en la dirección de la cuerda, la diferencia de presiones en la mitad superior es $p_3 - p_5 = 65{,}9 - 48{,}8 = 17{,}1$ kPa, y en la mitad inferior es $p_2 - p_4 = 186{,}4 - 146{,}9 = 39{,}5$ kPa. El valor medio de la diferencia de presiones es $\frac{1}{2}(17{,}1 + 39{,}5) = 28{,}3$ kPa, que multiplicada por el área frontal (espesor máximo por 1 m de envergadura) da

$$P = (28{,}3 \text{ kPa})(0{,}07 \text{ m})(1 \text{ m}) = 2{,}0 \text{ kN}$$

Tanto F como P tienen componentes en las direcciones de la sustentación y la resistencia. La sustentación, perpendicular a la corriente incidente, es

$$L = F \cos 8° - P \operatorname{sen} 8° = 216{,}2 \text{ kN}$$

y

$$D = F \operatorname{sen} 8° + P \cos 8° = 32{,}4 \text{ kN}$$

Para calcular los coeficientes, el denominador de la Ecuación (9.102) es el mismo que en el Ejemplo 9.19: $\frac{1}{2}\gamma p_+ \text{Ma}_+^2 bC = \frac{1}{2}(1{,}4)(100 \text{ kPa})(2{,}5)^2(2 \text{ m}^2) = 875$ kN. Por tanto, finalmente, la teoría de ondas de choque y expansiones proporciona

$$C_L = \frac{216{,}2 \text{ kN}}{875 \text{ kN}} = 0{,}247 \qquad C_D = \frac{32{,}4 \text{ kN}}{875 \text{ kN}} = 0{,}0370 \qquad \textit{Resp. (a)}$$

Mediante la teoría de Ackeret, el C_L es el mismo que en el Ejemplo 9.20:

$$C_L = \frac{4(0{,}1396)}{(2{,}5^2 \; \Phi 1)^{1/2}} = 0{,}244 \qquad \textit{Resp. (b)}$$

www.elsolucionario.net

resultado que es un 1 por 100 menor que el obtenido con la teoría de ondas de choque y expansiones. Para la resistencia necesitamos los valores medios de los cuadrados de las pendientes, Ecuación (9.106):

$$\overline{y_S^2} = \overline{y_I^2} = \text{tg}^2 2° = 0,00122$$

Con ellos, la Ecuación (9.107) proporciona el resultado linealizado:

$$C_D = \frac{4}{(2,5^2\ \Phi 1)^{1/2}}[(0,1396)^2 + \tfrac{1}{2}(0,00122 + 0,00122)] = 0,0362 \qquad \textit{Resp. (b)}$$

que es un 2 por 100 menor que el resultado de la teoría de ondas de choque y expansiones. Podríamos juzgar la teoría de Ackeret como «satisfactoria». La teoría de Ackeret predice p_2 = 167 kPa (–11 por 100), p_3 = 60 kPa (–9 por 100), p_4 = 140 kPa (–5 por 100) y p_5 = 33 kPa (–6 por 100).

Flujo supersónico tridimensional

Hemos ido tan lejos como hemos podido en un tratamiento introductorio del flujo compresible. Por supuesto, hay mucho más y se invita al lector a estudiarlo en las referencias del final del capítulo.

Los flujos supersónicos tridimensionales son extremadamente complejos, especialmente si los cuerpos son romos, pues en torno a ellos aparecen zonas de flujo subsónico y transónico, como en la Figura 9.10. Algunos flujos admiten, sin embargo, tratamientos teóricos muy precisos, como en el caso del flujo alrededor de un cono con ángulo de ataque nulo, que se muestra en la Figura 9.28. La teoría exacta del flujo alrededor de un cono se da en textos avanzados [por ejemplo, 5, Capítulo 17], y se han publicado tablas que

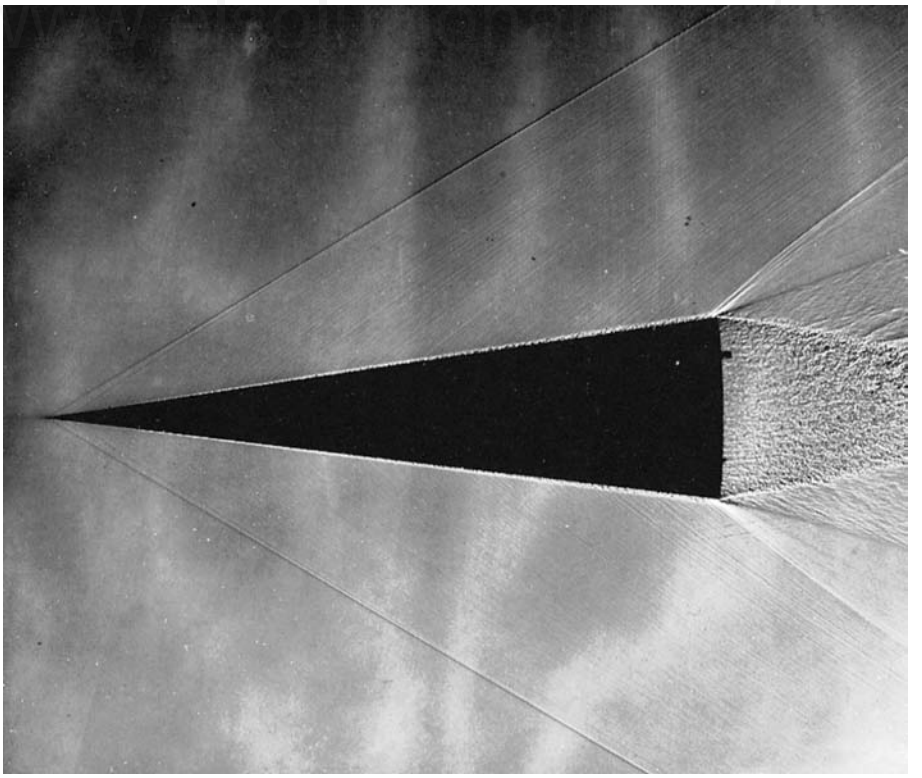


Figura 9.28. Fotografía, obtenida mediante umbioscopía, del flujo alrededor de un cono de 8° de semiángulo a Ma_∞ = 2,0. Se ve claramente la capa límite turbulenta. Las líneas de Mach se curvan ligeramente y el número de Mach varía desde 1,98 inmediatamente detrás de la onda hasta 1,90 en la superficie. (*Por cortesía del U.S. Army Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground.*)

www.elsolucionario.net

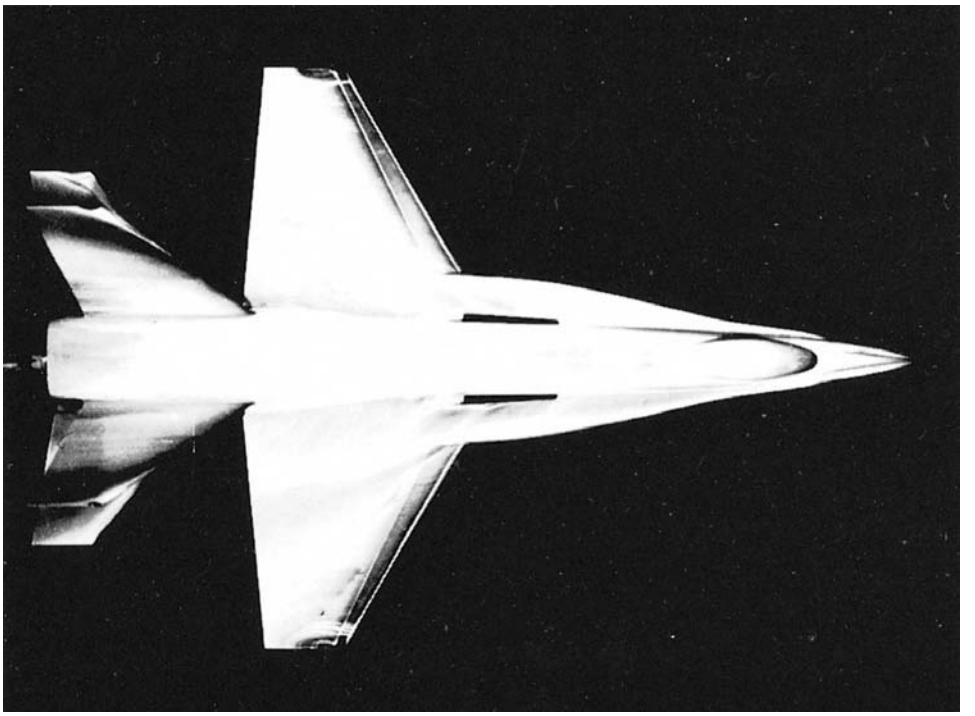


Figura 9.29. Ensayo en túnel aerodinámico del interceptor supersónico Cobra P-530. Se ha visualizado el flujo en la superficie manchándola con gotas de aceite. (*Cortesía de Northrop Grumman.*)

describen esta solución [25]. Hay similitudes entre el flujo alrededor de conos y el flujo alrededor de cuñas representado en la Figura 9.22: una onda de choque oblicua adherida al vértice, una capa límite turbulenta delgada y un abanico de expansión en el borde posterior. Sin embargo, la onda de choque cónica deflecta el flujo un ángulo menor que el semiángulo del cono, a diferencia de lo que ocurre en el caso de la cuña. Hay también, como en el caso de la cuña, un ángulo máximo del cono por encima del cual la onda de choque se desprende, de modo análogo al de la Figura 9.22*b*. Para $\gamma = 1{,}4$ y $Ma_{\div} = \div$, el semiángulo máximo del cono para el que la onda está adherida es aproximadamente de 57°, mientras que para la cuña es de 45,6° (véase Referencia 25).

La aplicación de la mecánica de fluidos computacional (CFD) al estudio de los flujos compresibles es ahora muy popular y proporciona resultados muy útiles [13]. Por ejemplo, el flujo supersónico alrededor de un cono, como el de la Figura 9.28, para ángulos de ataque no nulos se puede resolver mediante simulación numérica de las ecuaciones tridimensionales completas (viscosas) de Navier-Stokes [26].

Para cuerpos con formas más complicadas se recurre normalmente a la experimentación en túneles supersónicos. En la Figura 9.29 se muestra un modelo de un avión interceptor que se ensaya en un túnel de viento supersónico. El análisis teórico es muy complicado debido a las numerosas uniones y a los múltiples cambios en los bordes y formas del ala. Las estructuras del flujo sobre la superficie, que muestran la evolución de la capa límite y la presencia de regiones de separación, se han visualizado untando la superficie con gotas de aceite antes del ensayo.

Como veremos en el próximo capítulo, existe una interesante analogía entre la dinámica de las ondas de choque y las ondas superficiales que se forman en un canal abierto. En el Capítulo 11 de la Referencia 9 se explica cómo puede utilizarse un canal hidrodinámico para la simulación a bajo coste de experimentos en flujos supersónicos.

Nuevas tendencias en aeronáutica

En la cuarta edición (en inglés) de este texto se discutieron los planes sobre vehículos de lanzamiento hipersónicos y reutilizables, el X-33 y el VentureStar, que deberían despegar verticales y salir de la atmósfera para encontrarse con la estación espacial o realizar otras tareas. Estas aeronaves cohete

www.elsolucionario.net

volverían a la Tierra para su posterior reutilización, sustituyendo a los costosos trasbordadores espaciales lanzados actualmente mediante cohetes desechables. Desafortunadamente, algunos desafíos ingenieriles del VentureStar no pudieron resolverse, y el proyecto ha sido interrumpido por la NASA de forma indefinida. El trasbordador espacial, aunque algo anticuado, continuará siendo nuestro caballo de batalla en el espacio.

Hoy en día se han propuesto dos conceptos distintos para el transporte de pasajeros. El primero, propuesto por Boeing Commercial Airplanes, es el *sonic cruiser*. Con nuevas plantas de propulsión más potentes (propuestas) y una geometría modificada, está previsto que alcance velocidades en torno a 630 mi/h (aproximadamente Mach 0,95) a una altura de crucero de 13.500 metros. Esto es un 15-20 por 100 más rápido que los aviones comerciales actuales y ahorraría una hora de vuelo por cada 3000 millas recorridas. El *sonic cruiser* de Boeing está pensado para 100-300 pasajeros, dependiendo de la configuración, y un alcance de 10.000 millas.

La segunda propuesta para la aviación comercial es el inmenso A380, de 555 plazas, desarrollado por Airbus Industrie. Con dos cubiertas de fuselaje ancho que incluyen tiendas y casinos, el A380 está diseñado para aumentar el confort de los pasajeros, pero la velocidad y el alcance no varían respecto a los aviones existentes.

En el frente militar, el X-35 de Lockheed-Martin ha ganado la competición para convertirse en el nuevo avión de combate supersónico invisible al radar. La Figura 9.30 muestra un boceto preliminar. Están previstas unas 3000 unidades con un coste estimado de doscientos mil millones de dólares en total. Una de las versiones del X-35 podrá despegar y aterrizar verticalmente.

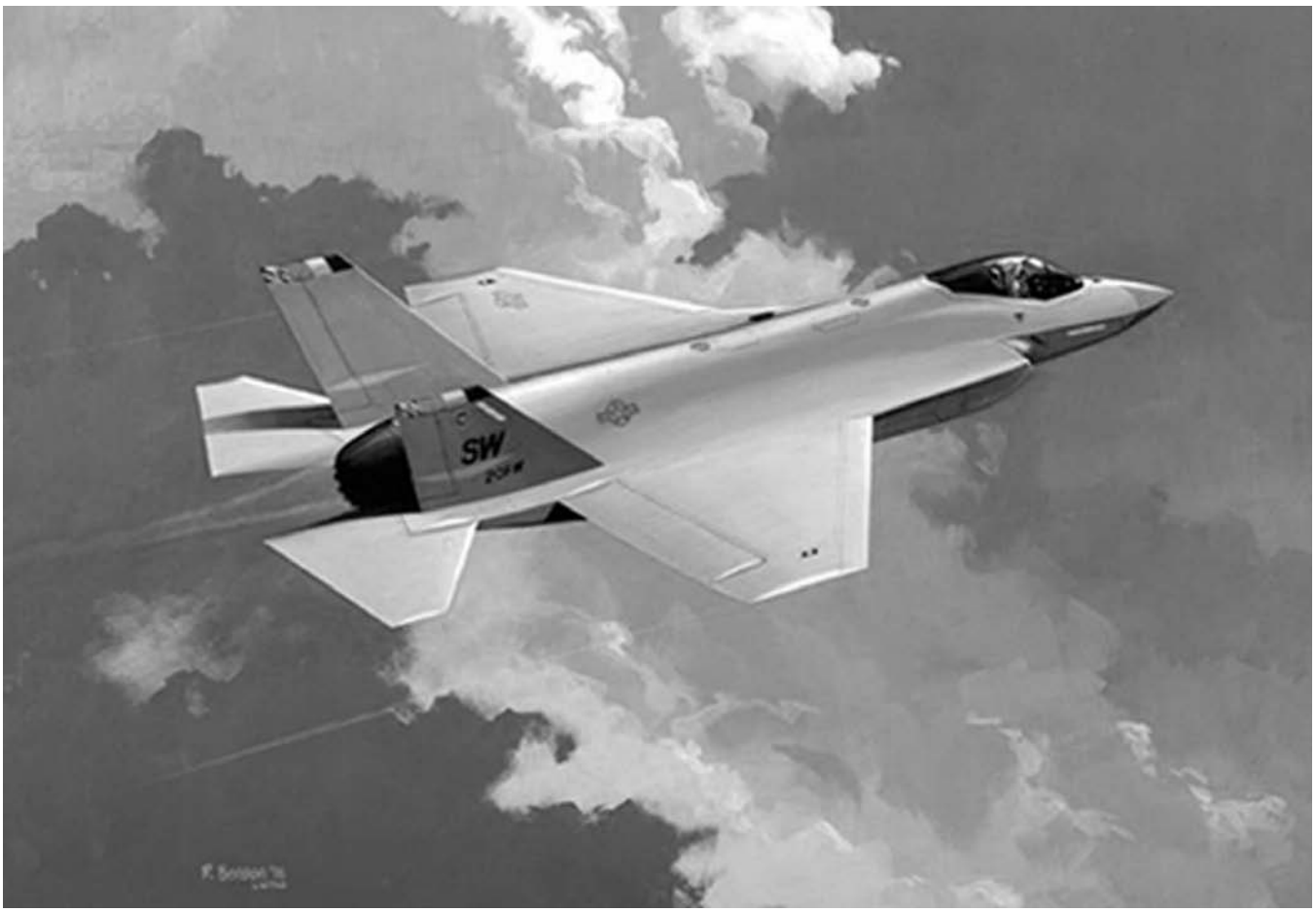


Figura 9.30. El avión supersónico X-35 de Lockheed-Martin ha sido seleccionado recientemente por el Departamento de Defensa de los EE.UU. para ser la siguiente generación de avión de combate invisible al radar. Un prototipo ha demostrado su capacidad de despegar y aterrizar verticalmente. (*Reproducido con permiso de Lockheed-Martin Company.*)

www.elsolucionario.net

Resumen

En este capítulo se ha introducido brevemente un tema muy amplio, el flujo compresible, también llamado *dinámica de gases*. El parámetro principal es el número de Mach Ma = V/a, que es grande y origina variaciones importantes en la densidad. Por este motivo, las ecuaciones de la continuidad y de la cantidad de movimiento deben resolverse conjuntamente con la ecuación de la energía y la ecuación de estado para obtener las cuatro incógnitas (p, ρ, T, V).

Se han revisado las propiedades termodinámicas de un gas perfecto y se ha derivado una fórmula para la velocidad del sonido en un fluido. El análisis se simplificó posteriormente suponiendo flujo estacionario, adiabático y unidimensional sin trabajo de partes móviles, para el cual la entalpía de remanso del gas es constante. La simplificación adicional de flujo isentrópico permite derivar fórmulas para flujos de gases a altas velocidades en conductos de sección variable. Esto revela el fenómeno del *bloqueo* sónico (gasto másico máximo) en la garganta de una tobera. A velocidades supersónicas pueden aparecer ondas de choque normales donde el gas pasa de forma discontinua a condiciones subsónicas. La onda de choque normal explica el efecto de la presión ambiente sobre las actuaciones de las toberas convergentes-divergentes.

Para ilustrar condiciones de flujo no isentrópico, se discutió brevemente el flujo en conductos de sección constante con fricción y adición de calor, efectos que dan lugar al bloqueo del flujo en la sección de salida.

El capítulo termina con una discusión sobre el flujo supersónico bidimensional, en el cual aparecen las ondas de choque oblicuas y las expansiones (isentrópicas) de Prandtl-Meyer. La combinación apropiada de ondas de choque y expansiones permite analizar perfiles aerodinámicos supersónicos.

Problemas

La mayoría de los problemas propuestos aquí son bastante sencillos. Los más difíciles, o de final abierto, se indican con un asterisco. Para resolver los problemas señalados con un icono EES se recomienda el uso del Resolvedor de Ecuaciones de Ingeniería (EES, *Engineering Equation Solver*), mientras que los problemas señalados con un disquete pueden requerir el uso de un ordenador. Los problemas estándar de final de capítulo P9.1 a P9.157 (ordenados por temas en la lista de abajo) están seguidos por los problemas conceptuales C9.1 a C9.8, los problemas del examen de fundamentos de ingeniería (FE, *Fundamentals of Engineering Exam*) FE9.1 a FE9.10, los problemas extensos PE9.1 a PE9.7 y los proyectos de diseño D9.1 y D9.2.

Distribución de los problemas

Sección	Tema	Problemas
9.1	Introducción	P9.1-P9.9
9.2	La velocidad del sonido	P9.10-P9.18
9.3	Flujo adiabático e isentrópico	P9.19-P9.33
9.4	Flujo isentrópico con cambios de área	P9.34-P9.53
9.5	La onda de choque normal	P9.54-P9.62
9.6	Toberas convergentes y divergentes	P9.63-P9.85
9.7	Flujos en conductos con fricción	P9.86-P9.107
9.8	Flujos en conductos sin fricción y con adición de calor	P9.108-P9.115
9.9	Ondas de Mach	P9.116-P9.121
9.9	La onda de choque oblicua	P9.122-P9.139
9.10	Ondas de expansión de Prandtl-Meyer	P9.140-P9.148
9.10	Perfiles supersónicos	P9.149-P9.157

P9.1 Un gas ideal fluye adiabáticamente por un conducto. En la sección 1, p_1 = 140 kPa, T_1 = 260 °C y V_1 = 75 m/s. Aguas abajo, en la sección 2, p_2 = 30 kPa y T_2 = 207 °C. Calcule V_2 en m/s y $s_2 - s_1$ en J/(kg · K) suponiendo que el gas es (*a*) aire, γ = 1,4, y (*b*) argón, γ = 1,67.

P9.2 Resuelva el Problema P9.1 con vapor de agua. Emplee dos procedimientos: (*a*) suponiendo gas ideal y usando la Tabla A.4 y (*b*) suponiendo gas real y usando los datos de las tablas de vapor [15].

P9.3 Si se calientan 8 kg de oxígeno en un tanque cerrado a 200 °C y 300 kPa hasta que la presión alcanza los 400 kPa, calcule (*a*) la nueva temperatura, (*b*) el calor total añadido y (*c*) la variación de entropía.

P9.4 Los efectos de compresibilidad se vuelven importantes cuando el número de Mach excede aproximadamente 0,3. ¿Cómo de rápido puede viajar un cilindro bidimensional a la altura del mar, en atmósfera estándar, antes de que la compresibilidad se vuelva importante en *algún punto* del campo fluido?

P9.5 Una corriente de vapor de agua entra en una tobera a 377 °C, 1,6 MPa y a una velocidad constante de 200 m/s, y se acelera isentrópicamente hasta que sale en condiciones saturadas. Calcule la velocidad y temperatura de salida.

P9.6 Se enfría helio en un contenedor cerrado a 300 °C y 200 kPa hasta que la presión alcanza los 100 kPa. Calcule (*a*) la nueva temperatura en °C y (*b*) la variación de entropía en J/(kg · K).

P9.7 En un conducto de sección constante entra dióxido de carbono (γ = 1,28) a 400 °F, 100 lbf/in^2 y 500 ft/s. Aguas abajo las propiedades son V_2 = 1000 ft/s y T_2 = 900 °F. Calcule (*a*) p_2, (*b*) el calor añadido entre las secciones, (*c*) la variación de entropía entre las secciones y (*d*) el gasto másico por unidad de área. *Consejo*: este problema requiere la ecuación de la continuidad.

P9.8 Se llena un tanque aislado, inicialmente en vacío, con aire atmosférico a 20 °C. Utilizando el análisis de vo-

www.elsolucionario.net

lumen de control de la Ecuación (3.63), calcule la temperatura del aire cuando el tanque esté lleno.

P9.9 En una cámara de combustión se quema una mezcla de oxígeno e hidrógeno líquidos. Los gases de combustión salen a través de una tobera a V_{salida} = 1600 m/s a un ambiente con una presión de 54 kPa. El diámetro de salida de la tobera es de 45 cm y la densidad del chorro de salida 0,15 kg/m^3. Si el gas expulsado tiene peso molecular 18, calcule (*a*) la temperatura de salida del gas, (*b*) el gasto másico y (*c*) el empuje desarrollado por el cohete.

P9.10 Un cierto avión vuela al mismo número de Mach independientemente de su altura de vuelo. Cuando lo hace al nivel del mar, vuela 127 km/h más rápido que cuando lo hace a 12.000 m de altura estándar. Determine su número de Mach.

P9.11 Calcule la velocidad del sonido a 300 °C y 1 atm en el (*a*) nitrógeno, (*b*) hidrógeno, (*c*) helio, (*d*) vapor de agua y (*e*) $^{238}UF_6$ ($\gamma \Xi$ 1,06).

P9.12 Suponga que el agua cumple la Ecuación (1.19) con $n \Xi 7$ y $B \Xi 3000$. Calcule el módulo de compresibilidad (en kPa) y la velocidad del sonido (en m/s) a (*a*) 1 atm y (*b*) 1100 atm (el punto más profundo del océano). (*c*) Calcule la velocidad del sonido a 20 °C y 9000 atm y compare con el valor medido de 2650 m/s (A. H. Smith y A. W. Lawson, *J. Chem. Phys*., vol. 22, 1954, pág. 351).

P9.13 Suponga que el perfil del Problema P8.84 está volando al mismo ángulo de ataque y a 6000 m de altura estándar. Calcule la velocidad de avance, en mi/h, para la cual el flujo es supersónico (posiblemente con ondas de choque) en la superficie del perfil.

P9.14 Suponga un flujo estacionario adiabático de un gas perfecto. Muestre que la ecuación de la energía (9.21), cuando se representa la velocidad del sonido frente a la velocidad, forma una elipse. Esquematice la elipse; marque las regiones de flujo subsónico, transónico y supersónico y determine el cociente entre los ejes principales mayor y menor.

P9.15 Una onda de presión débil (onda sonora), con una variación de presión Δp = 40 Pa, se propaga a través de aire a 20 °C y 1 atm. Calcule (*a*) la variación de densidad, (*b*) la variación de temperatura y (*c*) la variación de velocidad a través de la onda.

P9.16 Un pulso de presión débil Δp se propaga a través de aire en reposo. Discuta el tipo de pulso que se refleja y las condiciones de contorno que deben satisfacerse cuando la onda incide normalmente y después se refleja en (*a*) una pared sólida y (*b*) una superficie libre líquida.

P9.17 Un submarino a una profundidad de 800 m emite una señal de sónar y recibe en 15 s la onda reflejada de un objeto similar sumergido. Utilizando el Problema P9.12 como guía, calcule la distancia al otro objeto.

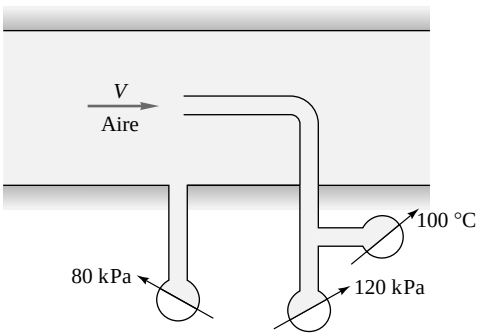
P9.18 Los coches de carreras en el circuito de Indianápolis alcanzan velocidades medias de 185 mi/h. Después de determinar la altura de Indianápolis, calcule el número de Mach de esos coches y determine si la compresibilidad puede afectar a sus aerodinámicas.

P9.19 El avión Concorde vuela a Ma Ξ 2,3 a una altura estándar de 11 km. Estime la temperatura en °C en el punto de remanso anterior. ¿Para qué número de Mach se tendría una temperatura de 450 °C en dicho punto?

P9.20 Un gas fluye a V = 200 m/s, p = 125 kPa y T = 200 °C. Para (*a*) aire y (*b*) helio, calcule la presión y velocidad máximas que pueden alcanzarse mediante expansión o compresión.

P9.21 Se expande isentrópicamente CO_2 a través de un conducto desde p_1 = 125 kPa y T_1 = 100 °C hasta p_2 = 80 kPa y V_2 = 325 m/s. Calcule (*a*) T_2, (*b*) Ma_2, (*c*) T_0, (*d*) p_0, (*e*) V_1 y (*f*) Ma_1.

P9.22 Dadas las mediciones de temperatura y presión de remanso del tubo de pitot y de la presión estática de la Figura P9.22, calcule la velocidad del aire V suponiendo (*a*) flujo incompresible y (*b*) flujo compresible.



P9.22

P9.23 Un gran motor cohete suministra hidrógeno a 1500 °C y 3 MPa, γ = 1,41, R = 4124 J/(kg · K), a una tobera que descarga con una presión de salida igual a la presión ambiente de 54 kPa. Si el empuje del cohete es de 2 MN y el flujo se supone isentrópico, ¿cuál es (*a*) la velocidad de salida y (*b*) el gasto másico de hidrógeno?

P9.24 Para el flujo de gas a baja velocidad (casi incompresible), la presión de remanso puede calcularse usando la ecuación de Bernoulli:

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

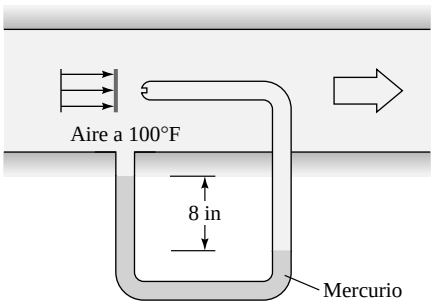
(*a*) Muestre que para velocidades subsónicas mayores la relación isentrópica (9.28*a*) puede ser desarrollada en serie de potencias de la manera siguiente:

$$p_0 \Xi p + \frac{1}{2}\rho V^2 \left[1 + \frac{1}{4}\mathrm{Ma}^2 + \frac{2 - \gamma}{24}\mathrm{Ma}^4 + \cdots\right]$$

(*b*) Suponga que un tubo estático de pitot mide la diferencia de presión $p_0 - p$ en aire y utiliza la relación de Bernoulli, con densidad de remanso, para estimar la velocidad del gas. ¿A qué número de Mach se incurrirá en un error del 4 por 100?

P9.25 Si se sabe que la velocidad del aire en el conducto es de 750 ft/s, utilice la medida del manómetro de mercurio de la Figura P9.25 para estimar la presión estática en el conducto en lbf/in^2.

www.elsolucionario.net



P9.25

P9.26 Si un tubo estático de pitot mide p_0, p y T, muestre que para un flujo isentrópico de gas perfecto es posible calcular la velocidad del gas mediante la fórmula

$$V^2 = 2c_pT_0\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]$$

¿Cuál podría ser una fuente de error si se formara una onda de choque delante del instrumento?

P9.27 En muchos problemas las propiedades sónicas (*) son valores de referencia más útiles que las propiedades de remanso. Deduzca para el flujo isentrópico de un gas perfecto las relaciones p/p^*, T/T^* y ρ/ρ^* como funciones del número de Mach. Le ayudaremos proporcionándole la fórmula para el cociente de densidades:

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left[\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)\text{Ma}^2}\right]^{1/(\gamma-1)}$$

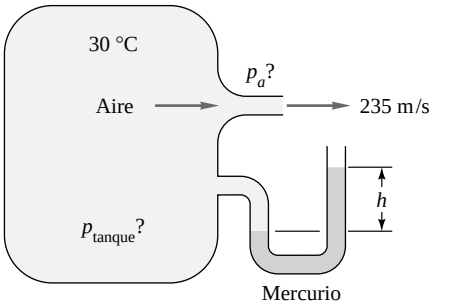
P9.28 Un gran tanque de vacío, mantenido a 60 kPa, succiona aire estándar a nivel del mar a través de una tobera convergente con un diámetro de garganta de 3 cm. Calcule (*a*) el gasto másico a través de la tobera y (*b*) el número de Mach en la garganta.

P9.29 Desde un gran tanque, donde T = 400 °C y p = 1 MPa, se expande vapor de agua de forma isentrópica a través de una tobera hasta que la presión en una sección de 2 cm de diámetro es de 500 kPa. Utilizando las tablas de vapor [15], calcule (*a*) la temperatura, (*b*) la velocidad y (*c*) el gasto másico en esa sección. ¿Es el flujo subsónico?

P9.30 Sea un flujo de oxígeno en un conducto de 5 cm de diámetro. En una sección determinada, T_0 = 300 °C, p = 120 kPa y $\dot{m}$ = 0,4 kg/s. Calcule, en esa sección, (*a*) V, (*b*) Ma y (*c*) ρ_0.

P9.31 A través de un tubo fluye aire adiabáticamente. En una sección se tiene V_1 = 400 ft/s, T_1 = 200 °F y p_1 = 35 lbf/in^2, mientras que en otra sección aguas abajo se tiene V_2 = 1100 ft/s y p_2 = 18 lbf/in^2. Calcule (*a*) Ma_2, (*b*) $U_{\text{máx}}$ y (*c*) p_{02}/p_{01}.

P9.32 El gran depósito de aire comprimido de la Figura P9.32 se descarga a través de una tobera con una velocidad de salida de 235 m/s. El manómetro de mercurio indica h = 30 cm. Suponiendo flujo isentrópico, calcule la presión (*a*) en el tanque y (*b*) en la atmósfera. (*c*) ¿Cuál es el número de Mach de salida?



P9.32

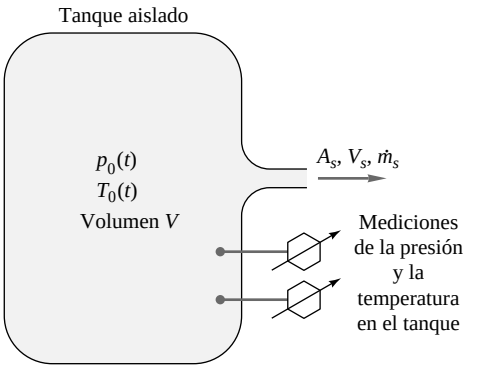
P9.33 Desde un depósito, donde p = 300 kPa y T = 500 K, fluye aire hasta la sección 1 de un conducto, donde A_1 = 0,2 m^2 y V_1 = 550 m/s. Calcule (*a*) Ma_1, (*b*) T_1, (*c*) p_1, (*d*) $\dot{m}$ y (*e*) A^*. ¿Está el flujo bloqueado?

P9.34 El vapor de agua de un depósito a 450 °F y 100 lbf/in^2 sale a través de una tobera convergente, con un área de garganta de 0,1 in^2, a un ambiente a 1 atm. Calcule el gasto másico inicial (*a*) para un gas ideal y (*b*) usando las tablas de vapor [15].

P9.35 Un flujo de helio a T_0 = 400 K entra isentrópicamente en una tobera. En la sección 1, donde A_1 = 0,1 m^2, el equipo estático de pitot (véase Figura P9.25) mide una presión de remanso de 150 kPa y una presión estática de 123 kPa. Calcule (*a*) Ma_1, (*b*) el gasto másico $\dot{m}$, (*c*) T_1 y (*d*) A^*.

P9.36 Un tanque de aire de volumen 1,5 m^3 está inicialmente a 800 kPa y 20 °C. En t = 0 comienza a descargarse a través de una tobera convergente a una atmósfera en condiciones estándar a nivel del mar. El área de la garganta se de 0,75 cm^2. Calcule (*a*) el gasto másico inicial en kg/s, (*b*) el tiempo requerido para descargar hasta 500 kPa y (*c*) el tiempo para el cual la tobera deja de estar bloqueada.

P9.37 Lleve a cabo un análisis exacto de volumen de control del proceso de descarga de la Figura P9.37, suponiendo que el tanque está aislado y que la energía potencial y cinética son despreciables en él. Suponga flujo crítico a la salida y muestre que tanto p_0 como T_0 disminuyen durante la descarga. Obtenga ecuaciones diferenciales de primer orden para $p_0(t)$ y $T_0(t)$ y resuelva el problema hasta donde pueda.



P9.37

www.elsolucionario.net

P9.38 Como se describe en la Referencia 27, Sección 8.6, el Problema P9.37 representa una conjunción ideal entre problema de laboratorio y problema de ordenador. En el experimento de laboratorio de Bober y Kenyon, el tanque tenía un volumen de 0,0352 ft^3 y estaba inicialmente lleno de aire a una presión manométrica de 50 lb/in^2 y 72 °F. La presión atmosférica era de 14,5 lb/in^2 y el diámetro de la sección de salida de la tobera de 0,05 in. Tras 2 s de descarga, la presión manométrica medida en el tanque era de 20 lb/in^2 y la temperatura de –5 °F. Compare estos valores con el análisis teórico del Problema P9.37.

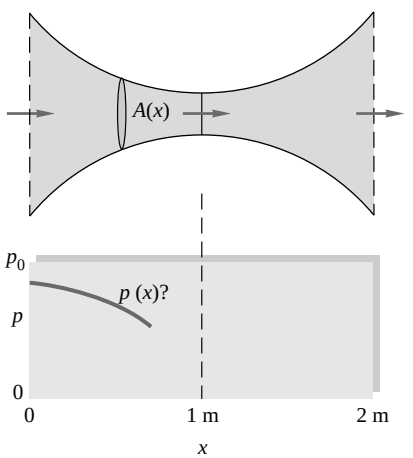
P9.39 Considere un flujo isentrópico en un canal de sección variable, desde la sección 1 a la sección 2. Sabemos que $Ma_1 = 2{,}0$ y deseamos que el cociente de velocidades V_2/V_1 sea 1,2. Calcule (*a*) Ma_2 y (*b*) A_2/A_1. (*c*) Esquematice el aspecto del canal. Por ejemplo, ¿es convergente o divergente? ¿Tiene una garganta?

P9.40 Un flujo de aire, con condiciones de remanso de 800 kPa y 100 °C, se expande isentrópicamente en un conducto hasta una sección donde $A_1 = 20$ cm^2 y $p_1 = 47$ kPa. Calcule (*a*) Ma_1, (*b*) el área de la garganta y (*c*) $\dot{m}$. En la sección 2, entre la garganta y la sección 1, el área es de 9 cm^2. (*d*) Calcule el número de Mach en la sección 2.

P9.41 A través de la tobera de la Figura P9.41 fluye aire con una presión de remanso de 100 kPa. La longitud es de 2 m y la variación de área está dada por

$$A \Xi 20 - 20x + 10x^2$$

con A en cm^2 y x en m. Se desea representar gráficamente la familia completa de presiones isentrópicas $p(x)$ en esta tobera para el rango de presiones de entrada $1 < p(0) < 100$ kPa. Indique qué presiones de entrada no son físicamente posibles y discuta brevemente. Si su ordenador dispone de una herramienta gráfica, represente al menos 15 perfiles de presión; en caso contrario simplemente resalte los aspectos importantes y explíquelos.



P9.41

P9.42 El neumático de una bicicleta está inflado con aire a una presión de 169,12 kPa, y la temperatura en su interior es de 30,0 °C. Suponga que la válvula se rompe y el aire empieza a salir del neumático a la atmósfera ($p_a = 100$ kPa y $T_a = 20{,}0$ °C). El diámetro de salida de la válvula es de 2,00 mm y es la sección más pequeña de todo el sistema. En este caso las pérdidas por fricción son despreciables y la suposición de flujo isentrópico unidimensional resulta razonable. (*a*) Determine el número de Mach, la velocidad y la temperatura en el plano de salida de la válvula (iniciales). (*b*) Calcule el gasto másico inicial que sale del neumático. (*c*) Calcule la velocidad en el plano de salida empleando la ecuación de Bernoulli incompresible. ¿Cómo de bien concuerda esta estimación con el resultado «exacto» del apartado (*a*)? Explíquelo.

P9.43 Considere el flujo isentrópico de aire a través de un conducto con $T_0 = 300$ °C. En dos secciones, con áreas idénticas de 25 cm^2, se tienen las presiones $p_1 = 120$ kPa y $p_2 = 60$ kPa. Determine (*a*) el gasto másico, (*b*) el área de la garganta y (*c*) Ma_2.

P9.44 En el Problema P3.34 no sabíamos nada sobre flujos compresibles, con lo que meramente supusimos las condiciones de salida p_2 y T_2 y calculamos V_2 aplicando la ecuación de la continuidad. Suponga ahora que el diámetro de la garganta es de 3 in. Para las condiciones de remanso de la cámara del cohete de la Figura P3.34 y suponiendo $\gamma = 1{,}4$ y un peso molecular de 26, calcule la velocidad, presión y temperatura de salida reales según la teoría unidimensional. Si $p_a = 14{,}7$ lbf/in^2, calcule el empuje a partir del análisis del Problema P3.68. Este empuje es completamente independiente de la temperatura de remanso (compruébelo, si quiere, cambiando T_0 a 2000 °R). ¿Por qué?

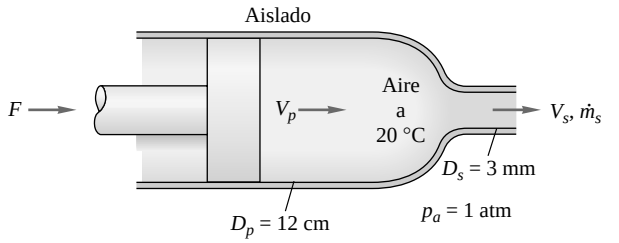
P9.45 En un punto aguas arriba de la garganta de una tobera convergente-divergente las propiedades son $V_1 = 200$ m/s, $T_1 = 300$ K y $p_1 = 125$ kPa. Si el flujo de salida es supersónico, calcule mediante la teoría isentrópica (*a*) $\dot{m}$ y (*b*) A_1. El área de la garganta es de 35 cm^2.

P9.46 Si el autor no ha cometido ningún error, los resultados del Problema P9.43 son (*a*) 0,671 kg/s, (*b*) 23,3 cm^2 y (*c*) 1,32. (No se lo diga a sus compañeros que aún estén trabajando en el Problema P9.43.) Considere el volumen de control que encierra la tobera entre esas dos secciones de 25 cm^2. Si la presión fuera del conducto es de 1 atm, determine la fuerza total que actúa sobre esta sección de la tobera.

P9.47 Las pequeñas variaciones de área causadas por la obstrucción de una maqueta en un túnel de viento operando casi a Mach 1 pueden ser importantes. Suponga que la sección de la cámara de ensayos es de 1 m^2 y que las condiciones en ausencia de obstrucciones son Ma = 1,10 y $T = 20$ °C. ¿Qué área tiene que tener el modelo para producir el bloqueo de la sección de ensayos? Si la sección transversal del modelo es de 0,004 m^2 (obstrucción del 0,4 por 100), ¿qué variación porcentual experimenta la velocidad en la sección de ensayos?

P9.48 Se empuja un pistón de 12 cm de diámetro mediante una fuerza $F = 1100$ N a través de un cilindro aislado que contiene aire a 20 °C, como en la Figura P9.48. El diámetro de salida es de 3 mm y $p_a = 1$ atm. Calcule (*a*) V_s, (*b*) V_p y (*c*) $\dot{m}_s$.

www.elsolucionario.net



P9.48

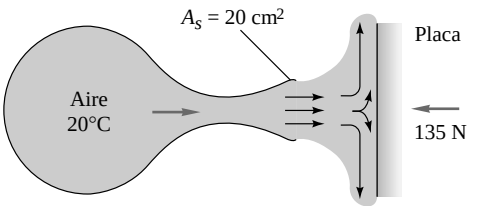
P9.49 Considere la tobera de Venturi de la Figura 6.40*c*, con $D = 5$ cm y $d = 3$ cm. La temperatura de remanso es de 300 K y la velocidad aguas arriba $V_1 = 72$ m/s. Si la presión en la garganta es de 124 kPa, calcule, mediante la teoría de flujo isentrópico, (*a*) p_1, (*b*) Ma_2 y (*c*) el gasto másico.

P9.50 En una tobera convergente, de sección de entrada $D_1 =$ 10 cm, se expande isentrópicamente argón a partir de las condiciones a la entrada $p_1 = 150$ kPa, $T_1 = 100$ °C y $\dot{m} = 1$ kg/s. El flujo descarga de forma suave a una presión ambiente de 101 kPa. (*a*) ¿Cuál es el área de la sección de salida? (*b*) ¿Cuánto más puede reducirse la presión ambiente antes de que ésta afecte al gasto másico a la entrada?

P9.51 A través de una tobera fluye aire con unas condiciones de remanso de 500 K y 200 kPa. En la sección 1, donde el área es de 12 cm^2, la densidad es de 0,32 kg/m^3. Suponiendo flujo isentrópico, (*a*) determine el gasto másico. (*b*) ¿Está el flujo bloqueado? Si es así, calcule A^*. Calcule también (*c*) p_1 y (*d*) Ma_1.

P9.52 El flujo a través de una tobera convergente-divergente descarga de forma suave en una atmósfera estándar al nivel del mar. Se le alimenta con un depósito de 40 m^3 que inicialmente está a 800 kPa y 100 °C. Suponiendo que el flujo en la tobera es isentrópico, calcule (*a*) el área de la garganta y (*b*) la presión en el depósito después de 10 s de operación. El área de salida es de 10 cm^2.

P9.53 El aire contenido en un depósito a 20 °C se descarga estacionariamente a través de una tobera, con una sección de salida de 20 cm^2, e impacta sobre una placa vertical, tal como muestra la Figura P9.53. El flujo es subsónico en todas partes. Se requiere una fuerza de 135 N para mantener la placa en su sitio. Calcule (*a*) V_s, (*b*) Ma_s y (*c*) p_0 si $p_a = 101$ kPa.



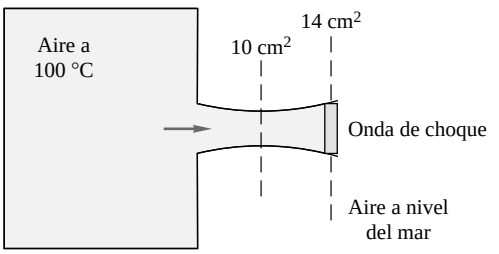
P9.53

P9.54 Las condiciones aguas arriba para un flujo de aire a través de una onda de choque normal son $V_1 = 600$ m/s, $T_{01} = 500$ K y $p_{01} = 700$ kPa. Calcule las condiciones aguas abajo Ma_2, V_2, T_2, p_2 y p_{02}.

P9.55 A través de una tobera convergente-divergente, cuya garganta tiene un área de 12 cm^2, fluye aire suministrado por un depósito a 450 kPa. Aparece una onda de choque normal donde $A_1 = 20$ cm^2. (*a*) Calcule la presión justo aguas abajo de la onda de choque. Más aguas abajo, donde $A_3 = 30$ cm^2, calcule (*b*) p_3, (*c*) A_3^* y (*d*) Ma_3.

P9.56 El aire de un depósito a 20 °C y 500 kPa fluye a través de un conducto y forma una onda de choque normal aguas abajo de la garganta de área 10 cm^2. Se observa que, por pura casualidad, la presión de remanso aguas abajo de esa onda de choque coincide exactamente con la presión en la garganta. ¿Cuál es el área de la sección en la que se encuentra la onda de choque?

P9.57 Una corriente de aire fluye desde un tanque hasta la atmósfera estándar a través de una tobera, como en la Figura P9.57. A la salida de la tobera se forma una onda de choque normal. Calcule (*a*) la presión en el tanque y (*b*) el gasto másico.



P9.57

elsolucionario.net

P9.58 Un flujo de argón (Tabla A.4) se aproxima a una onda de choque normal con $V_1 = 700$ m/s, $p_1 = 125$ kPa y $T_1 = 350$ K. Calcule (*a*) V_2 y (*b*) p_2. (*c*) ¿Qué presión p_2 resultaría si se produjera la misma variación de velocidad de V_1 a V_2 de forma isentrópica?

P9.59 Una tobera es atravesada por aire a unas condiciones de remanso de 450 K y 250 kPa. En la sección 1, donde el área es de 15 cm^2, hay una onda de choque normal. Si el gasto másico vale 0,4 kg/s, calcule (*a*) el número de Mach y (*b*) la presión de remanso justo aguas abajo de la onda.

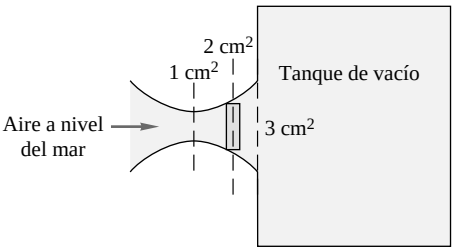
P9.60 Cuando se coloca un tubo de pitot, como el de la Figura 6.30, en un flujo supersónico, aparece una onda de choque normal justo delante de la sonda. Suponga que la sonda mide $p_0 = 190$ kPa y $p = 150$ kPa. Si la temperatura de remanso es de 400 K, calcule el número de Mach (supersónico) y la velocidad aguas arriba de la onda de choque.

P9.61 Repita el Problema P9.56, salvo que ahora la casual coincidencia es que la presión *estática* aguas abajo de la onda de choque es exactamente igual a la presión en la garganta. ¿Cuál es el área de la sección en la que se encuentra la onda de choque?

P9.62 Una explosión atómica genera una onda de choque que se propaga en aire en reposo a 14,7 lbf/in^2 y 520 °R. La presión justo detrás de la onda de choque es de 5000 lbf/in^2. Suponiendo $\gamma = 1{,}4$, ¿cuál es la velocidad C de la onda y la velocidad V justo detrás de la onda de choque?

www.elsolucionario.net

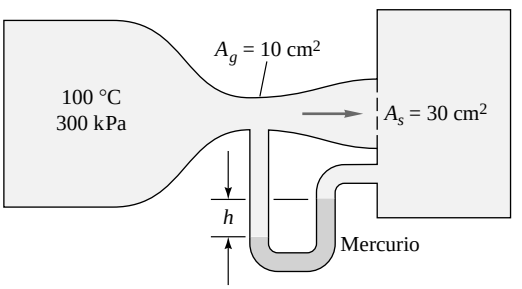
P9.63 Un tanque de vacío succiona aire estándar al nivel del mar a través de una tobera, como en la Figura P9.63. Donde el área de la tobera vale 2 cm^2 se forma una onda de choque normal, como muestra la figura. Calcule (*a*) la presión en el tanque y (*b*) el gasto másico.



P9.63

P9.64 El aire contenido en un tanque muy grande a 100 °C y 150 kPa se descarga a la atmósfera a través de una tobera convergente con un área de garganta igual a 5 cm^2. Calcule el gasto másico a la salida cuando la presión atmosférica es de (*a*) 100 kPa, (*b*) 60 kPa y (*c*) 30 kPa.

P9.65 En la Figura P9.65 se muestra cómo un flujo de aire pasa de un gran depósito a otro a través de una tobera convergente-divergente. Un manómetro de mercurio entre la garganta y el depósito aguas abajo mide h = 15 cm. Calcule la presión del depósito aguas abajo. ¿Aparece alguna onda de choque normal en el flujo? Si es así, ¿se encuentra ésta en el plano de salida o más aguas arriba?



P9.65

P9.66 En el Problema P9.65, ¿cuál sería la lectura h del manómetro de mercurio si la tobera operara exactamente en las condiciones supersónicas de diseño?

P9.67 Calcule para el Problema P9.65 el rango completo de lecturas del manómetro para el cual el flujo a través de la tobera es completamente isentrópico, excepto posiblemente en la sección de salida.

P9.68 El aire en un tanque a 120 kPa y 300 K se descarga a la atmósfera a un ritmo de 0,12 kg/s a través de una tobera convergente con un área de la garganta de 5 cm^2. ¿Cuál es la presión atmosférica? ¿Cuál es el máximo gasto másico posible para una presión atmosférica baja?

P9.69 En referencia al Problema P3.68, muestre que el empuje de un motor cohete en el vacío viene dado por

$$F = \frac{p_0 A_s (1 + \gamma \mathrm{Ma}_s^2)}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{Ma}_s^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}}$$

donde A_s = área de salida
Ma_s = número de Mach de salida
p_0 = presión de remanso en la cámara de combustión

Nótese que la temperatura de remanso no afecta al empuje.

P9.70 Un flujo de aire, con una temperatura de remanso de 100 °C, se expande isentrópicamente a través de una tobera de 6 cm^2 de garganta y 18 cm^2 de sección de salida. El gasto másico se encuentra en su valor máximo de 0,5 kg/s. Calcule la presión de salida para un flujo de salida (*a*) subsónico y (*b*) supersónico.

P9.71 Para la tobera del Problema P9.70, y admitiendo que el flujo no sea isentrópico, ¿cuál es el rango de presiones exteriores al tanque p_a para el cual (*a*) el flujo en la tobera divergente es totalmente supersónico, (*b*) el flujo de salida es subsónico, (*c*) el gasto másico es independiente de p_a, (*d*) la presión p_s en el plano de salida es independiente de p_a y (*e*) $p_s < p_a$?

P9.72 Una tobera convergente se alimenta con el aire contenido en un gran tanque a 500 K y 165 kPa. La presión ambiente fuera de la salida de la tobera es la presión estándar a nivel del mar. ¿Cuál es el diámetro de salida apropiado si se quiere tener un gasto másico de 72 kg/h?

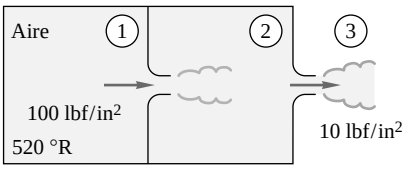
P9.73 Un flujo isentrópico de aire atraviesa una tobera convergente-divergente con un área de garganta de 3 cm^2. En la sección 1, la presión es de 101 kPa, la temperatura es de 300 K y la velocidad es de 868 m/s. (*a*) ¿Está la tobera bloqueada? Determine (*b*) A_1 y (*c*) el gasto másico. Suponga que se reduce el tamaño de la garganta (flexible) a 2 cm^2 sin modificar las condiciones de remanso o A_1. Suponiendo que el flujo carece de ondas de choque, ¿habrá algún cambio en las propiedades del gas en la sección 1? Si es así, calcule los nuevos valores de p_1, V_1 y T_1 y explíquelo.

P9.74 La hipótesis de gas perfecto conduce a una serie de relaciones en función del número de Mach que son muy útiles (y están tabuladas). No ocurre lo mismo con los gases reales como el vapor de agua. Para ilustrarlo, considere que se expande isentrópicamente vapor de agua a T_0 = 500 °C y p_0 = 2 MPa a través de una tobera convergente cuya sección de salida mide 10 cm^2. Utilizando las tablas para el vapor de agua, determine (*a*) la presión de salida y (*b*) el gasto másico cuando el flujo es sónico, o está bloqueado. ¿Qué es lo que complica el análisis?

***P9.75** El sistema de tanques dobles de la Figura P9.75 tiene dos toberas convergentes idénticas de 1 in^2 de área de garganta. El tanque 1 es muy grande y el tanque 2 es lo suficientemente pequeño como para estar en equilibrio, en condiciones de flujo estacionario, con el chorro proveniente del tanque 1. El flujo en la tobera es isentrópico, pero la entropía varía entre 1 y 3 a consecuencia de la disipación del chorro en el tanque 2. Calcule el gasto másico. (Si desiste puede consultar la

www.elsolucionario.net

Referencia 9, págs. 288-290, donde encontrará una buena explicación.)

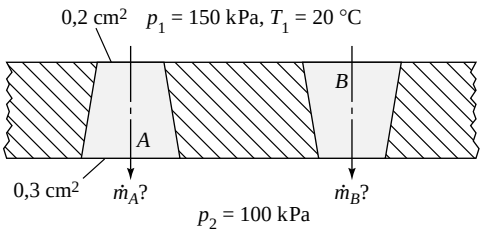


P9.75

P9.76 Un gran depósito a 20 °C y 800 kPa se usa para llenar un pequeño tanque aislado a través de una tobera convergente-divergente de 1 cm² de área de garganta y de 1,66 cm² de área de salida. El pequeño tanque tiene un volumen de 1 m³ y está inicialmente a 20 °C y 100 kPa. Calcule el tiempo transcurrido cuando (*a*) la onda de choque empieza a aparecer dentro de la tobera y (*b*) el gasto másico empieza a caer por debajo de su valor máximo.

P9.77 Un gas perfecto (no aire) se expande isentrópicamente a través de una tobera supersónica con un área de salida que es 5 veces el área de la garganta. El número de Mach a la salida es 3,8. ¿Cuál es la relación de calores específicos del gas? ¿De qué gas puede tratarse? Si p_0 = 300 kPa, ¿cuál será la presión de salida del gas?

P9.78 La orientación de un agujero puede ser determinante. Considere los agujeros *A* y *B* de la Figura P9.78 que son idénticos, pero están contrapuestos. Para unas propiedades de gas dadas, calcule el gasto másico a través de cada uno de los agujeros y explique por qué son diferentes.



P9.78

P9.79 Un gran depósito a 600 K suministra un flujo de aire a través de una tobera convergente-divergente con un área de garganta de 2 cm². En la sección de área 6 cm² se forma una onda de choque normal. La presión justo aguas abajo de la onda de choque es de 150 kPa. Calcule (*a*) la presión en la garganta, (*b*) el gasto másico y (*c*) la presión en el depósito.

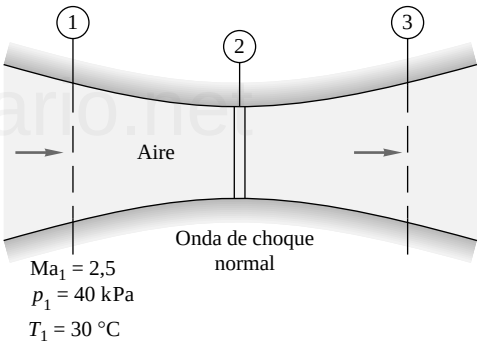
P9.80 El neumático de un coche a nivel del mar se encuentra inicialmente a 32 lbf/in² de presión manométrica y 75 °F. Cuando es perforado con un agujero en forma de tobera, su presión manométrica desciende a 15 lbf/in² en 12 min. Calcule el tamaño del agujero en milésimas de pulgada. El volumen del neumático es de 2,5 ft³.

P9.81 El helio contenido en un depósito grande a 100 °C y 400 kPa descarga en un depósito receptor a través de una tobera convergente-divergente diseñada para descargar a Ma = 2,5 con un área de salida de 1,2 cm². Calcule (*a*) la presión en el depósito receptor y (*b*) el gasto másico en las condiciones de diseño. (*c*) Calcule también el rango de presiones del recipiente para el cual el gasto másico es el máximo.

P9.82 Una corriente de aire a 500 K alimenta una tobera convergente-divergente, con un área de garganta de 1 cm² y un área de salida de 2,7 cm². Un tubo de pitot colocado en el plano de salida mide p_0 = 250,6 kPa y p = 240,1 kPa cuando el gasto másico es de 182,2 kg/h. Calcule la velocidad de salida. ¿Existe una onda de choque en el conducto? Si es así, calcule el número de Mach justo aguas abajo de dicha onda.

P9.83 Un motor cohete proporciona un empuje de 1 millón lbf cuando opera bajo condiciones de diseño (descarga sin onda de choque a la presión a nivel del mar). La presión y temperatura en la cámara son 600 lbf/in² y 4000 °R, respectivamente. Los gases de salida se asemejan a un gas con γ = 1,38 y un peso molecular de 26. Calcule (*a*) el número de Mach a la salida y (*b*) el diámetro de la garganta.

P9.84 Un flujo de aire atraviesa el conducto de la Figura P9.84, donde A_1 = 24 cm², A_2 = 18 cm² y A_3 = 32 cm². En la sección 2 existe una onda de choque normal. Calcule (*a*) el gasto másico, (*b*) el número de Mach y (*c*) la presión de remanso en la sección 3.



P9.84

P9.85 Un gran tanque a 300 kPa suministra aire a través de una tobera con un área de garganta de 1 cm² y un área de salida igual a 2,2 cm². En el plano de salida se forma una onda de choque normal. La temperatura justo aguas abajo de esta onda de choque es de 473 K. Calcule (*a*) la temperatura en el gran tanque, (*b*) la presión en el receptáculo receptor y (*c*) el gasto másico.

P9.86 Un flujo de aire a V_1 = 73 m/s, p_1 = 550 kPa y T_1 = 60 °C entra en una tubería de 3 cm de diámetro y 15 m de longitud. El coeficiente de fricción es 0,018. Calcule V_2, p_2, T_2 y p_{02} al final de la tubería. ¿Qué longitud adicional de tubería haría falta para que las condiciones a la salida fueran sónicas?

P9.87 En un conducto de L/D = 40 entra aire a V_1 = 170 m/s y T_1 = 300 K. El flujo a la salida está bloqueado. ¿Cuál es el coeficiente de fricción medio en el conducto si el flujo es adiabático?

P9.88 En un conducto de sección cuadrada de 5 por 5 cm entra aire a V_1 = 900 m/s y T_1 = 300 K. El coeficiente de

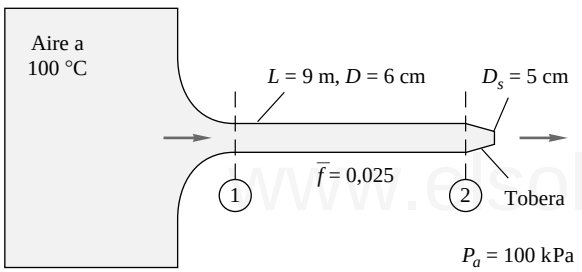
www.elsolucionario.net

fricción es 0,02. ¿Para qué longitud del conducto será el flujo decelerado justo hasta Ma = 1,0? Si la longitud del conducto es de 2 m, ¿existirá una onda de choque en el conducto? Si es así, ¿para qué número de Mach ocurrirá?

P9.89 A través de un conducto de 25 m de longitud y 8 cm de diámetro fluye dióxido de carbono. El coeficiente de fricción es 0,025. A la entrada, p = 300 kPa y T = 400 K. El gasto másico vale 1,5 kg/s. Calcule la caída de presión empleando la teoría de (*a*) flujo compresible y (*b*) flujo incompresible (Sección 6.6). (*c*) ¿Para qué longitud del conducto tendremos un flujo bloqueado a la salida?

P9.90 Una tubería de 2,5 cm de diámetro, que descarga al vacío, es alimentada con aire a p_0 = 700 kPa y T_0 = 330 K a través de una tobera convergente. Si $\bar{f}$ = 0,022, ¿cuál será el gasto másico a través de la tubería si su longitud es de (*a*) 0 m, (*b*) 1 m y (*c*) 10 m?

P9.91 Desde un tanque fluye aire estacionariamente a través del tubo de la Figura P9.91. Al final del mismo hay una tobera convergente. Si el gasto másico es de 3 kg/s y la tobera está bloqueada, calcule (*a*) el número de Mach en la sección 1 y (*b*) la presión dentro del tanque.



P9.91

P9.92 Modifique el Problema P9.91 de la manera siguiente. Considere la presión en el tanque igual a 700 kPa y la tobera bloqueada. Determine (*a*) Ma_2 y (*b*) el gasto másico.

P9.93 En un conducto de 3 cm de diámetro fluye aire adiabáticamente. El coeficiente de fricción medio es 0,015. Si a la entrada V = 950 m/s y T = 250 K, ¿a qué distancia aguas abajo (*a*) el número de Mach será igual a 1,8 o (*b*) el flujo estará bloqueado?

P9.94 En el análisis del flujo compresible en un conducto con fricción, Sección 9.7, se supone que la entalpía de remanso y el gasto másico son constantes, mientras que la cantidad de movimiento es variable. Un flujo así recibe el nombre de *flujo de Fanno* y la curva que representa todas las posibles variaciones de las propiedades en un diagrama temperatura-entropía se llama *curva de Fanno*. Suponiendo un gas perfecto con γ = 1,4 y los datos del Problema P9.86, dibuje una curva de Fanno del flujo para un rango de velocidades que vaya desde las más bajas (Ma $\ll$ 1) hasta las más altas (Ma $\gg$ 1). Comente el significado del punto de entropía máxima en esta curva.

P9.95 Una corriente de helio (Tabla A.4) entra en un tubo de 5 cm de diámetro a p_1 = 550 kPa, V_1 = 312 m/s y T_1 = 40 °C. El coeficiente de fricción vale 0,025. Si el flujo está bloqueado, determine (*a*) la longitud del tubo y (*b*) la presión de salida.

P9.96 A través de un tubo aislado de 15 cm de diámetro fluye metano (CH_4) con f = 0,023. Las condiciones a la entrada son 600 kPa, 100 °C y un gasto másico de 5 kg/s. ¿Qué longitud del tubo (*a*) bloqueará el flujo, (*b*) incrementará la velocidad en un 50 por 100 o (*c*) disminuirá la presión en un 50 por 100?

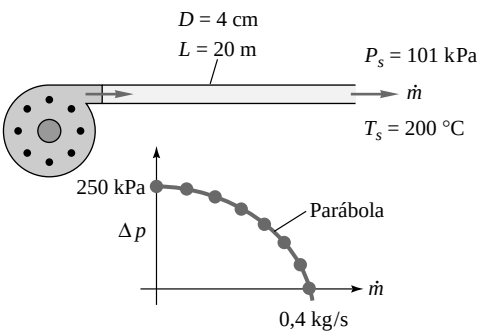
P9.97 Muestre, mediante simples sustituciones algebraicas, que la Ecuación (9.74) puede ser reescrita en la forma

$$\frac{\bar{p}_1^2}{\bar{p}_2^2} = \frac{\bar{\rho}^{*2}}{\bar{\rho}_2^2}\left[\frac{2\mathcal{J}}{\mathcal{J}+1}\frac{\bar{f}L}{D} + 2\ln\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_2}\right]$$

¿Por qué esta fórmula resulta poco práctica cuando uno trata de determinar el gasto másico a partir de las presiones en las secciones 1 y 2?

P9.98 En un tubo capilar se pueden dar condiciones de flujo *laminar* compresible, $f \equiv 64/\mathrm{Re}$. Considere aire, con condiciones de remanso de 100 °C y 200 kPa, entrando en un tubo de 3 cm de longitud y 0,1 mm de diámetro. Si a la salida del tubo se tiene el vacío, calcule (*a*) el número de Reynolds medio, (*b*) el número de Mach a la entrada y (*c*) el gasto másico en kg/h.

P9.99 Un compresor fuerza el paso de aire a través de una tubería lisa de 20 m de longitud y 4 cm de diámetro, como en la Figura P9.99. El aire sale a 101 kPa y 200 °C. La figura muestra los datos del compresor en forma de incremento de presión frente a gasto másico. Empleando el diagrama de Moody, calcule $\bar{f}$ y calcule el gasto másico resultante.



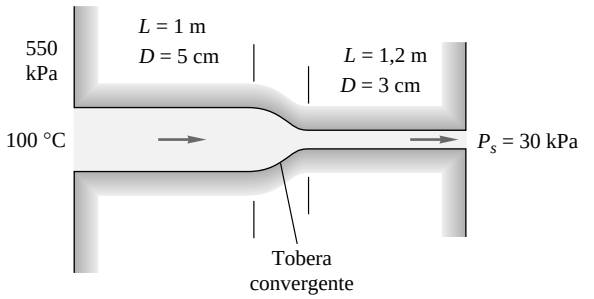
P9.99

P9.100 Modifique el Problema P9.99 de la manera siguiente. Encuentre la longitud de la tubería de 4 cm de diámetro para la cual el incremento de presión de la bomba es exactamente igual a 200 kPa.

P9.101 ¿Cómo se comportan las fórmulas para flujo compresible en un conducto cuando la caída de presión es pequeña? Sea aire a 20 °C entrando en un tubo de 1 cm de diámetro y 3 m de longitud. Si $\bar{f}$ = 0,028, p_1 = 102 kPa y p_2 = 100 kPa, calcule el gasto másico en kg/h para (*a*) un flujo isotermo, (*b*) un flujo adiabático y (*c*) un flujo incompresible (Capítulo 6) con la densidad de la entrada.

www.elsolucionario.net

P9.102 La Figura P9.102 muestra aire a 550 kPa y 100 °C entrando en un tubo liso de 1 m de longitud y atravesando después un segundo tubo liso antes de descargar en un depósito a 30 kPa. Utilizando el diagrama de Moody para calcular $\bar{f}$, calcule el gasto másico. ¿Está el flujo bloqueado?



P9.102

P9.103 Se desea bombear gas natural, con $\gamma \approx 1{,}3$ y un peso molecular de 16, a través de un gaseoducto de 100 km de longitud y 81 cm de diámetro. La presión aguas abajo es de 150 kPa. Si el gas entra a 60 °C, el gasto másico es de 20 kg/s y $\bar{f}$ = 0,024, calcule la presión de entrada requerida para (*a*) un flujo isotermo y (*b*) un flujo adiabático.

P9.104 Un tanque de oxígeno (Tabla A.4) a 20 °C alimenta a un astronauta a través de un tubo umbilical de 12 m de longitud y 1,5 cm de diámetro. La presión de salida del tubo es de 40 kPa. Si el gasto másico deseado es de 90 kg/h y $\bar{f}$ = 0,025, ¿cuál debería ser la presión en el tanque?

P9.105 En un tubo de 5 cm de diámetro entra aire a p_1 = 200 kPa y T_1 = 350 K. La presión en la cámara aguas abajo es de 74 kPa. El coeficiente de fricción vale 0,02. Si la salida está bloqueada, ¿cuál es (*a*) la longitud del tubo y (*b*) el gasto másico? (*c*) Si p_1, T_1 y $p_{\text{cámara}}$ permanecen iguales, ¿qué longitud de tubo hará que el gasto másico se vea incrementado en un 50 por 100 con respecto a (*b*)? *Consejo*: En el apartado (*c*) la presión de salida no es igual a la presión aguas abajo.

P9.106 Un flujo de aire a 300 K atraviesa un conducto de 50 m de longitud con $\bar{f}$ = 0,019. ¿Cuál es el diámetro mínimo que puede tener el conducto para que no se provoque el bloqueo del flujo si la velocidad a la entrada es de (*a*) 50 m/s, (*b*) 150 m/s y (*c*) 420 m/s?

P9.107 Una mezcla de aire-combustible, que se supone equivalente a aire, entra en una cámara de combustión tubular a V_1 = 104 m/s y T_1 = 300 K. ¿Qué adición de calor, en kJ/kg, provocará que el flujo a la salida esté bloqueado? ¿Cuál será el número de Mach y la temperatura a la salida, si se añaden 504 kJ/kg de calor durante la combustión?

P9.108 ¿Qué le sucede al flujo de entrada del Problema P9.107 si la adición de calor por combustión sube a 1500 kJ/kg y p_{01} y T_{01} permanecen constantes? ¿En cuánto se reduce el gasto másico?

P9.109 Un motor a reacción ingiere 45 kg/s de aire y le añade 550 kJ/kg en la cámara de combustión. El área transversal de la cámara es de 0,5 m^2 y el aire entra en la cámara a 80 kPa y 5 °C. Después de la combustión, el aire se expande isentrópicamente a través de una tobera convergente para salir a la presión atmosférica. Calcule (*a*) el diámetro de la garganta de la tobera, (*b*) la velocidad de salida de la tobera y (*c*) el empuje producido por el motor.

P9.110 En el análisis del flujo compresible en un conducto con adición de calor, Sección 9.8, se supone que la cantidad de movimiento ($p + \rho V^2$) y el gasto másico son constantes, mientras que la entalpía de remanso es variable. Un flujo así recibe el nombre de *flujo de Rayleigh* y la curva que representa todas las posibles variaciones de las propiedades en un diagrama de temperatura-entropía se llama *curva de Rayleigh*. Suponiendo que aire pasa a través del estado fluido-dinámico p_1 = 548 kPa, T_1 = 588 K, V_1 = 266 m/s y A = 1 m^2, dibuje la curva de Rayleigh del flujo para un rango de velocidades que vaya desde las más bajas (Ma $\ll$ 1) hasta las más altas (Ma $\gg$ 1). Comente el significado del punto de entropía máxima de esta curva.

P9.111 Añada a su curva de Rayleigh del Problema P9.110 una curva de Fanno (vea el Problema P9.94) para una entalpía de remanso igual al valor asociado al estado 1 del Problema P9.110. Las dos curvas se cortarán en el estado 1, que es subsónico, y en un cierto estado 2, que es supersónico. Interprete estos dos estados usando la Tabla B.2.

P9.112 En la sección 1 de un conducto entran 1,2 kg/s de aire en régimen subsónico. Cuando se añaden 650 kW de calor, el flujo se bloquea a la salida en p_2 = 95 kPa y T_2 = 700 K. Suponiendo que la adición de calor se hace sin fricción, calcule (*a*) la velocidad y (*b*) la presión de remanso en la sección 1.

P9.113 Una corriente de aire entra en un conducto de sección constante a p_1 = 90 kPa, V_1 = 520 m/s y T_1 = 558 °C. A continuación se enfría el aire en ausencia de fricción hasta que a la salida se tiene p_2 = 160 kPa. Calcule (*a*) V_2, (*b*) T_2 y (*c*) la cantidad total de enfriamiento en kJ/kg.

P9.114 Hemos simplificado aquí las cosas separando la fricción (Sección 9.7) de la adición de calor (Sección 9.8). Realmente suelen darse a la vez y sus efectos deben ser evaluados simultáneamente. Muestre que para un flujo en un conducto de sección constante con fricción *y* adición de calor, las ecuaciones de la continuidad, cantidad de movimiento y energía pueden combinarse para proporcionar la siguiente ecuación diferencial para las variaciones del número de Mach:

$$\frac{d\text{Ma}^2}{\text{Ma}^2} = \frac{1+\tfrac{1}{2}(\gamma-1)\text{Ma}^2}{1-\text{Ma}^2}\frac{dQ}{c_pT} + \frac{\tfrac{1}{2}\gamma\text{Ma}^2[2+(\gamma-1)\text{Ma}^2]}{2(1-\text{Ma}^2)}\frac{f\,dx}{D}$$

donde dQ es el calor añadido. En el Capítulo 8 de la Referencia 5 se puede encontrar una derivación completa donde se incluyen varios efectos combinados adicionales tales como las variaciones de área o la adición de masa.

P9.115 A través de un conducto con fricción despreciable fluye aire en régimen subsónico. La presión cae de p_1 = 200 a p_2 = 106 kPa cuando se añade una cantidad de

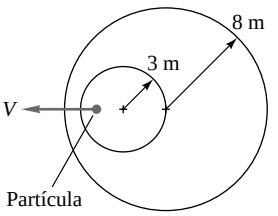
www.elsolucionario.net

calor de 948 kJ/kg. Calcule (*a*) Ma_1, (*b*) T_1 y (*c*) V_1, suponiendo que $T_{01} = 305$ K.

P9.116 Una observadora a nivel del mar no oye un avión volando a 12.000 ft de altura estándar hasta que éste no se ha alejado 5 mi de ella. Estime la velocidad del avión en ft/s.

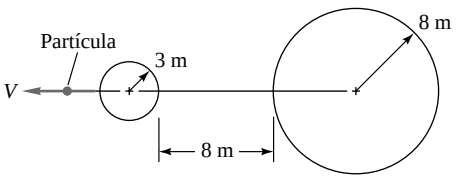
P9.117 Un observador a nivel del mar no oye un avión volando a 6000 m de altura estándar hasta 15 s después de que pase por encima de él. Estime la velocidad del avión en m/s.

P9.118 Una partícula, moviéndose a una velocidad uniforme en aire estándar a nivel del mar, crea las dos esferas de perturbación mostradas en la Figura P9.118. Calcule la velocidad de la partícula y el número de Mach.



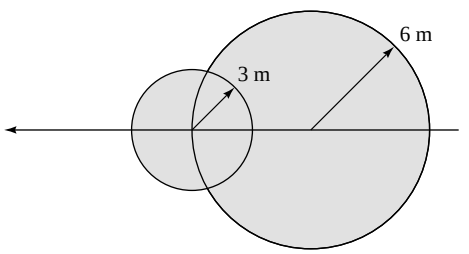
P9.118

P9.119 La partícula de la Figura P9.119 se mueve supersónicamente en aire estándar a nivel del mar. Calcule el número de Mach de la partícula, la velocidad y el ángulo de Mach a partir de las dos esferas de perturbación mostradas.



P9.119

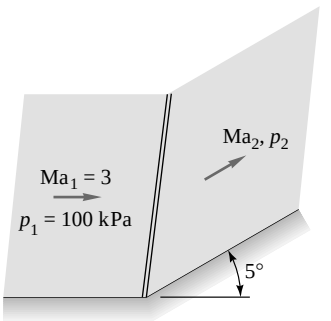
P9.120 La partícula de la Figura P9.120 se desplaza en aire estándar a nivel del mar. A partir de las dos esferas de perturbación mostradas, calcule (*a*) la posición de la partícula en el instante actual y (*b*) la temperatura en °C en el punto de remanso anterior de la partícula.



P9.120

P9.121 Una sonda termométrica, que tiene la forma de una aguja paralela al flujo, mide una temperatura estática de –25 °C cuando se introduce en una corriente de aire supersónica. Se crea un cono de perturbación con un semiángulo de 17°. Calcule (*a*) el número de Mach, (*b*) la velocidad y (*c*) la temperatura de remanso de la corriente.

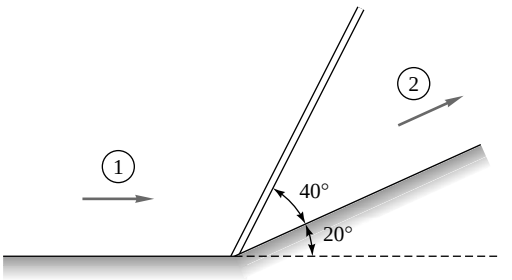
P9.122 Una corriente supersónica de aire es deflectada un ángulo de compresión de 5°, como en la Figura P9.122. Calcule la presión y el número de Mach aguas abajo y el ángulo de la onda, y compare los resultados con la teoría de pequeñas perturbaciones.



P9.122

P9.123 Modifique el Problema P9.122 de la siguiente manera. Considere que la deflexión de 5° se consigue mediante cinco compresiones sucesivas de 1° cada una. Calcule el número de Mach y presión finales y compare la presión con la que se obtendría mediante una expansión isentrópica hasta el mismo número de Mach final.

P9.124 Cuando un flujo a nivel del mar alcanza una rampa a un ángulo de 20°, se forma una onda de choque oblicua como la de la Figura P9.124. Calcule (*a*) Ma_1, (*b*) p_2, (*c*) T_2 y (*d*) V_2.



P9.124

P9.125 Muestre que, para número de Mach aguas arriba tendiendo a infinito, el número de Mach aguas abajo de una onda de choque adherida tiende al valor

$$Ma_2 \Xi \sqrt{\frac{\Im\Phi 1}{2\Im \text{sen}^2(\in\Phi\aleph)}}$$

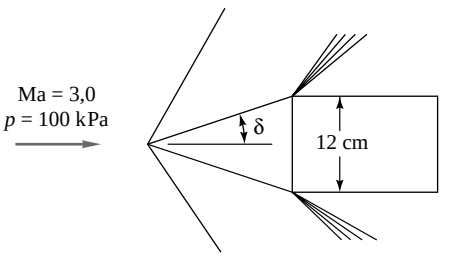
P9.126 Considere un flujo de aire a $Ma_1 = 2{,}2$. Calcule con dos decimales (*a*) el ángulo de deflexión para el cual el

www.elsolucionario.net

flujo aguas abajo es sónico y (*b*) el ángulo de deflexión máximo.

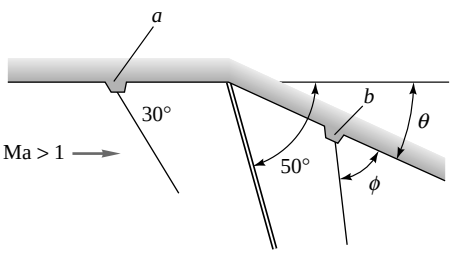
P9.127 ¿Intersectan las ondas de Mach aguas arriba de una onda de choque oblicua a la onda de choque? Suponiendo flujo supersónico aguas abajo, ¿intersectan las ondas de Mach aguas abajo a la onda de choque? Muestre que, para pequeñas deflexiones, el ángulo de la onda β se encuentra a medio camino entre μ_1 y $\mu_2 + \theta$ para todo número de Mach.

P9.128 La Figura P9.128 muestra una corriente de aire alrededor de un cuerpo compuesto por una cuña y una sección rectangular. Determine el semiángulo δ de la cuña, para el cual la componente horizontal de la fuerza total de presión sobre el morro es de 35 kN/m perpendicular al papel.



P9.128

P9.129 Una corriente de aire se acerca supersónicamente a una rampa de compresión, como en la Figura P9.129. Un rasguño en el punto *a* en la pared genera una onda con un ángulo de 30°, mientras que la onda de choque oblicua tiene un ángulo de 50°. ¿Cuál es (*a*) el ángulo θ de la rampa y (*b*) el ángulo ϕ de la onda generada por el rasguño en el punto *b*?



P9.129

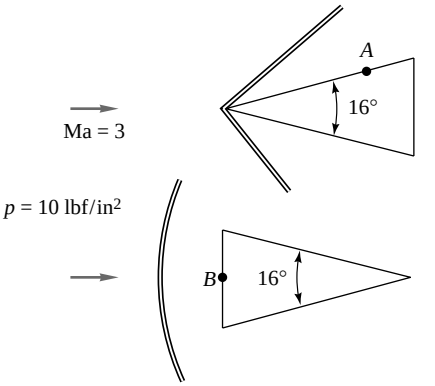
P9.130 Modifique el Problema P9.129 de la manera siguiente. Si el ángulo de onda ϕ vale 42°, determine (*a*) el ángulo de la onda de choque y (*b*) el ángulo de deflexión.

P9.131 La siguiente fórmula ha sido propuesta, como alternativa a la Ecuación (9.86), para relacionar el número de Mach aguas arriba con el ángulo β de la onda de choque oblicua y el ángulo de deflexión θ:

$$\operatorname{sen}^2 \beta = \frac{1}{\mathrm{Ma}_1^2} + \frac{(\gamma+1)\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta}{2\cos(\beta-\theta)}$$

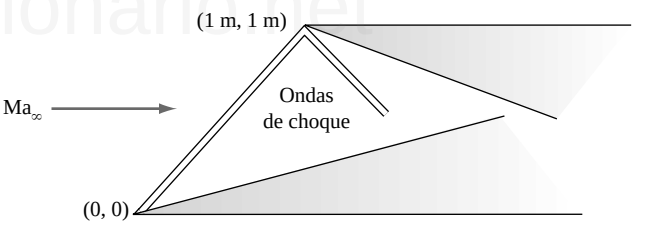
¿Puede usted demostrar o refutar esta relación? En caso negativo, pruebe algunos valores numéricos y compare con los resultados de la Ecuación (9.86).

P9.132 Sea una corriente de aire que fluye a Ma = 3 y p = 10 lbf/in^2 sobre la cuña de 16° y ángulo de ataque nulo de la Figura P9.132. Si el vértice de la cuña apunta hacia la corriente incidente, ¿cuál será la presión en el punto *A*? Si en cambio se coloca la cuña al revés, ¿cuál será la presión en el punto *B*?



P9.132

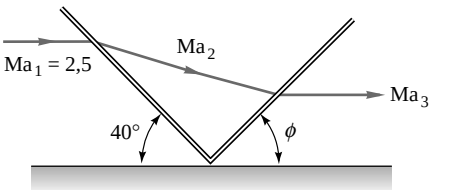
P9.133 Una corriente supersónica de aire se acerca al sistema de dos cuñas de la Figura P9.133. El sistema de coordenadas (*x*, *y*) de las puntas es dato.



P9.133

La onda de choque generada por la cuña adelantada impacta en la punta de la cuña retrasada. Ambas cuñas tienen un ángulo de deflexión de 15°. ¿Cuál es el número de Mach de la corriente libre?

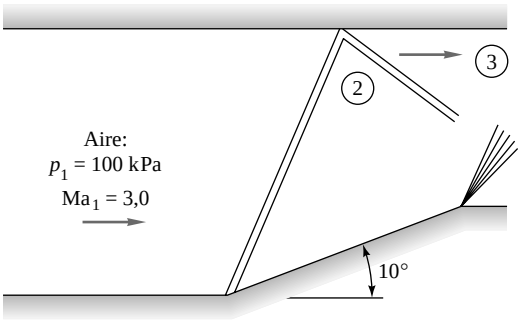
P9.134 Cuando una onda de choque oblicua impacta en una pared sólida, se refleja como una onda de choque con suficiente intensidad como para hacer que el Ma_3 del flujo de salida sea paralelo a la pared, como en la Figura P9.134. Para un flujo de aire con $\mathrm{Ma}_1 = 2{,}5$ y p_1 = 100 kPa, calcule Ma_3, p_3 y el ángulo ϕ.



P9.134

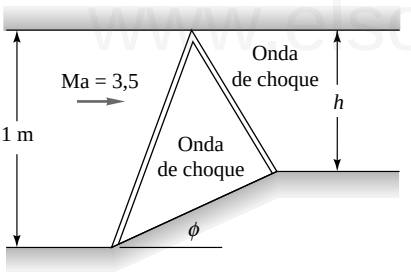
www.elsolucionario.net

P9.135 La contracción de la pared inferior de un conducto supersónico induce una onda de choque que se refleja en la pared superior, como muestra la Figura P9.135. Calcule el número de Mach y la presión en la región 3.



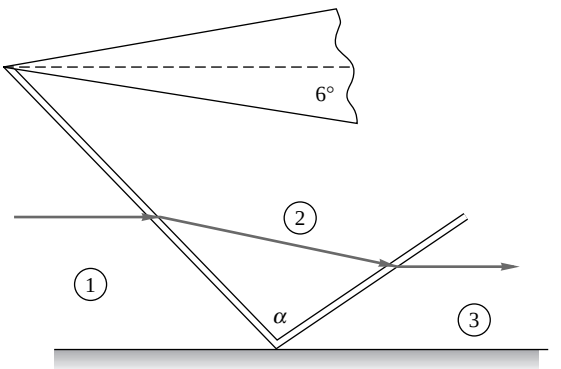
P9.135

P9.136 La Figura P9.136 es un caso especial del Problema P9.135. Mediante un diseño cuidadoso de la contracción inferior se puede conseguir que la onda de choque reflejada se cancele exactamente en el segundo vértice, tal y como se muestra. Éste es un método para reducir el número de Mach en un canal (un difusor supersónico). Si el ángulo de la contracción es $\phi = 10°$, encuentre (*a*) la anchura h aguas abajo y (*b*) el número de Mach aguas abajo. Suponga que la onda de choque es débil.



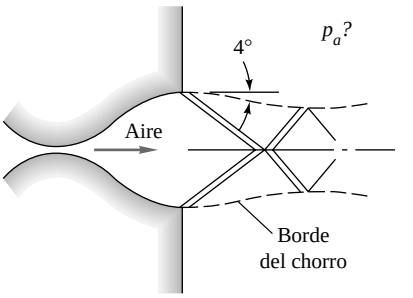
P9.136

P9.137 Una cuña con 6° de semiángulo genera el sistema de onda de choque reflejada de la Figura P9.137. Si Ma_3 = 2,5, determine (*a*) Ma_1 y (*b*) el ángulo α.



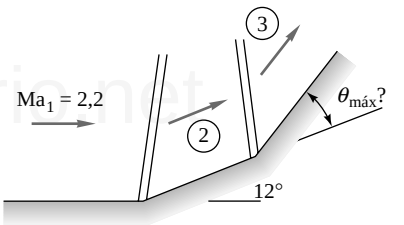
P9.137

P9.138 La tobera supersónica de la Figura P9.138 está sobreexpandida (caso *G* de la Figura 9.12*b*) siendo A_s/A_q = 3,0 y la presión de remanso de 350 kPa. Si el borde del chorro forma un ángulo de 4° con la línea central de la tobera, ¿cuál es la presión ambiente p_a en kPa?



P9.138

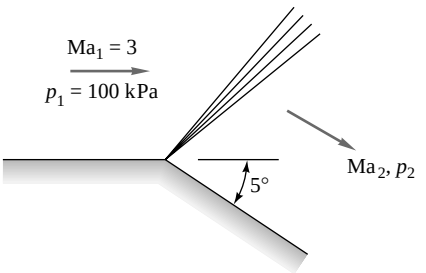
P9.139 Un flujo de aire a Ma = 2,2 experimenta un giro de compresión de 12° y después otro giro de ángulo θ en la Figura P9.139. ¿Cuál es el valor máximo de θ para que la segunda onda de choque esté adherida? ¿Se cruzarán las ondas de choque para algún valor de θ menor que $\theta_{máx}$?



P9.139

P9.140 La solución del Problema P9.122 es Ma_2 = 2,750 y p_2 = 145,5 kPa. Compare estos resultados con los de una compresión isentrópica de 5° empleando la teoría de Prandtl-Meyer.

P9.141 La Figura P9.141 muestra una corriente supersónica de aire expandiéndose mediante un giro de 5°. Calcule el número de Mach y la presión aguas abajo y compare con la teoría de pequeñas perturbaciones.



P9.141

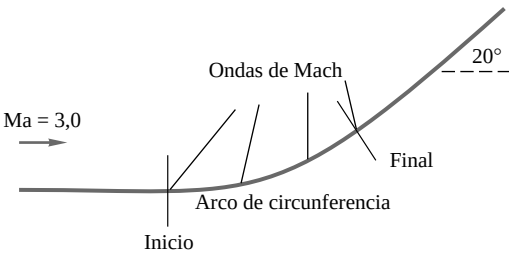
P9.142 Se somete un flujo supersónico de aire a Ma_1 = 3,2 y p_1 = 50 kPa a una onda de compresión seguida de una

www.elsolucionario.net

expansión isentrópica. La deflexión del flujo es de 30° en cada giro. Calcule Ma_2 y p_2 si (*a*) la onda de choque precede a la expansión y (*b*) la expansión precede a la onda de choque.

P9.143 Un flujo de aire a $Ma_1 = 3{,}2$ atraviesa una onda de choque oblicua con una deflexión de 25°. ¿Qué expansión isentrópica se requiere para hacer retornar el flujo a (*a*) Ma_1 y (*b*) p_1?

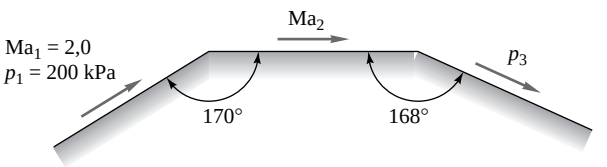
P9.144 Considere una compresión isentrópica suave de 20°, como la de la Figura P9.144. Las ondas de Mach así generadas formarán un abanico convergente. Represente este abanico tan exactamente como le sea posible, empleando al menos cinco ondas equiespaciadas, y demuestre cómo el abanico indica la probable formación de una onda de choque oblicua.



P9.144

P9.145 Una expansión isentrópica hace que un flujo de aire a $Ma_1 = 2{,}0$ y $p_1 = 100$ kPa sufra un descenso de la presión hasta 50 kPa. ¿Cuál es el ángulo de giro, en grados, empleado?

P9.146 Un flujo supersónico de aire fluye sobre una superficie que tiene dos cambios de dirección, como muestra la Figura P9.146. Calcule (*a*) Ma_2 y (*b*) p_3.

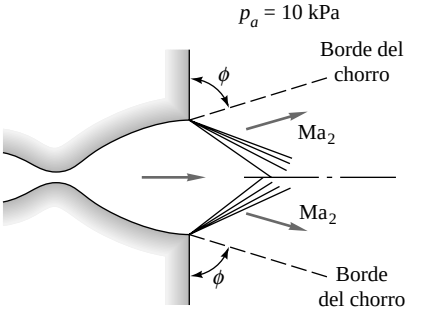


P9.146

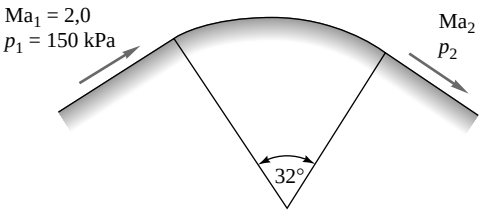
P9.147 Una tobera convergente-divergente con una relación de áreas de 4:1 opera con $p_0 = 500$ kPa bajo condiciones de subexpansión (caso *I* de la Figura 9.12*b*), como en la Figura P9.147. La presión ambiente es de $p_a = 10$ kPa, que es menor que la presión de salida, lo que hace que se formen ondas de expansión fuera de la sección de salida. Para las condiciones dadas, ¿cuáles serán el número de Mach Ma_2 y el ángulo ϕ del borde del chorro? Suponga $\gamma = 1{,}4$, como de costumbre.

P9.148 La Figura P9.148 muestra una corriente supersónica de aire sobre una superficie en forma de arco de circunferencia. Calcule (*a*) el número de Mach Ma_2 y (*b*) la presión p_2 donde el flujo abandona la superficie circular.

P9.149 Repita el Ejemplo 9.19 para un ángulo de ataque de 6°. ¿Es el coeficiente de sustentación lineal con el ángulo α en este rango de 0° A α A 8°? ¿Es el coeficiente de resistencia parabólico en α en este rango?



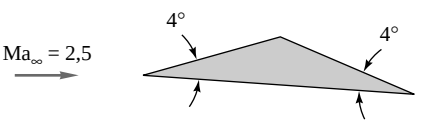
P9.147



P9.148

P9.150 Una placa plana con $C = 1{,}2$ m tiene una sustentación de 30 kN/m cuando vuela a 5000 m de altura estándar y a $U_\infty = 641$ m/s. Utilizando la teoría de Ackeret, calcule (*a*) el ángulo de ataque y (*b*) la resistencia en N/m.

P9.151 Un perfil formado por medias cuñas de 4° ve venir una corriente de aire a Ma = 2,5, como muestra la Figura P9.151. Calcule los coeficientes de sustentación y resistencia para α igual a (*a*) 0° y (*b*) 6°.



P9.151

P9.152 Un perfil supersónico tiene una forma parabólica simétrica con las superficies superior e inferior dadas por

$$y_{S,i} = \pm 2t\left[\frac{x}{C}\left(1 - \frac{x^2}{C^2}\right)\right]$$

de modo que el espesor máximo t se da en $x = \frac{1}{2}C$. Calcule el coeficiente de resistencia para ángulo de incidencia nulo mediante la teoría de Ackeret y compare con un perfil de doble cuña del mismo espesor.

P9.153 Una aeronave supersónica de masa 65 Mg vuela a 11 km de altura estándar a Ma = 2,25. Si el ángulo de ataque es de 2° y sus alas se pueden aproximar por placas planas, calcule (*a*) la superficie alar requerida en m^2 y (*b*) el empuje requerido en N.

www.elsolucionario.net

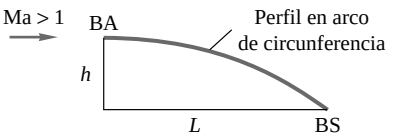
P9.154 Las superficies superior e inferior de un perfil aerodinámico supersónico y simétrico tienen una forma sinusoidal definida por la siguiente expresión:

$$y = \frac{t}{2}\,\text{sen}\,\frac{\Theta x}{C}$$

donde t es el espesor máximo, que se presenta en $x = C/2$. Utilice la teoría de Ackeret para obtener una expresión para el coeficiente de resistencia a ángulo de ataque nulo y compare el resultado con el que se obtiene al aplicar la misma teoría a un perfil de doble cuña del mismo espesor.

P9.155 Para el perfil en forma de onda sinusoidal del Problema P9.154, con $\text{Ma}_{+} = 2{,}5$, $\gamma = 1{,}4$, $t/C = 0{,}1$ y $\alpha = 0°$, represente (sin calcular las fuerzas totales) la distribución de presión $p(x)/p_{+}$ a lo largo de la superficie superior utilizando (*a*) la teoría de Ackeret y (*b*) una onda de choque oblicua más una expansión continua de Prandtl-Meyer.

P9.156 La Figura P9.156 muestra un perfil aerodinámico delgado con forma de arco de circunferencia. El borde de ataque es paralelo a la corriente incidente. Utilizando la teoría linealizada (ángulos de deflexión pequeños) para flujo supersónico, obtenga una fórmula para los coeficientes de sustentación y resistencia para esta orientación y compare con los resultados de la teoría de Ackeret para un ángulo de ataque igual a $\alpha = \text{tg}^{-1}\,(h/L)$.



P9.156

P9.157 Demuestre mediante la teoría de Ackeret que la resistencia mínima debida al espesor, para un perfil aerodinámico con bordes de ataque y salida agudos y espesor dado, corresponde a un perfil simétrico con forma de doble cuña.

Problemas conceptuales

C9.1 Según los datos de la Tabla 9.1 las velocidades del sonido de (*a*) el agua y el mercurio y (*b*) el aluminio y el acero son casi idénticas a pesar de que el mercurio y el acero son mucho más densos que el agua y el aluminio, respectivamente. ¿Cómo se explica esta peculiaridad? ¿Puede explicarlo la teoría molecular?

C9.2 Cuando un objeto se aproxima a Ma = 0,8 a un observador, éste podrá oírlo, de acuerdo con la Figura 9.18*a*. Pero ¿habrá efecto Doppler? Por ejemplo, ¿parecerá que una nota musical tiene un tono más alto o más bajo?

C9.3 El tema de este capítulo suele recibir el nombre de *dinámica de gases*. ¿Acaso no pueden los líquidos comportarse también de esta forma? Poniendo al agua como ejemplo, haga una estimación burda del nivel de presión que haría falta para desplazar el agua a velocidades comparables a su velocidad del sonido.

C9.4 Suponga que un gas se mueve subsónicamente debido a una fuerte caída de presión, de p_1 a p_2. Describa su comportamiento en un diagrama de Mollier para (*a*) un flujo sin fricción en una tobera convergente y (*b*) un flujo con fricción en un conducto largo.

C9.5 Describa lo que representa la «velocidad del sonido» de una manera física. ¿Qué tipo de variaciones de presión tienen lugar en el aire en las ondas sonoras que se generan durante una conversación normal?

C9.6 Dé una interpretación física del fenómeno de bloqueo en el flujo de un gas en una tobera convergente. ¿Ocurriría el bloqueo incluso si la fricción de pared no fuese despreciable?

C9.7 Aquí se han tratado las ondas de choque como discontinuidades, aunque en realidad tienen un espesor finito muy pequeño. Después de pensar un poco sobre el tema, esboce su idea sobre las distribuciones de velocidad, presión, temperatura y entropía a través del interior de la onda de choque.

C9.8 Describa cómo un observador, corriendo a una velocidad finita V a lo largo de una onda de choque normal, verá lo que parece una onda de choque oblicua. ¿Existe algún límite para la velocidad V?

Problemas del examen de fundamentos de ingeniería

Los problemas de flujos compresibles unidimensionales se han vuelto muy populares en el Examen de Fundamentos de Ingeniería (FE), especialmente en las sesiones de tarde. En los siguientes problemas suponga un flujo unidimensional de aire ideal, con $R = 287$ J/(kg · K) y $\gamma = 1{,}4$.

FE9.1 Si en un flujo isentrópico estacionario la temperatura absoluta se incrementa en un 50 por 100, ¿cuánto valdrá el cociente entre la presión estática final y la inicial?
(*a*) 1,12, (*b*) 1,22, (*c*) 2,25, (*d*) 2,76, (*e*) 4,13

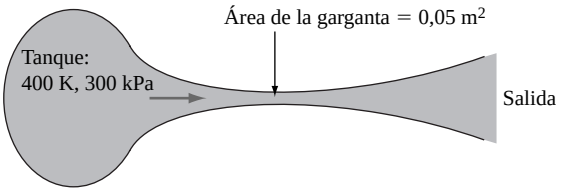
FE9.2 Si en un flujo isentrópico estacionario la densidad se duplica, ¿cuánto valdrá el cociente entre la presión estática final y la inicial?
(*a*) 1,22, (*b*) 1,32, (*c*) 1,44, (*d*) 2,64, (*e*) 5,66

FE9.3 Un gran depósito a 500 K y 200 kPa suministra isentrópicamente un flujo de aire a una tobera. En la sección 1 la presión es sólo de 120 kPa. ¿Cuál es el número de Mach en esta sección?
(*a*) 0,63, (*b*) 0,78, (*c*) 0,89, (*d*) 1,00, (*e*) 1,83

www.elsolucionario.net

FE9.4 En el Problema FE9.3, ¿cuánto vale la temperatura en la sección 1?
(*a*) 300 K, (*b*) 408 K, (*c*) 417 K, (*d*) 432 K, (*e*) 500 K

FE9.5 En el Problema FE9.3, si el área de la sección 1 es de 0,15 m^2, ¿cuál será el gasto másico?
(*a*) 38,1 kg/s, (*b*) 53,6 kg/s, (*c*) 57,8 kg/s,
(*d*) 67,8 kg/s, (*e*) 77,2 kg/s



FE9.6

FE9.6 Para un flujo isentrópico estacionario, ¿cuál es el máximo gasto másico posible a través del conducto de la Figura FE9.6?
(*a*) 9,5 kg/s, (*b*) 15,1 kg/s, (*c*) 26,2 kg/s, (*d*) 30,3 kg/s, (*e*) 52,4 kg/s

FE9.7 Si el número de Mach de salida en la Figura FE9.6 vale 2,2, ¿cuánto vale el área de la sección de salida?
(*a*) 0,10 m^2, (*b*) 0,12 m^2, (*c*) 0,15 m^2, (*d*) 0,18 m^2,
(*e*) 0,22 m^2

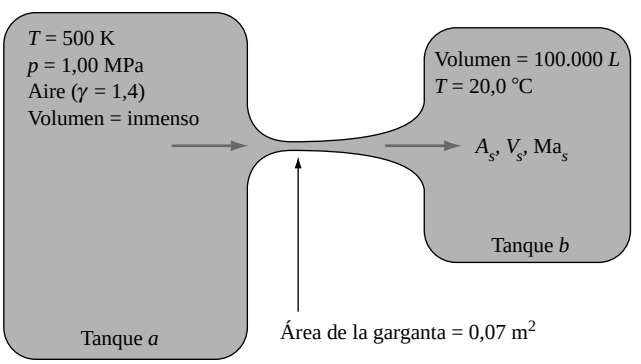
FE9.8 Si no hay ondas de choque y la presión en una sección del conducto de la Figura FE9.6 es de 55,5 kPa, ¿cuánto vale la velocidad en esa sección?
(*a*) 166 m/s, (*b*) 232 m/s, (*c*) 554 m/s, (*d*) 706 m/s,
(*e*) 774 m/s

FE9.9 Si en la Figura FE9.6 aparece una onda de choque en la sección donde el área vale 0,07 m^2, ¿cuánto vale la densidad del aire justo aguas arriba de la onda de choque?
(*a*) 0,48 kg/m^3, (*b*) 0,78 kg/m^3, (*c*) 1,35 kg/m^3,
(*d*) 1,61 kg/m^3, (*e*) 2,61 kg/m^3

FE9.10 En el Problema FE9.9, ¿cuál es el número de Mach justo aguas abajo de la onda de choque?
(*a*) 0,42, (*b*) 0,55, (*c*) 0,63, (*d*) 1,00, (*e*) 1,76

Problemas extensos

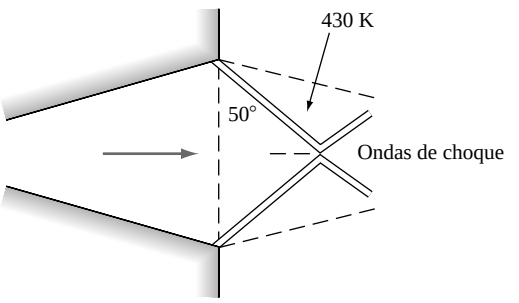
PE9.1 La tobera convergente-divergente de la Figura PE9.1 está diseñada para tener un número de Mach de 2,00 en el plano de salida (suponiendo que el flujo permanece casi isentrópico). El flujo viaja del tanque *a* al tanque *b*, donde el tanque *a* es mucho más grande que el tanque *b*. (*a*) Determine el área de salida A_s y la presión del tanque *b* p_b que permitirán al sistema operar en las condiciones de diseño. (*b*) A medida que pasa el tiempo, la presión del tanque *b* aumentará al irse llenando poco a poco de aire. Como el tanque *a* es grande, el flujo en la tobera seguirá siendo el mismo hasta que aparezca una onda de choque normal en el plano de salida. ¿A qué presión del tanque *b* ocurrirá esto? (*c*) Si el tanque *b* se mantiene a temperatura constante, T = 20 °C, calcule el tiempo que tardará el flujo en llegar desde las condiciones de diseño hasta las condiciones del apartado (*b*), esto es, con una onda de choque normal en el plano de salida.



PE9.1

PE9.2 Dos grandes depósitos de aire, uno a 400 K y 300 kPa y el otro a 300 K y 100 kPa, están conectados por un tubo recto de 6 m de longitud y 5 cm de diámetro. El coeficiente de fricción medio vale 0,0225. Suponiendo flujo adiabático, calcule el gasto másico a través del conducto.

***PE9.3** La Figura PE9.3 muestra la salida de una tobera convergente-divergente donde se forma una estructura de ondas de choque oblicuas. En la sección de salida, con un área de 15 cm^2, la presión del aire es de 16 kPa y la temperatura de 250 K. Justo fuera de la onda de choque de salida, que forma un ángulo de 50° con la sección de salida, la temperatura vale 430 K. Calcule (*a*) el gasto másico, (*b*) el área de la garganta, (*c*) el ángulo de deflexión del flujo de salida, y en el depósito que suministra el aire, (*d*) la presión y (*e*) la temperatura.



PE9.3

PE9.4 Las propiedades de un gas denso (altas presiones y bajas temperaturas) son aproximadas a menudo por la ecuación de estado de van der Waals [17, 18]:

www.elsolucionario.net

$$p = \frac{\Leftarrow RT}{1 \Phi b_1 \Leftarrow} \Phi a_1 \Leftarrow^2$$

donde las constantes a_1 y b_1 pueden ser determinadas a partir de la temperatura y presión críticas:

$$a_1 = \frac{27R^2T_c^2}{69p_c} = 9{,}0 \times 10^5 \text{ lbf } \Delta\text{ft}^4/\text{slug}^2$$

y

$$b_1 = \frac{RT_c}{8p_c} = 0{,}65 \text{ ft}^3/\text{slug}$$

para el aire. Obtenga una expresión analítica para la velocidad del sonido de un gas de van der Waals. Suponiendo que $\gamma = 1{,}4$, calcule la velocidad del sonido del aire en ft/s a –100 °F y 20 atm para (*a*) un gas perfecto y (*b*) un gas de van der Waals. ¿Cuánto más grande, en tanto por 100, es la densidad que predice la relación de van der Waals?

PE9.5 Considere el flujo estacionario unidimensional de un gas no ideal, vapor de agua, en una tobera convergente. Las condiciones de remanso son p_0 = 100 kPa y T_0 = 200 °C. El diámetro de salida de la tobera es de 2 cm. Si la presión de salida de la tobera vale 70 kPa, calcule el gasto másico y la temperatura de salida del vapor de agua, ya sea mediante las tablas de vapor o utilizando EES. (Como una primera estimación, suponga que el vapor de agua es un gas ideal como los de la Tabla A.4) ¿Está el flujo bloqueado? ¿Por qué no es capaz EES de estimar el número de Mach a la salida? (*b*) Determine la presión de salida y el gasto másico para los cuales el flujo de vapor de agua *está* bloqueado. Utilice EES o las tablas de vapor.

PE9.6 Extienda el Problema PE9.5 de la siguiente manera. Sea la tobera convergente-divergente con un diámetro de salida de 3 cm. Suponga flujo isentrópico. (*a*) Encuentre el número de Mach, la presión y la temperatura a la salida para un gas ideal como los de la Tabla A.4. ¿Coincide el gasto másico con el valor de 0,0452 kg/s del Problema PE9.5? (*b*) Investigue brevemente el uso de EES para este problema y explique por qué el apartado (*a*) no es realista y la convergencia de EES es tan lenta. [*Consejo*: Estudie el estado de presión y temperatura que predice el apartado (*a*).]

PE9.7 El profesor Gordon Holloway y su estudiante Jason Bettle, de la Universidad de New Brunswick, obtuvieron los siguientes datos tabulados de una descarga de aire a través de una tobera convergente-divergente similar a la de la Figura P3.22. La presión y la temperatura en el depósito de suministro eran de 29 psig (presión manométrica) y 74 °F, respectivamente. La presión atmosférica era de 14,7 psia. En la sección de expansión de la tobera, con forma de tronco cónico, se midieron la presión en la pared y la presión de remanso en la línea media, obteniéndose los siguientes resultados:

x (cm)	0	1,5	3	4,5	6	7,5	9
Diámetro (cm)	1,00	1,098	1,195	1,293	1,390	1,488	1,585
p_{pared} (psig)	7,7	–2,6	–4,9	–7,3	–6,5	–10,4	–7,4
p_{remanso} (psig)	29	26,5	22,5	18	16,5	14	10

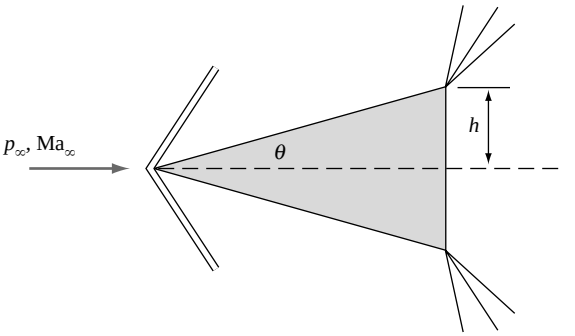
Donde x representa la distancia aguas abajo de la garganta, situada en x = 0. Utilice los datos de la presión de remanso para estimar el número de Mach local. Compare los valores medidos del número de Mach y de la presión en la pared con las predicciones de la teoría unidimensional. Para x > 9 cm, Holloway y Bettle consideraron que la presión de remanso no era una medida válida del número de Mach. ¿Cuál es la razón más probable?

Proyectos de diseño

D9.1 Se desea elegir un ala rectangular para un avión de combate. El avión debe ser capaz (*a*) de despegar y aterrizar en una pista de 4500 ft de longitud a nivel del mar y (*b*) de volar supersónicamente a Ma = 2,3 y a una altura de 28.000 ft. Por simplicidad suponga que la flecha del ala es nula. Sea el peso máximo de la aeronave igual a (30 + n)(1000) lbf, donde n es el número de letras de su nombre de pila. Sea el empuje máximo disponible a nivel del mar igual a un tercio del peso máximo, viéndose reducido con la altura de forma proporcional a la densidad ambiente. Haciendo suposiciones razonables sobre el efecto del alargamiento finito sobre la sustentación y resistencia del ala, tanto en vuelo subsónico como supersónico, seleccione un ala con la superficie mínima suficiente para permitir esos despegues/aterrizajes y satisfacer los requerimientos de vuelo. Debería dedicar algo de tiempo a analizar las puntas y encastres del ala durante el vuelo supersónico, donde se generan conos de Mach y el flujo no es bidimensional. Si no es posible una solución satisfactoria, aumente gradualmente el empuje disponible hasta que converja a un diseño aceptable.

D9.2 Considere un flujo supersónico de aire, en condiciones a nivel del mar, alrededor de la cuña de semiángulo θ que se muestra en la Figura D9.2. Suponga que la presión detrás de la cuña es igual a la presión del fluido cuando sale del abanico de Prandtl-Meyer. (*a*) Suponga Ma_+ = 3,0. ¿Para qué ángulo θ el coeficiente de resistencia de onda C_D, basado en el área frontal, vale exactamente 0,5? (*b*) Suponga que θ = 20°. ¿Existe un número de Mach de la corriente libre para el cual el coeficiente de resistencia de onda C_D, basado en el

www.elsolucionario.net



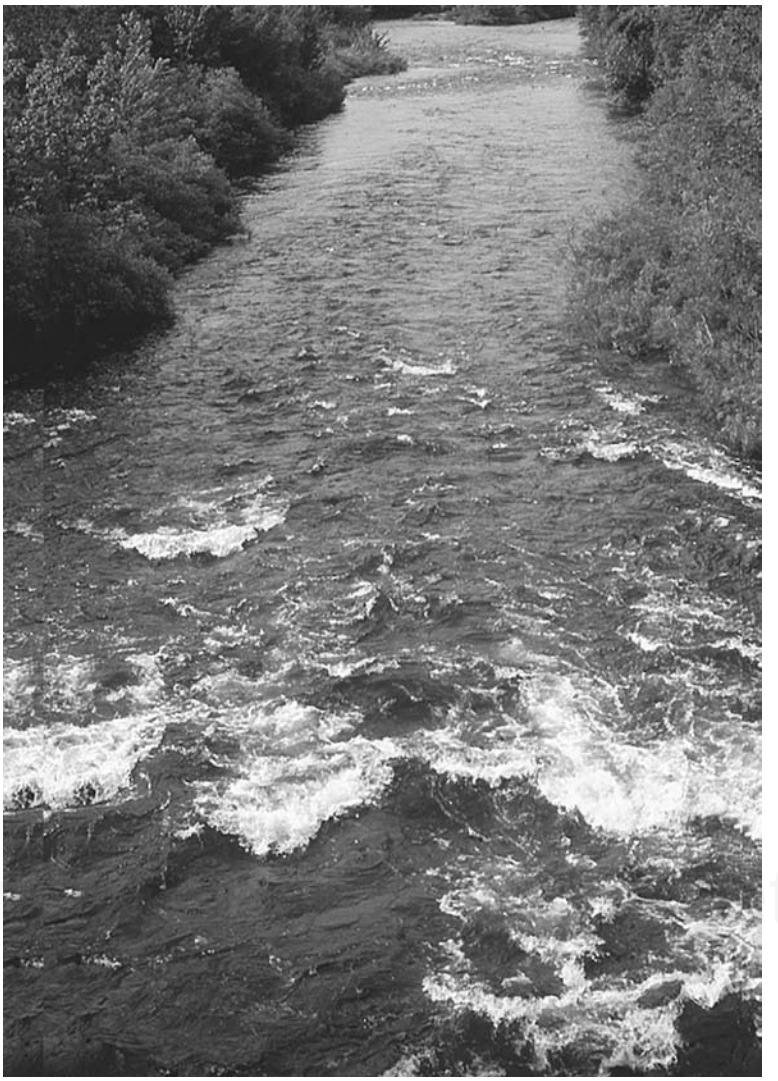
D9.2

área frontal, es exactamente igual a 0,5? (*c*) Investigue el incremento porcentual de C_D en (*a*) y (*b*) si se incluye en los cálculos la resistencia por fricción debida a la capa límite.

Referencias

1. J. E. A. John, *Gas Dynamics*, 2.ª ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.
2. A. J. Chapman y W. F. Walker, *Introductory Gas Dynamics*, Holt, Nueva York, 1971.
3. M. A. Saad, *Compressible Fluid Flow*, 2.ª ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1992.
4. J. D. Anderson, *Modern Compressible Flow: with Historical Perspective*, 2.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1990.
5. A. H. Shapiro, *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, 2 vols., Ronald Press, Nueva York, 1953.
6. R. Courant y K. O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience, Nueva York, 1948; reeditado por Springer-Verlag, Nueva York, 1992.
7. H. W. Liepmann y A. Roshko, *Elements of Gas Dynamics*, Dover, Nueva York, 2001.
8. M. J. Zucrow y J. D. Hoffman, *Gas Dynamics*, Wiley, Nueva York, 1976.
9. P. A. Thompson, *Compressible Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1972.
10. P. H. Oosthuizen y W. E. Carscallen, *Compressible Fluid Flow*, McGraw-Hill, Nueva York, 1997.
11. J. D. Anderson, *Hypersonic and High-Temperature Gas Dynamics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1989.
12. G. A. Bird, *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
13. C. B. Laney, *Computational Gas Dynamics*, Cambridge Univ. Press, Nueva York, 1998.
14. L. W. Reithmaier, *Mach 1 and Beyond: The Illustrated Guide to High-Speed Flight*, McGraw-Hill, 1994.
15. W. T. Parry, *ASME International Steam Tables for Industrial Use*, ASME, Nueva York, 2000.
16. J. H. Keenan et al., *Gas Tables: International Version*, Krieger Publishing, Melbourne, FL, 1992.
17. Y. A. Cengel y M. A. Boles, *Thermodynamics: An Engineering Approach*, 4.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2002.
18. K. Wark, *Thermodynamics*, 6.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1999.
19. F. M. White, *Viscous Fluid Flow*, 2.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1991.
20. J. Palmer, K. Ramsden y E. Goodger, *Compressible Flow Tables for Engineers: With Appropriate Computer Programs*, Scholium Intl., Port Washington, NY, 1989.
21. M. R. Lindeburg, *Consolidated Gas Dynamics Tables*, Professional Publications, Inc., Belmont, CA, 1994.
22. A. M. Shektman, *Gasdynamic Functions of Real Gases*, Taylor and Francis, Nueva York, 1991.
23. J. H. Keenan y E. P. Neumann, «Measurements of Friction in a Pipe for Subsonic and Supersonic Flow of Air», *Journal of Applied Mechanics*, vol. 13, núm. 2, 1946, pág. A-91.
24. R. P. Benedict, *Fundamentals of Pipe Flow*, John Wiley, Nueva York, 1980.
25. J. L. Sims, *Tables for Supersonic Flow around Right Circular Cones at Zero Angle of Attack*, NASA SP-3004, 1964 (véase también NASA SP-3007).
26. J. L. Thomas, «Reynolds Number Effects on Supersonic Asymmetrical Flows over a Cone», *Journal of Aircraft*, vol. 30, núm. 4, 1993, págs. 488-495.
27. W. Bober y R. A. Kenyon, *Fluid Mechanics*, Wiley, Nueva York, 1980.
28. J. Ackeret, «Air Forces on Airfoils Moving Faster than Sound Velocity», *NACA Tech. Memo.* 317, 1925.

www.elsolucionario.net



El río Lehigh en White Haven, Pennsylvania. Los flujos en canales abiertos se encuentran en todas partes y suelen ser irregulares y turbulentos, como en esta foto. Estos flujos se analizan mediante los métodos presentados en este capítulo. (*Cortesía del Dr. E. R. Degginger/Color-Pic Inc.*)

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Capítulo 10
Flujo en canales abiertos[1]

Motivación. Se denomina *flujo en un canal abierto* a un flujo con una superficie libre en contacto con la atmósfera, como por ejemplo un río, un canal o una acequia. Los flujos en conductos cerrados (Capítulo 6) sólo contienen un fluido, líquido o gas, no tienen superficies libres en su interior y su movimiento se debe a un gradiente de presiones en la dirección longitudinal del tubo. En cambio, los flujos en canales abiertos se deben principalmente a la gravedad, pues el gradiente de presiones (también llamado *gradiente de alturas piezométricas*) existente en la entrefase con la atmósfera es despreciable. Por tanto, el balance de fuerzas en un canal abierto se restringe a la gravedad y la fricción.

El flujo en canales abiertos es un caso especial de la Mecánica de Fluidos de gran relevancia para la ingeniería civil y medioambiental. Conocida la geometría de un canal, ya sea natural o artificial, y la rugosidad de su pared, se desea determinar el caudal y la profundidad del flujo resultante. Normalmente las dimensiones del canal son grandes y el fluido es agua. Por tanto, como el número de Reynolds resultante es grande, los flujos en canales abiertos suelen ser turbulentos, tridimensionales, en ocasiones no estacionarios y a menudo muy complejos. Este capítulo presenta algunas teorías simples y correlaciones experimentales para el flujo estacionario en canales rectos con geometrías simples. Para ello aprovecharemos algunos de los conceptos introducidos en el análisis del flujo en conductos: radio hidráulico, coeficiente de fricción y pérdidas de calor.

10.1. INTRODUCCIÓN

El flujo en canales abiertos es el flujo en un conducto de un líquido con una superficie libre. Hay muchos ejemplos prácticos, tanto artificiales (acequias, aliviaderos, canales, vertederos, zanjas de drenaje, alcantarillas) como naturales (arroyos, ríos, estuarios, zonas inundadas). Este capítulo introduce el análisis elemental de estos flujos, que están dominados por los efectos gravitatorios.

La presencia de la superficie libre, que está normalmente a la presión atmosférica, ayuda y complica a la vez el análisis. Ayuda porque la presión puede considerarse constante a lo largo de la superficie libre, la cual es entonces equivalente a la *línea piezométrica* (LP) del flujo. A diferencia del movimiento en conductos cerrados, el gradiente de presiones no interviene en el flujo en canales abiertos, donde el balance de fuerzas se restringe a la gravedad y la fricción.[2] Pero, por otro lado, la superficie libre complica el análisis porque su forma es desconocida *a priori*: el calado cambia con las condiciones del flujo y debe determinarse como parte de la solución, especialmente en problemas no estacionarios con movimiento de ondas.

Antes de continuar recordamos, como de costumbre, que hay libros enteros escritos sobre hidráulica en canales abiertos [1 a 7]. También hay textos especializados en el movimiento de ondas [8 a 10] y en los aspectos ingenieriles de las corrientes costeras con superficies libres [11 a 13]. El presente capítulo es sólo una introducción a tratamientos más amplios y detallados.

---

[1] Se agradece al profesor Francisco Laguna Peñuelas, de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid, la ayuda prestada para la traducción de este capítulo. *(N. del T.)*

[2] La tensión superficial es generalmente poco importante, porque los canales abiertos suelen ser bastante grandes y tienen un número de Weber alto.

www.elsolucionario.net

La aproximación unidimensional

Un canal abierto presenta siempre dos paredes laterales y la solera, donde el flujo satisface la condición de no deslizamiento. Como consecuencia, incluso un canal recto presenta una distribución tridimensional de velocidades. En la Figura 10.1 se muestran líneas de velocidad constante correspondientes a medidas realizadas en canales rectos. Los perfiles son bastante complejos, y generalmente la velocidad máxima se presenta en el plano central un 20 por 100 por debajo de la superficie libre. En canales muy anchos y poco profundos la velocidad máxima se presenta cerca de la superficie, y el perfil de velocidades es aproximadamente logarítmico desde la base hasta la superficie libre, como en la Ecuación (6.65). En canales no circulares aparecen también flujos secundarios similares a los de la Figura 6.16 para flujos en conductos cerrados. Si el canal tiene curvas o meandros, los flujos secundarios se intensifican a consecuencia de los efectos centrífugos, con velocidades altas cerca del borde exterior del codo. Los canales naturales curvados están sometidos a fuertes fenómenos de erosión en la solera y de acumulación de depósitos.

Gracias a la aparición de los ordenadores de cálculo masivo es posible realizar simulaciones numéricas de flujos complejos como los de la Figura 10.1 [27, 28]. Sin embargo, el enfoque ingenieril práctico consiste en suponer que el flujo es unidimensional, como en la Figura 10.2. Como la densidad del líquido es prác-

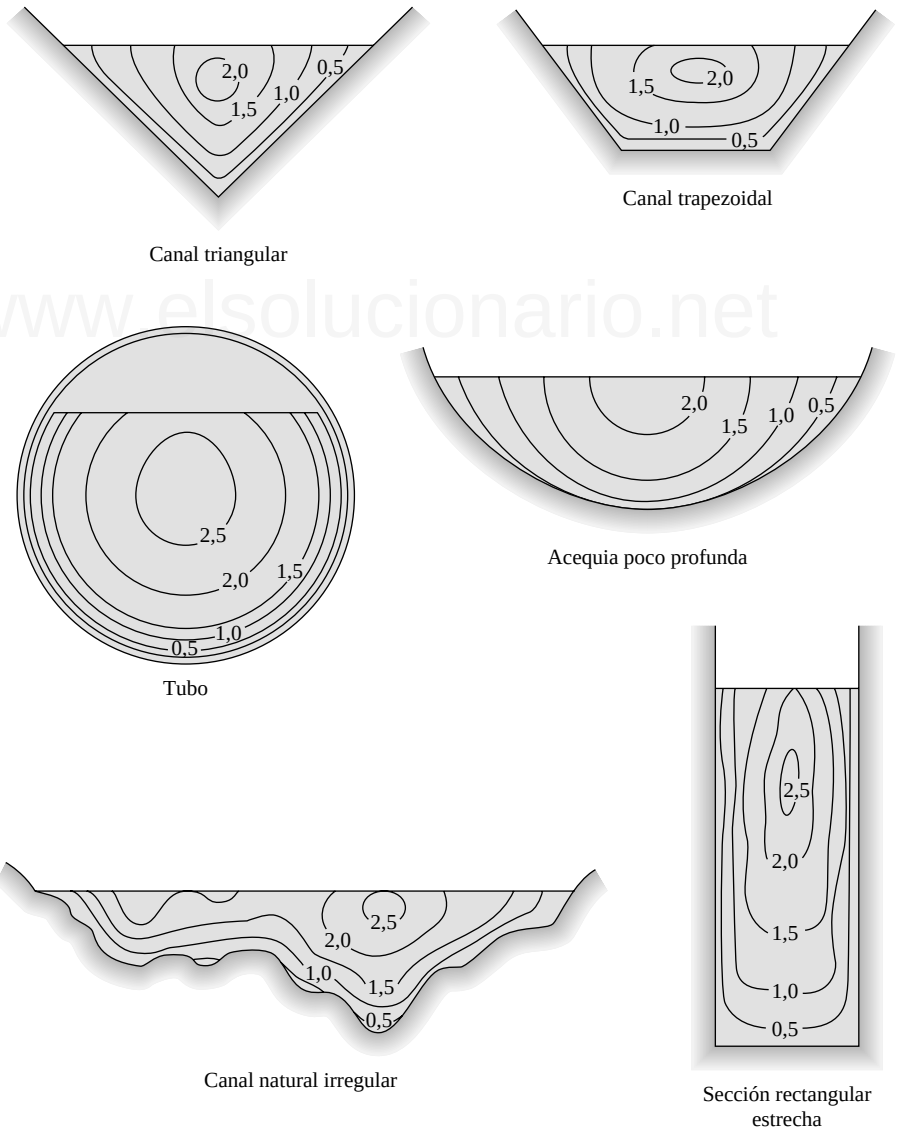


Figura 10.1. Líneas de velocidad constante medidas en flujos en canales abiertos rectos típicos.

www.elsolucionario.net

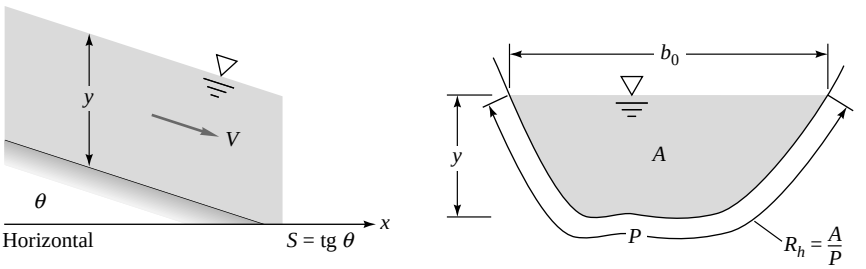


Figura 10.2. Geometría y notación para el flujo en un canal abierto: (*a*) vista lateral; (*b*) vista transversal. Todos estos parámetros son constantes para un movimiento uniforme.

ticamente constante, de la ecuación de la continuidad se deduce que el flujo volumétrico Q es constante a lo largo del canal si el movimiento es estacionario:

$$Q = V(x)A(x) = \text{cte} \tag{10.1}$$

donde V es la velocidad media y A es el área de la sección transversal del canal, como muestra la Figura 10.2.

Una segunda relación unidimensional entre la velocidad y la geometría del canal se obtiene de la ecuación de la energía, incluyendo las pérdidas por fricción. Si los puntos 1 (aguas arriba) y 2 (aguas abajo) se encuentran sobre la superficie libre, $p_1 = p_2 = p_a$, y, para flujo estacionario, tenemos

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f \tag{10.2}$$

www.elsolucionario.net

donde z es la elevación total de la superficie libre, que incluye la profundidad y (véase la Figura 10.2*a*) y la altura de la solera (inclinada). La pérdida de carga por fricción h_f es análoga a la pérdida de carga (6.10) del flujo en conductos:

$$h_f \Xi f \frac{x_2 \Phi x_1}{D_h} \frac{V_{\text{med}}^2}{2g} \qquad D_h = \text{diámetro hidráulico} = \frac{4A}{P} \tag{10.3}$$

donde f es el coeficiente de fricción medio (Figura 6.13) entre las secciones 1 y 2. Como la forma de los canales es bastante irregular, se suele usar el *radio hidráulico* para medir su «tamaño»:

$$\boxed{R_h = \frac{1}{4} D_h = \frac{A}{P}} \tag{10.4}$$

El número de Reynolds local del canal será $\text{Re} = VR_h/\nu$, que normalmente es altamente turbulento ($>10^5$). El único flujo laminar en canales de importancia práctica es el movimiento del agua de lluvia en las capas delgadas que se forman sobre las calles y las pistas de los aeropuertos.

El perímetro mojado P (véase la Figura 10.2*b*) incluye las paredes laterales y la solera del canal, pero no la superficie libre y por supuesto tampoco las partes de las paredes laterales por encima del nivel del agua. Por ejemplo, si un canal rectangular de anchura b y altura h contiene una capa de agua de calado y, el perímetro mojado es

$$P = b + 2y$$

no $2b + 2h$.

www.elsolucionario.net

Aunque el diagrama de Moody (Figura 6.13) podría proporcionar una buena estimación para el coeficiente de fricción en el canal, en la práctica casi no se usa. En la hidráulica de canales abiertos se utiliza la correlación alternativa propuesta por Robert Manning, presentada en la Sección 10.2.

Clasificación del flujo según la variación del calado

El método más corriente de clasificar los movimientos en canales abiertos es según el grado de variación del calado. El caso más simple y más ampliamente estudiado es el *movimiento uniforme*, donde el calado (y también la velocidad en movimiento estacionario) permanece constante. Las condiciones de movimiento en régimen uniforme se dan aproximadamente en canales rectos largos con pendiente y sección transversal constantes. El movimiento en régimen uniforme en un canal se dice que tiene el *calado normal* y_n del canal, que es un parámetro de diseño importante.

Si la pendiente del canal o su sección transversal cambian, o si hay una obstrucción de la corriente, entonces el calado cambia y se dice que el régimen es *variado*. El movimiento es *gradualmente variado* si la aproximación unidimensional es válida y *rápidamente variado* si no lo es. La Figura 10.3 muestra algunos ejemplos de este método de clasificación. Se pueden resumir los tipos de flujos de la siguiente manera:

1. Movimiento uniforme (profundidad y pendiente constantes).
2. Movimiento variado:
   a. Gradualmente variado (unidimensional).
   b. Rápidamente variado (multidimensional).

Generalmente el movimiento uniforme está separado del rápidamente variado por una región de movimiento gradualmente variado. El movimiento gradualmente variado puede analizarse mediante una ecuación diferencial de primer orden (Sección 10.6), pero los movimientos rápidamente variados requieren normalmente de la experimentación o de la mecánica de fluidos computacional tridimensional [14].

www.elsolucionario.net

Clasificación del flujo según el número de Froude

Una segunda clasificación muy útil de los flujos en canales abiertos es según el valor del número adimensional de Froude, Fr, que es la relación entre la velocidad del flujo y la velocidad de propagación de las ondas superficiales infinitesimales en el canal. Para un canal rectangular o muy ancho con calado constante, el número de Froude toma la forma

$$\text{Fr} = \frac{\text{velocidad de la corriente}}{\text{velocidad de onda superficial}} = \frac{V}{\sqrt{gy}} \tag{10.5}$$

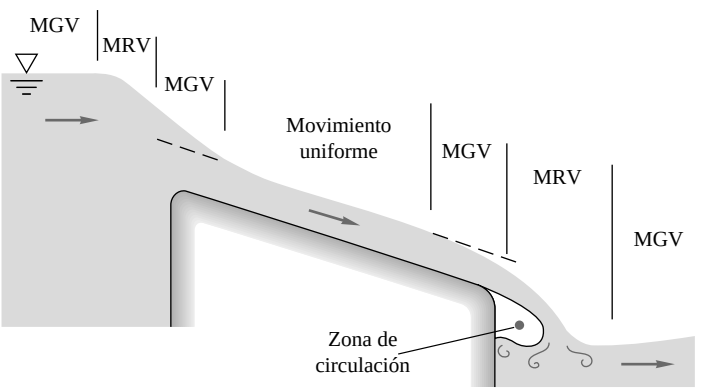


Figura 10.3. Clasificación del flujo en canales abiertos en regiones de movimiento rápidamente variado (MRV), gradualmente variado (MGV) y movimiento uniforme.

www.elsolucionario.net

donde y es el calado del agua. El flujo se comporta de manera distinta en los siguientes tres regímenes:

$$\begin{aligned} &\text{Fr} < 1{,}0 \quad \text{movimiento en régimen lento} \\ &\text{Fr} = 1{,}0 \quad \text{movimiento en régimen crítico} \\ &\text{Fr} > 1{,}0 \quad \text{movimiento en régimen rápido} \end{aligned} \tag{10.6}$$

El número de Froude para un canal irregular se define en la Sección 10.4. Como se mencionó en la Sección 9.10, existe una fuerte analogía con el número de Mach entre estos regímenes y los tres regímenes del flujo compresible: subsónico (Ma < 1), sónico (Ma = 1) y supersónico (Ma > 1). Continuaremos discutiendo esta analogía en la Sección 10.4.

Velocidad de onda superficial

El denominador del número de Froude $(gy)^{1/2}$ es la velocidad de una onda superficial infinitesimal. Podemos obtener esta velocidad mediante la Figura 10.4*a*, que muestra una onda de altura δy propagándose a la velocidad c en un líquido en reposo. Para conseguir un régimen estacionario, fijamos los ejes a la onda como se muestra en la Figura 10.4*b*, de modo que el agua antes en reposo se mueve ahora respecto a estos ejes con una velocidad c hacia la derecha. La Figura 10.4 es completamente análoga a la Figura 9.1, correspondiente al análisis de la velocidad del sonido en un fluido.

Para el volumen de control de la Figura 10.4*b*, la ecuación de la continuidad para movimiento unidimensional en un canal de anchura b es

$$\rho cyb = \rho(c - \delta V)(y + \delta y)b$$

o

$$\delta V = c\frac{\delta y}{y + \delta y} \tag{10.7}$$

www.elsolucionario.net

Esta ecuación es análoga a la Ecuación (9.10); el cambio de velocidad δV inducido por la onda superficial es pequeño si la onda es «débil», $\delta y \ll y$. Si despreciamos la fricción en la solera en la pequeña distancia a través de la onda en la Figura 10.4*b*, la ecuación de la cantidad de movimiento es un balance entre la fuerza de presión hidrostática y el incremento de cantidad de movimiento:

$$-\tfrac{1}{2}\rho gb[(y + \delta y)^2 - y^2] = \rho cby(c - \delta V - c)$$

o

$$g\left[1 + \frac{\frac{1}{2}\delta y}{y}\right]\delta y = c\,\delta V \tag{10.8}$$

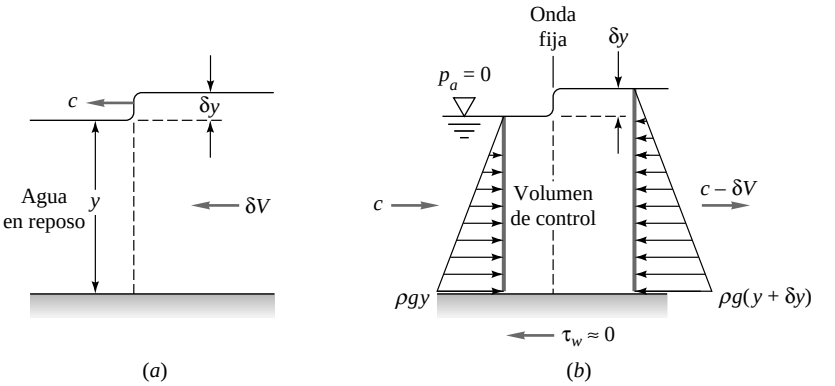


Figura 10.4. Análisis de la propagación de una pequeña onda superficial en agua en reposo: (*a*) onda móvil, sistema de referencia no inercial; (*b*) onda fija, sistema de referencia inercial.

www.elsolucionario.net

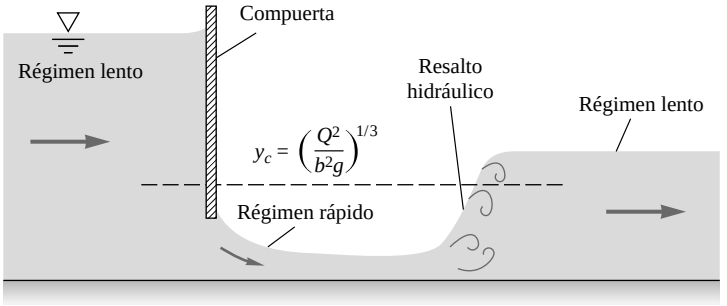


Figura 10.5. El desagüe bajo compuerta pasa de un régimen lento a un régimen crítico y luego rápido para volver a ser lento por medio de un resalto hidráulico.

Esta ecuación es análoga a la Ecuación (9.12); eliminado δV entre las Ecuaciones (10.7) y (10.8) obtenemos la expresión deseada para la velocidad de propagación de la onda:

$$c^2 = gy\left[1 + \frac{\delta y}{y}\right]\left[1 + \frac{\frac{1}{2}\delta y}{y}\right] \tag{10.9}$$

De forma análoga a la Ecuación (9.13), cuanto mayor es la altura δy de la onda tanto mayor es la velocidad de propagación c de la misma. En el límite de una onda infinitesimal $\delta y \to 0$, la velocidad de propagación resulta

$$\boxed{c_0^2 = gy} \tag{10.10}$$

www.elsolucionario.net

Ésta es la velocidad de una onda superficial, equivalente a la velocidad del sonido a de un fluido, y, por tanto, el número de Froude en el flujo en canales $\mathrm{Fr} = V/c_0$ es análogo al número de Mach. Por ejemplo, para $y = 1$ m, $c_0 = 3{,}1$ m/s.

Al igual que en dinámica de gases, el flujo en canales puede acelerarse desde condiciones «subcríticas» a «críticas» y a «supercríticas» y volver a condiciones «subcríticas» a través de una especie de onda de choque normal llamada *resalto hidráulico* (Sección 10.5). Esto se ilustra en la Figura 10.5. La corriente aguas arriba de la compuerta va en régimen lento («subcrítico»). Se acelera a régimen crítico y luego a régimen rápido («supercrítico») cuando pasa por debajo de la compuerta, que juega el papel de una «tobera». Posteriormente, aguas abajo, el flujo vuelve al régimen lento a través de una «onda de choque», porque la altura del «depósito» de aguas abajo es demasiado grande para mantener las condiciones de régimen rápido. Obsérvese la similitud con el movimiento de gases en toberas de la Figura 9.12.

En la Figura 10.5 se ha representado como referencia el calado crítico $y_c = [Q^2/(b^2 g)]^{1/3}$ mediante una línea discontinua. Al igual que el calado normal y_n, y_c es un parámetro importante a la hora de caracterizar el flujo en un canal abierto (véase la Sección 10.4).

La Referencia 15 contiene una excelente discusión sobre los distintos regímenes del flujo en canales abiertos.

10.2. MOVIMIENTO UNIFORME: LA FÓRMULA DE CHÉZY

El movimiento uniforme puede darse en canales largos y rectos con pendiente y sección transversal constantes. El calado del agua y la velocidad son constantes, iguales a $y = y_n$ y $V = V_0$, respectivamente. Sea $S_0 = \mathrm{tg}\,\theta$ la pendiente, donde θ es el ángulo que la solera del canal forma con la horizontal, considerado positivo para flujo de bajada. Con $V_1 = V_2 = V_0$, la Ecuación (10.2) toma la forma

$$h_f = z_1 - z_2 = S_0 L \tag{10.11}$$

www.elsolucionario.net

donde L es la distancia horizontal entre las secciones 1 y 2. Por tanto, la pérdida de carga (o altura) compensa la disminución de altura del canal. El flujo está completamente desarrollado, de modo que se puede aplicar la relación de Darcy-Weisbach (6.10):

$$h_f = f\frac{L}{D_h}\frac{V_0^2}{2g} \qquad D_h = 4R_h \tag{10.12}$$

usando $D_h = 4A/P$ para acomodarla a canales no circulares. La Figura 10.2 muestra la geometría y notación empleada en el análisis del flujo en canales abiertos.

Combinando las Ecuaciones (10.11) y (10.12) se obtiene una expresión para la velocidad de una corriente en régimen uniforme en un canal:

$$V_0 = \left(\frac{8g}{f}\right)^{1/2} R_h^{1/2} S_0^{1/2} \tag{10.13}$$

Para un canal de rugosidad y forma dadas, la cantidad $(8g/f)^{1/2}$ es constante y puede sustituirse por C. La Ecuación (10.13) queda

$$V_0 = C(R_h S_0)^{1/2} \qquad Q = CA(R_h S_0)^{1/2} \tag{10.14}$$

Éstas son las llamadas *fórmulas de Chézy*, obtenidas por primera vez por el ingeniero francés Antoine Chézy a partir de sus experimentos en el río Sena y en el canal Courpalet en 1769. La cantidad C, llamada *coeficiente de Chézy*, varía desde aproximadamente 30 $m^{1/2}/s$ para pequeños canales rugosos hasta 90 $m^{1/2}/s$ para grandes canales lisos (de 60 $ft^{1/2}/s$ a 160 $ft^{1/2}/s$ en unidades inglesas).

Gran parte de la investigación en hidráulica realizada durante el siglo XIX se centró en buscar la correlación del coeficiente de Chézy con la rugosidad, forma y pendiente de varios canales abiertos. Las correlaciones más populares se deben a Ganguillet y Kutter en 1869, Manning en 1889, Bazin en 1897 y Powell en 1950 [16]. Todas estas formulaciones se discuten con detalle en la Referencia 2, Capítulo 5. Aquí nos vamos a ocupar de la correlación de Manning, la más popular.

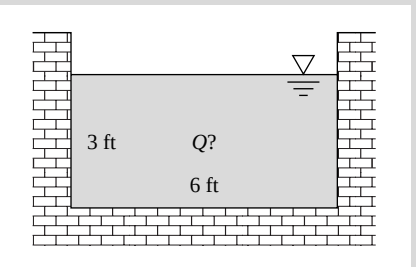
www.elsolucionario.net

EJEMPLO 10.1

Considere un canal recto de sección rectangular de 6 ft de anchura y 3 ft de altura y con una pendiente de 2°. El coeficiente de fricción vale 0,022. Estime el caudal del movimiento uniforme en pies cúbicos por segundo.

Solución

- *Diagrama del sistema*. La sección transversal del canal se muestra en la Figura E10.1.
- *Consideraciones*. Movimiento uniforme y estacionario en un canal con $\theta = 2°$.
- *Procedimiento*. Utilizamos la fórmula de Chézy, Ecuación (10.13) o (10.14).
- *Valor de las propiedades*. Obsérvese que en la fórmula de Chézy *no* intervienen las propiedades del fluido. ¿Puede explicar por qué?



E10.1

www.elsolucionario.net

• *Resolución*. Simplemente evalúe cada uno de los términos de la fórmula de Chézy (10.13):

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} = \sqrt{\frac{8(32{,}2\ \text{ft/s}^2)}{0{,}022}} = 108\frac{\text{ft}^{1/2}}{\text{s}} \qquad A = by = (6\ \text{ft})(3\ \text{ft}) = 18\ \text{ft}^2$$

$$R_h = \frac{A}{P_{\text{mojado}}} = \frac{18\ \text{ft}^2}{(3 + 6 + 3\ \text{ft})} = 1{,}5\ \text{ft} \qquad S_0 = \text{tg}(\text{ángulo}) = \text{tg}(2°)$$

$$\text{Entonces } Q = CAR_h^{1/2}S_0^{1/2} = \left[108\frac{\text{ft}^{1/2}}{\text{s}}\right](18\ \text{ft}^2)(1{,}5\ \text{ft})^{1/2}(\text{tg}\,2°)^{1/2} \approx 450\ \text{ft}^3/\text{s} \qquad \textit{Resp.}$$

• *Comentarios*. Cuando la geometría es simple, resulta trivial obtener estimaciones suponiendo que el movimiento es uniforme. Los resultados son independientes de la densidad y viscosidad del agua porque el flujo es completamente turbulento y está gobernado por la gravedad. Obsérvese el elevado caudal, mayor que el de algunos ríos. Dos grados es una pendiente muy fuerte para un canal.

La correlación de Manning de la rugosidad

La forma más formal de abordar la fórmula de Chézy consiste en utilizar la Ecuación (10.13) estimando f mediante el diagrama de Moody para el coeficiente de fricción, Figura 6.13. De hecho, la Sociedad Americana de Ingenieros Civiles [18] recomienda enérgicamente el uso del coeficiente de fricción en todos los cálculos. Como los canales típicos son grandes y rugosos, podemos usar la Ecuación (6.48) en el límite de flujo totalmente turbulento:

$$f \approx \left[2{,}0 \log \frac{14{,}8R_h}{\varepsilon}\right]^{-2} \tag{10.15}$$

www.elsolucionario.net

donde ε es el tamaño de la rugosidad, cuyos valores típicos se muestran en la Tabla 10.1.

A pesar del atractivo de este enfoque basado en el coeficiente de fricción, la mayoría de los ingenieros prefieren usar una correlación sencilla (dimensional) publicada en 1891 por Robert Manning [17], un ingeniero irlandés. Mediante ensayos en canales reales, Manning vio que el coeficiente de Chézy era aproximadamente proporcional a la raíz sexta del tamaño del canal. Él propuso la sencilla fórmula

$$C = \left[\frac{8g}{f}\right]^{1/2} \approx \frac{R_h^{1/6}}{n} \tag{10.16}$$

donde n es un parámetro de rugosidad. Dado que la fórmula no es dimensionalmente consistente, hace falta un factor de conversión α que depende del sistema de unidades empleado:

$$\alpha = 1{,}0 \text{ unidades SI} \qquad \alpha = 1{,}486 \text{ unidades inglesas} \tag{10.17}$$

Recuerde que ya le avisamos de esta incomodidad en el Ejemplo 1.4. Puede comprobar que α es la raíz cúbica del factor de conversión entre metros y la unidad de longitud que haya elegido: en unidades inglesas, $\alpha = (3{,}2808\ \text{ft/m})^{1/3} = 1{,}486$.[3]

La fórmula de Manning para la velocidad en una corriente en régimen uniforme es, por tanto,

$$\boxed{\begin{aligned} V_0(\text{m/s}) &\approx \frac{1{,}0}{n}[R_h(\text{m})]^{2/3}S_0^{1/2} \\ V_0(\text{ft/s}) &\approx \frac{1{,}486}{n}[R_h(\text{ft})]^{2/3}S_0^{1/2} \end{aligned}} \tag{10.18}$$

[3] En la Referencia 2, págs. 98-99, puede encontrarse una discusión interesante acerca de la historia y «dimensionalidad» de la fórmula de Manning.

www.elsolucionario.net

Tabla 10.1. Valores experimentales del factor *n* de Manning*.

		Altura media de la rugosidad, ε	
	n	**ft**	**mm**
Canales artificiales:			
Vidrio	0,010 ± 0,002	0,0011	0,3
Latón	0,011 ± 0,002	0,0019	0,6
Acero, liso	0,012 ± 0,002	0,0032	1,0
Pintado	0,014 ± 0,003	0,0080	2,4
Ribeteado	0,015 ± 0,002	0,012	3,7
Hierro fundido	0,013 ± 0,003	0,0051	1,6
Cemento, pulido	0,012 ± 0,002	0,0032	1,0
No pulido	0,014 ± 0,002	0,0080	2,4
Madera cepillada	0,012 ± 0,002	0,0032	1,0
Teja de arcilla	0,014 ± 0,003	0,0080	2,4
Enladrillado	0,015 ± 0,002	0,012	3,7
Asfáltico	0,016 ± 0,003	0,018	5,4
Metal ondulado	0,022 ± 0,005	0,12	37
Mampostería de cascotes	0,025 ± 0,005	0,26	80
Canales excavados en la tierra:			
Limpios	0,022 ± 0,004	0,12	37
Con guijarros	0,025 ± 0,005	0,26	80
Sueltos	0,030 ± 0,005	0,8	240
Pedregosos	0,035 ± 0,010	1,5	500
Canales naturales:			
Limpios y rectos	0,030 ± 0,005	0,8	240
Amplios, aljibes profundos	0,040 ± 0,010	3	900
Grandes ríos	0,035 ± 0,010	1,5	500
Zonas inundadas:			
Terreno de pastos, labranza	0,035 ± 0,010	1,5	500
Poca maleza	0,05 ± 0,02	6	2000
Mucha maleza	0,075 ± 0,025	15	5000
Árboles	0,15 ± 0,05	?	?

* En la Referencia 2, págs. 110-113, puede encontrarse una lista más completa.

La pendiente del canal S_0 es adimensional y n toma el mismo valor en ambos sistemas de medida. El caudal es simplemente el producto de esta velocidad por el área del canal:

Movimiento uniforme:

$$Q = V_0 A \Xi \frac{\sqrt{}}{n} A R_h^{2/3} S_0^{1/2} \tag{10.19}$$

En la Tabla 10.1 se dan algunos valores experimentales del coeficiente n de Manning (y el correspondiente tamaño de la rugosidad) para diferentes tipos de superficies del canal. Hay un factor de variación de 15 en el valor de n: desde una superficie suave de vidrio ($n \Xi 0{,}01$) hasta una zona de inundación con arboleda ($n \Xi 0{,}15$). Hay una gran dispersión en los datos que se debe a las irregularidades en la forma y rugosidad de los conductos típicos, que debe tenerse muy en cuenta. Para cálculos rutinarios utilice siempre el valor medio de la rugosidad de la Tabla 10.1.

Dado que la relación de Manning no es exacta, los canales reales pueden tener un valor variable de n dependiendo del calado del agua. El río Mississippi, cerca de Memphis, Tennessee, tiene un valor de $n \Xi 0{,}032$ para riadas de 40 ft de profundidad, 0,030 para calados normales de 20 ft y 0,040 para épocas de estío con calados de tan sólo 5 ft. El valor de n también se ve afectado por el crecimiento de vegetación estacional y factores tales como la erosión del fondo.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 10.2

El canal de sección rectangular más eficiente (movimiento uniforme de caudal máximo para un área dada) es aquel en el que el calado del agua es igual a la mitad del ancho de la solera. Considere un canal rectangular de paredes de ladrillo sobre una pendiente igual a 0,006. ¿Cuál es la anchura óptima para un caudal de 100 ft³/s?

Solución

- *Consideraciones*. Movimiento uniforme en un canal recto de pendiente constante, $S = 0{,}006$.
- *Procedimiento*. Utilizamos la fórmula de Manning en unidades inglesas, Ecuación (10.19), para predecir el caudal.
- *Valor de las propiedades*. Para paredes enladrilladas, la Tabla 10.1 proporciona un factor de rugosidad $n \approx 0{,}015$.
- *Solución*. Para una anchura b de la solera, tomamos un calado del agua igual a $y = b/2$. La Ecuación (10.19) proporciona

$$A = by = b(b/2) = \frac{b^2}{2} \qquad R_h = \frac{A}{P} = \frac{by}{b + 2y} = \frac{b^2/2}{b + 2(b/2)} = \frac{b}{4}$$

$$Q = \frac{1}{n} AR_h^{2/3} S^{1/2} = \frac{1{,}486}{0{,}015}\left[\frac{b^2}{2}\right]\left[\frac{b}{4}\right]^{2/3}(0{,}006)^{1/2} = 100\,\frac{\text{ft}^3}{\text{s}}$$

Simplificando: $b^{8/3} = 65{,}7$ de donde $b \approx 4{,}8$ ft *Resp.*

- *Comentarios*. El método de Manning es sencillo y efectivo. Por el contrario, el método con el coeficiente de fricción de Moody, Ecuación (10.14), requiere de una laboriosa iteración numérica y proporciona como resultado $b \approx 4{,}81$ ft.

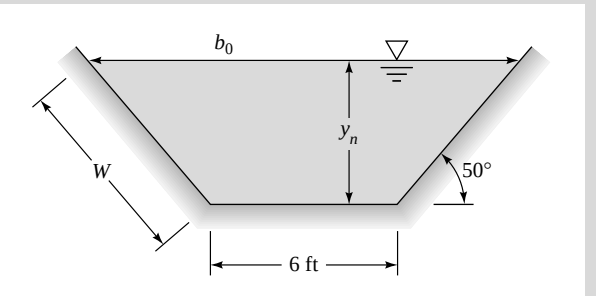
www.elsolucionario.net

Estimaciones del calado normal

Conocido el calado y del agua, el cálculo de Q es inmediato. En cambio, si Q es dato, el cálculo del calado normal y_n requiere iteración. Éste es un tipo de problema muy importante, pues el calado normal es un parámetro característico del flujo.

EJEMPLO 10.3

Por el canal asfáltico de sección trapezoidal de la Figura E10.3 circula un caudal de agua de 300 ft³/s en movimiento uniforme con $S = 0{,}0015$. ¿Cuál es el calado normal y_n?



E10.3

Nota: Véase la Figura 10.7 para la notación general de un trapecio.

www.elsolucionario.net

Solución

De la Tabla 10.1 se obtiene, para el asfalto, $n = 0{,}016$. El área y el radio hidráulico son funciones de y_n, que es desconocido:

$$b_0 = 6 \text{ ft} + 2y_n \operatorname{cotg} 50° \qquad A = \tfrac{1}{2}(6 + b_0)y_n = 6y_n + y_n^2 \operatorname{cotg} 50°$$
$$P = 6 + 2W = 6 + 2y_n \operatorname{cosec} 50°$$

De la fórmula de Manning (10.19) con $Q = 300$ ft^3/s, obtenemos

$$300 = \frac{1{,}49}{0{,}016}(6y_n + y_n^2 \operatorname{cotg} 50°)\left[\frac{6y_n + y_n^2 \operatorname{cotg} 50°}{6 + 2y_n \operatorname{cosec} 50°}\right]^{2/3}(0{,}0015)^{1/2}$$

o
$$(6y_n + y_n^2 \operatorname{cotg} 50°)^{5/3} = 83{,}2(6 + 2y_n \operatorname{cosec} 50°)^{2/3} \tag{1}$$

Podemos iterar laboriosamente en la Ecuación (1) para obtener finalmente $y_n = 4{,}6$ ft. No obstante, éste es un problema perfecto para EES. En vez de manipular e introducir la fórmula final, podemos evaluar por separado cada parte de la fórmula de Chézy (en unidades inglesas y con ángulos en grados):

```
P = 6 + 2*yn/sin(50)
A = 6*yn + yn^2/tan(50)
Rh = A/P
300 = 1,49/0,016*A*Rh^(2/3)*0,0015^0,5
```

Si seleccionamos «Solve» en la barra de menú, EES se quejará de que tiene que calcular la potencia de un número negativo. Volviendo al menú «Variable Info» debemos asegurarnos de que y_n sea positivo. Después de eso, EES resolverá sin dificultad el problema:

```
P = 17,95   A = 45,04   Rh = 2,509   yn = 4,577 ft
```
Resp.

Generalmente EES es ideal para los problemas de flujos en canales abiertos donde el calado es desconocido.

Movimiento uniforme en un tubo circular parcialmente lleno

Considere la corriente en régimen uniforme en el tubo parcialmente lleno de la Figura 10.6*a*. La velocidad y caudal máximos corresponden a un tubo casi lleno. Las propiedades geométricas se expresan en función del radio R del tubo y del ángulo θ hasta la superficie libre:

$$A = R^2(\theta - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta) \qquad P = 2R\theta \qquad R_h = \frac{R}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2\theta}\right)$$

Las fórmulas de Manning (10.19) predicen el siguiente movimiento uniforme:

$$V_0 = \frac{1}{n}\left[\frac{R}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2\theta}\right)\right]^{2/3} S_0^{1/2} \qquad Q = V_0 R^2(\theta - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta) \tag{10.20}$$

Para un n y una pendiente S_0 dadas, podemos representar estas dos relaciones en función de y/D, Figura 10.6*b*. Aparecen dos máximos distintos:

$$V_{\text{máx}} = 0{,}718\frac{1}{n}R^{2/3}S_0^{1/2} \quad \text{en} \quad \theta = 128{,}73° \quad \text{e} \quad y = 0{,}813D$$
$$Q_{\text{máx}} = 2{,}129\frac{1}{n}R^{8/3}S_0^{1/2} \quad \text{en} \quad \theta = 151{,}21° \quad \text{e} \quad y = 0{,}938D \tag{10.21}$$

www.elsolucionario.net

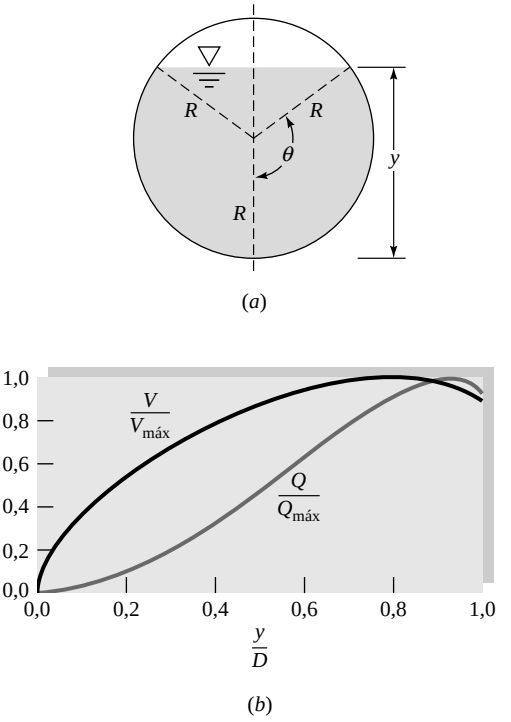


Figura 10.6. Movimiento uniforme en un canal circular parcialmente lleno: (*a*) geometría; (*b*) velocidad y caudal en función del calado.

Como se muestra en la Figura 10.6*b*, la velocidad máxima es un 14 por 100 mayor que cuando el tubo está lleno, y el caudal es un 8 por 100 mayor. Dado que en un tubo real casi lleno el flujo tiende a ser inestable, estas diferencias no son tan grandes en la realidad.

10.3. CANALES EFICIENTES PARA MOVIMIENTO UNIFORME

El diseño ingenieril de un canal abierto tiene muchos parámetros. Si las paredes del canal pueden sufrir erosión, es preferible un diseño con bajas velocidades. Un canal de tierra podría cubrirse de césped para minimizar la erosión. Si las superficies no son erosionables, los costes de construcción y alineación pueden ser dominantes, sugiriendo que se trate de minimizar el perímetro mojado. El diseño de los canales no erosionables se puede optimizar para maximizar el caudal.

La simplicidad de la formulación de Manning (10.19) nos permite analizar flujos en canales para determinar cuál es la sección más eficiente (menor resistencia) para unas condiciones dadas. El problema más común es el de maximizar R_h para un área de flujo y caudal dados. Puesto que $R_h = A/P$, maximizar R_h para un área A dada es lo mismo que minimizar el perímetro mojado P. No hay una solución general para secciones transversales arbitrarias, pero un análisis de la sección trapezoidal nos mostrará los resultados básicos.

Sea θ el ángulo del trapecio dado en la Figura 10.7. Para un valor dado de θ, el área transversal del flujo es

$$A = by + \alpha y^2 \qquad \alpha = \text{cotg } \theta \tag{10.22}$$

El perímetro mojado es

$$P = b + 2W = b + 2y(1 + \alpha^2)^{1/2} \tag{10.23}$$

Eliminando b entre (10.22) y (10.23) obtenemos

$$P = \frac{A}{y} - \alpha y + 2y(1 + \alpha^2)^{1/2} \tag{10.24}$$

www.elsolucionario.net

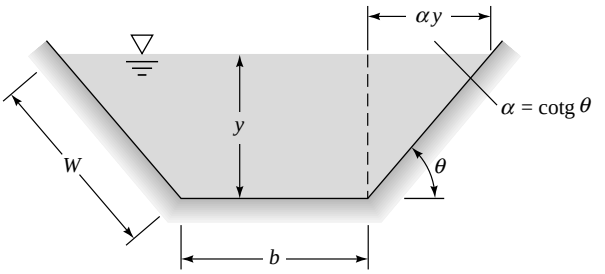


Figura 10.7. Geometría de un canal de sección trapezoidal.

Para minimizar P, calculamos dP/dy para A y α constantes y la hacemos igual a cero. El resultado es

$$A = y^2[2(1 + \alpha^2)^{1/2} - \alpha] \qquad P = 4y(1 + \alpha^2)^{1/2} - 2\alpha y \qquad R_h = \tfrac{1}{2}y \tag{10.25}$$

El último resultado es muy interesante: para cualquier ángulo θ, la sección transversal más eficiente es aquella para la que el radio hidráulico es la mitad del calado.

Puesto que un rectángulo es un trapecio con $\alpha = 0$, la sección rectangular más eficiente es aquella donde

$$A = 2y^2 \qquad P = 4y \qquad R_h = \tfrac{1}{2}y \qquad b = 2y \tag{10.26}$$

Para determinar el calado y correcto, hay que resolver estas relaciones conjuntamente con la fórmula de Manning (10.19) para un caudal Q dado.

Ángulo óptimo del trapecio

www.elsolucionario.net

Las Ecuaciones (10.25) son válidas para cualquier valor de α. ¿Cuál es el mejor valor de α para un calado y área dadas? Para responder a esta pregunta, imponemos $dP/d\alpha = 0$ de la Ecuación (10.24) con A e y constantes. El resultado es

$$2/ = (1 + / ^2)^{1/2} \qquad / = \text{cotg } \theta = \frac{1}{3^{1/2}}$$

o

$$\theta = 60° \tag{10.27}$$

Por tanto, la mejor sección trapezoidal es un semihexágono.

Mediante cálculos similares se muestra que el canal de sección circular parcialmente lleno de mayor eficiencia es un semicírculo, $y = \frac{1}{2}D$. De hecho, el semicírculo es la mejor de todas las secciones posibles del canal (mínimo perímetro mojado para un área de flujo dada). Sin embargo, el porcentaje de mejora sobre el semihexágono es muy pequeño.

EJEMPLO 10.4

(a) ¿Cuáles son las dimensiones óptimas de un canal rectangular de ladrillo diseñado para llevar 5 m^3/s de agua en movimiento uniforme con $S_0 = 0{,}001$? (b) Compare los resultados con los de un semihexágono y un semicírculo.

Solución

Apartado (a)

De la Ecuación (10.26), $A = 2y^2$ y $R_h = \frac{1}{2}y$. La fórmula de Manning (10.29), en unidades SI y con n Ξ 0,015 de la Tabla 10.1, nos da

www.elsolucionario.net

$$Q = \frac{1,0}{n} AR_h^{2/3} S_0^{1/2} \quad \text{o} \quad 5\ \text{m}^3/\text{s} = \frac{1,0}{0,015}(2y)^2 \left(\frac{1}{2}y\right)^{2/3} (0,001)^{1/2}$$

que proporciona

$$y^{8/3} = 1,882\ \text{m}^{8/3}$$

$$y = 1,27\ \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

Los valores apropiados del área y de la anchura son

$$A = 2y^2 = 3,21\ \text{m}^2 \qquad b = \frac{A}{y} = 2,53\ \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

Apartado (*b*)

Resulta instructivo ver qué caudal pasaría por una sección transversal semihexagonal y una semicircular del mismo área 3,214 m^2.

Para el semihexágono (SH), con $\alpha = 1/3^{1/2} = 0,577$, la Ecuación (10.25) predice

$$A = y_{SH}^2[2(1 + 0,577^2)^{1/2} - 0,577] = 1,732y_{SH}^2 = 3,214$$

o $y_{SH} = 1,362$ m, con lo que $R_h = \frac{1}{2}y = 0,681$ m. El caudal en el caso del semihexágono es entonces

$$Q = \frac{1,0}{0,015}(3,214)(0,681)^{2/3}(0,001)^{1/2} = 5,25\ \text{m}^3/\text{s}$$

un 5 por 100 mayor que para el rectángulo.

Para un semicírculo, $A = 3,214\ \text{m}^2 = \pi D^2/8$, o $D = 2,861$ m; por tanto, $P = \frac{1}{2}\pi D = 4,494$ m y $R_h = A/P = 3,214/4,494 = 0,715$ m. El caudal para el semicírculo será entonces

$$Q = \frac{1,0}{0,015}(3,214)(0,715)^{2/3}(0,001)^{1/2} = 5,42\ \text{m}^3/\text{s}$$

un 8 por 100 mayor que el del rectángulo y un 3 por 100 mayor que el del semihexágono.

10.4. ENERGÍA ESPECÍFICA; CALADO CRÍTICO

La altura de energía total de cualquier flujo incompresible es la suma de la altura de velocidad $\alpha V^2/(2g)$, la altura de presión $p/\rho g$ y la altura potencial z. Para el flujo en canales abiertos, la presión en la superficie es siempre la atmosférica, de modo que la energía en el canal es un balance únicamente entre la altura de velocidad y la altura potencial. Como el flujo es turbulento, suponemos $\alpha \approx 1$ —recuerde la Ecuación (3.73)—. El resultado final es la *energía específica E*, sugerida por Bakhmeteff [1] en 1913:

$$E = y + \frac{V^2}{2g} \tag{10.28}$$

donde y es el calado del agua. En la Figura 10.8 se ve que E es la altura de la *línea de nivel de energía* (LNE) por encima de la solera del canal. Para un caudal dado hay normalmente dos estados posibles para la misma energía específica, llamados *estados conjugados*. Hay una energía mínima, $E_{mín}$, que corresponde a un número de Froude igual a la unidad.

www.elsolucionario.net

Canales rectangulares

Consideremos los posibles estados en una sección dada del canal. Sea $q = Q/b = Vy$ el caudal por unidad de anchura de un canal rectangular. Entonces, con q constante, la Ecuación (10.28) toma la forma

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \qquad q = \frac{Q}{b} \tag{10.29}$$

La Figura 10.8 es una representación de y en función de E para q constante, obtenida de la Ecuación (10.29). Hay un valor mínimo de E para un cierto valor de y denominado *calado crítico*. Haciendo $dE/dy = 0$ para q constante encontramos que $E = E_{mín}$ cuando

$$y = y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\frac{Q^2}{b^2 g}\right)^{1/3} \tag{10.30}$$

La energía mínima es

$$E_{mín} = E(y_c) = \tfrac{3}{2}y_c \tag{10.31}$$

El calado y_c corresponde a una velocidad en el canal igual a la velocidad de propagación C_0 de las ondas superficiales dada por la Ecuación (10.10). Para ver esto, reescribimos la Ecuación (10.30) como

$$q^2 = gy_c^3 = (gy_c)y_c^2 = V_c^2 y_c^2 \tag{10.32}$$

Comparando se deduce que la velocidad crítica en el canal es

$$V_c = (gy_c)^{1/2} = C_0 \qquad \text{Fr} = 1 \tag{10.33}$$

www.elsolucionario.net

Para $E < E_{mín}$ no existe solución en la Figura 10.8 y, por tanto, tal flujo es físicamente imposible. Para $E > E_{mín}$ existen dos soluciones: (1) calado grande con $V < V_c$, denominada *régimen lento*, y (2) calado pequeño con $V > V_c$, denominada *régimen rápido*. En régimen lento, las perturbaciones pueden propagarse

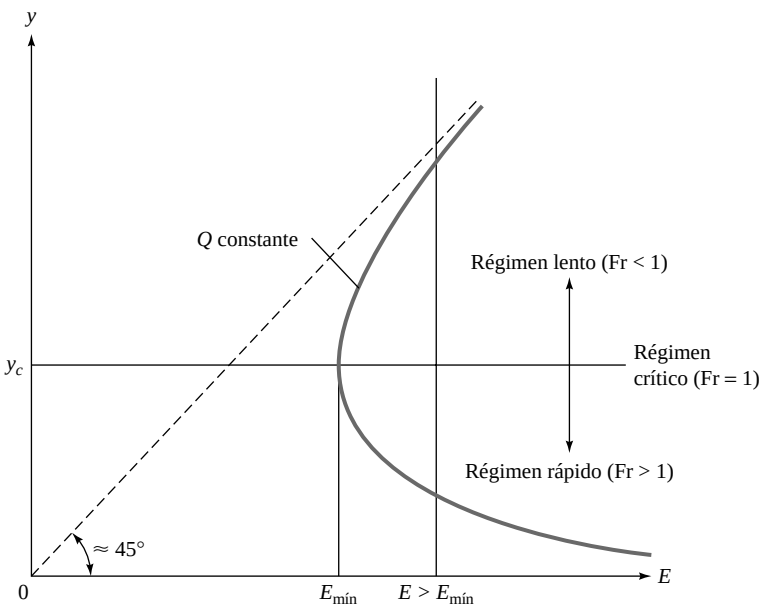


Figura 10.8. Ejemplo de una curva de energía específica. La curva para cada caudal Q tiene una energía mínima correspondiente al movimiento en régimen crítico. Para energías mayores que la mínima, existen dos movimientos *conjugados,* uno en régimen lento y otro en régimen rápido.

www.elsolucionario.net

aguas arriba porque la velocidad de las ondas es $C_0 > V$. En régimen rápido, las ondas son arrastradas aguas abajo: aguas arriba es una zona de silencio, y una pequeña perturbación de la corriente generará una onda en forma de cuña completamente análoga a las ondas de Mach de la Figura 9.18*c*.[4] El ángulo de estas ondas es

$$\mu = \operatorname{sen}^{-1}\frac{c_0}{V} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{(gy)^{1/2}}{V} \tag{10.34}$$

El ángulo de la onda y el calado pueden usarse, por tanto, para medir la velocidad en régimen rápido.

En la Figura 10.8 puede observarse que pequeñas variaciones de E cerca de $E_{mín}$ originan grandes cambios en el calado y, un efecto análogo al de las pequeñas variaciones de área cerca del punto sónico en un conducto de la Figura 9.7. Por tanto, el régimen crítico es neutralmente estable y suele ir acompañado de ondas y ondulaciones en la superficie libre. Los diseñadores de canales deben evitar que existan grandes tramos con movimientos próximos al crítico.

EJEMPLO 10.5

Un canal liso de tierra de sección rectangular y gran anchura tiene un caudal $q = 50$ ft^3/(s · ft). (*a*) ¿Cuál es el calado crítico? (*b*) ¿Qué tipo de flujo hay si $y = 3$ ft?

Solución

Apartado (*a*)

El calado crítico es independiente de la rugosidad del canal y se obtiene directamente de la Ecuación (10.30):

$$y_c = \left[\frac{q^2}{g}\right]^{1/3} = \left[\frac{50^2}{32{,}2}\right]^{1/3} = 4{,}27 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

www.elsolucionario.net

Apartado (*b*)

Si el calado real es de 3 ft, que es menor que y_c, el movimiento será en *régimen lento*. *Resp.* (*b*)

Canales no rectangulares

Si la anchura del canal varía con y, la energía específica debe escribirse en la forma

$$E = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \tag{10.35}$$

El punto crítico de energía mínima se obtiene de $dE/dy = 0$ para Q constante. Puesto que $A = A(y)$, la Ecuación (10.35) proporciona, para $E = E_{mín}$,

$$\frac{dA}{dy} = \frac{gA^3}{Q^2} \tag{10.36}$$

Pero $dA = b_0\, dy$, donde b_0 es la anchura del canal en la superficie libre. Por tanto, la Ecuación (10.36) es equivalente a

[4] Ésta es la base de la analogía hidráulica para la experimentación del flujo supersónico de gases [21, Cap. 11].

www.elsolucionario.net

$$A_c = \left[\frac{b_0 Q^2}{g}\right]^{1/3} \tag{10.37a}$$

$$V_c = \frac{Q}{A_c} = \left[\frac{gA_c}{b_0}\right]^{1/2} \tag{10.37b}$$

Para un caudal Q dado y una forma de canal $A(y)$ y $b_0(y)$ dada, las Ecuaciones (10.37) deben resolverse por iteración o mediante EES para encontrar el área crítica A_c, a partir de la cual se obtiene V_c.

Comparando el calado y la velocidad reales con los valores críticos, podemos determinar las condiciones locales del flujo:

$y > y_c$, $V < V_c$: movimiento en régimen lento (Fr < 1)
$y = y_c$, $V = V_c$: movimiento en régimen crítico (Fr = 1)
$y < y_c$, $V > V_c$: movimiento en régimen rápido (Fr > 1)

Movimiento uniforme crítico: la pendiente crítica

Si un movimiento en régimen crítico en un canal es además uniforme (calado constante), entonces debe corresponder a una *pendiente crítica* S_c, con $y_n = y_c$. Esta condición se estudia igualando la Ecuación (10.37*a*) a la fórmula de Chézy (o de Manning):

$$Q^2 = \frac{gA_c^3}{b_0} = C^2 A_c^2 R_h S_c = \frac{\alpha^2}{n^2} A_c^2 R_h^{4/3} S_c$$

www.elsolucionario.net

o

$$S_c = \frac{n^2 g A_c}{\alpha^2 b_0 R_{hc}^{4/3}} = \frac{n^2 V_c^2}{\alpha^2 R_{hc}^{4/3}} = \frac{n^2 g}{\alpha^2 R_{hc}^{1/3}} \frac{P}{b_0} = \frac{f}{8}\frac{P}{b_0} \tag{10.38}$$

donde α^2 es igual a 1,0 en unidades SI y a 2,208 en unidades inglesas. La Ecuación (10.38) es válida para cualquier tipo de sección transversal. Para un canal rectangular ancho, $b_0 \gg y_c$, la fórmula se reduce a

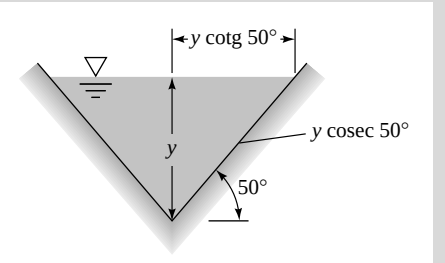
Canal rectangular ancho:

$$S_c \equiv \frac{n^2 g}{\alpha^2 y_c^{1/3}} \equiv \frac{f}{8}$$

Éste es un caso especial de referencia. En la mayoría de los flujos en canales $y_n \times y_c$. Para flujos muy turbulentos, la pendiente crítica varía entre 0,002 y 0,008.

EJEMPLO 10.6

El canal triangular de 50° de la Figura E10.6 tiene un caudal Q = 16 m³/s. Calcule (*a*) y_c, (*b*) V_c y (*c*) S_c si n = 0,018.



E10.6

www.elsolucionario.net

Solución

Apartado (*a*)

Ésta es una sección transversal sencilla porque todas las magnitudes geométricas pueden expresarse directamente en función del calado y:

$$P = 2y \operatorname{cosec} 50° \qquad A = y^2 \operatorname{cotg} 50°$$
$$R_h = \tfrac{1}{2}y \operatorname{cosec} 50° \qquad b_0 = 2y \operatorname{cotg} 50° \tag{1}$$

Las condiciones críticas satisfacen la Ecuación (10.37*a*):

$$gA_c^3 = b_0 Q^2$$

o

$$g(y_c^2 \operatorname{cotg} 50°)^3 = (2y_c \operatorname{cotg} 50°)Q^2$$

$$y_c = \left[\frac{2Q^2}{g \operatorname{cotg}^2 50°}\right]^{1/5} = \left[\frac{2(16)^2}{9{,}81(0{,}839)^2}\right]^{1/5} = 2{,}37 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Apartado (*b*)

Conocido y_c, de las Ecuaciones (1) obtenemos $P_c = 6{,}18$ m, $R_{hc} = 0{,}760$ m, $A_c = 4{,}70$ m^2 y $b_{0c} = 3{,}97$ m. La velocidad crítica se obtiene de la Ecuación (10.37*b*):

$$V_c = \frac{Q}{A_c} = \frac{16 \text{ m}^3/\text{s}}{4{,}70 \text{ m}^2} = 3{,}41 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

Apartado (*c*)

Con $n = 0{,}018$, calculamos la pendiente crítica a partir de la Ecuación (10.38):

$$S_c = \frac{gn^2 P}{R_h^{1/3} b_0} = \frac{9{,}81(0{,}018)^2(6{,}18)}{1{,}0(0{,}760)^{1/3}(3{,}97)} = 0{,}00542 \qquad \textit{Resp.}\ (c)$$

www.elsolucionario.net

Flujo sin fricción sobre una elevación en la solera

El flujo sobre una elevación de la solera de un canal abierto, como en la Figura 10.9*a*, resulta ser una analogía aproximada del flujo compresible de gases en toberas (Figura 9.12). El comportamiento de la superficie libre es radicalmente distinto dependiendo de si el régimen de la corriente incidente es lento o rápido. La altura de la elevación también puede modificar el carácter de los resultados. Para un flujo bidimensional sin fricción, las secciones 1 y 2 de la Figura 10.9*a* están relacionadas entre sí mediante las ecuaciones de la continuidad y de la cantidad de movimiento:

$$V_1 y_1 = V_2 y_2 \qquad \frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{V_2^2}{2g} + y_2 + \Delta h$$

Eliminando V_2 entre estas dos ecuaciones obtenemos una ecuación polinómica de tercer grado para el calado y_2 sobre la elevación:

$$y_2^3 - E_2 y_2^2 + \frac{V_1^2 y_1^2}{2g} = 0 \quad \text{donde } E_2 = \frac{V_1^2}{2g} + y_1 - \Delta h \tag{10.39}$$

Si Δh no es demasiado grande, esta ecuación tiene una solución negativa y dos positivas. Su comportamiento se muestra en la Figura 10.9*b* y depende de si la condición 1 está en la rama superior o inferior de la curva de energía. La diferencia entre la energía incidente E_1 y la energía específica E_2 es exactamente Δh, y

www.elsolucionario.net

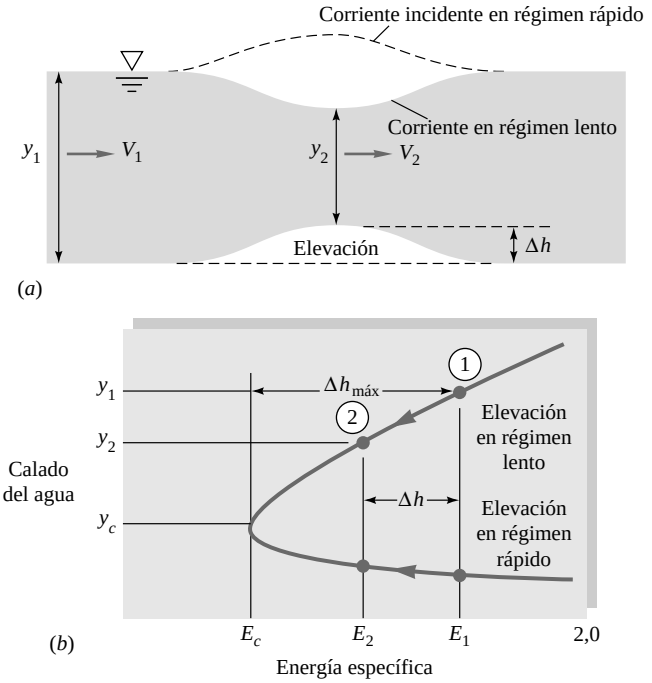


Figura 10.9. Flujo bidimensional sin fricción sobre una elevación: (*a*) diagrama de la configuración mostrando la dependencia con el número de Froude; (*b*) representación de la energía específica mostrando el tamaño de la elevación y los calados del agua.

el punto 2 se encuentra sobre la misma rama que E_1. Una corriente incidente en régimen lento, $\text{Fr}_1 < 1$, hará que el nivel del agua disminuya al pasar sobre la elevación; mientras que una corriente incidente en régimen rápido, $\text{Fr}_1 > 1$, provocará un aumento del nivel del agua sobre la elevación.

Si la altura de la elevación alcanza el valor $\Delta h_{máx} = E_1 - E_c$, como se muestra en la Figura 10.9*b*, el flujo en la cresta será crítico (Fr = 1). Si $\Delta h > \Delta h_{máx}$, la Ecuación (10.39) carece de soluciones físicamente correctas. Esto es, una elevación demasiado grande «bloquea» el canal e introduce efectos de fricción, típicamente en la forma de un resalto hidráulico (Sección 10.5).

Este razonamiento sobre las elevaciones se invierte si el canal tiene una *depresión* ($\Delta h < 0$): una corriente incidente en régimen lento hará que el nivel del agua suba y una corriente en régimen rápido hará que baje. El punto 2 estará $|\Delta h|$ a la derecha del punto 1, y no pueden darse condiciones críticas.

EJEMPLO 10.7

Una corriente de agua que fluye a 1,5 m/s en una canal ancho de 1 m de calado se aproxima a una elevación de 10 cm de altura. Estime (*a*) el calado del agua y_2 sobre la elevación y (*b*) la altura de la elevación que haría que el flujo en la cresta fuera crítico.

Solución

Apartado (*a*)

Comprobamos primero el número de Froude de la corriente incidente, suponiendo $C_0 = \sqrt{gy}$:

$$\text{Fr}_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}} = \frac{1{,}5 \text{ m/s}}{\sqrt{(9{,}81 \text{ m/s}^2)(1{,}0 \text{ m})}} = 0{,}479 \quad \text{(régimen lento)}$$

Para una corriente incidente en régimen lento, esperamos que si Δh no es demasiado grande el nivel del agua disminuya sobre la elevación y que el número de Froude de régimen lento aumente en la cresta. Con $\Delta h = 0{,}1$ m, los niveles de energía específica deben ser

www.elsolucionario.net

$$E_1 = \frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{(1,5)^2}{2(9,81)} + 1,0 = 1,115 \text{ m} \qquad E_2 = E_1 - \Delta h = 1,015 \text{ m}$$

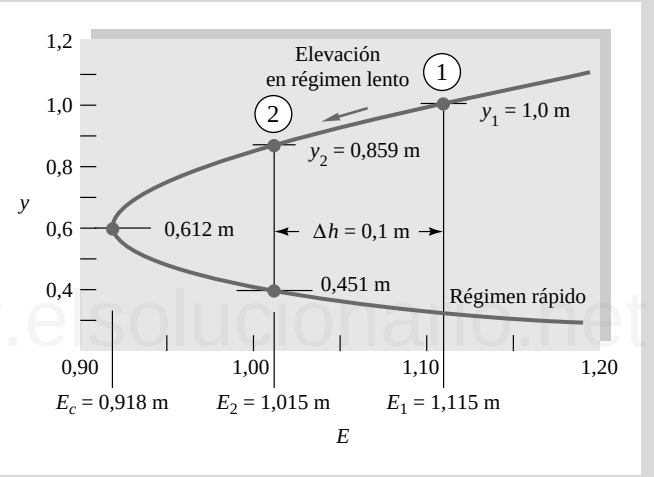
Esta situación física está representada en el diagrama de energía específica de la Figura E10.7. Con y_1 en metros, la Ecuación (10.39) toma los siguientes valores numéricos:

$$y_2^3 - 1,015y_2^2 + 0,115 = 0$$

Existen tres raíces reales: $y_2 = +0,859$ m, $+0,451$ m y $-0,296$ m. La tercera de ellas es negativa y carece de sentido físico. La segunda solución (la menor) corresponde al movimiento en régimen lento para E_2 y no puede darse en esta elevación. La solución correcta es la primera:

$$y_2(\text{régimen lento}) = 0,859 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

La superficie libre ha descendido $y_1 - y_2 - \Delta h = 1,0 - 0,859 - 0,1 = 0,041$ m. La velocidad en la cresta es $V_2 = V_1 y_1 / y_2 = 1,745$ m/s. El número de Froude en la cresta es $\text{Fr}_2 = 0,601$. El movimiento aguas abajo de la elevación es en régimen lento. Las condiciones del flujo se muestran en la Figura E10.7.



E10.7

Apartado (*b*)

Para el movimiento crítico en un canal ancho, con $q = Vy = 1,5$ m^2/s, de la Ecuación (10.31),

$$E_{2,\text{mín}} = E_c = \frac{3}{2}y_c = \frac{3}{2}\left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = \frac{3}{2}\left(\frac{(1,5 \text{ m}^2/\text{s})^2}{9,81 \text{ m/s}^2}\right)^{1/3} = 0,918 \text{ m}$$

Por tanto, la altura máxima para el flujo sin fricción sobre esta elevación es

$$\Delta h_{\text{máx}} = E_1 - E_{2,\text{mín}} = 1,115 - 0,918 = 0,197 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

Para esta elevación, la solución a la Ecuación (10.39) es $y_2 = y_c = 0,612$ m, y el número de Froude en la cresta es la unidad. En condiciones críticas el nivel de la superficie ha disminuido en $y_1 - y_2 - \Delta h = 0,191$ m.

Desagüe bajo compuerta

La Figura 10.10*a* muestra el flujo bajo una compuerta como las que se usan normalmente para controlar el flujo en ríos y en canales. Si se deja el flujo descargar libremente a través de la apertura, como en la Figura 10.10*a*, el movimiento pasa de régimen lento (aguas arriba) a crítico (cerca de la apertura) y finalmente a

www.elsolucionario.net

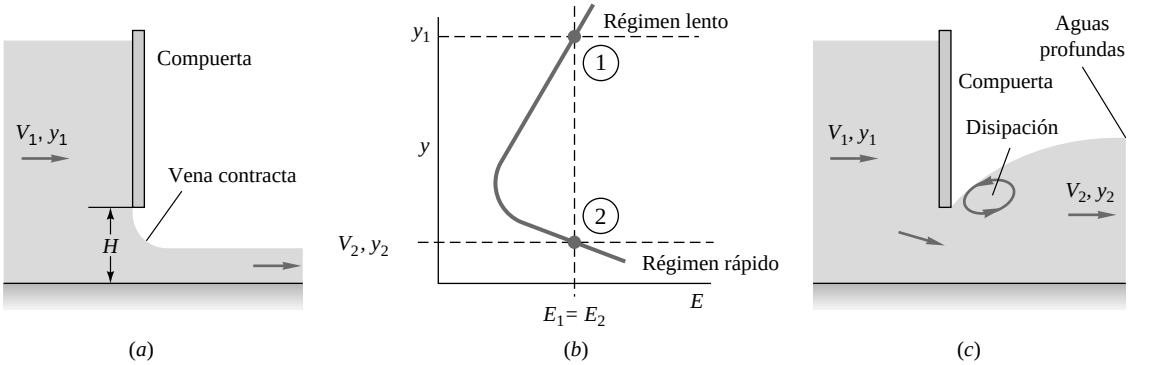


Figura 10.10. El desagüe bajo una compuerta pasa por las condiciones críticas: (*a*) descarga libre con vena contracta; (*b*) energía específica para la descarga libre; (*c*) flujo disipativo bajo una compuerta anegada.

régimen rápido (aguas abajo). En este caso la compuerta es análoga a una tobera convergente-divergente en dinámica de gases, como en la Figura 9.12, operando en *condiciones de diseño* (semejante al punto *H* en la Figura 9.12*b*).

Para descargas libres se puede despreciar la fricción y, como no hay elevaciones ($\Delta h = 0$), se puede aplicar la Ecuación (10.39) con $E_1 = E_2$:

$$y_2^3 - \left(\frac{V_1^2}{2g} + y_1\right) y_2^2 + \frac{V_1^2 y_1^2}{2g} = 0 \tag{10.40}$$

Si el movimiento aguas arriba es en régimen lento (V_1, y_1), esta ecuación cúbica sólo tiene una solución real positiva, correspondiente a un movimiento en régimen lento con la misma energía específica, como se observa en la Figura 10.10*b*. El caudal varía con la relación y_2/y_1. Muestre, como ejercicio, que el caudal es máximo para $y_2/y_1 = \frac{2}{3}$.

En una descarga libre la corriente se contrae hasta un calado y_2 que es alrededor de un 40 por 100 menor que la apertura de la compuerta, como se muestra en la Figura 10.10*a*. Esto es similar a la descarga libre a través del *orificio* de la Figura 6.39. Si *H* es la altura de la apertura y *b* es su anchura en la dirección perpendicular al papel, podemos estimar el caudal utilizando la teoría de desagüe en orificios:

$$Q = C_d H b \sqrt{2 g y_1} \quad \text{donde} \quad C_d \approx \frac{0{,}61}{\sqrt{1 + 0{,}61 H / y_1}} \tag{10.41}$$

en el rango $H/y_1 < 0{,}5$. Por tanto, se puede obtener una variación continua del caudal variando la apertura de la compuerta.

Si el nivel del agua aguas abajo es suficientemente alto, como en la Figura 10.10*c*, la descarga libre no es posible. En ese caso se dice que la compuerta está *anegada* o parcialmente anegada. Típicamente, existirá un resalto hidráulico aguas abajo donde se disipa parte de la energía del flujo de salida que hará que éste vuelva nuevamente al régimen lento. Las Ecuaciones (10.40) y (10.41) no son aplicables a esta situación, siendo necesarias correlaciones experimentales para el caudal [3, 19]. Véase el Problema P10.77.

10.5. EL RESALTO HIDRÁULICO

Un movimiento en régimen rápido en un canal abierto puede cambiar bruscamente a régimen lento a través de un resalto hidráulico, como se muestra en la Figura 10.5. La corriente aguas arriba es rápida y de poco calado y la corriente aguas abajo es lenta y profunda, análogamente a lo que ocurre con las ondas de choque normales de la Figura 9.8. Sin embargo, mientras que la onda de choque tiene un espesor infinitesimal, el resalto hidráulico es bastante grueso, de 4 a 6 veces el calado y_2 aguas abajo [20].

El resalto hidráulico es muy efectivo a la hora de disipar energía mecánica, ya que es extremadamente turbulento, lo que es un factor a tener en cuenta a la hora de diseñar cuencos amortiguadores de los alivia-

www.elsolucionario.net

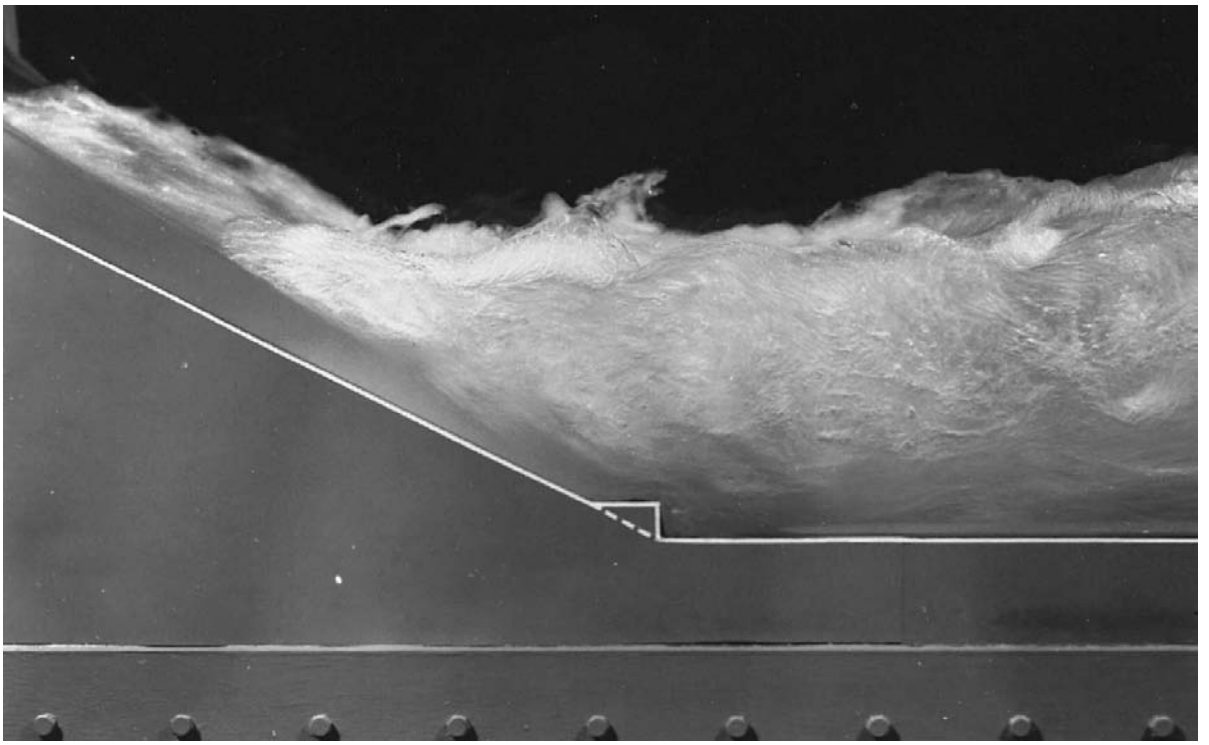


Figura 10.11. Resalto hidráulico que se forma en el modelo de un aliviadero para la presa Karnafuli en Bangladesh. (*Cortesía del St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, University of Minnesota.*)

deros [20]. La Figura 10.11 muestra el resalto que se forma en la base del aliviadero de una presa en un modelo de ensayo. Es muy importante que tales resaltos se sitúen en lugares diseñados especialmente; de otro modo en la solera del canal se formarán socavones debido a la agitación turbulenta. Los resaltos también mezclan fluidos de modo muy efectivo y por ello también tienen aplicaciones en el tratamiento de aguas y aguas residuales.

Clasificación

El principal parámetro que afecta a las características del resalto hidráulico es el número de Froude $Fr_1 = V_1/(gy_1)^{1/2}$ de la corriente aguas arriba. El número de Reynolds y la geometría del canal juegan un papel secundario. Como se detalla en la Referencia 20 y se ilustra en la Figura 10.12, se pueden definir los siguientes regímenes de operación:

$Fr_1 < 1{,}0$:	Resalto imposible, se viola el segundo principio de la termodinámica.
$Fr_1 = 1{,}0$ a $1{,}7$:	Onda estacionaria o *resalto ondular*, de una extensión aproximada $4y_2$; disipación baja, menor del 5 por 100.
$Fr_1 = 1{,}7$ a $2{,}5$:	Suave elevación de la superficie con pequeños remolinos, conocida como *resalto suave*; la disipación es del 5 al 15 por 100.
$Fr_1 = 2{,}5$ a $4{,}5$:	Inestable, *resalto oscilante*; cada pulsación irregular genera una gran ola que puede viajar kilómetros aguas abajo, dañando las paredes del canal y otras estructuras. No es recomendable para condiciones de diseño. Disipación entre el 15 y el 45 por 100.
$Fr_1 = 4{,}5$ a $9{,}0$:	Estable, bien equilibrado, *resalto estacionario*; presenta las mejores características y es insensible a las condiciones aguas abajo. Es el mejor régimen de diseño. Disipación entre el 45 y el 70 por 100.
$Fr_1 > 9{,}0$:	*Resalto fuerte*, tempestuoso y un tanto intermitente, pero con buenas características. Disipación entre el 70 y el 85 por 100.

Se pueden encontrar más detalles en la Referencia 20 y en la Referencia 2, Capítulo 15.

www.elsolucionario.net

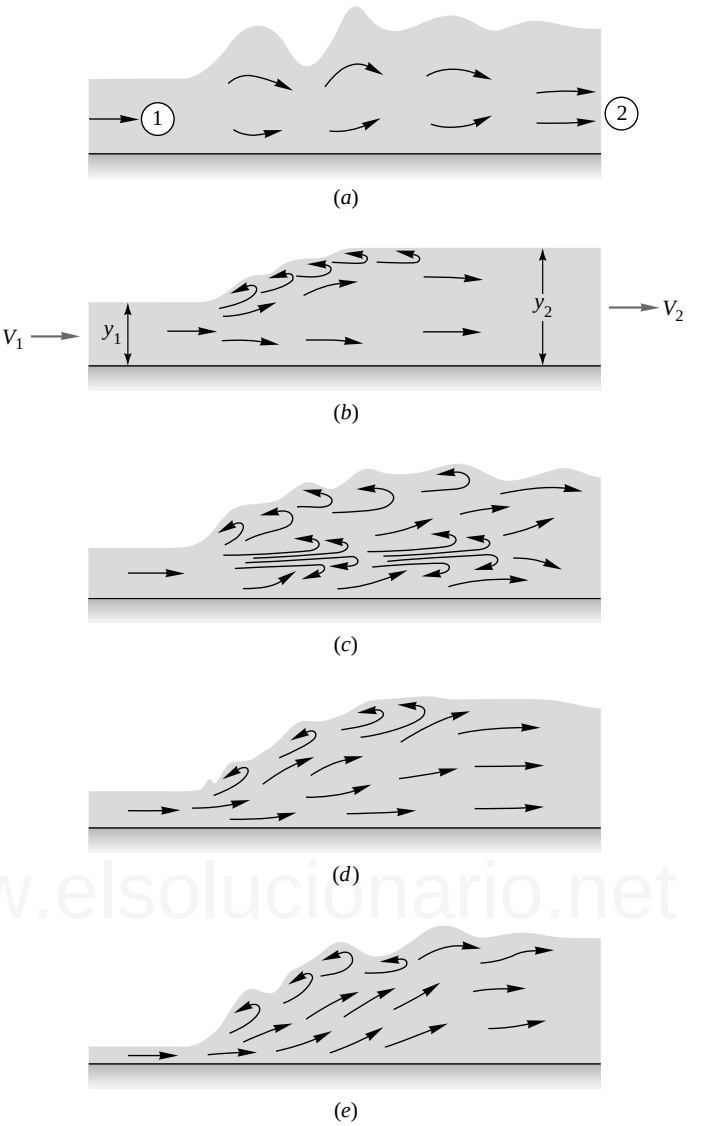


Figura 10.12. Clasificación de los resaltos hidráulicos: (*a*) Fr = 1,0 a 1,7: resalto ondular; (*b*) Fr = 1,7 a 2,5: resalto débil; (*c*) Fr = 2,5 a 4,5: resalto oscilante; (*d*) Fr = 4,5 a 9,0: resalto estacionario; (*e*) Fr > 9,0: resalto fuerte. (*Adaptado de la Referencia 20.*)

www.elsolucionario.net

Teoría para un resalto hidráulico horizontal

Un resalto en un canal con bastante pendiente puede estar afectado por la diferencia de niveles de la solera del canal. Sin embargo, el efecto es pequeño si la pendiente no es muy grande, de modo que la teoría clásica considera que el resalto tiene lugar en una solera horizontal.

El lector debe saber que este problema ya ha sido analizado en la Sección 10.1. Un resalto hidráulico es equivalente a la onda estacionaria de la Figura 10.4*b*, donde el cambio de calado δy no es despreciable. Si V_1 e y_1 son conocidos aguas arriba, V_2 e y_2 se obtienen aplicando las ecuaciones de la continuidad y de la cantidad de movimiento a través de la onda, como en las Ecuaciones (10.7) y (10.8). Por tanto, la Ecuación (10.9) proporciona la solución correcta para un resalto hidráulico si interpretamos C e y en la Figura 10.4*b* como las condiciones aguas arriba V_1 e y_1, y siendo $C - \delta V$ e $y + \delta y$ las condiciones aguas abajo V_2 e y_2. La Ecuación (10.9) toma la forma

$$V_1^2 = \tfrac{1}{2} g y_1 \eta(\eta + 1) \tag{10.42}$$

www.elsolucionario.net

donde $\eta = y_2/y_1$. Introduciendo el número de Froude $\mathrm{Fr}_1 = V_1/(gy_1)^{1/2}$ y resolviendo esta ecuación de segundo grado en η se obtiene

$$\boxed{\frac{2y_2}{y_1} = \Phi 1 + (1 + 8\mathrm{Fr}_1^2)^{1/2}} \tag{10.43}$$

Con y_2 conocido, V_2 se obtiene de la ecuación de la continuidad para un canal muy ancho:

$$V_2 = \frac{V_1 y_1}{y_2} \tag{10.44}$$

Finalmente, la energía disipada a través del resalto hidráulico se obtiene de la ecuación de la energía particularizada para flujo estacionario:

$$h_f = E_1 \Phi E_2 = \left[y_1 + \frac{V_1^2}{2g}\right] \Phi \left[y_2 + \frac{V_2^2}{2g}\right]$$

Sustituyendo y_2 y V_2 de las Ecuaciones (10.43) y (10.44) y realizando bastantes transformaciones algebraicas se obtiene finalmente

$$\boxed{h_f = \frac{(y_2 \Phi y_1)^3}{4y_1 y_2}} \tag{10.45}$$

La Ecuación (10.45) muestra que la energía disipada es positiva, como exige el segundo principio de la termodinámica, sólo si $y_2 > y_1$. La Ecuación (10.43) exige entonces que sea $\mathrm{Fr}_1 > 1{,}0$; esto es, la corriente aguas arriba debe ir en régimen rápido. Finalmente, la Ecuación (10.44) muestra que $V_2 < V_1$ y que la corriente aguas abajo va en régimen lento. Todos estos resultados concuerdan con nuestra experiencia previa del análisis de las ondas de choque normales.

La presente teoría se refiere a resaltos hidráulicos en canales horizontales muy anchos. La teoría correspondiente a canales prismáticos o con pendiente se expone en textos avanzados [por ejemplo, 2, Capítulos 15 y 16].

EJEMPLO 10.8

Considérese un canal muy ancho por el que fluye agua con $q = 10\ \mathrm{m^3/(s \cdot m)}$ e $y_1 = 1{,}25$ m. Si la corriente alcanza un resalto hidráulico, calcule (*a*) y_2, (*b*) V_2, (*c*) Fr_2, (*d*) h_f, (*e*) el porcentaje de energía disipada, (*f*) la potencia disipada por unidad de anchura y (*g*) el incremento de temperatura debido a la disipación si $c_p = 4200\ \mathrm{J/(kg \cdot K)}$.

Solución

Apartado (*a*)

La velocidad aguas arriba es

$$V_1 = \frac{q}{y_1} = \frac{10\ \mathrm{m^3/(s\,m)}}{1{,}25\ \mathrm{m}} = 8{,}0\ \mathrm{m/s}$$

Por tanto, el número de Froude aguas arriba es

$$\mathrm{Fr}_1 = \frac{V_1}{(gy_1)^{1/2}} = \frac{8{,}0}{[9{,}81(1{,}25)]^{1/2}} = 2{,}285$$

www.elsolucionario.net

De la Figura 10.12 vemos que se trata de un resalto débil. El calado y_2 se obtiene de la Ecuación (10.43):

$$\frac{2y_2}{y_1} = \Phi 1 + [1 + 8(2,285)^2]^{1/2} = 5,54$$

o $$y_2 = \tfrac{1}{2}y_1(5,54) = \tfrac{1}{2}(1,25)(5,54) = 3,46 \text{ m}$$ *Resp.* (*a*)

Apartado (*b*)

De la Ecuación (10.44) obtenemos que la velocidad aguas abajo vale

$$V_2 = \frac{V_1 y_1}{y_2} = \frac{8,0(1,25)}{3,46} = 2,89 \text{ m/s}$$ *Resp.* (*b*)

Apartado (*c*)

El número de Froude aguas abajo es

$$\text{Fr}_2 = \frac{V_2}{(gy_2)^{1/2}} = \frac{2,89}{[9,81(3,46)]^{1/2}} = 0,496$$ *Resp.* (*c*)

Apartado (*d*)

Como era de esperar, Fr_2 corresponde a régimen lento. De la Ecuación (10.45) obtenemos la energía disipada:

$$h_f = \frac{(3,46 \Phi 1,25)^3}{4(3,46)(1,25)} = 0,625 \text{ m}$$ *Resp.* (*d*)

www.elsolucionario.net

Apartado (*e*)

El porcentaje de energía disipada se obtiene al comparar h_f con la energía aguas arriba:

$$E_1 = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = 1,25 + \frac{(8,0)^2}{2(9,81)} = 4,51 \text{ m}$$

Por tanto $$\text{Porcentaje de pérdidas} = (100)\frac{h_f}{E_1} = \frac{100(0,625)}{4,51} = 14 \text{ por } 100$$ *Resp.* (*e*)

Apartado (*f*)

La potencia disipada por unidad de anchura es

$$\text{Potencia} = \rho g q h_f = (9800 \text{ N/m}^3)[10 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})](0,625 \text{ m}) = 61,3 \text{ kW/m}$$ *Resp.* (*f*)

Apartado (*g*)

Finalmente, el gasto másico es $\dot{m} = \rho q = (1000 \text{ kg/m}^3)[10 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})] = 10.000 \text{ kg/(s} \cdot \text{m})$, y el incremento de temperatura dado por la ecuación de la energía para flujo estacionario es

$$\text{Potencia disipada} = \dot{m} c_p \Delta T$$

o $$61.300 \text{ W/m} = [10.000 \text{ kg/(s} \cdot \text{m})][4200 \text{ J/(kg} \cdot \text{K})]\Delta T$$

de donde

$$\Delta T = 0,0015 \text{ K}$$ *Resp.* (*g*)

La disipación es grande, pero el incremento de temperatura es despreciable.

www.elsolucionario.net

10.6. MOVIMIENTO GRADUALMENTE VARIADO[5]

En los casos prácticos tanto la pendiente de la solera como el calado del agua varían con la posición, como en la Figura 10.3. Se puede realizar un análisis aproximado si el movimiento es gradualmente variado, esto es, si las pendientes son pequeñas y no varían de forma brusca. Las hipótesis básicas son:

1. Pendiente gradualmente variada.
2. Calado gradualmente variado (sin resaltos hidráulicos).
3. Sección transversal gradualmente variada.
4. Distribución unidimensional de velocidades.
5. Distribución de presiones aproximadamente hidrostática.

El flujo queda entonces determinado por la ecuación de la continuidad (10.1) y la ecuación de la energía con pérdidas por fricción incluidas. Las dos incógnitas para el flujo estacionario son la velocidad $V(x)$ y el calado $y(x)$, donde x es la distancia a lo largo del canal.

Ecuación diferencial básica

Considere el tramo dx del canal representado en la Figura 10.13, que muestra todos los términos que entran en la ecuación de la energía para flujo estacionario. El balance entre las secciones situadas en x y $x + dx$ es

$$\frac{V^2}{2g} + y + S_0\,dx = S\,dx + \frac{V^2}{2g} + d\left(\frac{V^2}{2g}\right) + y + dy$$

o

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{V^2}{2g}\right) = S_0 - S \tag{10.46}$$

www.elsolucionario.net

donde S_0 es la pendiente de la solera (positiva en el caso de la Figura 10.13) y S es la pendiente de la LNE (que cae debido a las pérdidas de altura por fricción en las paredes y solera.

Para eliminar la derivada de la velocidad, diferenciamos en la ecuación de la continuidad:

$$\frac{dQ}{dx} = 0 = A\frac{dV}{dx} + V\frac{dA}{dx} \tag{10.47}$$

Pero $dA = b_0\,dy$, donde b_0 es la anchura del canal a la altura de la superficie libre. Eliminando dV/dx entre las Ecuaciones (10.46) y (10.47), obtenemos

$$\frac{dy}{dx}\left(1 - \frac{V^2 b_0}{gA}\right) = S_0 - S \tag{10.48}$$

Finalmente, de la Ecuación (10.37) vemos que $V^2b_0/(gA)$ es el cuadrado del número de Froude local de la corriente en el canal. La forma final de la ecuación para el movimiento gradualmente variado es

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S}{1 - \mathrm{Fr}^2}} \tag{10.49}$$

Esta ecuación cambia de signo según que el número de Froude corresponda a régimen lento o rápido, y es análoga a la fórmula (9.40) para el cambio de área en dinámica de gases en flujo unidimensional.

[5] Esta sección puede omitirse sin pérdida de continuidad.

www.elsolucionario.net

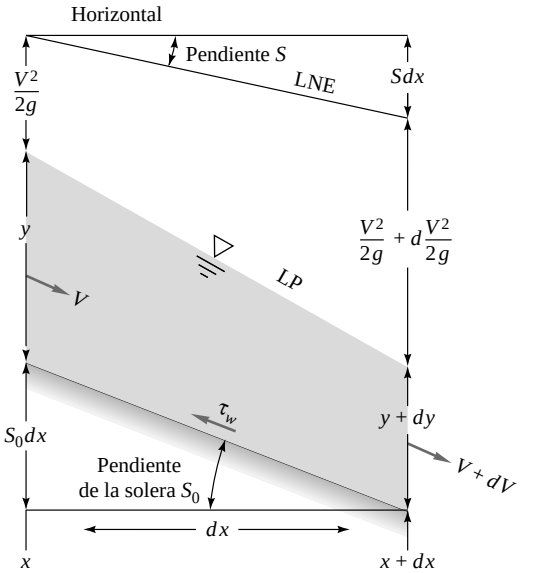


Figura 10.13. Balance de energía entre dos secciones en un movimiento gradualmente variado en un canal abierto.

El numerador de la Ecuación (10.49) cambia de signo según que S_0 sea mayor o menor que S, que es la pendiente equivalente de un movimiento uniforme con el mismo caudal Q:

$$S = S_{0n} = \frac{f}{D_h}\frac{V^2}{2g} = \frac{V^2}{R_h C^2} = \frac{n^2 V^2}{\diagup^2 R_h^{4/3}} \tag{10.50}$$

donde C es el coeficiente de Chézy. El comportamiento de la solución de la Ecuación (10.49) depende entonces del valor relativo de la pendiente local del canal $S_0(x)$ comparada con (1) un movimiento uniforme, $y = y_n$, y (2) un movimiento en régimen crítico, $y = y_c$. Al igual que en la Ecuación (10.38), el parámetro dimensional α^2 es igual a 1,0 en unidades SI y a 2,208 en unidades inglesas.

Clasificación de las soluciones

Es habitual comparar la pendiente del canal S_0 con la pendiente crítica S_c, dada por la Ecuación (10.38), para el mismo valor de Q. Hay cinco tipos de valores para S_0, dando lugar a 12 tipos distintos de soluciones, todos ellos representados en la Figura 10.14.

Tipo de pendiente	Notación para la pendiente	Tipo de calado	Curvas solución
$S_0 > S_c$	Fuerte	$y_c > y_n$	F-1, F-2, F-3
$S_0 = S_c$	Crítica	$y_c = y_n$	C-1, C-3
$S_0 < S_c$	Suave	$y_c < y_n$	S-1, S-2, S-3
$S_0 = 0$	Horizontal	$y_n = \div$	H-2, H-3
$S_0 < 0$	Adversa	y_n = imaginario	A-2, A-3

Las letras F, C, S, H y A hacen referencia a los nombres de los cinco tipos de pendientes. Los números 1, 2 y 3 tienen que ver con la posición del punto inicial sobre la curva solución con respecto al calado nor-

www.elsolucionario.net

mal y_n y al calado crítico y_c. En las soluciones tipo 1, el punto inicial está por encima de y_n e y_c, y en todos los casos la solución $y(x)$ muestra un calado del agua creciente, separándose de y_n e y_c. En las soluciones tipo 2, el punto inicial se encuentra entre y_n e y_c, y si no hay cambio de S_0 o de la rugosidad, la solución tiende asintóticamente al valor más bajo de y_n o y_c. En los casos tipo 3, el punto inicial se encuentra por debajo de y_n e y_c, y la solución tiende asintóticamente hacia el menor de estos calados.

La Figura 10.14 muestra el carácter básico de las soluciones locales, pero en la práctica, como no podía ser menos, S_0 varía con x y la solución global se compone de varios casos empalmados entre sí para formar un perfil de calado $y(x)$ continuo compatible con la condición inicial y el caudal Q dados. En la Referencia 2, Capítulo 9, se puede encontrar una excelente discusión sobre varias soluciones compuestas; véase también la Referencia 22, Sección 12.7.

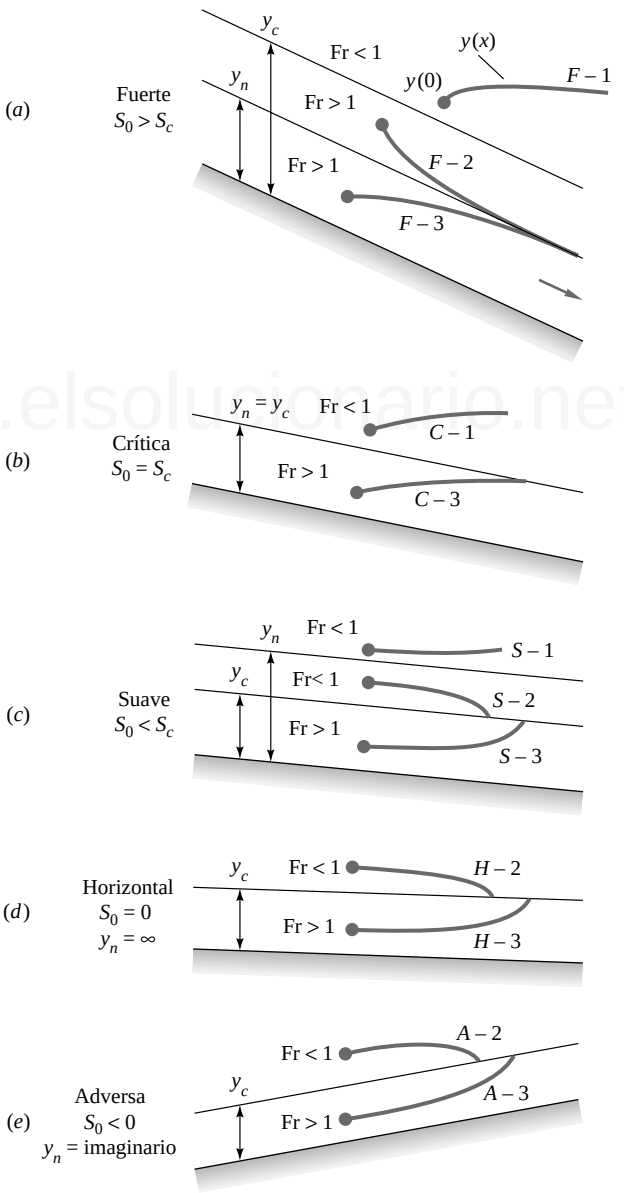


Figura 10.14. Movimiento gradualmente variado para los cinco tipos de pendientes de un canal, mostrando las 12 soluciones básicas posibles.

www.elsolucionario.net

Solución numérica

La ecuación básica para un movimiento gradualmente variado, Ecuación (10.49), es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que puede resolverse fácilmente de forma numérica. Para un caudal Q constante dado, podemos escribirla en la forma

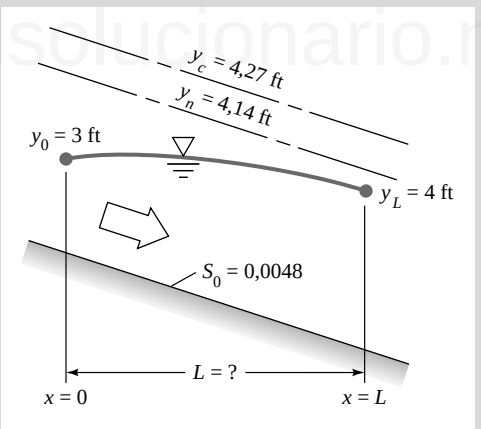
$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - n^2 Q^2 / (\alpha^2 A^2 R_h^{4/3})}{1 - \alpha Q^2 b_0 / (g A^3)} \tag{10.51}$$

sujeta a la condición inicial $y = y_0$ en $x = x_0$. Se supone que la pendiente de la solera $S_0(x)$ y los parámetros geométricos que caracterizan la sección transversal (b_0, P, A) son conocidos a lo largo del canal. Resolviendo la Ecuación (10.51) mediante cualquier método numérico estándar podemos obtener lel calado local del agua $y(x)$. El autor utiliza para ello una hoja de cálculo Excel. El paso espacial Δx conviene seleccionarlo de modo que las variaciones Δy sean menores que, por ejemplo, el 1 por 100. La solución en general se comporta bien excepto cuando los parámetros del canal presentan discontinuidades en sus valores. Obsérvese que cuando la solución se aproxima al calado crítico y_c, el denominador de la Ecuación (10.51) se aproxima a cero, con lo que se requieren pasos Δx muy pequeños. Desde un punto de vista físico resulta conveniente saber qué tipo de solución estamos buscando (S-1, F-2, etc.) antes de empezar los cálculos, aunque desde un punto de vista matemático no es necesario saberlo.

EJEMPLO 10.9

Utilicemos los datos del Ejemplo 10.5 para calcular una parte de la forma del perfil. Dado un canal ancho con n = 0,022, S_0 = 0,0048 y q = 50 ft^3/(s · ft), si y_0 = 3 ft en x = 0, ¿a qué distancia $x = L$ a lo largo del canal habrá aumentado al calado hasta y_L = 4 ft? ¿Está situado el calado de 4 ft aguas arriba o aguas abajo en la Figura E10.9*a*?

www.elsolucionario.net



E10.9a

Solución

En el Ejemplo 10.5 obtuvimos y_c = 4,27 ft. Dado que nuestro calado inicial y = 3 ft es menor que y_c, sabemos que la corriente va en régimen rápido. El calado normal para la pendiente S_0 dada se determina haciendo q = 50 ft^3/(s · ft) en la fórmula de Chézy (10.19) con $R_h = y_n$:

$$q = \frac{\alpha}{n} A R_h^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1{,}486}{0{,}022}[y_n(1\text{ ft})]y_n^{2/3}(0{,}0048)^{1/2} = 50\text{ ft}^3/(\text{s}\cdot\text{ft})$$

de donde se obtiene: $y_n \approx 4{,}14$ ft

Tanto $y(0)$ = 3 ft como $y(L)$ = 4 ft son menores que y_n, que a su vez es menor que y_c, luego debemos estar en el caso F-3, como en la Figura 10.14*a*. La Ecuación (10.51) para un canal ancho se reduce a

www.elsolucionario.net

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - n^2 q^2 / (\checkmark^2 y^{10/3})}{1 - q^2/(gy^3)}$$

$$\approx \frac{0,0048 - (0,022)^2 (50)^2 / (2,208 y^{10/3})}{1 - (50)^2/(32,2 y^3)} \quad \text{con } y(0) = 3 \text{ ft}$$

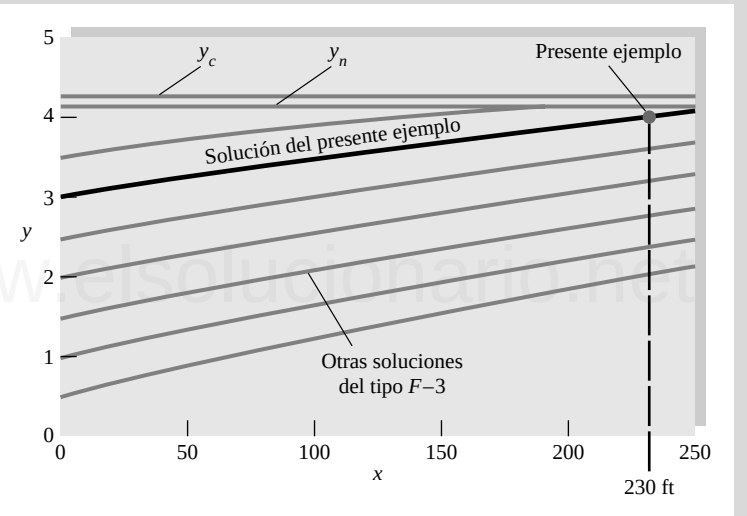
La pendiente inicial es $y'(0) \approx 0,00494$, y un paso de $\Delta x = 5$ ft conllevaría una variación $\Delta y \approx (0,00494)(5 \text{ ft}) \approx 0,025$ ft, menor del 1 por 100. Por tanto, integramos numéricamente con $\Delta x = 5$ ft para determinar dónde se alcanza el calado $y = 4$ ft:

x, ft	0	50	100	150	200	230
y, ft	3,00	3,25	3,48	3,70	3,90	4,00

El calado del agua, que sigue correspondiendo a régimen rápido, alcanza $y = 4$ ft en

$$x \approx 230 \text{ ft aguas abajo} \qquad \textit{Resp.}$$

Comprobamos con la Figura 10.14*a* que el calado del agua en el caso F-3 aumenta aguas abajo. La línea más intensa de la Figura E10.9*b* representa la solución $y(x)$ calculada.



E10.9b

Con un pequeño esfuerzo adicional podemos estudiar la familia entera de soluciones tipo F-3 para este problema. La Figura E10.8*b* también muestra qué sucede si el calado inicial varía entre 0,5 y 3,5 ft con incrementos de 0,5 ft. Todas las soluciones tipo F-3 crecen suavemente y alcanzan asintóticamente la condición de movimiento uniforme $y = y_n = 4,14$ ft.

Solución aproximada para canales irregulares

El procedimiento numérico de la Ecuación (10.51) es bueno cuando tenemos expresiones analíticas para las variaciones de las propiedades del canal $A(x)$, $S_0(x)$, $n(x)$, $b_0(x)$ y $R_h(x)$. Pero en canales naturales las secciones transversales suelen ser irregulares y los datos disponibles pueden ser escasos y no equiespaciados. Para esos casos, los ingenieros civiles utilizan un método aproximado para estimar los cambios graduales del flujo. Un esquema numérico simple pero efectivo es escribir la Ecuación (10.46) en forma de diferencias finitas entre dos calados y e $y + \Delta y$:

$$\Delta x \approx \frac{E(y + \Delta y) - E(y)}{(S_0 - S)_{\text{med}}} \quad \text{donde} \quad E = y + \frac{V^2}{2g} \tag{10.52}$$

www.elsolucionario.net

Esto permite estimar valores medios para la velocidad, pendiente y radio hidráulico entre las dos secciones. Por ejemplo,

$$V_{\text{med}} \Xi \frac{1}{2}[V(y) + V(y + \Delta y)]; \quad R_{h,\text{med}} \Xi \frac{1}{2}[R_h(y) + R_h(y + \Delta y)]; \quad S_{\text{med}} \Xi \frac{n^2 V_{\text{med}}^2}{\text{¿}^2 R_{h,\text{med}}^{4/3}}$$

De nuevo el cálculo puede proceder tanto aguas arriba como aguas abajo, utilizando valores pequeños de Δy. En la Referencia 2, Capítulo 10, se dan más detalles sobre este tipo de cálculos.

EJEMPLO 10.10

Repita el Ejemplo 10.9 utilizando el método aproximado de la Ecuación (10.52) con un incremento $\Delta y = 0{,}25$ ft. Determine la distancia necesaria para que y pase de 3 ft a 4 ft.

Solución

Recordemos del Ejemplo 10.9 que $n = 0{,}022$, $S_0 = 0{,}0048$ y $q = 50$ ft^3/(s · ft). Obsérvese que $R_h = y$ para un canal ancho. Confeccionamos una tabla con y variando desde 3,0 hasta 4,0 ft en incrementos de 0,25 ft, y calculamos $V = q/y$, $E = y + V^2/(2g)$ y $S_{\text{med}} = [n^2V^2/(2{,}208y^{4/3})]_{\text{med}}$:

y, ft	V (ft/s) = 50/y	$E = y + V^2/(2g)$	S	S_{med}	$\Delta x = \Delta E/(S_0 - S)_{\text{med}}$	$x = \Sigma\Delta x$
3,0	16,67	7,313	0,01407	—	—	0
3,25	15,38	6,925	0,01078	0,01243	51	51
3,5	14,29	6,669	0,00842	0,00960	53	104
3,75	13,33	6,511	0,00669	0,00756	57	161
4,0	12,50 ft/s	6,426 ft	0,00539	0,00604	69 ft	230 ft

www.elsolucionario.net

Comentario. La precisión es excelente, con el mismo resultado $x = 230$ ft que se obtuvo en el Ejemplo 10.9 mediante integración numérica con una hoja de Excel. Esto se debe principalmente a la regularidad y a la variación suave de las propiedades del canal. Si el canal fuera más irregular y los datos no estuvieran equiespaciados la precisión sería peor.

Algunas corrientes compuestas ilustrativas

Las soluciones en la Figura 10.14 son un tanto simplistas, pues presuponen una pendiente constante de la solera. En la práctica, las pendientes de los canales pueden variar bastante, $S_0 = S_0(x)$, y las soluciones pueden incluir varios regímenes distintos. La variación de otros parámetros del canal, como $A(x)$, $b_0(x)$ y $n(x)$, pueden dar lugar a interesantes soluciones compuestas. La Figura 10.15 muestra algunos ejemplos.[6]

La Figura 10.15*a* muestra la transición de una pendiente suave a una pendiente fuerte en un canal de anchura constante. La solución inicial del tipo S-2 debe pasar a ser del tipo F-2 aguas abajo en la pendiente fuerte. La única forma física de que esto ocurra es que la curva solución atraviese el calado crítico, tal como se muestra. El punto crítico es *singular* desde un punto de vista matemático [2, Sección 9.6] y la corriente cerca de ese punto varía de forma *rápida*, no lenta. La aceleración de la corriente desde el régimen lento hasta el régimen rápido es similar a una tobera convergente-divergente en dinámica de gases. La Figura 10.15*a* no admite otras soluciones. Por ejemplo, la solución aguas arriba no puede ser del tipo F-1, ya que el salto en la pendiente daría lugar a una solución tipo P-1 que no tendería a un movimiento uniforme sobre la pendiente fuerte.

La Figura 10.15*b* muestra una pendiente suave que de repente pasa a ser aún más suave. La corriente incidente se supone uniforme y la presencia del quiebro en la pendiente se «siente» aguas arriba. El calado del

[6] El autor está en deuda con el Profesor Bruce Larock por aclararle estas soluciones compuestas.

www.elsolucionario.net

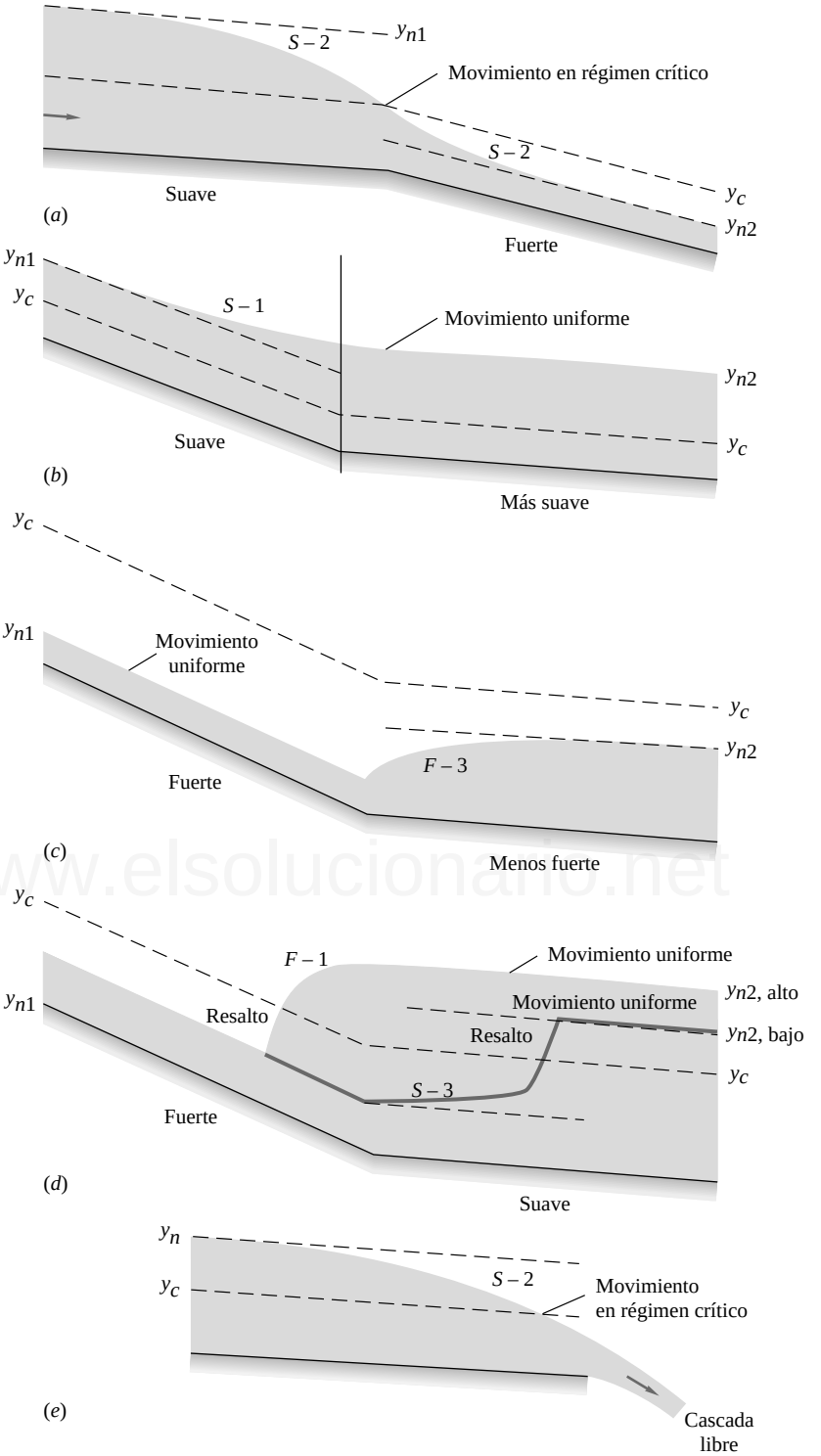


Figura 10.15. Algunos ejemplos de soluciones compuestas con transiciones entre diferentes tipos de soluciones.

agua sigue una curva del tipo S-1 que se acopla perfectamente en el punto de quiebro con un movimiento uniforme con un nuevo calado normal y_{n2} menor que el original.

La Figura 10.15*c* muestra una pendiente fuerte que se convierte bruscamente en una pendiente menos fuerte. Obsérvese que para ambas pendientes $y_n < y_c$. Como la corriente incidente va en régimen rápido ($V > V_c$), ésta no «siente» con antelación el quiebro en la pendiente. Por tanto, la solución del tipo F-3 sólo

www.elsolucionario.net

aparece a partir del quiebro, y evoluciona suavemente hasta convertirse en un movimiento uniforme con un nuevo calado normal y_{n2} mayor que el original.

La Figura 10.15*d* muestra una pendiente fuerte que bruscamente pasa a ser suave. Se pueden dar varios casos. Los dos casos mostrados dependen del valor relativo de la pendiente suave. Si el calado aguas abajo y_{n2} es pequeño, aparecerá una solución del tipo S-3 a partir del quiebro en la pendiente, que irá evolucionando hasta que el movimiento local en régimen rápido sea capaz de formar un resalto hidráulico para alcanzar un nuevo calado normal. A medida que y_{n2} aumenta, el resalto hidráulico se irá formando antes, hasta que para el caso «alto» de la figura el resalto se forme en el tramo fuerte, seguido de una solución del tipo F-1 que se transformará en un movimiento uniforme de calado normal y_{n2} justo a la altura del quiebro.

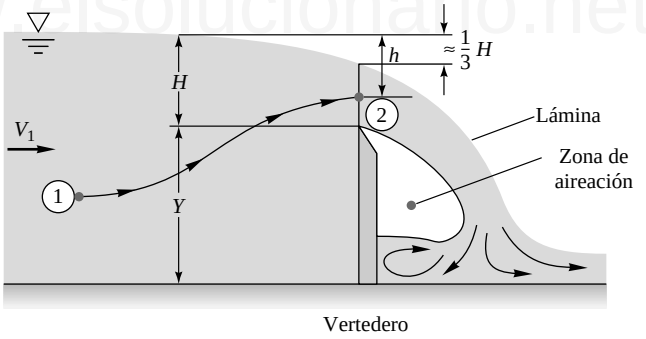
La Figura 10.15*e* muestra una cascada con una pendiente suave. Ésta actúa de *sección de control* para el flujo aguas arriba, que forma una solución del tipo S-2 y se acelera hasta condiciones críticas cerca de la cascada. El chorro de la cascada va en régimen rápido. La cascada «controla» los calados del agua aguas arriba y puede usarse como condición inicial para el cálculo de $y(x)$. Éste es el tipo de flujo que aparece sobre un vertedero o una cascada natural (Sección 10.7).

Los ejemplos en la Figura 10.15 ponen de manifiesto que las variaciones de las condiciones de un flujo en un canal abierto pueden dar lugar a configuraciones muy complejas. En la Referencia 2, págs. 229-233, pueden encontrarse muchos más ejemplos de configuraciones de soluciones compuestas.

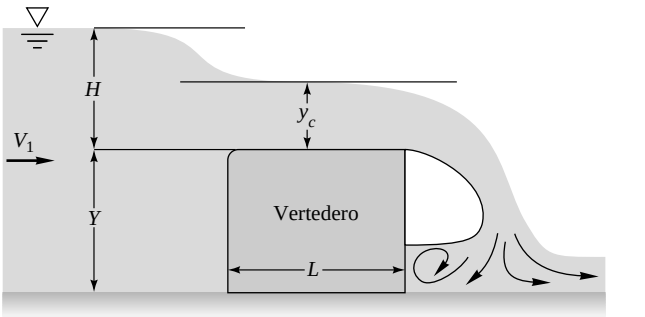
10.7. CONTROL Y MEDIDA DE CAUDALES MEDIANTE VERTEDEROS

Un vertedero, como por ejemplo una presa ordinaria, es una obstrucción en la solera que debe ser sobrepasada por la corriente. Para ciertas geometrías sencillas, el caudal Q se correlaciona con la gravedad g y con la altura H que, medida sobre el vertedero, tiene el agua aguas arriba (véase Figura 10.16). Por ello un vertedero es un medidor, elemental pero efectivo, del caudal en un canal abierto. En el Problema P5.32 utilizamos un vertedero como ejemplo de aplicación del análisis dimensional.

www.elsolucionario.net



(*a*)



(*b*)

Figura 10.16. Flujo sobre un vertedero infinitamente ancho y bien aireado: (*a*) vertedero de pared delgada; (*b*) vertedero de pared gruesa.

www.elsolucionario.net

La Figura 10.16 muestra dos vertederos corrientes, de pared delgada y de pared gruesa, que consideraremos muy anchos en la dirección perpendicular al papel. En ambos casos, la corriente aguas arriba va en régimen lento, se vuelve crítica cerca de la cresta del vertedero y rebosa en forma de una *lámina* en régimen rápido. En ambos casos, el caudal q por unidad de anchura es proporcional a $g^{1/2}H^{3/2}$, diferenciándose únicamente en la constante de proporcionalidad. La lámina de agua tras el vertedero de pared delgada debe estar *ventilada* y descargar a la atmósfera; esto es, debe separarse de la pared del vertedero y caer libremente. La correlación cambia (haciéndose más complicada) si la lámina de líquido queda adherida a la pared del vertedero aguas abajo. (El rebosadero de la Figura 10.11 es un tipo de vertedero no aireado.)

En el texto de Ackers et al. [23] se puede encontrar un tratado muy completo sobre vertederos, incluyendo otros diseños tales como el vertedero poligonal tipo «Crump» y varios vertederos contraídos. Véase el Problema P10.122.

Análisis de vertederos de pared delgada

Se puede analizar el flujo en vertederos empleando la teoría potencial no viscosa con una superficie libre desconocida (a calcular), como en la Figura P8.71. Sin embargo, aquí nos limitaremos a usar la teoría de flujo unidimensional combinada con el análisis dimensional para determinar unas correlaciones apropiadas para el caudal sobre el vertedero.

Un primer enfoque teórico del problema se debe a J. Weisbach en 1855. La altura de velocidad en cualquier punto 2 sobre la cresta del vertedero se supone igual a la altura total aguas arriba; en otras palabras, se utiliza la ecuación de Bernoulli sin pérdidas:

$$\frac{V_2^2}{2g} + H \Phi h \Xi \frac{V_1^2}{2g} + H \quad \text{o} \quad V_2(h) \Xi \sqrt{2gh + V_1^2}$$

donde h es la distancia vertical hasta el punto 2, como se muestra en la Figura 10.16*a*. Si por el momento nos creemos, sin demostrarlo, que el flujo sobre la cresta se contrae hasta $h_{mín} \Xi H/3$, el caudal $q = Q/b$ sobre la cresta es aproximadamente

$$q = \mathbf{I}_{\text{cresta}} V_2 dh \Xi \mathbf{I}_{H/3}^{H} (2gh + V_1^2)^{1/2}\, dh$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2g}\left\{\left[H + \frac{V_1^2}{2g}\right]^{3/2} \Phi \left[\frac{H}{3} + \frac{V_1^2}{2g}\right]^{3/2}\right\}$$

Normalmente se desprecia la altura de velocidad aguas arriba $V_1^2/(2g)$, de modo que esta expresión se reduce a

Teoría de pared delgada: $$q \Xi 0{,}81\left(\frac{2}{3}\right)(2g)^{1/2}H^{3/2} \tag{10.53}$$

Esta fórmula es funcionalmente correcta, pero el coeficiente 0,81 es demasiado alto y debería sustituirse por un coeficiente de descarga determinado experimentalmente en cada caso.

Análisis de vertederos de pared gruesa

El vertedero de pared gruesa de la Figura 10.16*b* puede analizarse de forma más precisa porque sobre su parte superior se crea una corriente unidimensional de condiciones próximas a la crítica. La ecuación de Bernoulli aplicada desde aguas arriba hasta la parte superior del vertedero proporciona

$$\frac{V_1^2}{2g} + Y + H \Xi \frac{V_c^2}{2g} + Y + y_c$$

www.elsolucionario.net

Si la cresta es muy ancha en la dirección perpendicular al papel, $V_c^2 = gy_c$ de la Ecuación (10.33). Por tanto, podemos despejar

$$y_c = \frac{2H}{3} + \frac{V_1^2}{3g} \approx \frac{2H}{3}$$

Este resultado se utilizó sin demostración alguna en la deducción de la Ecuación (10.53). Finalmente, el caudal se obtiene de la Ecuación (10.32) para movimientos en régimen crítico en canales anchos:

Teoría de pared gruesa:
$$q = \sqrt{gy_c^3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{2g}\right)\left(H + \frac{V_1^2}{2g}\right)^{3/2} \tag{10.54}$$

Nuevamente podemos despreciar la altura de velocidad aguas arriba $V_1^2/(2g)$. El coeficiente $1/\sqrt{3} = 0{,}577$ es bastante acertado, aunque se prefiere el uso de datos experimentales.

Valores experimentales del coeficiente de descarga de un vertedero

Las fórmulas teóricas para el flujo sobre vertederos pueden modificarse experimentalmente del siguiente modo. Eliminando los coeficientes numéricos $\frac{2}{3}$ y $\sqrt{2}$, para los cuales hay un gran apego en la literatura, la fórmula se reduce a

$$Q_{\text{vertedero}} = C_d b\sqrt{g}\left(H + \frac{V_1^2}{2g}\right)^{3/2} \approx C_d b\sqrt{g}H^{3/2} \tag{10.55}$$

www.elsolucionario.net

donde b es la anchura de la cresta y C_d es el *coeficiente de descarga del vertedero*, experimental y adimensional, que puede cambiar con la geometría del vertedero, el número de Reynolds y el número de Weber. La Referencia 23 proporciona numerosos datos publicados en la literatura para una gran variedad de vertederos.

Por su gran precisión (±2 por 100), se recomienda la siguiente correlación para vertederos de pared delgada fuertemente aireados [23]:

Vertedero de pared delgada fuertemente aireado: $C_d = 0{,}564 + 0{,}0846\frac{H}{Y}$ para $\frac{H}{Y} \geq 2$ (10.56)

El número de Reynolds V_1H/ν para estos valores varía entre 10^4 y 2×10^6, pero la fórmula debería ser aplicable a valores más grandes de Re, como en presas grandes de ríos.

El vertedero de pared gruesa de la Figura 10.16*b* es considerablemente más sensible a los parámetros geométricos, incluida la rugosidad ε de la superficie de la cresta. Si el borde delantero está redondeado, $R/L \geq 0{,}05$, los datos disponibles [23, Cap. 7] pueden correlacionarse de la siguiente manera:

Vertedero de pared gruesa con borde redondeado: $C_d = 0{,}544\left(1 + \frac{\delta^* / L}{H/L}\right)^{3/2}$ (10.57)

donde
$$\frac{\delta^*}{L} = 0{,}001 + 0{,}2\sqrt{\varepsilon/L}$$

El efecto dominante es el debido al crecimiento del espesor de desplazamiento δ^* de la capa límite turbulenta comparado con la altura H aguas arriba. La fórmula está limitada a $H/L < 0{,}7$, $\varepsilon/L \geq 0{,}002$ y $V_1H/\nu > 3 \times 10^5$. Si el borde delantero está redondeado, el efecto de la altura Y del vertedero no es importante, al menos si $H/Y < 2{,}4$.

www.elsolucionario.net

Si el borde delantero del vertedero de pared gruesa es en arista, llamado entonces *vertedero rectangular*, el caudal puede depender de la altura Y del vertedero. Sin embargo, para un determinado rango de alturas y longitudes de vertedero, C_d es prácticamente constante:

$$\text{Vertedero de pared gruesa con borde en arista:} \qquad C_d \approx 0,462 \quad \text{para} \quad \begin{cases} 0,08 < \dfrac{H}{L} < 0,33 \\ 0,22 < \dfrac{H}{L} < 0,56 \end{cases} \tag{10.58}$$

La rugosidad superficial no es relevante en este caso. Para $H/L < 0,08$ la dispersión de los datos es grande (±10 por 100). Para $H/L > 0,33$ y $H/Y > 0,56$, C_d aumenta hasta un 10 por 100 con cada uno de los parámetros, requiriéndose de complicados ábacos para el coeficiente de descarga [19, Cap. 6].

EJEMPLO 10.11

Un vertedero en un canal horizontal tiene 1 m de alto y 4 m de ancho. El calado del agua aguas arriba es de 1,6 m. Estime el caudal si el vertedero es (*a*) de pared delgada y (*b*) de cemento no pulido, pared gruesa, con borde delantero redondeado y una ancha cresta de 1,2 m de longitud. Desprecie $V_1^2/(2g)$.

Solución

Apartado (*a*)

Nos han proporcionado $Y = 1$ m y $H + Y \approx 1,6$ m, por tanto $H \approx 0,6$ m. Como $H \ll b$, suponemos que el vertedero es «infinitamente ancho». Para el caso de pared delgada es aplicable la Ecuación (10.56):

www.elsolucionario.net

$$C_d \approx 0,564 + 0,0846\frac{0,6\text{ m}}{1\text{ m}} \approx 0,615$$

de modo que el caudal viene dado por la correlación básica (10.55):

$$Q = C_d b\sqrt{g}H^{3/2} = (0,615)(4\text{ m})\sqrt{(9,81\text{ m/s}^2)}(0,6\text{ m})^{3/2} \approx 3,58\text{ m}^3/\text{s} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Comprobamos que $H/Y = 0,6 < 2,0$ para asegurarnos de la validez de la Ecuación (10.56). De la ecuación de la continuidad, $V_1 = Q/(by_1) = 3,58/[(4,0)(1,6)] = 0,56$ m/s, proporcionando un número de Reynolds $V_1H/\nu \approx 3,4 \times 10^5$.

Apartado (*b*)

La Ecuación (10.57) es válida para un vertedero de pared gruesa y borde delantero redondeado. De la Tabla 10.1 obtenemos que $\varepsilon \approx 2,4$ mm para una superficie de cemento no pulido. Por tanto, el espesor de desplazamiento vale

$$\frac{\delta^*}{L} \approx 0,001 + 0,2\sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} = 0,001 + 0,2\left[\frac{0,0024\text{ m}}{1,2\text{ m}}\right]^{1/2} \approx 0,00994$$

El coeficiente de descarga dado por la Ecuación (10.57) es

$$C_d \approx 0,544\left[1 - \frac{0,00994}{0,6\text{ m}/1,2\text{ m}}\right]^{3/2} \approx 0,528$$

Por tanto, el caudal vale

$$Q = C_d b\sqrt{g}H^{3/2} = 0,528(4\text{ m})\sqrt{(9,81\text{ m/s}^2)}(0,6\text{ m})^{3/2} \approx 3,07\text{ m}^3/\text{s} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

www.elsolucionario.net

Compruebe que $H/L = 0{,}5 < 0{,}7$. El número de Reynolds de la corriente incidente vale $V_1 H/\nu \Xi 2{,}9 \times 10^5$, ligeramente por debajo del límite recomendado para la Ecuación (10.57).

Como $V_1 \Xi 0{,}5$ m/s, $V_1^2/(2g) \Xi 0{,}012$ m, con lo que suponer que la altura total es igual a 0,6 m conlleva un error del 2 por 100. Si quisiéramos, podríamos corregir esto en la altura de velocidad aguas arriba.

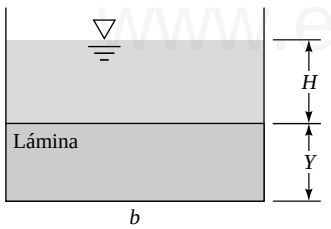
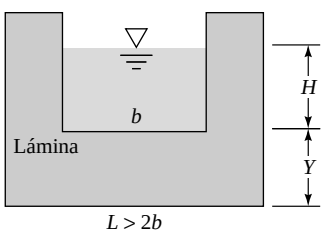
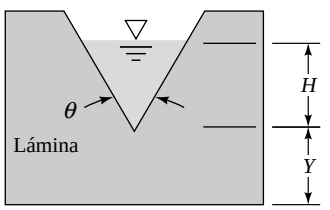
Otros diseños de vertederos de pared delgada

A menudo se utilizan vertederos para medir y controlar el caudal en canales artificiales. Los dos tipos más comunes son el vertedero rectangular y el vertedero en V, como se muestra en la Tabla 10.2. Todos ellos deben estar bien ventilados y no anegados.

La Tabla 10.2*a* muestra un vertedero rectangular sin contracciones laterales, que tendrá efectos de capa límite en las paredes laterales, pero ningún tipo de contracción de la lámina. Como se trata de un diseño de pared delgada, la cresta es afilada y por tanto la Ecuación (10.56) debería proporcionar una precisión aceptable, como se muestra en la tabla. Como el rebose se extiende a lo ancho de todo el canal, puede ser necesaria una aireación artificial, por ejemplo mediante agujeros en las paredes del canal.

La Tabla 10.2*b* muestra un vertedero rectangular con contracciones laterales, $b < L$, que hará que los lados de la lámina se contraigan y se reduzca por tanto el caudal. Una contracción adecuada [23, 24] consiste en reducir la anchura efectiva del vertedero en $0{,}1H$, como se muestra en la tabla. Parece ser que este tipo de vertederos es bastante sensible a fenómenos pequeños tales como el espesor de la pared y el crecimien-

Tabla 10.2. Medidores de caudal basados en vertederos de pared delgada.

Vertedero de pared delgada	Correlación del caudal
 (*a*) Rectangular sin contracciones laterales.	$Q \Xi \left(0{,}564 + 0{,}0846 \frac{H}{Y}\right) b g^{1/2} H^{3/2}$
 (*b*) Rectangular con contracciones laterales.	$Q \Xi 0{,}581 (b \Phi 0{,}1H) g^{1/2} H^{3/2} \quad H < 0{,}5Y$
 (*c*) En V.	$Q \Xi 0{,}44 \, \mathrm{tg} \frac{\aleph}{2} g^{1/2} H^{5/2} \quad 20° < \aleph < 100°$

www.elsolucionario.net

to de las capas límite en las paredes del canal. No se recomienda este tipo de vertederos si las alturas y las anchuras del hueco van a ser pequeñas: $H < 75$ mm y $b < 30$ cm, respectivamente.

El vertedero en V de la Tabla 10.2*c* es de por sí interesante por presentar su rebose una única longitud característica, H, y no hay una «anchura» adicional. Por tanto el caudal será proporcional a $H^{5/2}$ en vez de a $H^{3/2}$. Aplicando la ecuación de Bernoulli a la apertura triangular se obtiene el siguiente caudal ideal:

Vertedero en V:
$$Q_{\text{ideal}} = \frac{8\sqrt{2}}{15} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} g^{1/2} H^{5/2} \tag{10.59}$$

donde θ es el ángulo total de la hendidura triangular. Las mediciones experimentales proporcionan caudales un 40 por 100 menores, principalmente a consecuencia de la contracción del flujo, que también aparece en descargas a través de orificios en paredes delgadas. La fórmula recomendada para determinar el caudal incluye por tanto un coeficiente de descarga determinado experimentalmente:

$$Q_{\text{vertedero en V}} = C_d \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} g^{1/2} H^{5/2} \qquad C_d = 0,44 \quad \text{para} \quad 20° < \theta < 100° \tag{10.60}$$

para alturas $H > 50$ mm. Para alturas menores, los efectos de los números de Reynolds y Weber empiezan a ser importantes, con lo que se recomienda la siguiente corrección [23] para esos casos:

Alturas pequeñas, $H < 50$ mm:
$$C_{d,\text{vertedero enV}} = 0,44 + \frac{0,9}{(\text{Re}\,\text{We})^{1/6}} \tag{10.61}$$

donde $\text{Re} = \rho g^{1/2} H^{3/2}/\mu$ y $\text{We} = \rho g H^2/\Upsilon$, donde Υ es el coeficiente de tensión superficial. Esta fórmula puede también usarse con líquidos distintos al agua, siempre que $\text{Re} > 300/\text{tg}(\theta/2)^{3/4}$ y $\text{We} > 300$.

En la Referencia 25 puede encontrarse información sobre más tipos de vertederos de pared delgada, como por ejemplo los trapezoidales, parabólicos, circulares o en forma de U. Esta referencia también incluye información extensa sobre los vertederos de pared gruesa. Véanse también las Referencias 29 y 30.

EJEMPLO 10.12

Se diseña un vertedero en V para medir el caudal en un canal de irrigación. Con el fin de facilitar la lectura del medidor del nivel del agua aguas arriba, se desea que $H \geq 30$ cm para el caudal de diseño de 150 m³/s. ¿Cuál es el ángulo θ apropiado para el vertedero?

Solución

- *Consideraciones*. Flujo estacionario, efectos del número de Weber despreciables por ser $H > 50$ mm.
- *Procedimiento*. La Ecuación (10.60) es aplicable (eso esperamos) con un ángulo del vertedero de $20° < \theta < 100°$.
- *Valor de las propiedades*. Si la tensión superficial es despreciable, no hacen falta las propiedades del fluido. ¿Por qué?
- *Resolución*. Utilice la Ecuación (10.60) para conocer el caudal y determinar θ:

$$Q = \frac{150 \text{ m}^3/\text{h}}{3600 \text{ s/h}} = 0,0417 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = C_d \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sqrt{g}\, H^{5/2} = 0,44 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sqrt{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}\, (0,3 \text{ m})^{5/2}$$

$$\text{de donde } \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = 0,613 \quad \text{o} \quad \theta = 63° \qquad \textit{Resp.}$$

- *Comentarios*. Un ángulo de 63° creará una altura aguas arriba de 30 cm. Cualquier ángulo menor creará una altura incluso mayor. Las fórmulas para vertederos dependen principalmente de la gravedad y de la geometría. Propiedades del fluido, tales como (ρ, μ, Υ), sólo aparecen en ligeras modificaciones o en factores de corrección.

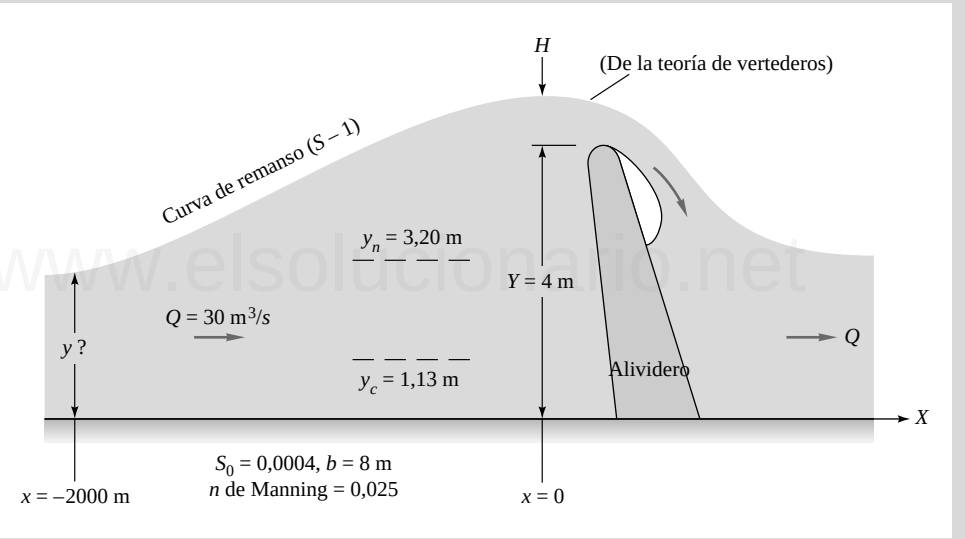
www.elsolucionario.net

Curvas de remanso aguas arriba

Un vertedero es un obstáculo para el flujo que no sólo altera el flujo local sobre el vertedero, sino que también modifica la distribución de calados del flujo lejos aguas arriba del obstáculo. Cualquier obstáculo grande en un flujo en un canal abierto crea una curva de remanso aguas arriba que puede calcularse mediante la teoría de la Sección 10.6 para movimientos gradualmente variados. Si se conoce Q, la fórmula para vertederos (10.55) determina H y por tanto el calado del agua justo aguas arriba del vertedero, $y = H + Y$, donde Y es la altura del vertedero. Podemos calcular $y(x)$ aguas arriba del vertedero mediante la Ecuación (10.51), siguiendo en este caso una solución del tipo S-1 (Figura 10.14*c*). Un obstáculo así, donde el calado del agua se correlaciona con el caudal, recibe el nombre de *punto de control* del canal. Estos son los puntos iniciales para los análisis numéricos de inundaciones en ríos llevados a cabo, por ejemplo, por el cuerpo de ingenieros del ejército de tierra de los EE.UU. [26].

EJEMPLO 10.13

Un canal rectangular de 8 m de anchura y un caudal de 30 m^3/s, se topa con un aliviadero de pared delgada de 4 m de altura, como se muestra en la Figura E10.13*a*. Determine el calado del agua 2 km aguas arriba si la pendiente del canal es $S_0 = 0{,}0004$ y $n = 0{,}025$.



E10.13a

Solución

Determine primeramente la altura H producida por la presa usando la teoría de vertederos de pared delgada, Ecuación (10.56):

$$Q = 30 \text{ m}^3/\text{s} = C_d b g^{1/2} H^{3/2} = \left(0{,}564 + 0{,}0846 \frac{H}{4 \text{ m}}\right)(8 \text{ m})(9{,}81 \text{ m/s}^2)^{1/2} H^{3/2}$$

Como el término $0{,}0846H/4$ entre paréntesis es pequeño, podemos iterar o utilizar EES para obtener la solución $H \cong 1{,}59$ m. Por tanto, nuestra condición inicial en $x = 0$, justo aguas arriba del aliviadero, es $y(0) = Y + H = 4 + 1{,}59 = 5{,}59$ m. Compare éste con el calado crítico de la Ecuación (10.30):

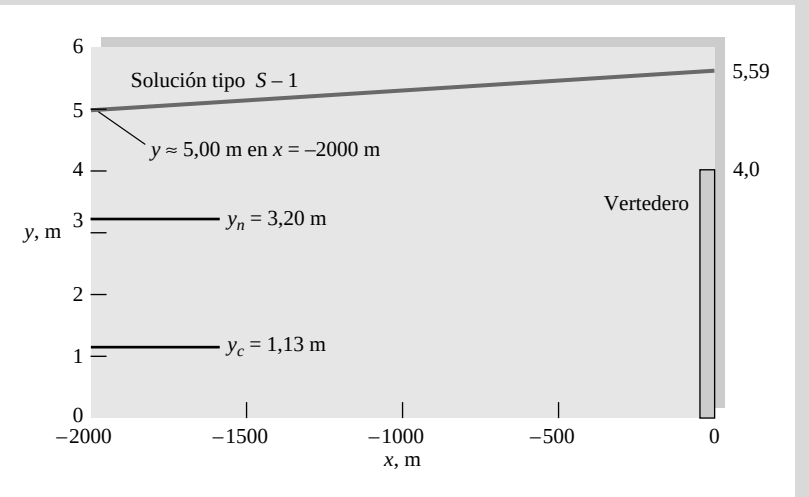
$$y_c = \left(\frac{Q^2}{b^2 g}\right)^{1/3} = \left(\frac{(30 \text{ m}^3/\text{s})^2}{(8 \text{ m})^2 (9{,}81 \text{ m/s}^2)}\right)^{1/3} = 1{,}13 \text{ m}$$

www.elsolucionario.net

Como $y(0)$ es mayor que y_c, el canal circula en régimen lento. Finalmente, estime el calado normal mediante la ecuación de Chézy (10.19):

$$Q = 30\ \text{m}^3/\text{s} = \frac{1}{n} b y R_h^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1,0}{0,025}(8\ \text{m}) y_n \left[\frac{8y_n}{8 + 2y_n}\right]^{2/3} (0,0004)^{1/2}$$

Mediante prueba y error o EES se obtiene $y_n \approx 3,20$ m. En ausencia de variaciones en la anchura y pendiente del canal, el calado del agua lejos aguas arriba del aliviadero alcanzará este valor. Los valores $y(0)$, y_c e y_n se muestran en la Figura E10.13*b*.



E10.13b

www.elsolucionario.net

Como $y(0) > y_n > y_c$, la solución, según la teoría de movimiento gradualmente variado, es del tipo S-1. La Ecuación (10.51) para un canal rectangular y los valores de entrada dados es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - n^2 Q^2/(k^2 A^2 R_h^{4/3})}{1 - Q^2 b_0/(gA^3)} \qquad k = 1,0 \qquad A = 8y \qquad n = 0,025 \qquad R_h = \frac{8y}{8 + 2y} \qquad b_0 = 8$$

Empezando con $y = 5,59$ m en $x = 0$, integramos hacia atrás hasta $x = -2000$ m. Se obtiene una precisión de cuatro cifras decimales con un método de Runge-Kutta y un paso $\Delta x = -100$ m. La solución completa se muestra en la Figura E10.13*b*. El valor buscado es

En $x = -2000$ m: $y = 5,00$ m *Resp.*

Por tanto, incluso a 2 km aguas arriba, el aliviadero provoca un remanso de 1,8 m por encima del calado normal que se daría en ausencia del aliviadero. Para este ejemplo, un calado próximo al normal de, digamos, 10 cm por encima de y_n, o $y = 3,3$ m, no se alcanzaría hasta $x = -13.400$ m. Las curvas de remanso llegan hasta bastante lejos aguas arriba, especialmente cuando hay inundaciones.

Resumen

Este capítulo ha introducido el análisis de flujos en canales abiertos. El análisis básico combina la ecuación de la continuidad con la ecuación de Bernoulli ampliada, que incluye las pérdidas por fricción.

Los flujos en canales abiertos se clasifican según las variaciones en su calado o según su número de Froude, siendo este último el análogo al número de Reynolds de flujos compresibles en conductos (Capítulo 9). El flujo con pendiente y calado constantes recibe el nombre de movimiento uniforme y satisface la ecuación clásica de Chézy (10.19). Los canales prismáticos rectos pueden ser optimizados para determinar la

www.elsolucionario.net

sección transversal que proporciona el caudal máximo con las pérdidas de fricción mínimas. A medida que la pendiente y la velocidad del flujo aumentan, el canal alcanza la condición *crítica* de número de Froude igual a la unidad, donde la velocidad se iguala a la velocidad de propagación de ondas superficiales en el canal. Cada canal tiene una pendiente crítica que varía con el caudal y la rugosidad. Si el movimiento alcanza el régimen rápido (Fr > 1), puede experimentar un resalto hidráulico que aumente su calado y disminuya su velocidad (a régimen lento), análogamente a una onda de choque normal.

El análisis de movimientos gradualmente variados proporciona una ecuación diferencial (10.51) que puede resolverse mediante métodos numéricos. El capítulo termina con una discusión sobre el flujo en un vertedero, donde el caudal total puede correlacionarse con el calado del agua aguas arriba.

Problemas

La mayoría de los problemas propuestos aquí son bastante sencillos. Los más difíciles, o de final abierto, se indican con un asterisco. Para resolver los problemas señalados con un icono EES se recomienda el uso del Resolvedor de Ecuaciones de Ingeniería (EES, *Engineering Equation Solver*), mientras que los problemas señalados con un disquete pueden requerir el uso de un ordenador. Los problemas estándar de final de capítulo P10.1 a P10.128 (ordenados por temas en la lista de abajo) están seguidos por los problemas conceptuales C10.1 a C10.13, los problemas del examen de fundamentos de ingeniería (FE, *Fundamentals of Engineering*) FE10.1 a FE10.7, los problemas extensos PE10.1 a PE10.5 y los proyectos de diseño D10.1 y D10.2.

Distribución de los problemas

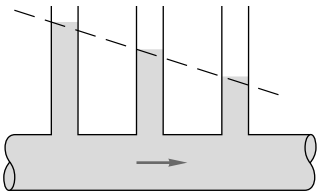
Sección	Tema	Problemas
10.1	Introducción: número de Froude, velocidad de onda	P10.1-P10.10
10.2	Movimiento uniforme: fórmula de Chézy	P10.11-P10.36
10.3	Canales eficientes para movimientos uniformes	P10.37-P10.46
10.4	Energía específica: calado crítico	P10.47-P10.58
10.4	Flujo sobre una elevación de la solera	P10.59-P10.68
10.4	Desagüe bajo compuerta	P10.69-P10.78
10.5	El resalto hidráulico	P10.79-P10.96
10.6	Movimiento gradualmente variado	P10.97-P10.112
10.7	Vertederos y canales contraídos	P10.113-P10.123
10.7	Curvas de remanso	P10.124-P10.128

P10.1 La fórmula para la velocidad de propagación de una onda superficial, Ecuación (10.9) o (10.10), es independiente de las propiedades físicas del líquido, como la densidad, viscosidad o tensión superficial. ¿Significa esto que las ondas se propagan a la misma velocidad en agua, mercurio, gasolina y glicerina? Explíquelo.

P10.2 Una onda superficial de 12 cm de altura se propaga en agua en reposo con un calado de 1,1 m. Calcule (*a*) la velocidad *c* de la onda y (*b*) la velocidad inducida δV.

P10.3 La bahía de Narragansett tiene una longitud aproximada de 22 millas y una profundidad media de 42 ft. Las tablas de mareas para la región indican un retardo de 30 min entre la pleamar en la boca de la bahía (Newport, Rhode Island) y en el fondo de la bahía (Providence, Rhode Island). ¿Se correlaciona este retardo con la propagación de una onda superficial de marea que atraviese la bahía? Explíquelo.

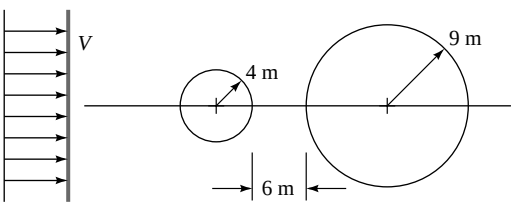
P10.4 La corriente de agua en el canal de la Figura P10.4 presenta una superficie libre en tres puntos distintos. ¿Hace esto que se pueda considerar como un flujo en un canal abierto? Explíquelo. ¿Qué representa la línea de trazo discontinuo?



P10.4

P10.5 Fluye agua rápidamente por un canal con un calado de 25 cm. Si se pincha la superficie libre con un alfiler se genera una onda en forma de cuña con un ángulo de 38°. Determine la velocidad *V* del agua.

P10.6 Dos guijarros lanzados sucesivamente en el mismo punto de una corriente de agua en un canal de 42 cm de calado forman las dos ondas circulares mostradas en la Figura P10.6. A partir de esta información calcule (*a*) el número de Froude y (*b*) la velocidad de la corriente.

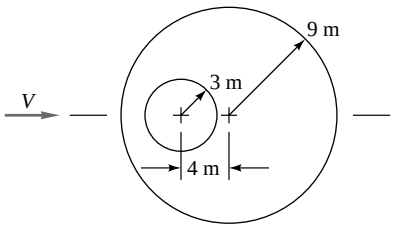


P10.6

P10.7 Dos guijarros lanzados sucesivamente en el mismo punto de una corriente de agua en un canal de 65 cm de calado forman las dos ondas circulares mostradas en la Figura P10.7. A partir de esta información calcule (*a*) el número de Froude y (*b*) la velocidad de la corriente.

P10.8 Un terremoto cerca de la península de Kenai, Alaska, crea una onda solitaria (llamada *tsunami*) que se propaga en dirección sur atravesando el Océano Pacífico. Si la profundidad media del océano es de 4 km y la

www.elsolucionario.net



P10.7

densidad del agua de mar es de 1025 kg/m^3, estime la hora de llegada del tsunami en Hilo, Hawai.

P10.9 La Ecuación (10.10) es para una onda de perturbación aislada. Para un tren *periódico* de ondas superficiales de pequeña amplitud con longitud de onda λ y periodo T, la teoría no viscosa [8 a 10] predice una velocidad de propagación de las ondas de

$$c_0^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\frac{2\pi y}{\lambda}$$

donde y es el calado del agua y se ha despreciado la tensión superficial. (*a*) Determine si esta expresión se ve afectada por el número de Reynolds, el número de Froude o el número de Weber. Obtenga los valores límite de esta expresión para (*b*) $y \ll \lambda$ y (*c*) $y \gg \lambda$. ¿Para qué cociente y/λ habrá una diferencia menor del 1 por 100 entre la velocidad de la onda y el límite (*c*)?

P10.10 Si se incluye la tensión superficial Υ en el análisis del Problema P10.9, la velocidad de onda resultante es [8 a 10]

$$c_0^2 = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\Upsilon}{\rho\lambda}\right)\tanh\frac{2\pi y}{\lambda}$$

(*a*) Determine si esta expresión se ve afectada por el número de Reynolds, el número de Froude o el número de Weber. Obtenga los valores límite de esta expresión para (*b*) $y \ll \lambda$ y (*c*) $y \gg \lambda$. (*d*) Finalmente, determine la longitud de onda $\lambda_{crít}$ para un valor mínimo de c_0, suponiendo que $y \gg \lambda$.

P10.11 Un canal de sección rectangular tiene una anchura de 2 m y contiene agua con un calado de 3 m. Si la pendiente es de 0,85° y el canal está hecho de chapas onduladas, determine el caudal de un movimiento uniforme.

P10.12 (*a*) Para la película laminar de agua fluyendo sobre la pendiente pavimentada de ángulo θ de la Figura P4.36, muestre que el caudal viene dado por

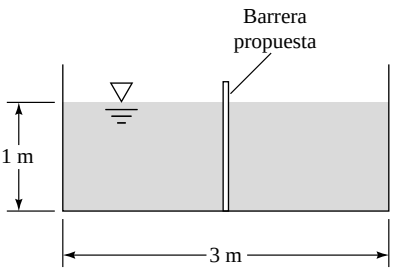
$$Q = \frac{\rho g b h^3 \operatorname{sen}\theta}{3\mu}$$

donde b es la anchura de la película y h su espesor. (*b*) Mediante una comparación (un tanto tediosa) con la Ecuación (10.13), muestre que esta expresión es compatible con un coeficiente de fricción $f = 24/\mathrm{Re}$, donde $\mathrm{Re} = V_{med}h/\nu$.

P10.13 El flujo laminar en la película del Problema P10.12 puede volverse turbulento si Re > 500. Si la pendiente es de 0,0045, ¿cuál es el espesor máximo de la película, en mm, para el cual el flujo aún es laminar?

P10.14 La fórmula de Chézy (10.18) es independiente de la densidad y viscosidad del fluido. ¿Significa esto que agua, mercurio, alcohol y aceite SAE 30 discurren con el mismo caudal por un canal abierto dado? Explíquelo

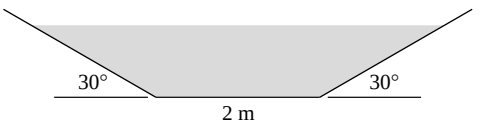
P10.15 El canal de cemento liso de la Figura P10.15 está diseñado para un caudal de 6 m^3/s y un calado normal de 1 m. Determine (*a*) la pendiente de diseño del canal y (*b*) el porcentaje de reducción del caudal si la superficie es asfáltica.



P10.15

P10.16 Para el Problema P10.15, usando cemento pulido, determine el porcentaje de reducción del caudal si el canal es dividido por el centro mediante la barrera propuesta en la Figura P10.15. ¿Cómo cambian los resultados si la superficie es de tejas de arcilla?

P10.17 El canal trapezoidal de la Figura P10.17 está hecho de ladrillos y tiene una pendiente de 1:500. Determine el caudal si el calado normal es de 80 cm.



P10.17

P10.18 Modifique el Problema P10.17 de la manera siguiente. Determine el calado normal para el cual el caudal es de 8 m^3/s.

P10.19 Modifique el Problema P10.17 de la manera siguiente. Supongamos que la superficie es tierra limpia que se erosiona si V excede 1,5 m/s. ¿Cuál es el calado máximo para el que no se produce erosión?

P10.20 Un colector de aguas pluviales circular de chapa ondulada fluye medio lleno por una pendiente de 4 ft/mi. Calcule el caudal normal si el diámetro del colector es de 8 ft.

P10.21 Una ingeniera lleva a cabo medidas precisas con un vertedero (véase la Sección 10.7) para monitorizar un canal rectangular de cemento no pulido con una pendiente de 1°. Descubre, con cierta sorpresa, que cuando el calado del agua se duplica de 2 ft 2 in a 4 ft 4 in,

www.elsolucionario.net

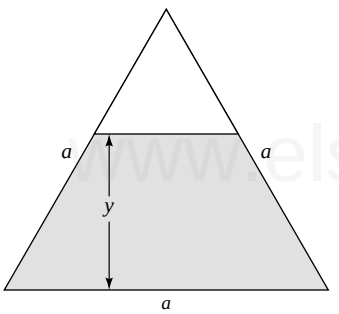
el caudal normal pasa de 200 a 500 ft^3/s. (*a*) ¿Es esto posible? (*b*) Si es así, estime la anchura del canal.

P10.22 Un acueducto trapezoidal (Figura 10.7) con $b = 5$ m y $\theta = 40°$ transporta una corriente normal de agua de 60 m^3/s con $y = 3{,}2$ m. Si la superficie es de tejas de arcilla, determine cuál es la pendiente necesaria en m/km.

P10.23 Se desea escarbar un canal de tierra limpia de sección trapezoidal con $\theta = 60°$ (véase la Figura 10.7). El caudal deseado es de 500 ft^3/s con una pendiente de 8 ft por milla. Se tiene previsto, por razones de eficiencia, que el calado del movimiento uniforme sea tal que la sección transversal sea exactamente medio hexágono. ¿Cuál es la anchura apropiada de la solera del canal?

P10.24 Un canal de acero ribeteado tiene una pendiente de 1:500 y una sección en forma de V con un ángulo de 80°. Determine el calado normal si el caudal es de 900 m^3/h.

***P10.25** El canal en forma de triángulo equilátero de la Figura P10.25 tiene una pendiente constante S_0 y un factor de Manning n. Determine $Q_{máx}$ y $V_{máx}$. Después, por analogía con la Figura 10.6*b*, represente los cocientes $Q/Q_{máx}$ y $V/V_{máx}$ en función de y/a para el rango $0 < y/a < 0{,}866$.



P10.25

P10.26 Siguiendo la idea de la Figura 10.6*b*, analice el movimiento uniforme en un canal rectangular de área constante $A = by$, pendiente constante, pero anchura b y calado y variables. Represente el caudal Q resultante, normalizado con su valor máximo $Q_{máx}$, en el rango $0{,}2 < b/y < 4{,}0$ y discuta sobre si es crucial para la eficiencia del canal que el flujo tenga un calado exactamente igual a la mitad de la anchura del canal.

P10.27 Un canal circular de cemento no pulido tiene una pendiente de 1:600 y un diámetro de 5 ft. Estime el caudal normal de agua en gal/min para el cual el esfuerzo cortante medio en la pared es de 0,15 lbf/ft^2, y compare su resultado con el máximo caudal posible para este canal.

P10.28 Muestre que para todo movimiento uniforme en un canal recto de sección prismática el esfuerzo cortante medio en la pared viene dado por

$$\tau_{med} = \rho g R_h S_0$$

Si descubre con suficiente antelación este resultado, puede utilizarlo para resolver el Problema P10.27.

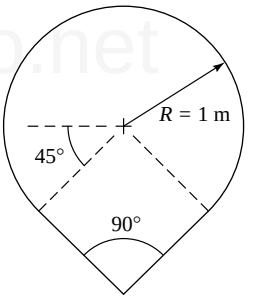
P10.29 Suponga que el canal trapezoidal de la Figura P10.17 contiene arena y sedimentos que no queremos erosionar. De acuerdo con una correlación experimental debida a A. Shields en 1936, el esfuerzo cortante medio en la pared $\tau_{crít}$ necesario para erosionar partículas de arena de diámetro d_p es aproximadamente

$$\frac{\tau_{crít}}{(\rho_a - \rho)gd_p} = 0{,}5$$

donde $\rho_a = 2400$ kg/m^3 es la densidad de la arena. Si la pendiente del canal de la Figura P10.17 es de 1:900 y $n = 0{,}014$, determine el calado máximo del agua que no erosione las partículas de 1 mm de diámetro.

P10.30 Un canal en forma de V (ángulo de 90°) hecho a partir de tejas de arcilla tiene una longitud de 1 km y una pendiente de 1:400. Cuando opera con un calado de 2 m, se cierra rápidamente la sección aguas arriba mientras se deja que el agua salga por la sección aguas abajo. Suponiendo que el flujo es casi estacionario, estime el tiempo que tardará el calado en reducirse hasta 20 cm.

P10.31 Un colector de aguas pluviales tiene la sección transversal mostrada en la Figura P10.31 y una pendiente de 1,5 m/km. Si se construye a partir de ladrillos, determine el caudal normal cuando el nivel del agua alcanza el centro del círculo.



P10.31

P10.32 Una alcantarilla de 2 m de diámetro y recubierta de tejas de arcilla opera medio llena con una pendiente de 0,25°. Calcule el caudal normal en gal/min.

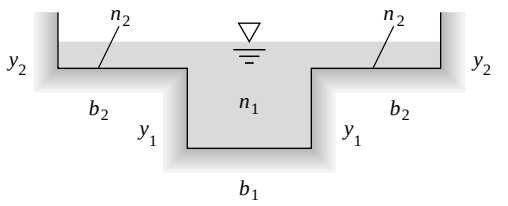
P10.33 Cinco alcantarillas como la del Problema P10.32 descargan en un único colector asfáltico, también con una pendiente de 0,25°. Si el colector también debe operar medio lleno, ¿cuál debe ser su diámetro?

P10.34 Un canal rectangular de ladrillo con $S_0 = 0{,}002$ es diseñado para llevar 230 ft^3/s de agua en condiciones de movimiento uniforme. Hay una discusión sobre si la anchura del canal debería ser de 4 u 8 ft. ¿Cuál de los dos diseños requiere menos ladrillos? ¿En qué porcentaje?

P10.35 Cuando hay inundaciones un canal natural suele consistir en un canal principal profundo más dos zonas laterales inundadas, como en la Figura P10.35. Las zonas laterales suelen ser poco profundas y muy revueltas. Si el canal tiene la misma pendiente en todas partes, ¿cómo analizaría esta situación para determinar

www.elsolucionario.net

el caudal? Suponga que $y_1 = 20$ ft, $y_2 = 5$ ft, $b_1 = 40$ ft, $b_2 = 100$ ft, $n_1 = 0{,}020$ y $n_2 = 0{,}040$, con una pendiente de 0,0002. Determine el caudal en ft³/s.



P10.35

P10.36 El río Blackstone al norte de Rhode Island fluye normalmente con un caudal de 25 m³/s y su sección se parece a la Figura P10.35, con un canal central de tierra limpia con $b_1 \approx 20$ m e $y_1 \approx 3$ m. La pendiente de la solera es aproximadamente de 2 ft/mi. Los lados están cubiertos de mucha maleza y $b_2 \approx 150$ m. Durante el huracán Carol en 1955 se alcanzó un caudal récord de 1000 m³/s. Utilice esta información para estimar el calado máximo y_2 que se dio durante el huracán.

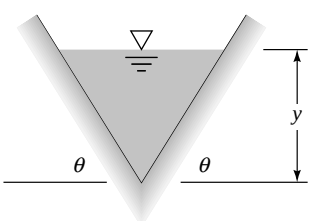
P10.37 Se pretende construir un canal triangular (véase la Figura E10.6) de chapa ondulada para transportar 8 m³/s de agua con una pendiente de 0,005. El suministro de chapas onduladas está limitado, con lo que los ingenieros quieren minimizar la superficie del canal. ¿Cuál es (*a*) el mejor ángulo θ para el canal, (*b*) el calado normal para el apartado (*a*), y (*c*) el perímetro mojado para el apartado (*b*)?

P10.38 Sea un canal rectangular con $b = 3$ m e $y = 1$ m. Si n y S_0 son los mismos, ¿cuál será el diámetro de un canal semicircular que tenga el mismo caudal? Compare ambos perímetros mojados.

P10.39 Un canal trapezoidal con $n = 0{,}022$ y $S_0 = 0{,}0003$ tiene la forma de medio hexágono con el fin de maximizar su eficiencia. ¿Cómo de largos deben ser los lados del hexágono para que el canal transporte 225 ft³/s de agua? ¿Cuál será el caudal de un canal semicircular con el mismo área transversal y los mismos valores de n y S_0?

P10.40 Utilizando la geometría de la Figura 10.6*a*, muestre que el canal abierto circular más eficiente (radio hidráulico máximo para un área dada) es el de sección semicircular.

P10.41 Determine el valor más eficiente de θ para el canal en forma de V de la Figura P10.41.



P10.41

P10.42 Suponga que los ángulos laterales del canal trapezoidal del Problema P10.39 son reducidos hasta 15° con el fin de evitar el corrimiento de tierra. Si la anchura de la solera es de 8 ft, (*a*) determine el calado normal y (*b*) compare el perímetro mojado resultante con la solución $P = 24{,}1$ ft del Problema P10.39. (No revele este resultado a sus amigos que estén aún trabajando en el Problema P10.39.)

P10.43 ¿Cuáles son las dimensiones más eficientes para un canal rectangular de acero ribeteado que lleve un caudal de 4,8 m³/s y tenga una pendiente de 1:900?

P10.44 ¿Cuáles son las dimensiones más eficientes para un canal semihexagonal de hierro fundido que lleve un caudal de 15.000 gal/min y tenga una pendiente de 0,16°?

P10.45 ¿Cuál es el calado más eficiente en un canal trapezoidal asfáltico, con ángulos laterales de 45°, que lleve un caudal de 3 m³/s y tenga una pendiente de 0,0008?

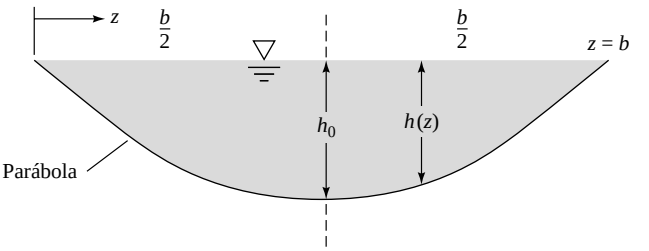
P10.46 Parece ser que un canal en forma parabólica, como el de la Figura P10.46, reduce la erosión. El perímetro y área de una sección transversal parabólica vienen dados por las siguientes expresiones [7, pág. 36]:

$$A = \frac{2}{3}bh_0;\quad P = \frac{b}{2}\left[\sqrt{1+\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\ln\left(\zeta + \sqrt{1+\zeta^2}\right)\right]$$

$$\text{donde } \zeta = \frac{4h_0}{b}$$

Si el movimiento es uniforme, determine la relación h_0/b más eficiente para el canal (mínimo perímetro mojado para un área dada).

P10.47 Transforme la Figura 10.8*b* en una representación de q frente a y con E constante. ¿Se da el valor máximo de q para el calado crítico?



P10.46

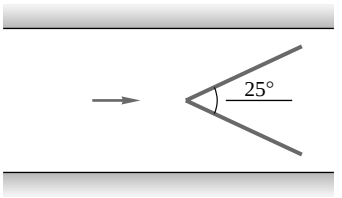
P10.48 Un río ancho de tierra limpia tiene un caudal de $q = 150$ ft³/(s · ft). ¿Cuánto vale lel calado crítico? Si el calado actual es de 12 ft, ¿cuánto vale el número de Froude del río? Calcule la pendiente crítica usando (*a*) la fórmula de Manning y (*b*) el diagrama de Moody.

P10.49 Determine el calado crítico del canal enladrillado del Problema P10.34 para las dos anchuras de 4 y 8 ft. ¿Van las corrientes normales en régimen lento o rápido?

P10.50 Un alfiler que pincha la superficie libre de una corriente en un canal rectangular genera una onda en forma de cuña con un semiángulo de 25°, tal como muestra la Figura P10.50. Si la superficie de acero del canal está cubierta por una capa de pintura y el calado es de

www.elsolucionario.net

35 cm, determine (*a*) el número de Froude, (*b*) el calado crítico y (*c*) la pendiente crítica para un movimiento uniforme.



P10.50

P10.51 Un canal circular asfáltico de 75 cm de diámetro opera medio lleno a una velocidad media de 3,4 m/s. Calcule (*a*) el caudal, (*b*) el número de Froude y (*c*) la pendiente crítica.

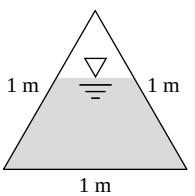
P10.52 Sea un canal semihexagonal con una solera de anchura W que va lleno de agua. El caudal es de 12 m^3/s. Determine W si el número de Froude debe ser igual a 0,60.

P10.53 Determine el calado y_2 de la corriente del río del Problema P10.48 que tiene la misma energía específica que el calado $y_1 = 12$ ft dado. Estos son calados conjutados. ¿Cuánto vale Fr_2?

P10.54 Un canal en forma de V hecho de tejas de arcilla tiene un ángulo de 70° y transporta 8,5 m^3/s de agua. Calcule (*a*) el calado crítico, (*b*) la velocidad crítica y (*c*) la pendiente crítica si el movimiento es uniforme.

P10.55 Sea un canal trapezoidal, como el de la Figura 10.7, con $b = 1$ m y $\theta = 50°$. El calado del agua es de 2 m y el caudal vale 32 m^3/s. Si introduce su dedo en la corriente de agua, como en la Figura P10.50, ¿qué semiángulo de onda aparecerá?

P10.56 La Figura P10.56 muestra un conducto triangular de acero ribeteado parcialmente lleno. Si el calado crítico es de 50 cm, calcule (*a*) el caudal crítico y (*b*) la pendiente crítica.

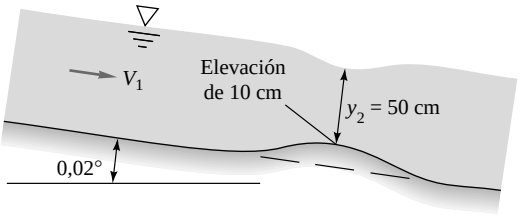


P10.56

P10.57 Para el conducto triangular del Problema P10.56, si el caudal crítico es de 1,0 m^3/s, calcule (*a*) el calado crítico y (*b*) la pendiente crítica.

P10.58 Un canal circular de chapa ondulada está medio lleno de agua que circula uniformemente para una pendiente de 0,0118. El esfuerzo medio de cortadura en las paredes del canal es de 29 Pa. Calcule (*a*) el diámetro del canal, (*b*) el número de Froude y (*c*) el caudal.

P10.59 El movimiento uniforme de agua en un canal ancho hecho de ladrillos y de pendiente 0,02° fluye sobre una elevación de 10 cm, como muestra la Figura P10.59. Aparece una ligera depresión de la superficie del agua. Si el calado mínimo del agua sobre la elevación es de 50 cm, calcule (*a*) la velocidad sobre la elevación y (*b*) el caudal por unidad de anchura.



P10.59

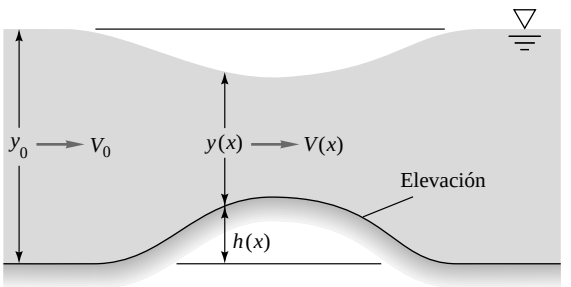
P10.60 Modifique el Problema P10.59 de la manera siguiente. Suponiendo nuevamente que la corriente incidente (V_1, y_1) es uniforme y de régimen lento, determine (*a*) el caudal y (*b*) el valor de y_2 para el cual el número de Froude Fr_2 en la cresta sobre la elevación es exactamente igual a 0,7.

P10.61 Modifique el Problema P10.59 de la manera siguiente. Suponiendo nuevamente que la corriente incidente (V_1, y_1) es uniforme y de régimen lento, determine (*a*) el caudal y (*b*) el valor de y_2 para el cual el movimiento sobre la cresta de la elevación es crítico ($Fr_2 = 1{,}0$).

P10.62 Considere el flujo sobre una elevación en un canal muy ancho, como en la Figura P10.62. Se puede estimar la variación en el calado del agua suponiendo que el flujo es no viscoso. Utilice las ecuaciones de la continuidad y de Bernoulli para mostrar que

$$\frac{dy}{dx} = \Phi\frac{dh/dx}{1\Phi V^2/(gy)}$$

¿Es realista la depresión de la superficie del agua en la Figura P10.62? Explique bajo qué condiciones puede la superficie ascender por encima de su valor y_0 aguas arriba.



P10.62

P10.63 Sean $V_0 = 1$ m/s e $y_0 = 1$ m en la Figura P10.62. Si la altura máxima de la elevación es de 15 cm, determine (*a*) el número de Froude sobre la cresta de la elevación y (*b*) la máxima depresión experimentada por la superficie del agua.

P10.64 Sean $V_0 = 1$ m/s e $y_0 = 1$ m en la Figura P10.62. Si el movimiento sobre la cresta de la elevación es crítico (Fr = 1,0), determine la altura $h_{máx}$ de la elevación.

www.elsolucionario.net

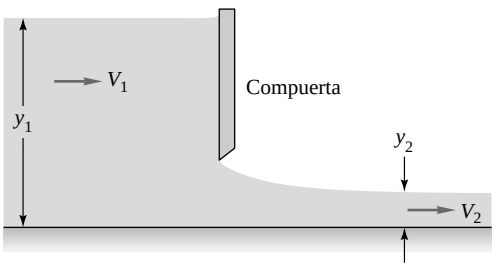
P10.65 Programe y resuelva la ecuación diferencial para el «flujo no viscoso sobre una elevación» del Problema P10.62 con las condiciones a la entrada $V_0 = 1$ m/s e $y_0 = 1$ m. Considere que la forma de la elevación viene dada por $h = 0{,}5h_{máx}[1 - \cos(2\Theta x/L)]$, que simula la forma de la Figura P10.62. Con $L = 3$ m, genere una solución numérica para $y(x)$ en la región de la elevación $0 < x < L$. Si sólo tiene tiempo para resolver un caso, tome $h_{máx} = 15$ cm (Problema P10.63), para la cual el número de Froude máximo vale 0,425. Si dispone de más tiempo, resulta instructivo examinar una familia completa de soluciones para $h_{máx}$ comprendida entre 1 cm y 35 cm (que es la solución al Problema P10.64).

P10.66 Sean $V_0 = 6$ m/s e $y_0 = 1$ m en la Figura P10.62. Si la altura máxima de la elevación es de 35 cm, calcule (*a*) el número de Froude sobre la cresta de la elevación y (*b*) la elevación máxima de la superficie del agua.

P10.67 Sean $V_0 = 5$ m/s e $y_0 = 1$ m en la Figura P10.62. Si el flujo sobre la elevación es crítico (Fr = 1,0), determine la altura $h_{máx}$ de la elevación.

P10.68 Modifique el Problema P10.65 para que la corriente incidente vaya en régimen rápido con $V_0 = 6$ m/s e $y_0 = 1$ m. Si sólo dispone de tiempo para resolver un caso, tome $h_{máx} = 35$ cm (Problema P10.66), para el cual el número de Froude máximo vale 1,47. Si dispone de más tiempo, resulta instructivo examinar una familia completa de soluciones para 1 cm < $h_{máx}$ < 52 cm (que es la solución del Problema P10.67).

***P10.69** La Figura P10.69 muestra el desagüe bajo compuerta en un canal de gran anchura *b*. Suponiendo que el flujo es estacionario y no viscoso con energía cinética despreciable aguas arriba, deduzca una fórmula para el caudal adimensional $Q^2/(y_1^3 b^2 g)$ en función del cociente y_2/y_1. Muestre mediante diferenciación que el caudal máximo se da para $y_2 = 2y_1/3$.

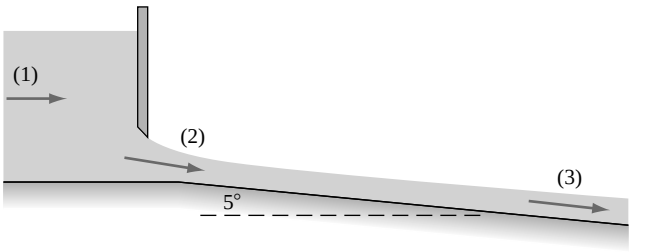


P10.69

P10.70 Sean $V_1 = 0{,}75$ m/s y $V_2 = 4{,}0$ m/s en la Figura P10.69. Calcule (*a*) el caudal por unidad de anchura, (*b*) y_2 y (*c*) Fr_2.

P10.71 Sean $y_1 = 95$ cm e $y_2 = 50$ cm en la Figura P10.69. Determine el caudal por unidad de anchura si la energía cinética aguas arriba es (*a*) despreciada y (*b*) tenida en cuenta.

***P10.72** Una corriente de agua se aproxima a la compuerta de la Figura P10.72 a $V_1 = 0{,}2$ m/s y con $y_1 = 1$ m. Teniendo en cuenta la energía cinética de la corriente incidente, calcule a la salida, sección 2, (*a*) el calado, (*b*) la velocidad y (*c*) el número de Froude.



P10.72

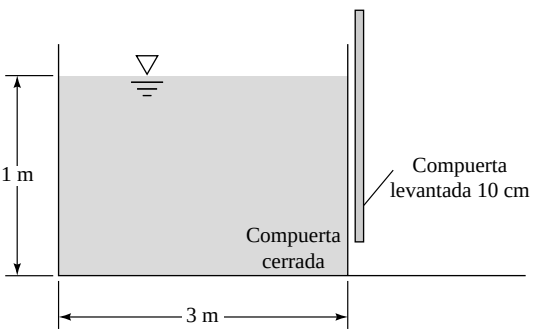
P10.73 Suponga en la Figura P10.69 que $y_1 = 1{,}4$ m y que la compuerta deja una ranura de 15 cm bajo ella. Determine el caudal por unidad de anchura resultante y el calado aguas abajo.

P10.74 Para la Figura P10.69, muestre que para un flujo no viscoso la velocidad aguas arriba puede relacionarse con el nivel del agua mediante

$$V_1 = \sqrt{\frac{2g(y_1 \Phi y_2)}{K^2 \Phi 1}}$$

donde $K = y_1/y_2$.

P10.75 Un depósito de agua de 1 m de profundidad, 3 m de largo y 4 m de ancho (en el sentido perpendicular al papel) tiene una compuerta cerrada en su pared derecha, como muestra la Figura P10.75. En $t = 0$ se abre la compuerta hasta dejar una ranura de 10 cm. Suponiendo aplicable la teoría casi estacionaria para desagües bajo compuertas, estime el tiempo requerido por el nivel de agua en bajar hasta 50 cm. Suponga que la descarga es libre.



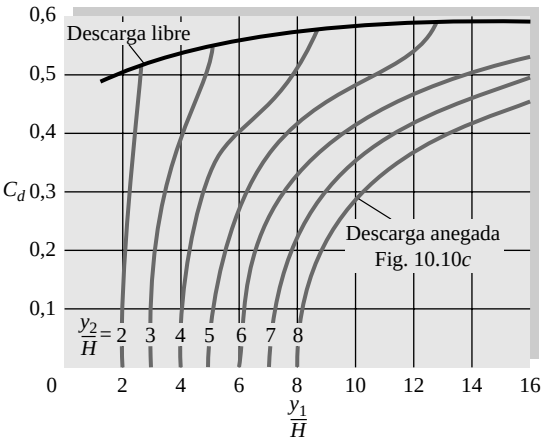
P10.75

P10.76 Estime para el Problema P10.75 la altura de la ranura que haría que el nivel del agua descendiera desde 1 m hasta 30 cm en exactamente 40 segundos. Suponga que la descarga es libre.

***P10.77** La Ecuación (10.41) para el coeficiente de descarga es para una descarga libre (casi no viscosa). Si la compuerta está *anegada*, como en la Figura 10.10*c*, habrá disipación y C_d disminuye bruscamente. La Figura P10.77 muestra datos tomados de la Referencia 2 sobre

www.elsolucionario.net

el desagüe bajo compuertas anegadas. Utilice este gráfico para repetir el Problema P10.73 y represente el caudal estimado frente a y_2 para el rango $0 < y_2 < 110$ cm.



P10.77 *(De la Ref. 2, pág. 509.)*

P10.78 Repita el Problema P10.75 considerando que la compuerta está anegada e $y_2 = 40$ cm.

P10.79 Muestre que el número de Froude aguas abajo de un resalto hidráulico viene dado por

$$\mathrm{Fr}_2 = 8^{1/2}\mathrm{Fr}_1/[(1 + 8\mathrm{Fr}_1^2)^{1/2} - 1]^{3/3}$$

¿Sigue siendo válida esta fórmula si intercambiamos los subíndices 1 y 2? ¿Por qué?

P10.80 En un canal ancho y horizontal fluye agua con un calado de 30 cm, que se encuentra con un resalto hidráulico con una disipación de energía del 71 por 100. Determine (*a*) el calado aguas abajo y (*b*) el caudal por unidad de anchura.

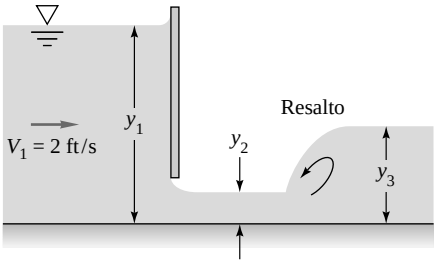
P10.81 En un canal ancho fluye agua a $q = 25$ ft^3/(s · ft) y con $y_1 = 1$ ft, que se encuentra con un resalto hidráulico. Calcule y_2, V_2, Fr_2, h_f, el porcentaje de disipación y la potencia disipada por unidad de anchura. ¿Cuánto vale el calado crítico?

P10.82 Aguas abajo de un resalto hidráulico la corriente tiene un calado de 4 ft y un número de Froude de 0,5. Calcule (*a*) y_1, (*b*) V_1, (*c*) Fr_1, (*d*) el porcentaje de disipación y (*e*) y_c.

P10.83 El flujo en un canal ancho experimenta un resalto hidráulico que lo lleva desde 40 a 140 cm de calado. Calcule (*a*) V_1, (*b*) V_2, (*c*) el calado crítico, en cm, y (*d*) el porcentaje de disipación.

***P10.84** Considere el desagüe bajo compuerta de la Figura P10.84. Si $y_1 = 10$ ft y se desprecian todas las pérdidas salvo la disipación en el resalto, calcule y_2 e y_3 y el porcentaje de disipación, y represente a escala el flujo, incluyendo la LNE. El canal es horizontal y ancho.

P10.85 La velocidad de salida tras la compuerta del Problema P10.72 es de 4,33 m/s. Si justo aguas abajo de la sección 2 hay un resalto hidráulico, determine (*a*) la velocidad, (*b*) el calado, (*c*) el número de Froude aguas abajo del resalto y (*d*) el porcentaje de disipación. Desprecie el efecto de la no horizontalidad de la solera (véase el Problema P10.91).



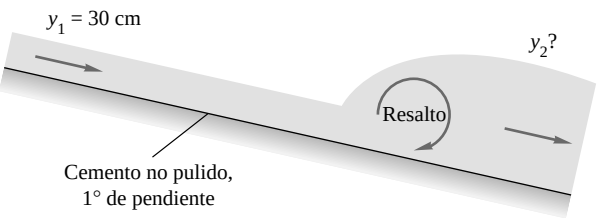
P10.84

P10.86 Considere una ola formada por un resalto hidráulico que se propaga aguas arriba en un fluido en reposo, como en la Figura 10.4*a*. Suponga que el agua en reposo tiene un calado de 2 m y que detrás de la ola aumenta hasta 3 m. Calcule (*a*) la velocidad de propagación de la ola y (*b*) la velocidad inducida en el agua.

P10.87 Cuando la marea del océano se adentra en un estuario en dirección contraria al río que trata de desembocar, como en el río Severn en Inglaterra, puede aparecer una ola de marea. Suponga que la ola de marea se propaga a 13 mi/h aguas arriba del río y que eleva el calado del río de 7 ft a 10 ft. Estime la velocidad del río en nudos.

P10.88 Para la configuración de la Figura P10.84, suponga que en la sección 3 el calado es de 2 m y el número de Froude vale 0,25. Calcule (*a*) el caudal por unidad de anchura, (*b*) y_c, (*c*) y_1, (*d*) el porcentaje de disipación en el resalto y (*e*) la altura H de apertura de la compuerta.

P10.89 Un movimiento uniforme de agua de 30 cm de calado fluye sobre una pendiente de 1° de cemento no pulido cuando se encuentra con un resalto hidráulico, como muestra la Figura P10.89. Si el canal es muy ancho, calcule el calado y_2 aguas abajo del resalto.



P10.89

P10.90 Modifique el Problema P10.89 de la manera siguiente. Suponga que $y_2 = 1{,}5$ m e $y_1 = 30$ cm, pero que la pendiente del canal no es igual a 1°. Determine cuál es la pendiente apropiada para este caso.

***P10.91** No cabe duda de que ha utilizado la fórmula (10.43) para un resalto horizontal para resolver los Problemas P10.89 y P10.90, lo que es razonable dado que la pendiente es pequeña. Sin embargo, Chow [2, pág. 425] matiza que la altura de los resaltos hidráulicos es mayor en canales con pendiente debido al «peso del fluido en el resalto». Muestre que esto es cierto considerando un volumen de control que encierre a un resalto hidráulico en pendiente. La gráfica para resaltos en

www.elsolucionario.net

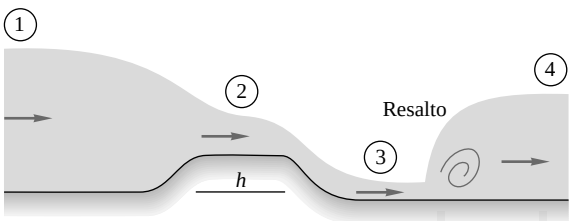
pendiente en la Figura 15-20 de Chow puede aproximarse por la siguiente correlación:

$$\frac{2y_2}{y_1} \Xi [(1 + 8\ \mathrm{Fr}_1^2)^{1/2}\ \Phi 1] e^{3,5S_0}$$

donde $0 < S_0 < 0,3$ son las pendientes de canales para las cuales se dispone de datos. Utilice esta correlación para modificar la solución del Problema P10.89. Si dispone de tiempo, confeccione un gráfico de y_2/y_1 (A 20) frente a Fr_1 (A 15) para varios valores de S_0 (A 0,3).

P10.92 Al final de un aliviadero de 80 ft de ancho se forma un resalto hidráulico con un calado de 1 ft aguas arriba y 10 ft aguas abajo. Determine (*a*) el caudal de agua y (*b*) la potencia disipada.

P10.93 La Figura P10.93 muestra una corriente de agua en un canal horizontal que se acelera gradualmente sobre una elevación y luego experimenta un resalto hidráulico. Si $y_1 = 1$ m e $y_3 = 40$ cm, calcule (*a*) V_1, (*b*) V_3, (*c*) y_4 y (*d*) la altura h de la elevación.

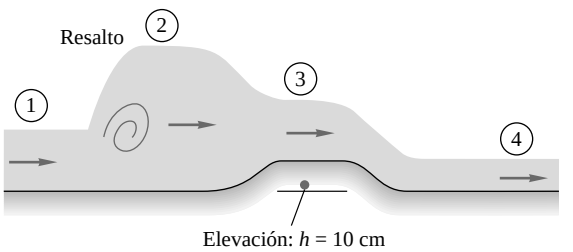


P10.93

www.elsolucionario.net

P10.94 Para la configuración de la Figura P10.93, considere los siguientes datos ligeramente distintos. La velocidad aguas arriba es $V_1 = 1,5$ m/s y la altura h de la elevación es igual a 27 cm. Determine (*a*) y_1, (*b*) y_2, (*c*) y_3 y (*d*) y_4.

P10.95 Una elevación de 10 cm de altura en un canal horizontal ancho crea un resalto hidráulico justo aguas arriba, y da lugar a la constelación de la Figura P10.95. Despreciando todas las pérdidas salvo en el resalto, calcule, para el caso de $y_3 = 30$ cm, (*a*) V_4, (*b*) y_4, (*c*) V_1 y (*d*) y_1.



P10.95

P10.96 Muestre que los números de Froude a ambos lados de un resalto hidráulico están relacionados entre sí a través de la sencilla relación $\mathrm{Fr}_2 = \mathrm{Fr}_1(y_1/y_2)^{3/2}$.

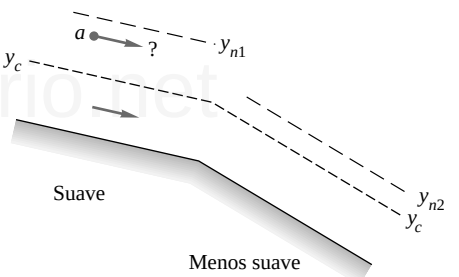
P10.97 Un canal rectangular de 4 m de anchura y hecho de ladrillos tiene un caudal de 8,0 m^3/s y una pendiente de 0,1°. ¿Es ésta una pendiente suave, crítica o fuerte? ¿Qué tipo de solución gradualmente variada aparece si el calado local del agua es de (*a*) 1 m, (*b*) 1,5 m y (*c*) 2 m?

P10.98 Un canal ancho de tierra con guijarros tiene un caudal de 10 m^3/s por unidad de anchura y una pendiente de 0,75°. ¿Es ésta una pendiente suave, crítica o fuerte? ¿Qué tipo de solución gradualmente variada aparece si el calado local del agua es de (*a*) 1 m, (*b*) 2 m y (*c*) 3 m?

P10.99 Un canal en forma de V (con ángulo de 60°) recubierto de tejas de arcilla tiene un caudal de 1,98 m^3/s y una pendiente de 0,33°. ¿Es ésta una pendiente suave, crítica o fuerte? ¿Qué tipo de solución gradualmente variada aparece si el calado local del agua es de (*a*) 1 m, (*b*) 2 m y (*c*) 3 m?

P10.100 Si la fricción con la solera es tenida en cuenta en el desagüe bajo compuerta del Problema P10.84, los calados (y_1, y_2, y_3) variarán con x. Esquematice el tipo de solución gradualmente variada que aparece en cada una de las regiones (1, 2, 3) y resalte las regiones de movimiento rápidamente variado.

P10.101 Considere la variación gradual del flujo a partir del punto *a* de la Figura P10.101 desde la pendiente suave S_{01} a la pendiente algo menos suave S_{02} aguas abajo. Esboce la forma esperada de la solución $y(x)$ e indique el tipo de solución en cada tramo.



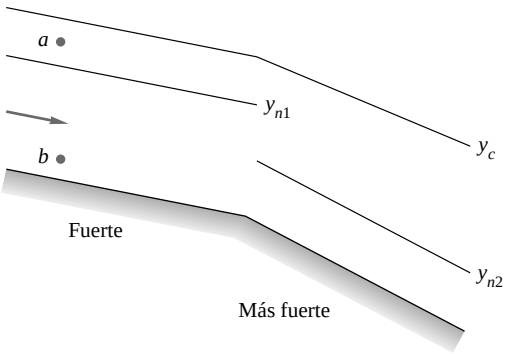
P10.101

P10.102 El flujo en el canal ancho mostrado en la Figura P10.102 varía desde una pendiente fuerte a una pendiente más fuerte aún. Comenzando en los puntos *a* y *b*, esboce la forma esperada de las superficies libres del movimiento gradualmente variado e indique el tipo de solución en cada tramo.

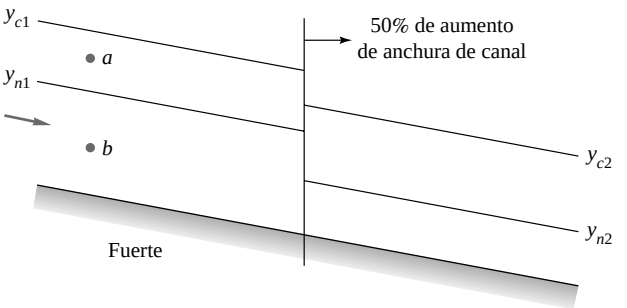
P10.103 Un canal circular de acero con una capa de pintura tiene un radio de 50 cm y opera medio lleno con un caudal de 1,2 m^3/s y una pendiente de 5 m/km. Determine (*a*) si la pendiente es suave o fuerte y (*b*) qué tipo de solución gradualmente variada aparece en dicho punto. (*c*) Utilice el método aproximado de la Ecuación (10.52), y un incremento aislado de calado $\Delta y = 5$ cm, para calcular el valor estimado de Δx para este nuevo valor de y.

P10.104 El flujo en un canal rectangular de la Figura P10.104 se expande a una sección transversal un 50 por 100 más ancha. Comenzando en los puntos *a* y *b*, esboce la forma esperada de las superficies libres del movimiento gradualmente variado e indique el tipo de solución en cada tramo.

www.elsolucionario.net



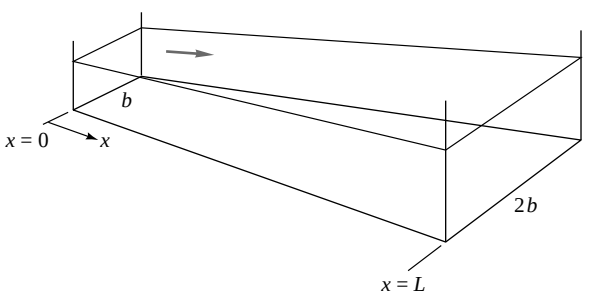
P10.102



P10.104

P10.105 La solución sin fricción del Problema P10.84 es y_2 = 0,82 ft, que denotaremos con $x = 0$ justo aguas abajo de la compuerta. Si el canal es horizontal con n = 0,018 y no hay resaltos hidráulicos, calcule mediante la teoría del movimiento gradualmente variado la distancia aguas abajo donde y = 2,0 ft.

P10.106 Un canal rectangular con n = 0,018 y una pendiente constante de 0,0025 incrementa linealmente su anchura desde b hasta 2b en una distancia L, como se ve en la Figura P10.106. (*a*) Determine la variación $y(x)$ a lo largo del canal si b = 4 m, L = 250 m, el calado inicial es $y(0)$ = 1,05 m y el caudal es de 7 m^3/s. (*b*) Una vez que su programa de ordenador esté funcionando, determine el calado inicial $y(0)$ para el cual el movimiento a la salida es crítico.

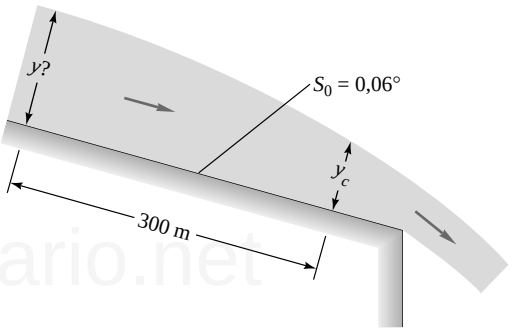


P10.106

P10.107 El flujo en un canal ancho de tierra limpia asciende por una pendiente adversa con S_0 = –0,002. Si el caudal es q = 4,5 m^3/(s · m), utilice la teoría del movimiento gradualmente variado para calcular la distancia en la que el calado disminuye de 3,0 a 2,0 m.

P10.108 Complemente el Problema P10.104 con un ejemplo numérico. Sea un canal rectangular con una anchura b_1 = 10 m en $0 < x < 100$ m y b_2 = 15 m en $100 < x <$ 250 m. El caudal es de 27 m^3/s y n = 0,012. Calcule el calado del agua en x = 250 m para un calado inicial $y(0)$ igual a (*a*) 75 cm y (*b*) 5 cm. Compare sus resultados con la discusión del Problema P10.104. Tome S_0 = 0,005.

P10.109 La Figura P10.109 muestra una cascada, donde la corriente de un canal se va acelerando a lo largo de una pendiente descendente y luego cae libremente a partir del borde abrupto. La corriente alcanza condiciones críticas justo antes del borde, tal como se indica en la figura. Entre y_c y el borde el movimiento es rápidamente variado y no satisface la teoría del movimiento gradualmente variado. Suponga que el caudal es q = 1,3 m^3/(s · m) y que la superficie es de cemento no pulido. Utilice la Ecuación (10.51) para estimar el calado del agua 300 m aguas arriba del borde.



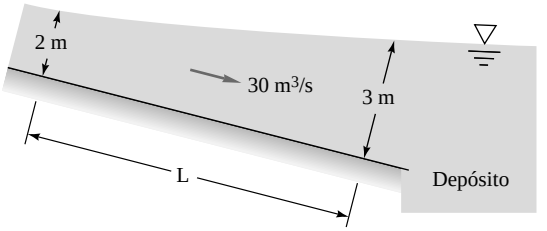
P10.109

P10.110 En el Problema P10.65 supusimos que el flujo sobre la elevación era no viscoso, para el cual V_2 = 1,21 m/s e y_2 = 0,826 m en la cresta cuando $h_{máx}$ = 15 cm, V_1 = 1 m/s e y_1 = 1 m. Sin embargo, si la elevación es larga y rugosa, la fricción puede ser importante. Repita el Problema P10.65 con la misma forma de la elevación, $h = 0{,}5h_{máx}[1 - \cos(2\Theta x/L)]$, para determinar las condiciones (*a*) en la cresta y (*b*) al final de la elevación, $x = L$. Tome $h_{máx}$ = 15 cm y L = 100 m y suponga que la superficie es de tierra limpia.

P10.111 Resuelva el Problema P10.105 (una variación horizontal a lo largo de una solución del tipo H-3) mediante el método aproximado de la Ecuación (10.52), empezando en (x, y) = (0, 0,82 ft) y utilizando un incremento de calado de Δy = 0,2 ft. (El incremento final deberá ser Δy = 0,18 ft para llegar exactamente hasta y = 2,0 ft.)

P10.112 El canal de tierra limpia de la Figura P10.112 es 6 m de ancho y tiene una pendiente de 0,3°. Por el canal fluye agua a 30 m^3/s que termina en un depósito, siendo el calado justo antes del mismo de 3 m. Suponiendo que el movimiento es gradualmente variado, ¿cuál es la distancia L hasta un punto en el canal donde y = 2 m? ¿Qué tipo de solución presenta la superficie del agua?

www.elsolucionario.net

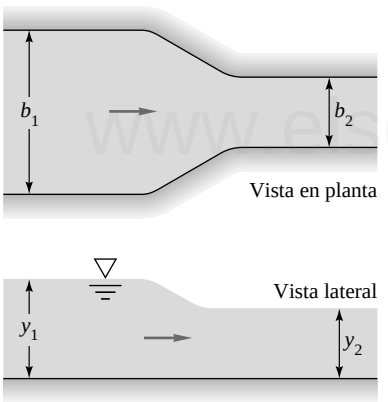


P10.112

P10.113 La Figura P10.113 muestra una contracción de la sección de un canal que a menudo recibe el nombre de *canal de venturi* [23, pág. 167] porque la medición de y_1 e y_2 permite conocer el caudal. Muestre que si se desprecian las pérdidas y la corriente es unidimensional y en régimen lento, el caudal viene dado por

$$Q = \left\{ \frac{2g(y_1 - y_2)}{1/(b_2^2 y_2^2) - 1/(b_1^2 y_1^2)} \right\}^{1/2}$$

Considere el caso especial de $b_1 = 3$ m, $b_2 = 2$ m e $y_1 = 1{,}9$ m. (*a*) Determine el caudal si $y_2 = 1{,}5$ m. (*b*) Determine también el calado y_2 para la cual el movimiento en la garganta es crítico.



P10.113

P10.114 Investigue la posibilidad de *bloqueo* en el canal de venturi de la Figura P10.113. Sean $b_1 = 4$ ft, $b_2 = 3$ ft e $y_1 = 2$ ft. Calcule los valores de y_2 y V_1 para un caudal de (*a*) 30 ft³/s y (*b*) 35 ft³/s. Explique su disgusto.

P10.115 La teoría del movimiento gradualmente variado, Ecuación (10.49), desprecia los efectos de la variación de la anchura, db/dx, suponiendo que son pequeños. Pero para la contracción corta y pronunciada del canal de venturi de la Figura P10.113 no son pequeños. Muestre que para una sección rectangular con $b = b(x)$, la Ecuación (10.49) debería modificarse de la manera siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S + [V^2/(gb)](db/dx)}{1 - \mathrm{Fr}^2}$$

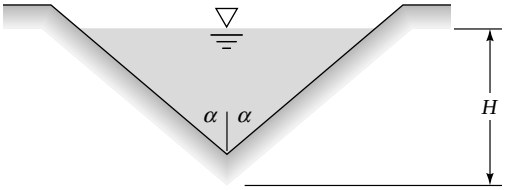
Busque un criterio que permita reducir esta relación a la Ecuación (10.49).

P10.116 Investigue la posibilidad de efectos de fricción en el canal de venturi del apartado (*a*) del Problema P10.113, para el cual la solución no viscosa es $Q = 9{,}88$ m³/s. Suponga que la contracción tiene 3 m de longitud y que las medidas de y_1 e y_2 se realizan 3 m aguas arriba y 3 m aguas abajo de la contracción, respectivamente. Utilice la teoría del movimiento gradualmente variado modificada del Problema P10.115 para estimar el caudal. Tome $n = 0{,}018$.

P10.117 Un vertedero en un canal horizontal tiene 5 m de grosor y 80 cm de altura. El calado aguas arriba es de 1,5 m. Determine el caudal para (*a*) un vertedero de pared delgada y (*b*) un vertedero de pared gruesa con borde delantero redondeado.

***P10.118** Utilizando un análisis tipo Bernoulli similar al de la Figura 10.16*a*, muestre que el caudal teórico para el vertedero en V de la Figura P10.118 viene dado por

$$Q = 0{,}7542 g^{1/2} \operatorname{tg}\alpha \, H^{5/2}$$



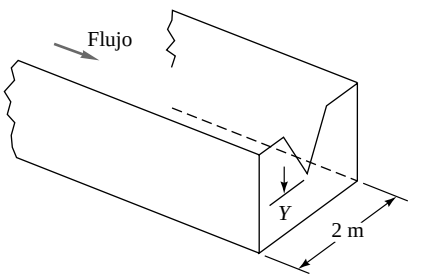
P10.118

P10.119 Los datos proporcionados por A. T. Lenz para agua a 20 °C (recogidos en la Referencia 23) muestran un incremento significativo del coeficiente de descarga para vertederos en V (Figura P10.118) con alturas bajas. Para $\alpha = 20°$, algunos de los valores medidos son:

H, ft	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
C_d	0,499	0,470	0,461	0,456	0,452

Determine si estos valores pueden correlacionarse con los números de Reynolds y de Weber mediante la Ecuación (10.61). Si no es posible, sugiera otra correlación.

P10.120 La Figura P10.120 muestra un canal rectangular con un vertedero en V en su interior. La intención es medir el caudal de 2,0 a 6,0 m³/s mediante un limnímetro de punta y gancho aguas arriba para medir calados del



P10.120

www.elsolucionario.net

agua entre 2,0 y 2,75 m. ¿Cuáles son los valores más apropiados para la altura Y y el semiángulo α del vertedero?

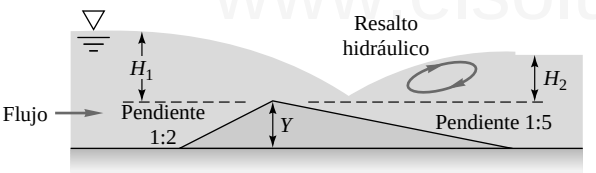
P10.121 Se desea medir el caudal de agua en un canal rectangular mediante un vertedero rectangular con contracciones laterales, como en la Tabla 10.2*b*, con $L = 6$ ft e $Y = 1$ ft. Se desean medir caudales entre 1500 y 3000 gal/min con sólo un aumento de 6 in en el calado aguas arriba. ¿Cuál es la anchura b más apropiada para el vertedero?

P10.122 En 1952 E. S. Crump desarrolló el vertedero con forma triangular mostrado en la Figura P10.122 [23, Cap. 4]. La pendiente frontal es de 1:2 para evitar la sedimentación, y la pendiente posterior de 1:5 para mantener un flujo estable aguas abajo. La belleza del diseño radica en que tiene una única correlación para el coeficiente de descarga, que es válida hasta condiciones próximas al anegado, H_2/H_1 A 0,75:

$$Q = C_d b g^{1/2} \left[H_1 + \frac{V_1^2}{2g} + k_h\right]^{3/2}$$

donde $C_d \Xi 0{,}63$ y $k_h \Xi 0{,}3$ mm

El término k_h es un factor de pérdida por altura baja. Suponga que el vertedero tiene 3 m de anchura y una altura máxima de $Y = 50$ cm. Si el calado del agua aguas arriba es de 65 cm, determine el caudal en gal/min.



P10.122

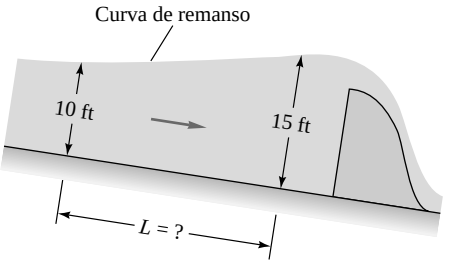
***P10.123** La calibración del vertedero de Crump del Problema P10.122 es para un flujo *modular*, que es cuando el caudal es independiente de las condiciones del flujo aguas abajo. Cuando el vertedero está anegado, el caudal se ve multiplicado por el siguiente factor reductor:

$$Q = Q_{\text{mod}} f$$

donde: $$f \Xi 1{,}035 - 0{,}817 \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{4}$$

para 0,70 A H_2^*/H_1^* A 0,93, donde H^* es una notación abreviada para $H_1 + V_1^2/(2g) - k_h$. El vertedero es entonces un *medidor doble* que mide tanto H_1 como H_2. Si los calados medios aguas arriba y aguas abajo son 2,0 y 1,9 m, respectivamente, estime el caudal en gal/min. Comente las posibles incertidumbres de su estimación.

P10.124 Fluye agua a 600 ft³/s por un canal rectangular de 22 ft de anchura con $n \Xi 0{,}024$ y una pendiente de 0,1°. Una presa incrementa el calado a 15 ft, como en la Figura P10.124. Haciendo uso de la teoría del movimiento gradualmente variado, determine la distancia L aguas arriba para la cual el calado del agua es de 10 ft. ¿Qué tipo de solución tenemos? ¿Cuál debería ser el calado del agua muy lejos aguas arriba?



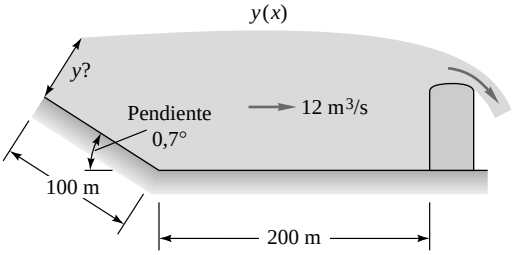
P10.124

P10.125 La presa Tupperware en el río Blackstone tiene una altura de 12 ft, una anchura de 100 ft, es de pared delgada y crea una curva de remanso aguas arriba similar a la de la Figura P10.124. Suponga que el río es un canal rectangular de tierra suelta de 100 ft de ancho y con un caudal de 800 ft³/s. Determine el calado del agua 2 mi aguas arriba de la presa si $S_0 = 0{,}001$.

P10.126 Suponga que el canal rectangular de la Figura P10.120 está hecho de acero ribeteado y transporta un caudal de 8 m³/s a lo largo de una pendiente de 0,15°. Si el vertedero en V tiene $\alpha = 30°$ e $Y = 50$ cm, calcule, mediante la teoría del movimiento gradualmente variado, el calado del agua 100 m aguas arriba.

P10.127 Un canal horizontal de tierra con guijarros de 2 m de anchura contiene un vertedero de Crump completo (Figura P10.122) de 1 m de altura. Si el vertedero no está ahogado, calcule, mediante la teoría del movimiento gradualmente variado, el caudal para el cual el calado del agua 100 m aguas arriba es igual a 2 m.

P10.128 Un canal rectangular de 4 m de anchura está bloqueado por un vertedero de pared gruesa de 2 m de altura, como en la Figura P10.128. El canal es horizontal hasta 200 m aguas arriba, y a partir de ahí tiene una pendiente de 0,7°, tal como se muestra en la figura. El caudal es de 12 m³/s y $n = 0{,}03$. Calcule el calado del agua y 300 m aguas arriba utilizando la teoría del movimiento gradualmente variado.



P10.128

www.elsolucionario.net

Problemas conceptuales

C10.1 Los problemas con superficie libre están gobernados por la gravedad. ¿Por qué hay tantas fórmulas en este capítulo que contienen la *raíz cuadrada* de la aceleración de la gravedad?

C10.2 Explique por qué el desagüe bajo compuerta, Figura 10.10, es o no es análogo al flujo compresible de un gas en una tobera convergente-divergente, Figura 9.12.

C10.3 Para un movimiento uniforme en un canal abierto, ¿cuál es el balance de fuerzas? ¿Puede utilizar un balance de fuerzas así para deducir la fórmula de Chézy (10.13)?

C10.4 Una onda superficial se propaga a la velocidad $c_0 \Xi (gy)^{1/2}$. ¿Qué es lo que hace que se propague? Esto es, ¿cuál es el balance de fuerzas en el movimiento de una onda así? ¿En qué dirección se propaga la onda?

C10.5 ¿Por qué se utiliza la correlación de Manning, Ecuación (10.16), de forma universal por los ingenieros hidráulicos en vez del coeficiente de fricción de Moody?

C10.6 ¿Se mantiene constante la energía específica en el flujo sobre una elevación en un canal horizontal? Explíquelo.

C10.7 Cite algunas similitudes, y quizás también algunas diferencias, entre un resalto hidráulico y una onda de choque normal.

C10.8 Proporcione tres ejemplos de movimientos rápidamente variados. Para cada caso, dé razones de por qué no satisface una o más de las cinco hipótesis básicas de la teoría del movimiento gradualmente variado.

C10.9 ¿Es similar una cascada, Figura 10.15*e*, a un vertedero? ¿Podría calibrarse su caudal de la misma manera que el de un vertedero? Explíquelo.

C10.10 Cite algunas similitudes, y quizás también algunas diferencias, entre un vertedero y un aforador de Bernoulli de la Sección 6.12.

C10.11 ¿Se parece una elevación, Figura 10.9*a*, a un vertedero? En caso negativo, ¿cuándo es una elevación lo suficientemente grande, o alta, como para convertirse en un vertedero?

C10.12 Después de leer y pensar un poco, explique el diseño y operación de un *aforador de garganta larga*.

C10.13 Describa el diseño y operación de un *aforador de calado crítico*. ¿Cuáles son las ventajas en comparación con el canal de venturi del Problema P10.113?

Problemas del examen de fundamentos de ingeniería

El examen FE suele ser sencillo, en cuanto a problemas de canales abiertos se refiere, en su sesión general matinal, pero esta materia juega un papel importante en el examen especializado para ingeniería civil (sesión de tarde).

FE10.1 Considere un canal rectangular de 3 m de ancho y una pendiente de 1°. Si el calado del agua es de 2 m, el radio hidráulico vale
(*a*) 0,43 m, (*b*) 0,6 m, (*c*) 0,86 m, (*d*) 1,0 m, (*e*) 1,2 m

FE10.2 Para el canal del Problema FE10.1, el calado más eficiente (mejor caudal para una pendiente y resistencia dadas) es
(*a*) 1 m, (*b*) 1,5 m, (*c*) 2 m, (*d*) 2,5 m, (*e*) 3 m

FE10.3 Si el canal del Problema FE10.1 está hecho de escombros de cemento ($n \Xi 0{,}020$), ¿cuál es el caudal del movimiento uniforme cuando el calado del agua es de 2 m?
(*a*) 6 m^3/s, (*b*) 18 m^3/s, (*c*) 36 m^3/s, (*d*) 40 m^3/s,
(*e*) 53 m^3/s

FE10.4 Para el canal del Problema FE10.1, si el calado es de 2 m y el caudal del movimiento uniforme 24 m^3/s, ¿cuál es el valor aproximado del factor de rugosidad de Manning *n*?
(*a*) 0,015, (*b*) 0,020, (*c*) 0,025, (*d*) 0,030,
(*e*) 0,035

FE10.5 Para el canal del Problema FE10.1, si el factor de rugosidad de Manning $n \Xi 0{,}020$ y $Q \Xi 29$ m^3/s, ¿cuál es el calado normal y_n?
(*a*) 1 m, (*b*) 1,5 m, (*c*) 2 m, (*d*) 2,5 m, (*e*) 3 m

FE10.6 Para el canal del Problema FE10.1, si $Q \Xi 24$ m^3/s, ¿cuál es el calado crítico y_c?
(*a*) 1,0 m, (*b*) 1,26 m, (*c*) 1,5 m, (*d*) 1,87 m,
(*e*) 2,0 m

FE10.7 Para el canal del Problema FE10.1, si $Q \Xi 24$ m^3/s y el calado vale 2 m, ¿cuál es el número de Froude de la corriente?
(*a*) 0,50, (*b*) 0,77, (*c*) 0,90, (*d*) 1,00, (*e*) 1,11

Problemas extensos

PE10.1 En febrero de 1998 falló la presa de tierra del estanque California Jim al sur de Rhode Island. La inundación resultante provocó estragos en el pueblo cercano de Peace Dale. El estanque, de 17 acres de superficie y 15 ft de profundidad, estaba lleno por culpa de las fuertes lluvias. La brecha en la presa tenía una anchura de 22 ft y una altura de 15 ft. Estime el tiempo que tarda el estanque en vaciarse hasta un calado de 2 ft.

PE10.2 Un colector de aguas pluviales de sección circular y hecho de cemento sin pulir tiene una pendiente de 0,0025 y está pensado para transportar de 50 a 300 ft^3/s de aguas torrenciales. Las limitaciones impuestas

www.elsolucionario.net

al diseño son (1) que el calado del agua no exceda las tres cuartas partes del diámetro y (2) que el movimiento sea siempre en régimen lento. ¿Cuál es el diámetro apropiado del tubo para satisfacer estos requerimientos? Si ningún tubo comercial tiene exactamente el tamaño calculado, ¿debería comprar el inmediatamente más grande o el inmediatamente más pequeño?

PE10.3 Extienda el Problema P10.72, cuya solución es $V_2 \Xi$ 4,33 m/s. (*a*) Utilice la teoría del movimiento gradualmente variado para estimar el calado del agua 10 m aguas abajo en la sección (3) de la pendiente de 5° de cemento no pulido de la Figura P10.72. (*b*) Repita su cálculo para una pendiente adversa de 5°. (*c*) Si se encuentra con que la teoría del movimiento gradualmente variado no es válida para el apartado (*b*), explique el motivo y repítalo para una pendiente adversa de 1°.

PE10.4 Se desea medir el caudal en un canal rectangular asfáltico de anchura 1,5 m, que está diseñado para un movimiento uniforme de 70 cm de calado y una pendiente de 0,0036. Las paredes laterales del canal tienen una altura de 1,2 m. Considere para este fin el uso de un vertedero rectangular de pared delgada con o sin contracciones laterales (Tabla 10.2*a*,*b*). Sturm [7, pág. 51] recomienda que un vertedero así tenga Y B 9 cm y H/Y A 2,0 para que las correlaciones sean precisas. Estudie la viabilidad de instalar un vertedero de este tipo que sea preciso, pero que no provoque que el agua se derrame por encima de los lados del canal.

PE10.5 La Figura PE10.5 muestra un modelo hidráulico de un *vertedero compuesto*, que es uno que combina dos formas diferentes. (*a*) Aparte de para medir, para lo cual puede ser pésimo, ¿qué otra razón ingenieril puede haber para un vertedero así? (*b*) Para un río prototipo, suponga que ambas secciones forman un ángulo de 70° con la vertical, que la sección inferior tiene una anchura en la base de 2 m y que la sección superior tiene una anchura en la base de 4,5 m, incluyendo las porciones recortadas. Las alturas de las secciones horizontales inferior y superior son 1 m y 2 m, respectivamente. Utilice estimaciones ingenieriles y confeccione una gráfica del calado del agua aguas arriba en función del caudal del río Petaluma en el rango de 0 a 4 m^3/s. (*c*) ¿Para qué caudal del río rebosará el agua por encima del vertedero?

PE10.5. *(Cortesía de la U.S. Army Corps of Engineers Waterways Experiment Station.)*

Proyectos de diseño

D10.1 Un canal recto de tierra tiene la forma trapezoidal de la Figura 10.7, con b = 4 m y θ = 35°. La pendiente de la solera es constante e igual a 0,001. El caudal presenta variaciones estivales que van desde los 5 hasta los 10 m^3/s. Se desea colocar un vertedero de pared delgada para que el calado del agua 1 km aguas arriba se mantenga durante todo el año en 2,0 m ± 10 por 100. Investigue la posibilidad de satisfacer este reque-

www.elsolucionario.net

rimiento con un vertedero rectangular sin contracciones laterales; si es viable, determine la altura Y apropiada del vertedero. Si no es viable, intente otras alternativas tales como (*a*) un vertedero de pared gruesa o (*b*) un vertedero rectangular con contracciones laterales o (*c*) un vertedero en V. Sea cual sea su diseño final, determine la variación estival de los calados normal y crítico para compararlos con el calado medio anual deseado de 2 m.

D10.2 La presa Caroselli en el río Pawcatuck tiene 10 ft de altura, 90 ft de anchura y es de pared delgada. La compañía Coakley, que utiliza la presa para generar energía hidroeléctrica, desea producir más energía. Para ello solicitan a la ciudad un permiso para incrementar la altura de la presa. El río aguas arriba de la presa puede aproximarse por un rectángulo de 90 ft de anchura con una pendiente de 12 ft por cada milla horizontal, y su lecho es pedregoso. El caudal medio es de 400 ft^3/s, alcanzándose los 1200 ft^3/s durante las inundaciones más severas. Los lados del río son pronunciados hasta 1 milla aguas arriba, a partir de donde viven varios residentes a orillas del río. El ayuntamiento de la ciudad acepta que se incremente la altura de la presa, siempre que el remanso del río cerca de las casas no supere, durante una inundación severa, en más de 3 ft al nivel actual para el caudal medio. Usted, un ingeniero de proyectos, debe predecir cuánto puede incrementarse la altura de la presa teniendo en cuenta el requisito impuesto.

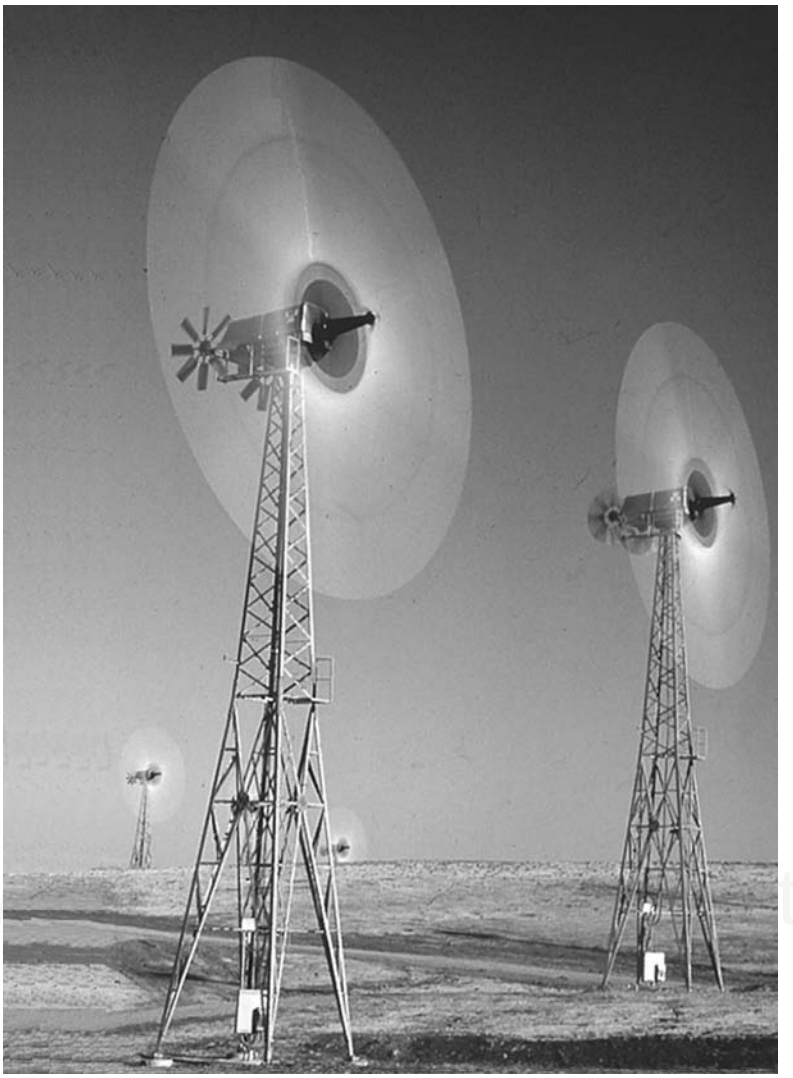
Referencias

1. B. A. Bakhmeteff, *Hydraulics of Open Channels,* McGraw-Hill, Nueva York, 1932.
2. V. T. Chow, *Open Channel Hydraulics,* Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1959.
3. M. H. Chaudhry, *Open Channel Flow,* Macmillan, Nueva York, 1993.
4. S. Montes, *Hydraulics of Open Channel Flow,* ASCE, Reston, VA, 1998.
5. H. Chanson, *The Hydraulics of Open Channel Flow: An Introduction,* Butterworth-Heinemann, Woburn, MA, 1999.
6. S. C. Jain, *Open-Channel Flow,* Wiley, Nueva York, 2000.
7. T. W. Sturm, *Open Channel Hydraulics,* McGraw-Hill, Nueva York, 2001.
8. C. C. Mei, *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves,* Wiley, Nueva York, 1983.
9. R. G. Dean y R. A. Dalrymple, *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists,* 2 vols., World Scientific Pub. Co., River Edge, NJ, 1991.
10. M. J. Lighthill, *Waves in Fluids,* Cambridge University Press, Londres, 2002.
11. A. T. Ippen, *Estuary and Coastline Hydrodynamics,* McGraw-Hill, Nueva York, 1966.
12. M. B. Abbott y W. A. Price, *Coastal, Estuarial, and Harbor Engineers Reference Book,* E&FN Spon (Chapman and Hall), Londres, 1993.
13. P. D. Komar, *Beach Processes and Sedimentation,* Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.
14. V. T. Nguten, R. Lausen y F. Nestmann, «Three-Dimensional Computation of Free Surface Flows in Open Channels», 2001 ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, artículo núm. 18129.
15. J. M. Robertson y H. Rouse, «The Four Regimes of Open Channel Flow», *Civ. Eng.,* vol. 11, núm. 3, marzo 1941, págs. 169-171.
16. R. W. Powell, «Resistance to Flow in Rough Channels», *Trans. Am. Geophys. Union,* vol. 31, núm. 4, agosto 1950, págs. 575-582.
17. R. Manning, «On the Flow of Water in Open Channels and Pipes», *Trans. I.C.E. Ireland,* vol. 20, 1891, págs. 161-207.
18. «Friction Factors in Open Channels, Report of the Committee on Hydromechanics», *ASCE J. Hydraul. Div.,* marzo 1963, págs. 97-143.
19. E. F. Brater, *Handbook of Hydraulics,* 6.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1976.
20. U.S. Bureau of Reclamation, «Research Studies on Stilling Basins, Energy Dissipators, and Associated Appurtenances», *Hydraulic Lab. Rep.* Hyd-399, 1 de junio de 1955.
21. P. A. Thompson, *Compressible-Fluid Dynamics,* McGraw-Hill, Nueva York, 1972.
22. R. M. Olson y S. J. Wright, *Essentials of Engineering Fluid Mechanics,* 5.ª ed., Harper & Row, Nueva York, 1990.
23. P. Ackers et al., *Weirs and Flumes for Flow Measurement,* Wiley, Nueva York, 1978.
24. M. G. Bos, J. A. Replogle y A. J. Clemmens, *Flow Measuring Flumes for Open Channel Systems,* Wiley, Nueva York, 1984.
25. M. G. Bos, *Long-Throated Flumes and Broad-Crested Weirs,* Martinus Nijhoff (Kluwer), Dordrecht, Países Bajos, 1985.
26. U.S. Army Corps of Engineers, *HEC-2 Water Surface Profiles,* Hydrologic Engineering Center, 609 Second Street, Davis, CA, 95616–4687.
27. W. Rodi, *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics,* Brookfield Publishing, Brookfield, VT, 1984.
28. P. D. Durbin, B. A. Pettersson y B. A. Reif, *Theory and Modeling of Turbulent Flows,* Wiley, Nueva York, 2001.
29. R. Baban, *Design of Diversion Weirs: Small Scale Irrigation in Hot Climates,* Wiley, Nueva York, 1995.
30. H. Chanson, *Hydraulic Design of Stepped Cascades, Channels, Weirs, and Spillways,* Pergamon Press, Nueva York, 1994.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Campo eólico en Altamont Pass, California. Los molinos de viento se han empleado para generar energía desde hace más de dos mil años. Los aerogeneradores multipala de eje horizontal (HAWT, *horizontal-axis wind turbines*) son uno de los diseños más eficientes para generar energía a partir del viento, como se discute en este capítulo. (*Cortesía de Kevin Schaefer/Peter Arnold, Inc.*)

www.elsolucionario.net

Capítulo 11
Turbomáquinas

Motivación. La aplicación más práctica de la Mecánica de Fluidos a la ingeniería es el diseño de máquinas. Entre ellas, las más numerosas son las que *suministran* energía a un fluido (bombas), aunque también son importantes las que *extraen* energía de él (turbinas). Ambos tipos de máquinas suelen estar unidos a un eje rotatorio, de donde proviene el nombre de *turbomáquinas*.

El objetivo de este capítulo es realizar estimaciones ingenieriles elementales sobre las actuaciones de las turbomáquinas. Se hará especial énfasis en los fluidos casi incompresibles: líquidos o gases a baja velocidad. También se discutirán los principios básicos, pero no la construcción detallada de las máquinas.

11.1. INTRODUCCIÓN Y CLASIFICACIÓN

www.elsolucionario.net

Las turbomáquinas se dividen de forma natural en aquellas que añaden energía a un fluido (bombas) y aquellas que extraen energía de él (turbinas). El prefijo *turbo-* es una palabra latina que denota «giro» o «rotación», indicando que las turbomáquinas giran de algún modo.

La bomba es el ingenio más antiguo que se conoce para transferir energía a un fluido. Al menos dos tipos datan de antes de Cristo: (1) las *norias*, usadas en Asia y África (1000 a.C.), y (2) la bomba de tornillo de Arquímedes (250 a.C.), todavía construida hoy para bombear mezclas de sólidos y líquidos. Las turbinas de ruedas de paletas ya eran usadas por los romanos en el 70 a.C. y los molinos babilónicos datan del 700 a.C. [1].

A un aparato que bombea líquido se le llama simplemente *bomba*, pero si bombea gases recibe tres nombres diferentes dependiendo del incremento de presión conseguido. Si el incremento de presión es muy pequeño (unas cuantas pulgadas de agua) se denomina *ventilador*; hasta 1 atm se suele denominar *soplante*; y por encima de 1 atm, *compresor*.

Clasificación de las bombas

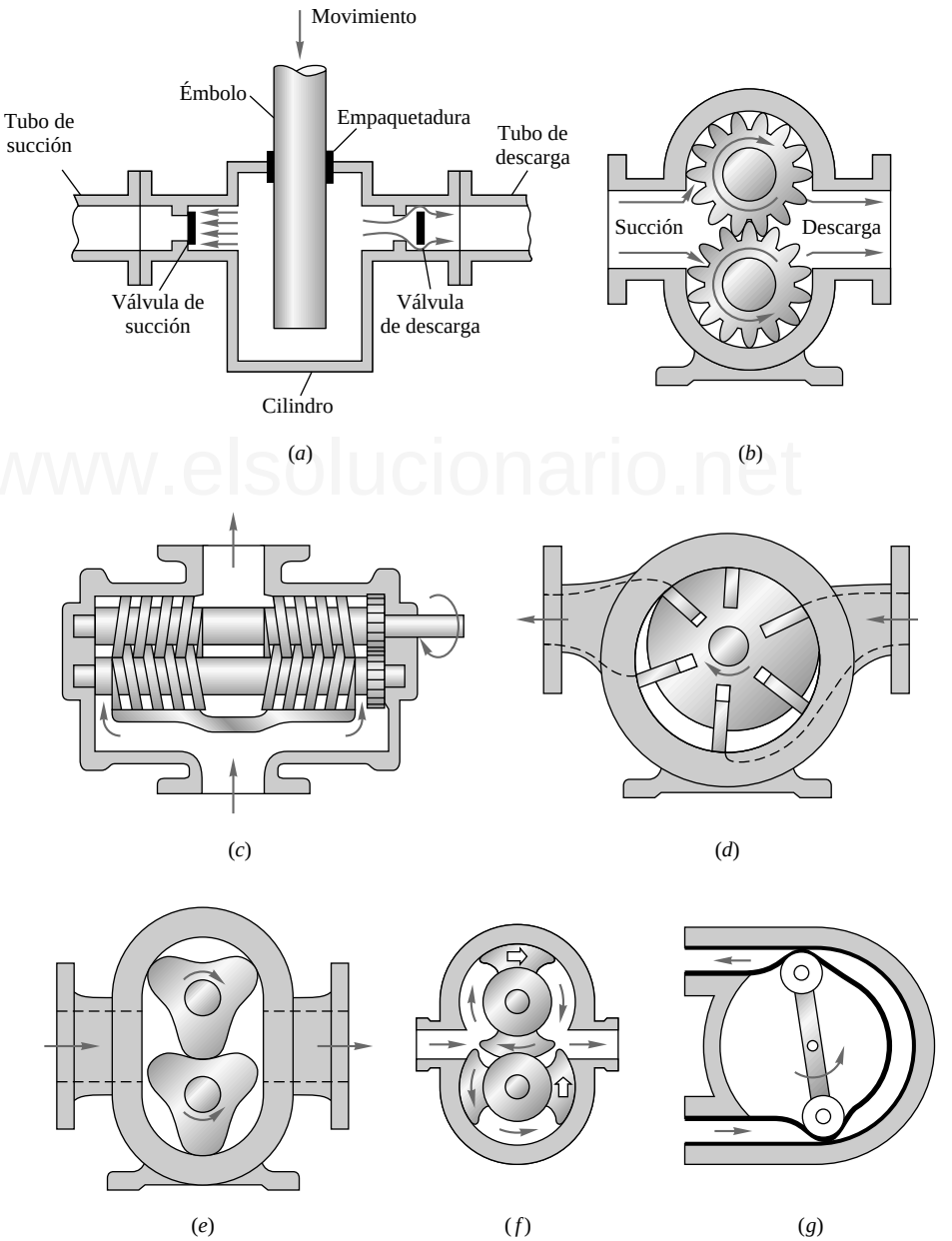
Hay dos tipos básicos de bombas: de desplazamiento positivo y dinámicas o de intercambio de cantidad de movimiento. En el mundo existen hoy varios miles de millones de cada tipo en uso.

Las *bombas de desplazamiento positivo* (BDP) tienen un contorno móvil que, por cambios de volumen, obligan al fluido a avanzar a través de la máquina. Se abre una cavidad en la que el fluido penetra a través de la toma. Después se cierra la cavidad y se expulsa el fluido por la abertura de salida. Un ejemplo clásico es el corazón de los mamíferos, existiendo una gran variedad de versiones mecánicas. Las Referencias 35 a 38 contienen un resumen de la BDP. Estas bombas se pueden clasificar como sigue:

A. Alternativas
   1. Pistón o émbolo
   2. Diafragma

www.elsolucionario.net

B. Rotativas
   1. Rotor simple
      a. Paleta deslizante
      b. Tubo flexible
      c. Tornillo
      d. Peristáltica
   2. Rotor múltiple
      a. Engranaje
      b. Lóbulo
      c. Tornillo
      d. Pistón circunferencial



www.elsolucionario.net

Figura 11.1. Dibujo esquemático de bombas de desplazamiento positivo: (*a*) pistón alternativo o émbolo, (*b*) bomba externa de engranajes, (*c*) bomba de tornillo doble, (*d*) paleta deslizante, (*e*) bomba de tres lóbulos, (*f*) doble pistón azimutal, (*g*) bomba peristáltica.

www.elsolucionario.net

Todas las BDP suministran un caudal pulsante o periódico como consecuencia de que la cavidad se abre, atrapa y expulsa al fluido. Su gran ventaja es que pueden bombear cualquier fluido, independientemente de su viscosidad.

La Figura 11.1 muestra esquemas de los principios de operación de siete de estas BDP. Es raro que estas máquinas funcionen a la inversa, es decir, como turbinas o extractores de energía. El motor de vapor (pistón alternativo) es la excepción clásica.

Dado que las BDP comprimen mecánicamente una cavidad llena de líquido, un problema potencial es que se pueden generar presiones gigantescas si por cualquier motivo se atasca la salida. Esto obliga a construirlas con un diseño muy robusto, aunque si las válvulas de alivio no funcionaran correctamente, un atasco completo podría dañar el ingenio.

Las bombas dinámicas añaden simplemente cantidad de movimiento al fluido por medio de paletas, álabes giratorios o ciertos dispositivos especiales. No hay volúmenes cerrados: el fluido aumenta su cantidad de movimiento mientras se mueve a través de pasajes abiertos, para convertir después su alta velocidad en incremento de presión al salir a través de un difusor. Las bombas dinámicas pueden clasificarse como sigue:

A. Rotativas
   1. Centrífugas o de flujo de salida radial
   2. Flujo axial
   3. Flujo mixto (entre radial y axial)

B. Diseños especiales
   1. Bomba de chorro o eyector (véase Figura P3.36)
   2. Bombas electromagnéticas para metales líquidos
   3. Actuadores: martinetes hidráulicos o neumáticos

En este capítulo nos concentraremos en los diseños rotativos, a veces denominadas bombas *rotodinámicas*. Otros diseños, tanto de BDP como de bombas dinámicas, se tratan en textos especializados [por ejemplo, 3, 31].

Las bombas dinámicas proporcionan generalmente mayor caudal que las BDP y una descarga más estacionaria, pero son poco efectivas para bombear líquidos muy viscosos. Las bombas dinámicas generalmente deben ser *cebadas*; esto es, si están llenas con gas no pueden succionar el líquido, situado por debajo, hasta su entrada. En cambio, las BDP son autocebantes en la mayor parte de las aplicaciones. Una bomba dinámica proporciona grandes caudales (hasta 300.000 gal/min) con bajos incrementos de presión (unas pocas atmósferas), mientras que las BDP pueden funcionar a presiones muy altas (300 atm) pero normalmente proporcionan caudales bajos (100 gal/min).

La Figura 11.2 muestra las grandes diferencias de funcionamiento (Δp en función de Q) entre los dos tipos de bombas. A una velocidad de rotación constante, las BDP proporcionan un caudal aproximadamente constante en un amplio margen de incrementos de presión, con un ligero efecto de la viscosidad. El cau-

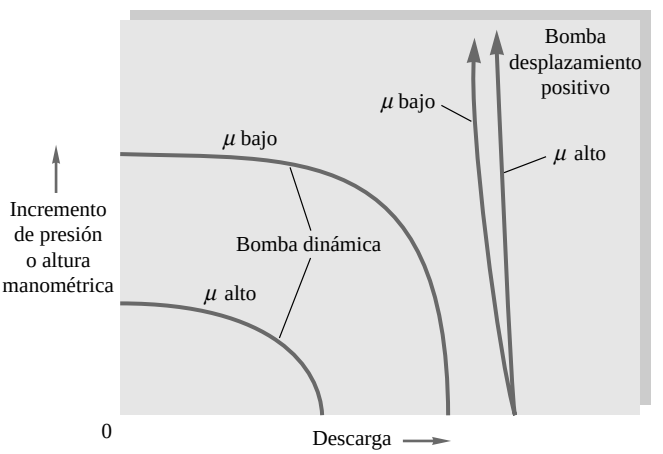


Figura 11.2. Comparación de las curvas características típicas de bombas dinámicas y de desplazamiento positivo a velocidad constante.

www.elsolucionario.net

dal de una BDP sólo se puede modificar variando la velocidad. Por este motivo las BDP se pueden utilizar como caudalímetros [35].

En contraste, a velocidad constante, las bombas dinámicas tienen un amplio rango de funcionamiento, que va desde un máximo en Δp sin caudal (condición de cierre) hasta cero Δp cuando el caudal es máximo. Los fluidos muy viscosos degradan notablemente el rendimiento de las bombas dinámicas.

De nuevo —y por última vez— debemos recordar al lector que este capítulo es sólo introductorio. Hay libros enteros escritos sobre turbomáquinas: tratamientos generalizados [2 a 7], textos especializados en bombas [8 a 16], ventiladores [17 a 20], compresores [21 a 23], turbinas de gas [24 a 26], potencia hidráulica [27, 28] y BDP [35 a 38]. Hay varios manuales [29 a 32] y al menos dos libros de texto básicos [33, 34] que contienen un tratamiento muy completo de las turbomáquinas. Para más detalles se recomienda recurrir a estas fuentes.

11.2. LA BOMBA CENTRÍFUGA

Comencemos nuestro breve estudio de las máquinas rotodinámicas examinando las características de una bomba centrífuga. Esta bomba está constituida por un rotor dentro de una carcasa, como se esquematiza en la Figura 11.3. El fluido entra axialmente a través del *ojo*, en el eje de la carcasa, los álabes del rotor la fuerzan a tomar un movimiento tangencial y radial hacia el exterior del rotor, donde es recogido por una carcasa que hace de difusor. El fluido aumenta su velocidad y presión cuando pasa a través del rotor. La parte de la carcasa, de forma toroidal, o *voluta*, decelera el flujo y aumenta más la presión.

Normalmente, los álabes están *curvados hacia atrás*, como en la Figura 11.3, pero existen también diseños de álabes radiales y curvados hacia delante, con los cuales se cambia ligeramente la presión a la salida de la bomba. Los álabes pueden ser *abiertos* (separados de la parte frontal de la carcasa sólo por una pequeña holgura) o *cerrados* (protegidos de la carcasa por un disco a cada lado). El difusor puede no tener álabes, como en la Figura 11.3, o estar equipado con álabes fijos para ayudar al guiado del fluido hacia la salida.

www.elsolucionario.net

Parámetros básicos de salida

Suponiendo flujo estacionario, la bomba básicamente aumenta la carga del fluido entre los puntos 1, el ojo, y 2, la salida. Utilizando la Ecuación (3.67) y despreciando los términos viscosos y de transferencia de calor, este cambio se representa por la altura manométrica H:

$$H = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_2 - \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_1 = h_s - h_f \tag{11.1}$$

donde h_s es la carga suministrada por la bomba y h_f la pérdida de carga. La altura manométrica H es un parámetro básico de salida para cualquier bomba. Puesto que la Ecuación (11.1) es aplicable a fluidos incompresibles, debe modificarse para compresores, donde hay grandes cambios de densidad.

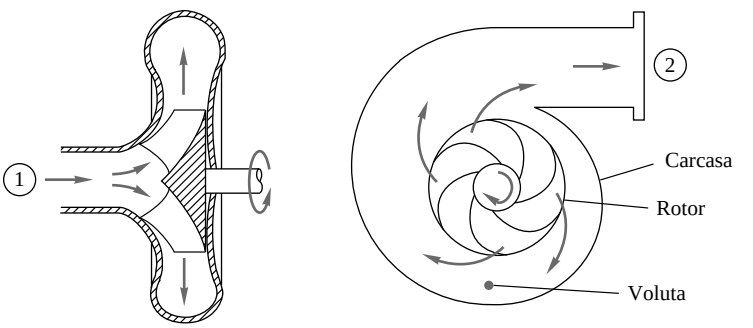


Figura 11.3. Esquema de una bomba centrífuga típica.

www.elsolucionario.net

Normalmente V_2 y V_1 son prácticamente iguales y $z_2 - z_1$ no suele ser más de un metro, por lo que la altura manométrica es esencialmente proporcional al incremento de presión estática:

$$H \Xi \frac{p_2 \Phi p_1}{\Leftarrow g} = \frac{\mathrm{O}p}{\Leftarrow g} \tag{11.2}$$

La potencia dada al fluido es igual al producto del peso específico por el caudal y por la altura manométrica:

$$P_w = \rho g Q H \tag{11.3}$$

Tradicionalmente a esta potencia se le ha llamado *potencia útil*. La potencia necesaria para mover la bomba es la *potencia al freno*[1]

$$P_f = \omega T \tag{11.4}$$

donde ω es la velocidad angular del eje y T el par en el eje. Si no hubiese pérdidas, P_w y la potencia al freno serían iguales, pero P_w es siempre menor, definiéndose el *rendimiento* η de la bomba como

$$\Omega = \frac{P_w}{P_f} = \frac{\Leftarrow g Q H}{\varnothing T} \tag{11.5}$$

La principal aspiración del diseñador de bombas es conseguir que η sea lo más grande posible, en el margen más grande de valores del caudal Q.

El rendimiento es el resultado, básicamente, de tres factores: volumétrico, hidráulico y mecánico. El *rendimiento volumétrico* es

$$\Omega_v = \frac{Q}{Q + Q_L} \tag{11.6}$$

www.elsolucionario.net

donde Q_L es el caudal perdido debido a las fugas por las holguras entre la carcasa y el rotor. El *rendimiento hidráulico* es

$$\Omega_h = 1 \Phi \frac{h_f}{h_s} \tag{11.7}$$

donde la pérdida de carga h_f tiene tres contribuciones: (1) pérdidas por *desprendimiento* a la entrada, debido a un acoplamiento imperfecto entre el flujo de entrada y el borde de ataque de los álabes,; (2) pérdidas por *fricción* en los canales entre los álabes, y (3) pérdidas por *recirculación* del fluido debido al mal acoplamiento entre la corriente y la dirección de salida de los álabes.

Finalmente, el *rendimiento mecánico* es

$$\Omega_m = 1 \Phi \frac{P_{fm}}{P_f} \tag{11.8}$$

donde P_{fm} es la potencia perdida a causa de la fricción mecánica en los cojinetes, prensaestopas y otros puntos de contacto de la máquina.

Por definición, el rendimiento total es simplemente el producto de estos tres rendimientos:

$$\eta \equiv \eta_v \eta_h \eta_m \tag{11.9}$$

El proyectista tiene que trabajar en las tres áreas para mejorar la bomba.

---

[1] Pueden necesitarse factores de conversión: 1 hp = 550 ft · lbf/s = 746 W.

www.elsolucionario.net

Teoría elemental de bombas

Podría pensarse que las Ecuaciones (11.1) a (11.9) fuesen relaciones de la *teoría* de bombas. No es así, son meras definiciones de los parámetros de las bombas y no tienen ninguna utilidad predictiva. Para *calcular* realmente la carga, potencia, rendimiento y caudal de una bomba se pueden usar dos aproximaciones teóricas diferentes: (1) simples fórmulas unidimensionales y (2) complejos modelos por ordenador, que tienen en cuenta la viscosidad y tridimensionalidad del movimiento. No obstante, muchas de las mejoras en el diseño de bombas aún se deben a ensayos y a la experiencia. De este modo, el diseño de bombas continúa siendo un campo muy activo [39]. Durante los últimos diez años se han realizado avances considerables en el uso de la *Mecánica de Fluidos Computacional* (CFD, *Computational Fluid Dynamics*) para resolver el flujo en turbomáquinas [42], y en la actualidad hay al menos ocho códigos CFD comerciales que resuelven flujos tridimensionales turbulentos.

Para construir una teoría elemental de las actuaciones de las bombas, consideramos flujo unidimensional y combinamos un campo de velocidades idealizado en el rotor con el teorema del momento cinético para un volumen de control, Ecuación (3.55).

Los diagramas de velocidades ideales se muestran en la Figura 11.4. Se considera que el fluido entra en el rotor en $r = r_1$ con la componente de la velocidad w_1 paralela al álabe, con un ángulo β_1, y la componente circunfernecial $u_1 = \omega r_1$ igual a la velocidad de la punta de los álabes a la entrada del rotor. Su velocidad absoluta a la entrada es entonces la suma de los vectores w_1 y u_1, representada por V_1. Análogamente, el flujo de salida en $r = r_2$ tiene dos componentes: w_2 paralela al álabe, con un ángulo β_2, y la velocidad del borde de salida $u_2 = \omega r_2$, dando como velocidad resultante V_2.

Hemos aplicado el teorema del momento cinético a una turbomáquina en el Ejemplo 3.14 (Figura 3.13) y llegamos al resultado

$$T = \rho Q(r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1}) \tag{11.10}$$

para el par aplicado T, donde V_{t1} y V_{t2} son las componentes tangenciales de la velocidad absoluta del fluido. La potencia suministrada al fluido es

www.elsolucionario.net

$$P_w = \omega T = \rho Q(u_2 V_{t2} - u_1 V_{t1})$$

o

$$H = \frac{P_w}{\rho g Q} = \frac{1}{g}(u_2 V_{t2} - u_1 V_{t1}) \tag{11.11}$$

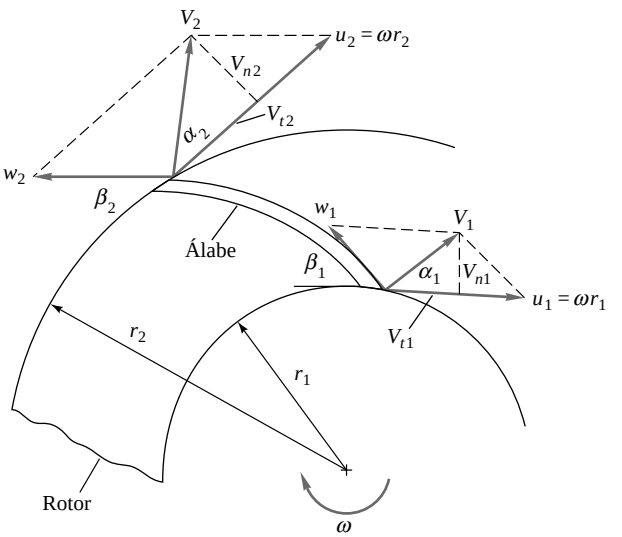


Figura 11.4. Diagramas de velocidad a la entrada y salida del rotor idealizado de una bomba.

www.elsolucionario.net

Estas relaciones se conocen como las *ecuaciones de Euler de las turbomáquinas* e indican que el par, la potencia y la altura manométrica ideal son función únicamente de las velocidades de las puntas de los álabes $u_{1,2}$ y de las componentes tangenciales de la velocidad absoluta $V_{t1,2}$, con independencia de las velocidades axiales, si las hubiera.

Se puede obtener otra interpretación de estas ecuaciones si se escriben de otra forma. Teniendo en cuenta la geometría de la Figura 11.4,

$$V^2 = u^2 + w^2 - 2uw\cos\beta \qquad w\cos\beta = u - V_t$$

o

$$uV_t = \tfrac{1}{2}(V^2 + u^2 - w^2) \tag{11.12}$$

Sustituyendo esta relación en la Ecuación (11.11) se obtiene

$$H = \frac{1}{2g}[(V_2^2 - V_1^2) + (u_2^2 - u_1^2) + (w_2^2 - w_1^2)] \tag{11.13}$$

Por tanto, la altura manométrica ideal está relacionada con la suma de la variación de la energía cinética absoluta más la variación de la energía cinética relativa menos la variación de la energía cinética de punta del álabe. Sustituyendo finalmente H en la Ecuación (11.1) por su definición y reordenando, se obtiene la relación clásica

$$\frac{p}{\rho g} + z + \frac{w^2}{2g} - \frac{r^2\omega^2}{2g} = \text{cte} \tag{11.14}$$

Ésta es la *ecuación de Bernoulli en coordenadas rotatorias* y se aplica a flujos ideales incompresibles tanto bidimensionales como tridimensionales.

Para bombas centrífugas, la potencia se puede relacionar con la velocidad radial $V_n = V_t \operatorname{tg}\alpha$ y la ecuación de continuidad

$$P_w = \rho Q(u_2 V_{n2}\operatorname{cotg}\alpha_2 - u_1 V_{n1}\operatorname{cotg}\alpha_1) \tag{11.15}$$

donde

$$V_{n2} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} \quad \text{y} \quad V_{n1} = \frac{Q}{2\pi r_1 b_1}$$

y donde b_1 y b_2 son las distancias entre álabes a la entrada y a la salida. Conocidos los parámetros de la bomba r_1, r_2, β_1, β_2 y ω, las Ecuaciones (11.11) o (11.15) permiten calcular la potencia ideal y la altura manométrica en función del caudal. El caudal de «diseño» Q^* se estima generalmente considerando que el flujo a la entrada es exactamente perpendicular al borde de entrada del rotor:

$$\alpha_1 = 90° \qquad V_{n1} = V_1 \tag{11.16}$$

Podemos esperar que este análisis simple nos proporcione estimaciones para la altura manométrica, potencia y caudal de una bomba con errores inferiores al ±25 por 100. Veamos un ejemplo ilustrativo.

EJEMPLO 11.1

Dados los siguientes datos para una bomba centrífuga comercial para bombear agua: $r_1 = 4$ in, $r_2 = 7$ in, $\beta_1 = 30°$, $\beta_2 = 20°$, velocidad de rotación = 1440 rpm, estime (*a*) el gasto volumétrico de diseño, (*b*) la potencia y (*c*) la altura manométrica si $b_1 = b_2 = 1{,}75$ in.

www.elsolucionario.net

Solución

Apartado (*a*)

La velocidad angular es $\omega = 2\pi \text{rev/s} = 2\pi(1440/60) = 150{,}8$ rad/s. Entonces las velocidades de la punta de los álabes a la entrada y a la salida son $u_1 = \omega r_1 = 150{,}8(4/12) = 50{,}3$ ft/s y $u_2 = \omega r_2 = 150{,}8(7/12) = 88{,}0$ ft/s. Del diagrama de velocidades a la entrada, Figura E11.1*a*, con $\alpha_1 = 90°$, obtenemos para el punto de diseño

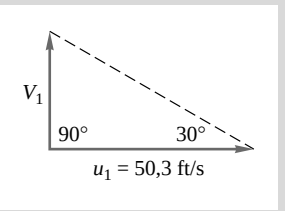
$$V_{n1} = u_1 \text{ tg } 30° = 29{,}0 \text{ ft/s}$$

por lo que el caudal es

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi r_1 b_1 V_{n1} = (2\pi)\left(\frac{4}{12}\text{ ft}\right)\left(\frac{1{,}75}{12}\text{ ft}\right)\left(29{,}0\frac{\text{ft}}{\text{s}}\right) \\ &= (8{,}87 \text{ ft}^3/\text{s})(60 \text{ s/min})\left(\frac{1728}{231}\text{gal/ft}^3\right) \\ &= 3980 \text{ gal/min} \end{aligned}$$

Resp. (*a*)

(La bomba real suministra alrededor de 3500 gal/min.)



E11.1a

www.elsolucionario.net

Apartado (*b*)

La velocidad radial a la salida se obtiene de Q:

$$V_{n2} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} = \frac{8{,}87 \text{ ft}^3/\text{s}}{2\pi(\frac{7}{12}\text{ ft})(\frac{1{,}75}{12}\text{ ft})} = 16{,}6 \text{ ft/s}$$

Esto nos permite construir un diagrama de velocidades a la salida como el de la Figura E11.1*b*, dado $\beta_2 = 20°$. La componente tangencial es

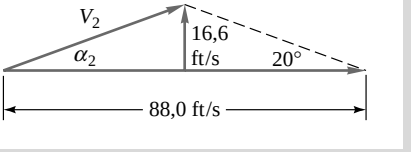
$$V_{t2} = u_2 - V_{n2} \cot \beta_2 = 88{,}0 - 16{,}6 \cot 20° = 42{,}4 \text{ ft/s}$$

$$\alpha_2 = \text{tg}^{-1}\frac{16{,}6}{42{,}4} = 21{,}4°$$

La potencia suministrada al agua se obtiene de la Ecuación (11.11) con $V_{t1} = 0$ en el punto de diseño:

$$\begin{aligned} P_w &= \rho Q u_2 V_{t2} = (1{,}94 \text{ slugs/ft}^3)(8{,}87 \text{ ft}^3/\text{s})(88{,}0 \text{ ft/s})(42{,}4 \text{ ft/s}) \\ &= \frac{64.100 \text{ ft} \cdot \text{lbf/s}}{550} = 117 \text{ hp} \end{aligned}$$

Resp. (*b*)



E11.1b

www.elsolucionario.net

(La bomba real le suministra al agua una potencia de unos 125 hp, necesitando una potencia al freno de 147 hp con un rendimiento del 85 por 100.)

Apartado (*c*)

Finalmente, la altura manométrica se determina de la Ecuación (11.11):

$$H = \frac{P_w}{\rho g Q} = \frac{64.100 \text{ ft} \cdot \text{lbf/s}}{(62,4 \text{ lbf/ft}^3)(8,87 \text{ ft}^3/\text{s})} = 116 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}\ (c)$$

(La bomba proporciona realmente una altura manométrica de 140 ft.) En las referencias avanzadas [por ejemplo, 7, 8 y 31] se dan métodos para obtener los resultados con mejor aproximación.

Efecto del ángulo del álabe sobre la altura manométrica de una bomba

La teoría simple descrita anteriormente se puede utilizar para predecir un efecto importante del ángulo del álabe. Si despreciamos el momento cinético a la entrada, la potencia teórica suministrada al líquido es

$$P_w = \rho Q u_2 V_{t2} \tag{11.17}$$

donde $$V_{t2} = u_2 - V_{n2} \cot \beta_2 \qquad V_{n2} = \frac{Q}{2\pi r_2 b_2}$$

Entonces, de la Ecuación (11.11) la altura manométrica toma la forma

www.elsolucionario.net

$$H = \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_2 \cot \beta_2}{2\pi r_2 b_2 g} Q \tag{11.18}$$

La altura manométrica varía linealmente con el caudal Q, tomando el valor u_2^2/g para caudal nulo, donde u_2 es la velocidad del borde de salida del álabe. La pendiente es negativa si $\beta_2 < 90°$ (álabes curvados hacia atrás) y positiva para $\beta_2 > 90°$ (álabes curvados hacia adelante). Este efecto se muestra en la Figura 11.5 y sólo es aplicable para caudales bajos.

La altura manométrica real de una bomba para caudal nulo es sólo un 60 por 100 del valor teórico $H_0 = \omega^2 r_2^2/g$. Con el empleo de la anemometría láser doppler se han podido realizar medidas detalladas del flujo tridimensional en el interior de bombas, animando incluso los datos en forma de película [40].

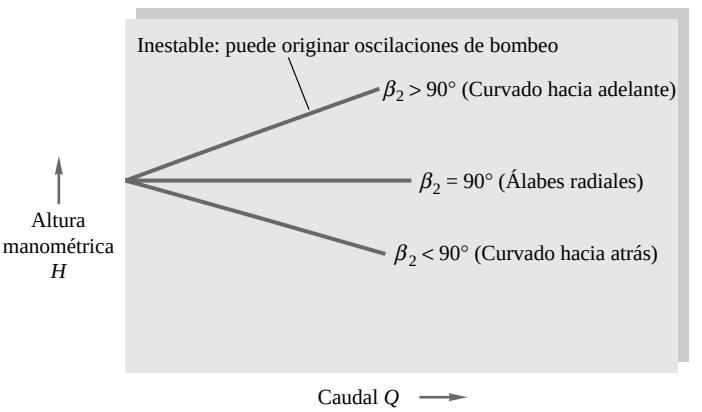


Figura 11.5. Efecto teórico del ángulo de salida del álabe en la altura manométrica como función del caudal de una bomba.

www.elsolucionario.net

Cuando la pendiente de la curva de altura manométrica es positiva, véase Figura 11.5, el flujo puede ser inestable y presentar *oscilaciones de bombeo*, un fenómeno oscilatorio en el que el punto de funcionamiento de la bomba «persigue» al punto de funcionamiento normal. En el caso de bombas, las oscilaciones de bombeo pueden dar lugar a un mal funcionamiento de las mismas; sin embargo, en el caso de compresores pueden presentarse problemas mucho mayores. Por esta razón se prefiere generalmente un diseño con álabes radiales o curvados hacia atrás. Se puede encontrar una revisión del problema de estabilidad de bombas en Greitzer [41].

11.3. CURVAS CARACTERÍSTICAS DE BOMBAS Y REGLAS DE SEMEJANZA

Dado que la teoría presentada en las secciones anteriores es fundamentalmente cualitativa, la única forma de obtener las curvas características se apoya en los ensayos. Por el momento nos referiremos en particular a la bomba centrífuga. Los principios generales y la presentación de los datos son exactamente los mismos para bombas helicocentrífugas y axiales y para compresores.

Las curvas características se trazan casi siempre para velocidad de giro del eje n (normalmente en rpm) constante. El caudal Q (normalmente en galones por minuto para líquidos y en pies cúbicos por minuto para gases) se toma como variable independiente básica. Como variables dependientes, o «de salida», se consideran la altura manométrica H (incremento de presión Δp para gases), la potencia al freno P_f y el rendimiento η.

La Figura 11.6 muestra las curvas características típicas de una bomba centrífuga. La altura manométrica es aproximadamente constante a caudales bajos y después decrece hasta cero para $Q = Q_{máx}$. A la velocidad de giro y tamaño del rotor considerados, la bomba no puede suministrar más caudal que $Q_{máx}$. La parte de pendiente positiva de la curva correspondiente a la altura manométrica se muestra a trazos; esta región, como se ha mencionado antes, puede ser inestable y originar oscilaciones de bombeo.

El rendimiento η siempre es nulo cuando no hay flujo y cuando $Q = Q_{máx}$, alcanzando su máximo, entre el 80 y el 90 por 100, para caudales alrededor de $0{,}6Q_{máx}$. Éste es el *caudal de diseño* Q^* o *punto de máximo rendimiento* (PMR), $\eta = \eta_{máx}$. La altura manométrica y la potencia en el PMR se denominarán H^* y P^* (o P_f^*), respectivamente. Es deseable que la curva de rendimiento sea plana en las proximidades de $\eta_{máx}$, de forma que se disponga de un rango de operación lo más amplio posible, aunque no todos los diseños consiguen curvas de eficiencia planas. Obsérvese que η no es independiente de H y P, ya que se puede calcular en función de estos datos a partir de la Ecuación (11.5), $\eta = \rho g Q H / P$.

www.elsolucionario.net

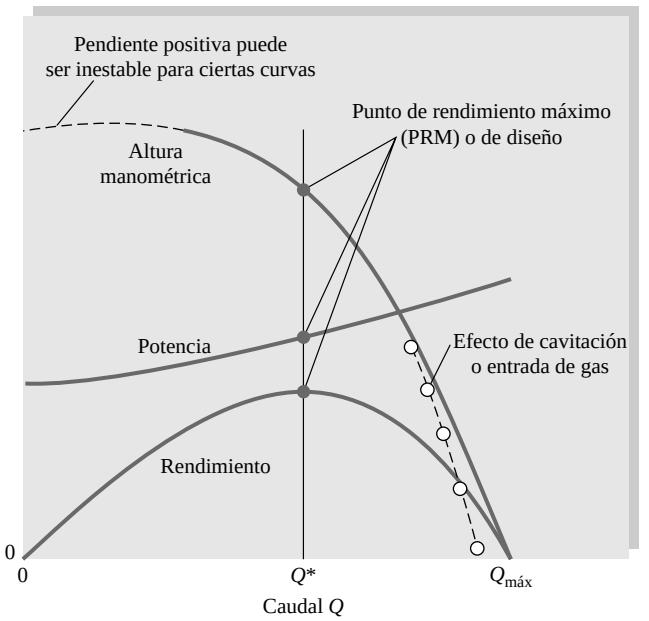


Figura 11.6. Curvas características de una bomba centrífuga típica con velocidad de giro constante. Las unidades son arbitrarias.

www.elsolucionario.net

Como muestra la Figura 11.6, típicamente la curva de potencia al freno suministrada por el motor de la bomba crece monótonamente con el caudal. A veces hay un brusco incremento de potencia después del PMR, especialmente en el caso de álabes radiales o curvados hacia delante. Este comportamiento se considera poco deseable, ya que requiere motores mucho más grandes para proporcionar grandes caudales. Las bombas con álabes curvados hacia atrás presentan en cambio una disminución de la potencia requerida antes del PMR (curva del tipo «no sobrecarga»).

Curvas características medidas

La Figura 11.7 muestra las curvas características reales de una bomba centrífuga comercial. La Figura 11.7*a* corresponde a una carcasa básica con tres diámetros diferentes del rotor. Mientras que las curvas de la altura manométrica $H(Q)$ aparecen explícitamente, las de potencia y rendimiento deben deducirse a partir de

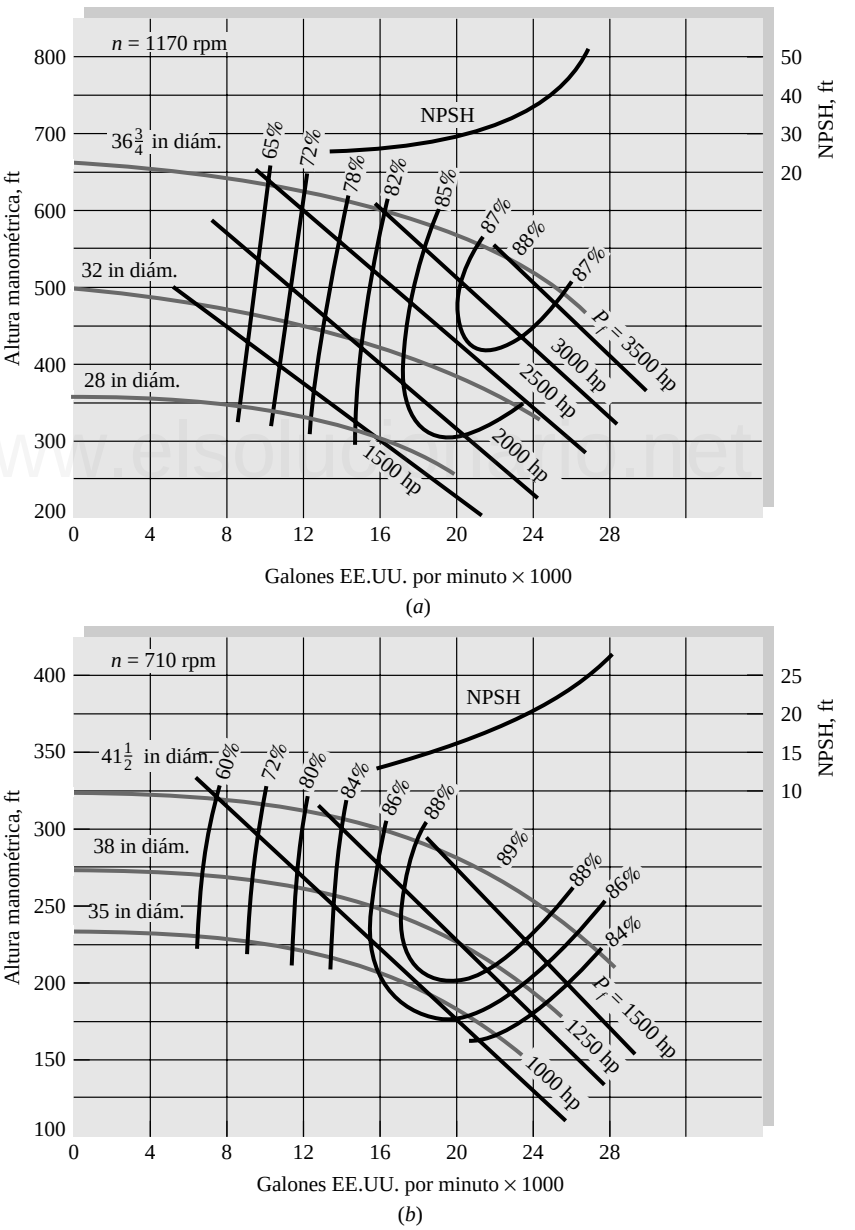


Figura 11.7. Curvas características medidas en dos modelos de una bomba centrífuga para agua: (*a*) carcasa básica con tres tamaños de rotor, (*b*) carcasa un 20 por 100 mayor con tres rotores más grandes girando a menor velocidad. (*Cortesía de Ingersoll-Rand Corporation, Cameron Pump Division.*)

www.elsolucionario.net

los datos presentados. No se muestra el caudal máximo, ya que generalmente está fuera del rango de funcionamiento normal, que es próximo al PMR. Todas las magnitudes están representadas con sus dimensiones [pies, caballos, galones por minuto (1 galón EE.UU. = 231 in^3)], ya que se supone que van dirigidas directamente a los proyectistas. La Figura 11.7*b* corresponde a la misma bomba pero con una carcasa un 20 por 100 más grande, una velocidad de giro menor y tres diámetros de rotor más grandes. La comparación entre las dos bombas puede conducir a errores: la bomba más grande produce exactamente el mismo caudal, pero sólo con la mitad de potencia y la mitad de altura manométrica. Esto se comprenderá rápidamente mediante las reglas de semejanza que formularemos.

Un punto que a menudo no se tiene en cuenta es que las curvas como las de la Figura 11.7 sólo son estrictamente aplicables a un fluido de una cierta densidad y viscosidad, en este caso el agua. Si la bomba se usase para bombear, por ejemplo, mercurio, la potencia al freno debería ser unas trece veces mayor, mientras que Q, H y η apenas cambiarían. Pero en ese caso, H debería interpretarse como pies de *mercurio* y no pies de agua. Si la bomba se utilizase con aceite SAE 30, todos los valores (potencia al freno, Q, H y η) cambiarían como consecuencia del gran cambio de viscosidad (número de Reynolds). De nuevo, esto se aclarará con las reglas de semejanza.

Altura neta de succión

En la parte superior de la Figura 11.7 se ha dibujado la *altura neta de succión* (NPSH, *Net Positive-Suction Head*), que es la carga disponible a la entrada de la bomba para evitar la cavitación o evaporación del líquido. La entrada de la bomba, o zona de succión, es la región donde la presión es más baja y donde puede aparecer antes la cavitación. La NPSH se define como

$$\text{NPSH} = \frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g} \Phi \frac{p_v}{\rho g} \tag{11.19}$$

donde p_e y V_e son la presión y velocidad a la entrada de la bomba y p_v es la presión de vapor del líquido. Dado el primer miembro, NPSH, por las curvas características de la bomba, debemos asegurar que el segundo miembro sea mayor o igual que el primero para evitar la cavitación.

Si la entrada de la bomba está situada a una altura Z_e por encima de un depósito cuya superficie libre está a una presión p_a, podemos usar la ecuación de Bernoulli para escribir la NPSH como

$$\text{NPSH} = \frac{p_a}{\rho g} \Phi Z_e \Phi h_{fe} - \frac{p_v}{\rho g} \tag{11.20}$$

donde h_{fe} es la pérdida de carga entre el depósito y la entrada de la bomba. Conociendo p_a y h_{fe}, podemos colocar la bomba a una altura Z_e, que debe mantener al segundo miembro mayor que la NPSH «disponible» representada en la Figura 11.7.

Si apareciese cavitación, habría ruido y vibraciones en la bomba, deterioro del rotor por picaduras y una caída brusca en la altura manométrica y el caudal de la bomba. Con algunos líquidos estos deterioros aparecen antes de que se presente la ebullición, debido a la liberación de gases disueltos e hidrocarburos ligeros.

Desviaciones de la teoría de bombas ideales

Los datos reales de la altura manométrica que muestra la Figura 11.7 son considerablemente diferentes de los de la teoría ideal, dados por la Ecuación (11.18). Tomemos, por ejemplo, la bomba de 36,75 in de diámetro a 1170 rpm en la Figura 11.7*a*. La altura manométrica para caudal nulo es

$$H_0(\text{ideal}) = \frac{\omega^2 r_2^2}{g} = \frac{[1170(2\pi/60)\ \text{rad/s}]^2 (36,75/2)/(12)\ \text{ft}]^2}{32,2\ \text{ft/s}^2} = 1093\ \text{ft}$$

www.elsolucionario.net

En la Figura 11.7*a*, a $Q = 0$, podemos ver que la altura manométrica real para caudal nulo es de sólo 670 ft, un 61 por 100 del valor teórico. Ésta es una reducción notable, indicativa de la existencia de tres tipos de pérdidas:

1. *Pérdidas por recirculación*, que sólo son importantes para caudales grandes.
2. *Pérdidas por fricción* en los álabes y en otras superficies interiores, que aumentan monótonamente con el caudal.
3. *Pérdidas por «desprendimiento»*, debidas a desajustes entre los ángulos de los álabes y la dirección del flujo de entrada, que son especialmente importantes para caudales grandes.

Todos estos efectos están asociados a flujos tridimensionales de gran complejidad que resultan difíciles de predecir. Aunque, como se mencionó antes, las técnicas numéricas (CFD) están ganando en importancia [42], la predicción de las características de las bombas sigue siendo una mezcla de experiencia, correlaciones empíricas, teoría ideal y modificaciones obtenidas con CFD [45].

EJEMPLO 11.2

La bomba de 32 in de la Figura 11.7*a* se emplea para bombear 24.000 gal/min de agua a 1170 rpm desde un depósito cuya superficie está a una presión de 14,7 lbf/in^2. Si la pérdida de carga desde el depósito hasta la entrada de la bomba es de 6 ft, ¿dónde debe estar situada la entrada de la bomba para evitar la cavitación en agua a (*a*) 60 °F, p_v = 0,26 lbf/in^2, densidad relativa S = 1, y (*b*) 200 °F, p_v = 11,52 lbf/in^2, densidad relativa S = 0,9635?

Solución

Apartado (*a*)

Para los dos casos de la Figura 11.7*a* con 24.000 gal/min la NPSH disponible es de 40 ft. En este caso, ρg = 62,4 lbf/ft^3. De la Ecuación (11.20) es necesario que

$$\text{NPSH} = \frac{p_a - p_v}{\rho g} - Z_e - h_{fe}$$

o

$$40 \text{ ft} = \frac{(14,7 - 0,26 \text{ lbf/in}^2)(144 \text{ in}^2/\text{ft}^2)}{62,4 \text{ lbf/ft}^3} - Z_e - 27,3 = -12,7 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

La bomba debe estar situada al menos 12,7 ft por debajo de la superficie del depósito para evitar la cavitación.

Apartado (*b*)

En este caso, $\rho g = 62,4(0,9635) = 60,1$ lbf/ft^3. Aplicando de nuevo la Ecuación (11.20) para el valor más alto de p_v,

$$40 \text{ ft} = \frac{(14,7 - 11,52 \text{ lbf/in}^2)(144 \text{ in}^2/\text{ft}^2)}{60,1 \text{ lbf/ft}^3} - Z_e - 6,0$$

o

$$Z_e = 1,6 - 40 = -38,4 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

La bomba debe estar ahora situada al menos 38,4 ft por debajo de la superficie del depósito. Estas severas condiciones no son normales, ya que una bomba de gran caudal necesita una gran NPSH.

Curvas características adimensionales de las bombas

Para un diseño de bomba determinado, las variables de salida H y la potencia al freno dependerán al menos del caudal Q, el diámetro del rotor D y la velocidad de rotación del eje n. Otros posibles parámetros son la

www.elsolucionario.net

densidad del fluido ρ, la viscosidad μ y la rugosidad de la superficie ε. Así pues, las curvas características de la Figura 11.7 son equivalentes a las siguientes relaciones funcionales:[2]

$$gH = f_1(Q, D, n, \rho, \mu, \varepsilon) \qquad P_f = f_2(Q, D, n, \rho, \mu, \varepsilon) \tag{11.21}$$

Ésta es una aplicación directa de los principios del análisis dimensional del Capítulo 5. De hecho se puso como ejercicio (Ejemplo 5.3). Para cada función de la Ecuación (11.21) hay siete variables y tres dimensiones primarias (M, L y T). Por ello, es de esperar obtener 7 – 3 = 4 parámetros adimensionales, como así ocurre. El lector puede comprobar como ejercicio que las formas adimensionales de las Ecuaciones (11.21) son

$$\frac{gH}{n^2D^2} = g_1\left(\frac{Q}{nD^3}, \frac{\rho nD^2}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$
$$\frac{P_f}{\rho n^3D^5} = g_2\left(\frac{Q}{nD^3}, \frac{\rho nD^2}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D}\right) \tag{11.22}$$

Las cantidades $\rho nD^2/\mu$ y ε/D son el número de Reynolds y la rugosidad relativa, respectivamente. En las bombas aparecen tres nuevos parámetros:

$$\begin{aligned} &\text{Coeficiente de caudal } C_Q = \frac{Q}{nD^3} \\ &\text{Coeficiente manométrico } C_H = \frac{gH}{n^2D^2} \\ &\text{Coeficiente de potencia } C_P = \frac{P_f}{\rho n^3D^5} \end{aligned} \tag{11.23}$$

www.elsolucionario.net

Obsérvese que sólo el coeficiente de potencia contiene la densidad del fluido, los parámetros C_Q y C_H son de tipo cinemático.

La Figura 11.7 no da ninguna información acerca de los efectos viscosos y de la rugosidad. Los números de Reynolds varían de 0,8 a $1{,}5 \times 10^7$, por lo que probablemente el flujo es completamente turbulento en todos los canales de paso. La rugosidad no se da, variando mucho entre las distintas bombas comerciales, pero a estos números de Reynolds tan elevados esperamos más o menos el mismo porcentaje de efecto en todas ellas. Por tanto, es común suponer que el número de Reynolds y la rugosidad relativa tienen un efecto constante, de modo que las Ecuaciones (11.23) se reducen, aproximadamente, a

$$C_H \approx C_H(C_Q) \qquad C_P \approx C_P(CQ) \tag{11.24}$$

Para bombas geométricamente semejantes esperamos que los coeficientes manométrico y de potencia sean (aproximadamente) funciones únicas del coeficiente de caudal. Debemos observar si las bombas son geométricamente semejantes al menos aproximadamente porque (1) los fabricantes colocan rotores de distinto tamaño en la misma carcasa, violando entonces la semejanza geométrica, y (2) las bombas grandes tienen una relación más pequeña entre la rugosidad y las holguras con el diámetro del rotor que las bombas pequeñas. Además, los líquidos más viscosos tendrán un efecto del número de Reynolds más importante; por ejemplo, un aumento de la viscosidad por un factor de 3 o más produce un efecto claramente visible en C_H y C_P.

El rendimiento η es adimensional y está determinado de forma única por los otros tres. Varía también con C_Q:

$$\eta \propto \frac{C_H C_Q}{C_P} = \eta(C_Q) \tag{11.25}$$

[2] Utilizamos gH como variable en lugar de H por razones dimensionales.

www.elsolucionario.net

Podemos comprobar la validez de las Ecuaciones (11.24) y (11.25) con los datos de la Figura 11.7. Los rotores con diámetros de 32 in y 38 in son un 20 por 100 diferentes en tamaño, mientras que su relación entre el tamaño del rotor y la carcasa es la misma. Los parámetros C_Q, C_H y C_P están calculados con n en rev/s, Q en ft^3/s (gal/min $\times$ 2,23 $\times$ 10^{-3}), H y D en ft, g = 32,2 ft/s^2 y la potencia al freno en caballos por 550 ft · lbf/(s · hp). Los resultados adimensionales se presentan en la Figura 11.8. Se ha definido también el coeficiente adimensional de altura neta de succión:

$$C_{HS} = \frac{g(\text{NPSH})}{n^2 D^2} = C_{HS}(C_Q) \tag{11.26}$$

Puede verse que los coeficientes C_P y C_{HS} se correlacionan casi perfectamente como una función única de C_Q, mientras que los valores para η y C_H se desvían un pequeño porcentaje. Los dos últimos parámetros son más sensibles a pequeñas discrepancias en el modelo de semejanza; puesto que la bomba más grande tiene menor rugosidad relativa y menores holguras y un número de Reynolds un 40 por 100 más grnade, proporciona una altura manométrica un poco mayor y es más eficiente. El resultado global es una resonante victoria para el análisis dimensional.

En la Figura 11.8 el punto de rendimiento máximo es aproximadamente

$$C_{Q^*} \Xi 0{,}115 \qquad C_{P^*} \Xi 0{,}65$$

$$\eta_{\text{máx}} \Xi 0{,}88: \tag{11.27}$$

$$C_{H^*} \Xi 5{,}0 \qquad C_{HS^*} \Xi 0{,}37$$

Estos valores pueden usarse para estimar las características en el PMR de bombas de cualquier tamaño de una familia geométricamente semejante. Del mismo modo, la altura manométrica para caudal nulo es $C_H(0) \Xi 6{,}0$, y por extrapolación $C_P(0) \Xi 0{,}25$ y el caudal máximo $C_{Q,\text{máx}} \Xi 0{,}23$. Obsérvese, sin embargo, que la Figura 11.8 no da información fiable acerca de, por ejemplo, las bombas con los rotores de 28 in o

www.elsolucionario.net

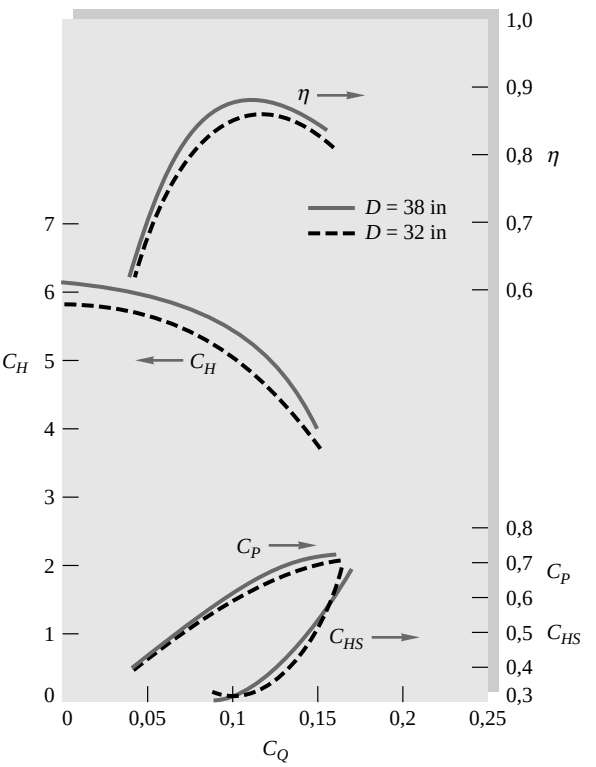


Figura 11.8. Curvas características adimensionales de una bomba obtenidas de los valores de la Figura 11.7. Estos números no son representativos para otros diseños de bombas.

www.elsolucionario.net

35 in de la Figura 11.7, las cuales tienen una relación tamaño del rotor a tamaño de carcasa diferente y deben correlacionarse por separado.

Comparando los valores de n^2D^2, nD^3 y n^3D^5 para las dos bombas de la Figura 11.7, podemos ver rápidamente por qué la bomba más grande tiene el mismo caudal, pero menor potencia y menor altura manométrica:

	D, ft	n, rev/s	Caudal nD^3, ft^3/s	Altura manométrica N^2D^2/g, ft	Potencia $\rho n^3D^5/550$, hp
Figura 11.7*a*	32/12	1170/60	370	84	3527
Figura 11.7*b*	38/12	710/60	376	44	1861
Cociente	—	—	1,02	0,52	0,53

El caudal varía como nD^3, que es aproximadamente el mismo para ambas bombas. La altura manométrica varía como n^2D^2 y la potencia como n^3D^5 para la misma ρ (agua), y éstas son aproximadamente la mitad para la bomba más grande. La NPSH varía como n^2D^2 y es también como mucho la mitad para la bomba de 38 in.

EJEMPLO 11.3

Una bomba de la familia de la Figura 11.8 tiene D = 21 in y n = 1500 rpm. Estime (*a*) el caudal, (*b*) la altura manométrica, (*c*) el incremento de presión y (*d*) la potencia al freno de la bomba con agua a 60 °F y rendimiento máximo.

Solución

Apartado (*a*)

En unidades británicas, tomamos D = 21/12 = 1,75 ft y n = 1500/60 = 25 rev/s. A 60 °F, la densidad del agua es ρ = 1,94 slugs/ft^3. Los parámetros en el PMR se toman de la Figura 11.8 o de las Ecuaciones (11.27). El caudal en el PMR es, pues,

$$Q^* = C_{Q^*} nD^3 = 0{,}115(25 \text{ rev/s})(1{,}75 \text{ ft})^3 = (15{,}4 \text{ ft}^3/\text{s})\left|448{,}8 \frac{\text{gal/min}}{\text{ft}^3/\text{s}}\right| = 6900 \text{ gal/min} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Apartado (*b*)

Análogamente, la altura manométrica en el PMR es

$$H^* = \frac{C_{H^*} n^2 D^2}{g} = \frac{5{,}0(25)^2(1{,}75)^2}{32{,}2} = 300 \text{ ft de agua} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

Apartado (*c*)

Puesto que no se hace referencia a los cambios de altura ni de velocidad entre la entrada y la salida de la bomba, los suponemos despreciables:

$$\Delta p \approx \rho g H = 1{,}94(32{,}2)(300) = 18.600 \text{ lbf/ft}^2 = 129 \text{ lbf/in}^2 \qquad \textit{Resp.}\ (c)$$

Apartado (*d*)

Finalmente, la potencia en el PMR es

$$P^* = C_{P^*} \rho n^3 D^5 = 0{,}65(1{,}94)(25)^3(1{,}75)^5$$
$$= \frac{323.000 \text{ ft lbf/s}}{550} = 590 \text{ hp} \qquad \textit{Resp.}\ (d)$$

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 11.4

Queremos construir una bomba de la familia de la Figura 11.8 que proporcione 3000 gal/min de agua a 1200 rpm cuando el rendimiento es máximo. Estime (*a*) el diámetro del rotor, (*b*) el caudal máximo, (*c*) la altura manométrica a caudal nulo y (*d*) la NPSH a rendimiento máximo.

Solución

Apartado (*a*)

3000 gal/min = 6,68 ft^3/s y 1200 rpm = 20 rev/s. En el PMR tenemos

$$Q^* = C_{Q^*} n D^3 = 6,68 \text{ ft}^3/\text{s} = (0,115)(20)D^3$$

$$D = \left(\frac{6,68}{0,115(20)} \right)^{1/3} = 1,43 \text{ ft} = 17,1 \text{ in} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Apartado (*b*)

El Q máximo está relacionado con Q^* por la relación de los coeficientes de caudal:

$$Q_{\text{máx}} = \frac{Q^* C_{Q,\,\text{máx}}}{C_{Q^*}} \equiv \frac{3000(0,23)}{0,115} = 6000 \text{ gal/min} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

Apartado (*c*)

De la Figura 11.8 estimamos que el coeficiente de altura manométrica a caudal nulo es 6,0. Por tanto,

$$H(0) \equiv \frac{C_H(0) n^2 D^2}{g} = \frac{6,0(20)^2(1,43)^2}{32,2} = 152 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}\ (c)$$

www.elsolucionario.net

Apartado (*d*)

Finalmente, de la Ecuación (11.27), la NPSH en el PMR es aproximadamente

$$\text{NPSH}^* = \frac{C_{HS^*} n^2 D^2}{g} = \frac{0,37(20)^2(1,43)^2}{32,2} = 9,4 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}\ (d)$$

Dado que ésta es una bomba pequeña, tendrá peor rendimiento que las bombas de la Figura 11.8, probablemente alrededor del 85 por 100 como máximo.

Reglas de semejanza

El éxito de la Figura 11.8 en correlacionar los datos de bombas nos lleva a reglas simples para comparar las características de bombas. Si las bombas 1 y 2 son de la misma familia geométrica y están operando en puntos homólogos (la misma posición en un gráfico adimensional como el de la Figura 11.8), la relación entre sus caudales, alturas manométricas y potencias puede darse como sigue:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 \qquad \frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^3\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^5 \qquad (11.28)$$

www.elsolucionario.net

Éstas son las *relaciones de semejanza*, que pueden usarse para estimar el efecto del cambio de fluido, velocidad o tamaño de cualquier turbomáquina dinámica, bomba o turbina, dentro de una familia geométricamente semejante. En la Figura 11.9 se presenta un gráfico en el que se esquematizan estas reglas, presentando el efecto de los cambios de la velocidad y el diámetro en las características de las bombas. En la Figura 11.9*a* se mantiene constante el tamaño mientras que se varía la velocidad en un 20 por 100, en tanto que en la Figura 11.9*b* el tamaño cambia en un 20 por 100 manteniendo la velocidad constante. Las curvas se han dibujado a escala pero con unidades arbitrarias. El efecto de la velocidad (Figura 11.9*a*) es importante, pero el efecto del tamaño es aún mayor (Figura 11.9*b*), especialmente en la potencia al freno, que varía como D^5. Por tanto, vemos que, dada una familia de bombas, generalmente es posible elegir el tamaño y la velocidad para adaptar la bomba a una gran variedad de sistemas.

Estrictamente hablando, si la semejanza es perfecta deberíamos esperar que $\eta_1 = \eta_2$, pero hemos visto que las bombas grandes son más eficientes porque el número de Reynolds es mayor y presentan menor rugosidad y holguras relativas. Se recomiendan dos fórmulas empíricas para estimar el rendimiento. La primera, desarrollada por Moody [43] para turbinas, pero también usada para bombas, tiene en cuenta el efecto del tamaño. La segunda, deducida por Anderson [44] a partir de miles de ensayos con bombas, tiene en cuenta el efecto del caudal:

Efecto del tamaño [43]:
$$\frac{1 - \eta_2}{1 - \eta_1} = \left[\frac{D_1}{D_2}\right]^{1/4} \tag{11.29a}$$

Efecto del caudal [44]:
$$\frac{0{,}94 - \eta_2}{0{,}94 - \eta_1} = \left[\frac{Q_1}{Q_2}\right]^{0{,}32} \tag{11.29b}$$

La fórmula de Anderson (11.29*b*) incluye la observación práctica de que incluso una bomba infinitamente grande tendrá pérdidas. Así, propone que la máxima eficiencia corresponde a un 94 por 100, en lugar de un 100 por 100. Anderson recomienda que se emplee la misma fórmula para el caso de turbinas, sin más que reemplazar 0,94 por 0,95. Las fórmulas de la Ecuación (11.29) presuponen los mismos valores de rugosidad relativa en ambas bombas. Así, empleando técnicas de micropulido en bombas de pequeño tamaño se pueden obtener los mismos rendimientos que en bombas grandes.

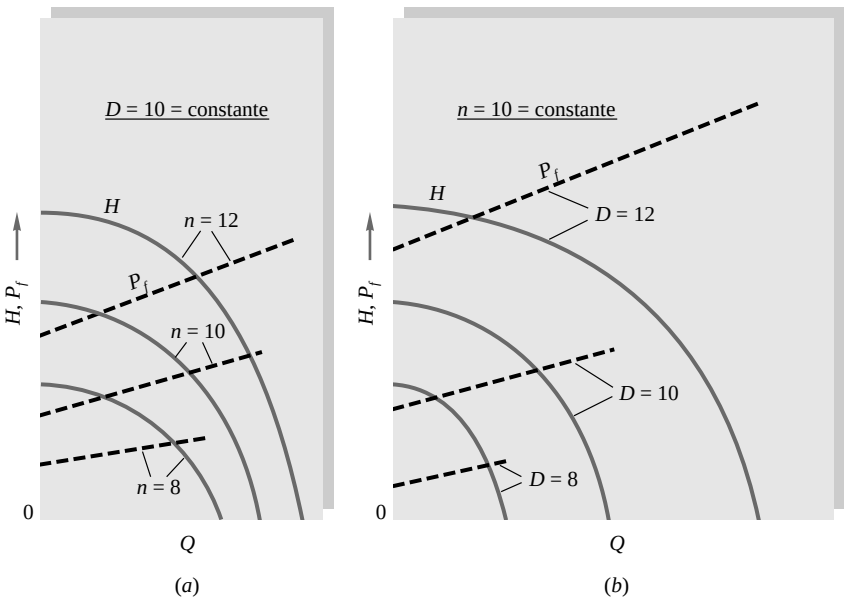


Figura 11.9. Efecto del cambio de tamaño y velocidad de giro en las curvas características de bombas semejantes: (*a*) tamaño fijo y un 20 por 100 de cambio en la velocidad de giro, (*b*) cambio de tamaño de un 20 por 100 y velocidad de giro constante.

www.elsolucionario.net

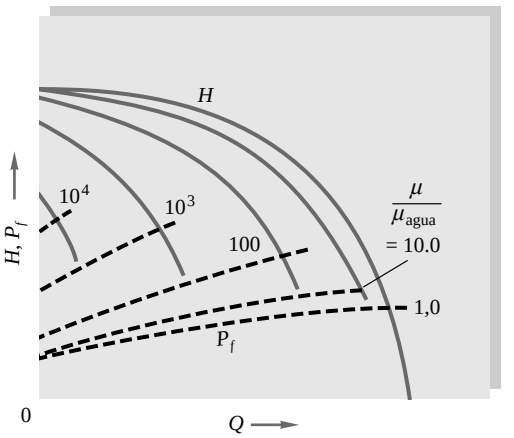


Figura 11.10. Efecto de la viscosidad en las curvas características de bombas centrífugas.

Efecto de la viscosidad

Las bombas centrífugas se usan a menudo para bombear aceites y otros líquidos viscosos con viscosidades de hasta 1000 veces la del agua. En este caso el movimiento del fluido en el interior de la bomba es poco turbulento y a veces laminar, con un efecto grande del número de Reynolds sobre las actuaciones. En la Figura 11.10 se presentan curvas típicas de la altura manométrica y la potencia al freno en función del caudal, obtenidas a partir de ensayos. Las viscosidades grandes provocan una gran caída de la presión manométrica y el caudal, aumentando la potencia necesaria. El rendimiento también se reduce sustancialmente, de acuerdo con los siguientes resultados típicos:

www.elsolucionario.net

μ/μ_{agua}	1,0	10,0	100	1000
$\eta_{máx,}$ %	85	76	52	11

Por encima de los $300\mu_{agua}$ el deterioro de las actuaciones es tan grande que resulta recomendable el uso de una bomba de desplazamiento positivo.

11.4. BOMBAS HELICOCENTRÍFUGAS Y AXIALES: LA VELOCIDAD ESPECÍFICA

En las secciones anteriores hemos visto que las bombas centrífugas modernas son máquinas formidables, capaces de proporcionar alturas manométricas muy grandes y caudales razonables, con rendimientos excelentes. Pueden servir para ser acopladas a una gran variedad de sistemas. Pero la bomba centrífuga básicamente proporciona grandes presiones manométricas con caudales pequeños, mientras que muchas aplicaciones requieren grandes caudales con presiones manométricas pequeñas. Para comprender que el diseño centrífugo no es conveniente para este tipo de sistemas, considérese el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 11.5

Se quiere utilizar una bomba centrífuga de la familia de la Figura 11.8 para suministrar 100.000 gal/min de agua a 60 °F con una velocidad manométrica de 25 ft. ¿Cuál debe ser (*a*) el tamaño de la bomba y su velocidad y (*b*) la potencia al freno, considerando que opera al rendimiento máximo?

www.elsolucionario.net

Solución

Apartado (*a*)

Empleando los coeficientes de presión manométrica y caudal para un rendimiento máximo de la Ecuación (11.27):

$$H^* = 25 \text{ ft} = \frac{C_{H^*} n^2 D^2}{g} = \frac{5,0 n^2 D^2}{32,2}$$

$$Q^* = 100.000 \text{ gal/min} = 222,8 \text{ ft}^3/\text{s} = C_{Q^*} n D^3 = 0,115 n D^3$$

Las dos incógnitas son n y D. Resolviendo el sistema anterior,

$$D = 12,4 \text{ ft} \qquad n = 1,03 \text{ rev/s} = 62 \text{ rpm} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Si no desea realizar manipulaciones algebraicas, programe las ecuaciones del Apartado (*a*) en el EES, empleando unidades inglesas:

```
25 = 5,0*n^2*D^2/32,2
222,8 = 0,115*n*D^3
```

Especifique en *Variable Info* que n y D son positivos, y EES resolverá el sistema por usted, dando la solución: `D = 12,36 ft y n = 1,027 rev/s.`

Apartado (*b*)

La potencia para el rendimiento máximo se obtiene a partir de la Ecuación (11.27):

$$P_f^* = C_{P^*} \rho n^3 D^5 = \frac{0,65(1,94)(1,03)^3(12,4)^5}{550} = 720 \text{ hp} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

www.elsolucionario.net

La solución del Ejemplo 11.5 es matemáticamente correcta pero proporciona una bomba grotesca: un rotor de más de 12 ft de diámetro girando tan lentamente que podrían verse los caballos paseando en círculo alrededor del eje.

Hay otros diseños de bombas dinámicas que pueden proporcionar una altura manométrica baja y un caudal alto. Por ejemplo, hay un tipo de bomba de 38 in, 710 rpm, con las mismas características de entrada que en la Figura 11.7*b*, que puede suministrar la altura manométrica de 25 ft y los 100.000 gal/min de caudal del Ejemplo 11.5. Esto se consigue permitiendo al fluido pasar a través del rotor con una componente axial y menor componente centrífuga. Hay que aumentar muy poco el tamaño de los conductos con el caudal, pero la caída de la velocidad radial a la salida disminuye la altura manométrica producida. Éstas son las bombas dinámicas de las familias helicocentrífugas (en parte radiales y en parte axiales) y axiales (del tipo hélice). Algunos diseños de álabes se esquematizan en la Figura 11.11, que introduce un nuevo parámetro de «diseño» interesante, la velocidad específica N_s o N_s'.

La velocidad específica

En la mayor parte de las aplicaciones se conocen la altura manométrica y el caudal para el sistema en cuestión, más un rango de velocidades impuesto por las velocidades del motor eléctrico o las exigencias de la cavitación. El proyectista puede seleccionar el tamaño y la forma (centrífuga, helicocentrífuga, axial) que mejor se ajusten a los requerimientos. Para ayudar en esta selección, necesitamos un parámetro adicional que relacione la velocidad, el caudal y la altura manométrica, pero no el tamaño. Esto se consigue eliminando el diámetro entre C_Q y C_H, aplicando el resultado sólo en el PMR. Esta relación se denomina *velocidad específica* y tiene dos formas, una adimensional rigurosa y otra más práctica:

www.elsolucionario.net

Forma rigurosa:

$$N_s = \frac{C_{Q^*}^{1/2}}{C_{H^*}^{3/4}} = \frac{n(Q^*)^{1/2}}{(gH^*)^{3/4}} \tag{11.30a}$$

Forma común:

$$N_s = \frac{(\text{rpm})(\text{gal/min})^{1/2}}{[H(\text{ft})]^{3/4}} \tag{11.30b}$$

En otras palabras: en la práctica los ingenieros no se molestan en pasar n a revoluciones por segundo o Q^* a pies cúbicos por segundo o en incluir la gravedad con la altura manométrica. No obstante, esta última podría ser necesaria para, por ejemplo, una bomba en la Luna. El factor de conversión es

$$N_s = 17.182 N_s'$$

Obsérvese que N_s sólo se aplica al PMR. Por tanto, una familia de bombas semejantes estará caracterizada por un único número. Por ejemplo, la familia de la Figura 11.8 tiene $N_s' = (0{,}115)^{1/2}/(5{,}0)^{3/4} = 0{,}1014$, $N_s = 1740$, con independencia del tamaño o la velocidad.

Resulta que la velocidad específica está directamente relacionada con el diseño de la bomba más eficiente, como se muestra en la Figura 11.11. Así, N_s bajos implican Q bajos y H altos, es decir, una bomba centrífuga. En cambio, N_s grandes implican una bomba axial. Las bombas centrífugas son mejores para N_s entre 500 y 4000, la bomba heliocentrífuga entre 4000 y 10.000 y la bomba axial por encima de 10.000. Obsérvense los cambios en la forma del rotor cuando N_s aumenta.

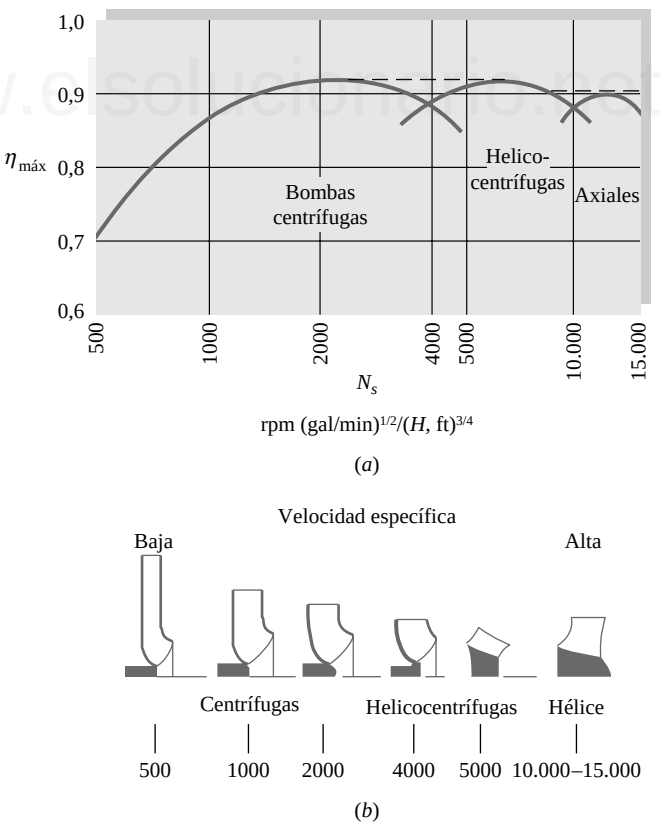


Figura 11.11. (*a*) Rendimiento máximo y (*b*) diseño del rotor de las familias de bombas dinámicas en función de la velocidad específica.

www.elsolucionario.net

Velocidad específica de succión

Si en la Ecuación (11.30) se usa la NPSH en lugar de H, el resultado se denomina *velocidad específica de succión*:

Rigurosa:
$$N_{ss} = \frac{nQ^{1/2}}{(g\ \text{NPSH})^{3/4}} \tag{11.31a}$$

Común:
$$N_{ss} = \frac{(\text{rpm})(\text{gal/min})^{1/2}}{[\text{NPSH (ft)}]^{3/4}} \tag{11.31b}$$

donde la NPSH representa la altura de succión disponible en el sistema. Los datos de Wislicenus [3] muestran que una bomba dada presenta peligro de cavitación a su entrada si

$$N'_{ss} \text{ B } 0{,}47 \qquad N_{ss} \text{ B } 8100$$

En ausencia de datos de ensayos, esta relación puede usarse para estimar la NPSH mínima requerida, para n y Q dados.

Teoría del flujo en bombas axiales

En la Figura 11.12*a* se presenta la geometría de una bomba axial de etapas múltiples. El fluido pasa de forma casi axial entre las filas alternadas de los álabes del *estátor*, en reposo, y del *rotor*, en movimiento. A menudo se aplica la hipótesis de flujo incompresible, incluso para gases, pues el incremento de presión por etapa suele ser pequeño.

El análisis vectorial simplificado supone que el flujo es unidimensional y abandona cada fila de álabes con una velocidad relativa paralela al ángulo de salida del álabe. En la Figura 11.12*b* se esquematizan los álabes del estátor y el diagrama de velocidades a la salida. Como el estátor está quieto, la velocidad absoluta V_1 es paralela al borde de salida del álabe. Restando la velocidad tangencial del rotor u de la velocidad V_1, se obtiene la velocidad relativa al rotor w_1, que en el caso ideal debe de ser paralela al borde de ataque del rotor.

En la Figura 11.12*c* se esquematizan los álabes del rotor y el diagrama de velocidades a la salida. En este caso, la velocidad relativa w_2 es paralela al borde de salida del álabe, mientras que la velocidad absoluta V_2 debería calcularse para entrar suavemente en la siguiente etapa del estátor.

La potencia y la altura manométrica teóricas están dadas por la relación de Euler para turbinas (11.11). Como no hay flujo radial, las velocidades a la entrada y la salida del rotor son iguales, $u_1 = u_2$, y la ecuación de la continuidad unidimensional exige que la componente de velocidad axial permanezca constante:

$$V_{n1} = V_{n2} = V_n = \frac{Q}{A} = \text{cte}$$

Del análisis vectorial de las velocidades se obtiene que la velocidad normal se puede relacionar con u de la siguiente forma:

$$u = \omega r_{\text{med}} = V_{n1}(\text{cotg } \alpha_1 + \text{cotg } \beta_1) = V_{n2}(\text{cotg } \alpha_2 + \text{cotg } \beta_2) \tag{11.32}$$

De este modo, se puede determinar el caudal en función de la velocidad de rotación y del ángulo de los álabes. Como además $V_{t1} = V_{n1}$ cotg α_1 y $V_{t2} = u - V_{n2}$ cotg β_2, la relación de Euler para la altura manométrica (11.11) queda

$$\begin{aligned} gH &= uV_n(\text{cotg } \alpha_2 - \text{cotg } \alpha_1) \\ &= u^2 - uV_n(\text{cotg } \alpha_1 + \text{cotg } \beta_2) \end{aligned} \tag{11.33}$$

www.elsolucionario.net

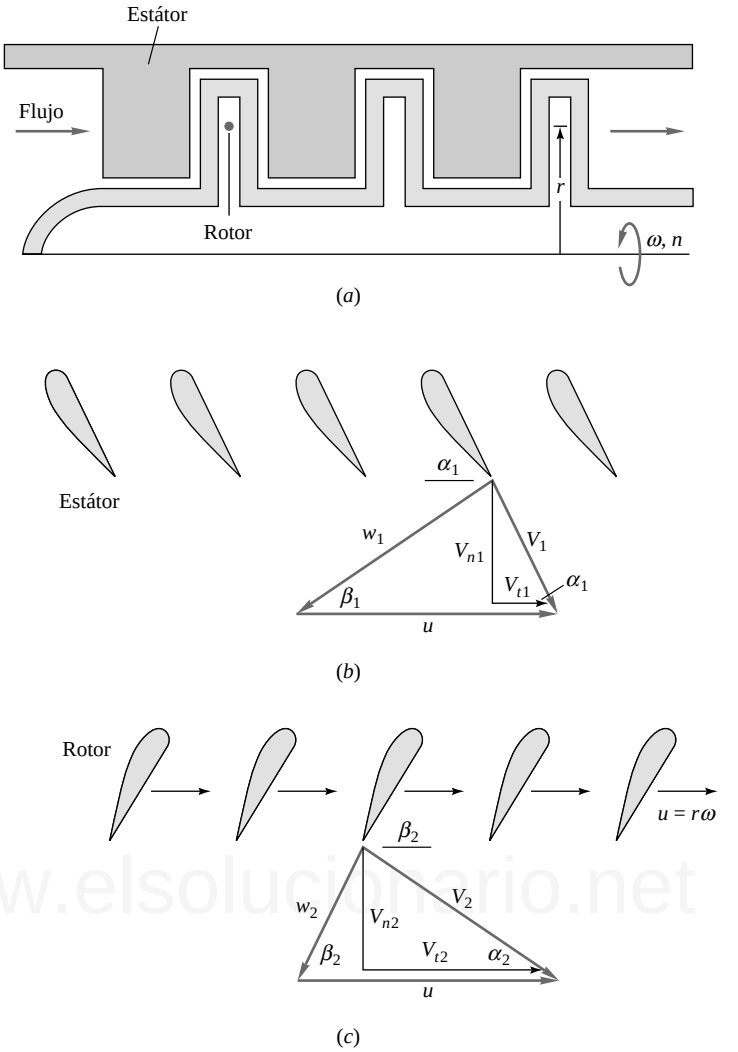


Figura 11.12. Análisis del flujo en una bomba axial: (*a*) geometría básica, (*b*) álabes del estator y diagrama de velocidad de salida, (*c*) álabes del rotor y diagrama de velocidad de salida.

en su forma habitual, al estar escrita en función de los ángulos α_1 y β_2. La altura manométrica con caudal nulo queda $H_0 = u^2/g$, como en la Ecuación (11.18) para una bomba centrífuga. El parámetro del ángulo de los álabes cotg α_1 + cotg β_2 se puede elegir negativo, nulo o positivo, lo que corresponderá a una curva de altura manométrica creciente, plana o decreciente, respectivamente, como se indica en la Figura 11.5.

Estrictamente hablando, la Ecuación (11.33) sólo se puede aplicar a un tubo de corriente de radio *r*, pero es una buena aproximación para álabes muy cortos si *r* representa el radio medio. En el caso de álabes de mayor longitud, la Ecuación (11.33) se suele sumar en bandas radiales sobre todo el área de los álabes. En casos tan complejos, los resultados pueden no ser buenos, ya que esta teoría ideal desprecia las pérdidas, por lo que generalmente predice alturas manométricas y potencias mayores que las reales.

Actuaciones de una bomba axial

Las bombas axiales, o de hélice, son la elección más eficiente cuando se buscan grandes velocidades específicas, pues proporcionan grandes caudales con bajas alturas manométricas. En la Figura 11.13 se muestra un gráfico adimensional típico para una bomba de hélice. Obsérvese que, como era de esperar, C_Q es alto y C_H bajo cuando se comparan con los de la Figura 11.8. La altura manométrica decrece rápidamente con el caudal, de modo que grandes cambios en la altura manométrica del sistema originarán cambios pe-

www.elsolucionario.net

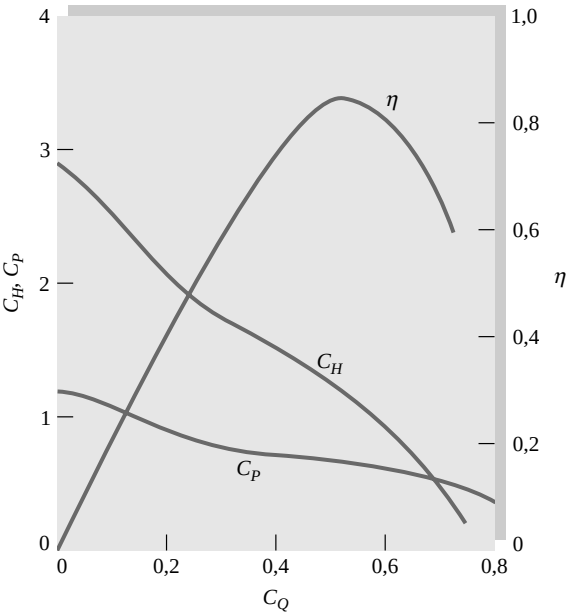


Figura 11.13. Curvas características adimensionales de una bomba axial típica, N_s = 12.000. Obtenidas de los datos dados por Stepanoff [8] para una bomba de 14 in girando a 690 rpm.

queños en el flujo. La curva de potencia decae también con la altura manométrica, lo que puede originar posibles sobrecargas si el caudal decreciese rápidamente. Finalmente, la curva del rendimiento es bastante estrecha y triangular en comparación con la curva del rendimiento de una bomba centrífuga, que es ancha y de forma parabólica (Figura 11.8).

De la Figura 11.13, $C_{Q^*} \Xi 0{,}55$, $C_{H^*} \Xi 1{,}07$, $C_{P^*} \Xi 0{,}70$ y $\eta_{máx} \Xi 0{,}84$. De estos datos obtenemos $N_s' \Xi (0{,}55)^{1/2}/(1{,}07)^{3/4} = 0{,}705$, $N_s = 12.000$. El rendimiento relativamente bajo es debido al pequeño tamaño de la bomba: d = 14 in, n = 690 rpm, Q^* = 4400 gal/min.

Si repitiésemos el Ejemplo 11.5 usando ahora la Figura 11.13, encontraríamos que con esta familia de bombas de hélice se pueden suministrar los 25 ft de altura manométrica y el caudal de 100.000 gal/min con D = 46 in y n = 430 rpm, y una potencia al freno de 750 hp, lo que representa un diseño mucho más razonable, incluso con posibles mejoras para mayores N_s.

Actuaciones de la bomba en función de la velocidad específica

La velocidad específica es un parámetro tan efectivo que se usa como un indicador tanto de las actuaciones como del rendimiento. La Figura 11.14 muestra una correlación del rendimiento óptimo de la bomba en función de la velocidad específica y el caudal. Como el parámetro dimensional Q proporciona de algún modo una medida del tamaño y del número de Reynolds, η aumenta con Q. Cuando en 1947 Wislicenus [4] publicó por primera vez correlaciones de este tipo, se denominaron *las* curvas de la bomba, un desafío a todos los fabricantes. Podemos comprobar que las bombas de las Figuras 11.7 y 11.13 se ajustan muy bien a la correlación.

La Figura 11.15 muestra el efecto de la velocidad específica en las curvas características, normalizadas con respecto al PMR. Los valores numéricos mostrados son representativos, pero sólo de forma cualitativa. Las bombas de alta velocidad específica ($N_s \Xi 10.000$) presentan curvas de altura manométrica y potencia que caen rápidamente cuando aumenta el caudal, lo que implica sobrecargas o problemas de arranque con caudales bajos. Su curva de rendimiento es muy aguda.

Una bomba de baja velocidad específica (N_s = 600) tiene una curva de rendimiento más ancha y una curva de altura manométrica que «decrece» al acercarnos a los caudales pequeños, lo que implica posibles inestabilidades durante el bombeo.

www.elsolucionario.net

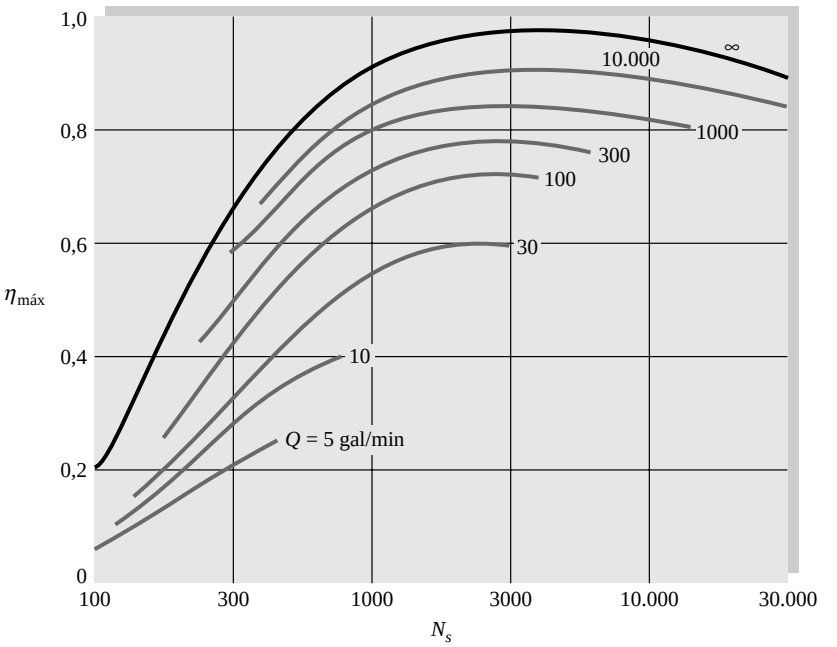


Figura 11.14. Rendimiento máximo de bombas en función del caudal y de la velocidad específica. (*Adaptado de las Referencias 4 y 31.*)

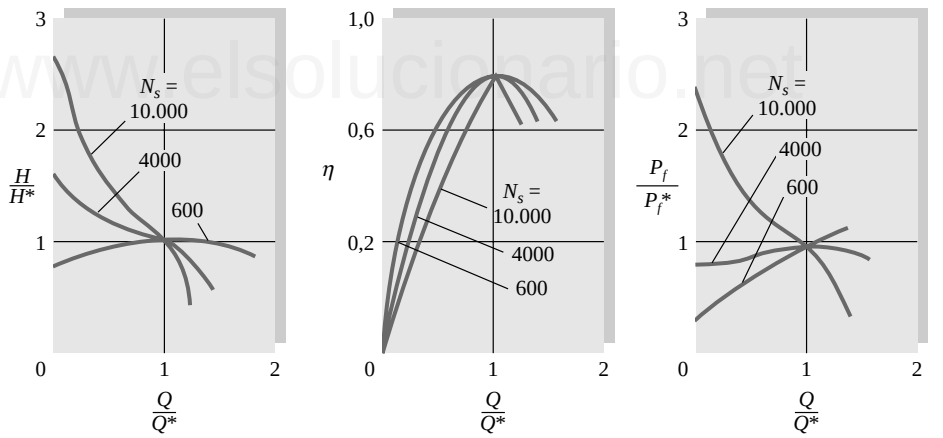


Figura 11.15. Efecto de la velocidad específica en las curvas características de las bombas.

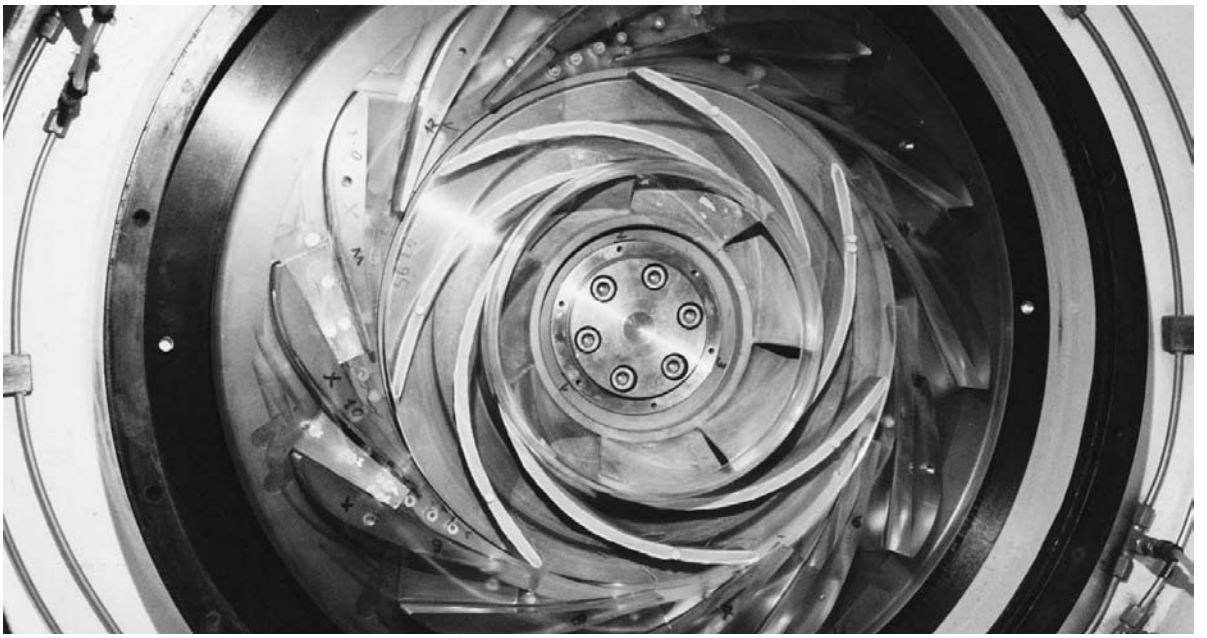
Mecánica de fluidos computacional

Tradicionalmente, el diseño de turbomáquinas ha sido altamente experimental y se ha basado en teorías simples, como las presentadas en la Sección 11.2, que sólo son capaces de reproducir tendencias. Las correlaciones adimensionales, como las de la Figura 11.15, son útiles, pero requieren experimentos muy caros. Hay que tener presente que el flujo en el interior de una bomba es tridimensional, no estacionario (periódico y turbulento), con desprendimiento de la capa límite, zonas de recirculación y estelas no estacionarias que interfieren con el difusor, los álabes y los espacios entre partes móviles. Parece evidente que no se pueden obtener predicciones cuantitativas firmes empleando para ello la teoría unidimensional.

En cambio, el moderno uso de ordenadores para el análisis de flujos puede dar resultados realistas y se está convirtiendo de hecho en una herramienta muy útil para los diseñadores de turbomáquinas. Un

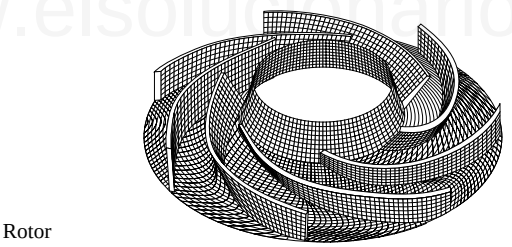
www.elsolucionario.net

buen ejemplo es la Referencia 56, en la que se presentan simultáneamente resultados experimentales y numéricos para el difusor de una bomba centrífuga. En la Figura 11.16*a* se presenta una fotografía del dispositivo. Está construido mediante Perspex transparente

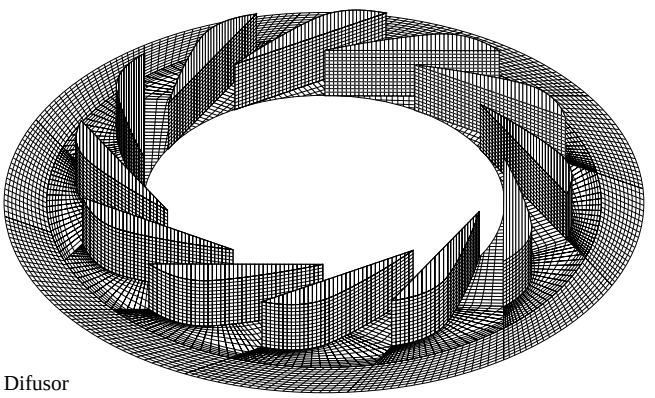


(*a*)

www.elsolucionario.net



Rotor



Difusor

(*b*)

Figura 11.16. En la actualidad el diseño de turbomáquinas involucra experimentación y Mecánica de Fluidos Computacional (CFD): (*a*) un rotor centrífugo y su difusor (*cortesía de K. Eisele et al., «Flow Analysis in a Pump Diffuser: Part 1, Measurements; Part 2, CFD», Journal of Fluids Eng. vol. 119, diciembre 1997, págs. 968-984/American Society of Mechanical Engineers*); (*b*) una malla tridimensional de un modelo CFD de este sistema (*de la Referencia 56, con permiso de la American Society of Mechanical Engineers*).

www.elsolucionario.net

para que se puedan realizar medidas de velocimetría mediante seguimiento láser de las partículas (LPTV, *Laser Particle Tracking Velocimetry*) y anemometría láser doppler (LDA, *Laser Doppler Anemometry*). Los datos experimentales se comparan con una simulación CFD del rotor y el difusor en la que se emplea la malla representada en la Figura 11.16*b*. Las simulaciones emplean un modelo de turbulencia denominado *k-ε*, muy popular en los códigos CFD comerciales (véase Sección 8.9). Los resultados son muy buenos, aunque no excelentes. El modelo CFD predice los resultados de velocidad y presión hasta que se produce la separación del flujo, momento en el que los resultados pasan a ser puramente cualitativos. Claramente, los métodos CFD están adquiriendo una gran importancia en el diseño de turbomáquinas [42, 45].

11.5. ACOPLAMIENTO DE BOMBAS A UNA RED

La última prueba de una bomba es su acoplamiento con las características de funcionamiento de una red. Físicamente, la carga requerida por el sistema debe coincidir con la altura manométrica proporcionada por la bomba, y esta intersección debería producirse en el punto de máximo rendimiento de la bomba.

La carga del sistema puede, probablemente, contener una elevación hidrostática $z_2 - z_1$ más unas pérdidas asociadas a la fricción en tuberías y empalmes:

$$H_{\text{sis}} = (z_2 \Phi z_1) + \frac{V^2}{2g} \text{™} \mathbf{Z} \frac{fL}{D} + \mathbf{Z} K \Big| \_\_ \tag{11.34}$$

donde Z*K* representa las pérdidas locales y *V* es la velocidad del fluido en el conducto principal. Puesto que *V* es proporcional al caudal de la bomba *Q*, la Ecuación (11.34) representa la curva de carga necesaria del sistema $H_s(Q)$. En la Figura 11.17 se presentan tres ejemplos: carga estática $H_s = a$, carga estática más fricción laminar $H_s = a + bQ$ y carga estática más fricción turbulenta $H_s = a + cQ^2$. La intersección de las curvas del sistema con la curva característica de la bomba $H(Q)$ determina el punto de funcionamiento. En la Figura 11.17 el punto de funcionamiento con fricción laminar corresponde al rendimiento máximo, mientras que las curvas turbulenta y estática cortan a la característica de la bomba fuera del punto de diseño. Esto puede ser inevitable si las variables del sistema cambian, pero si la bomba va a trabajar siempre fuera de diseño, el tamaño de la bomba o su velocidad deberían cambiarse. Está claro que no siempre es posible conseguir un acoplamiento perfecto, porque las bombas comerciales sólo tienen tamaños y velocidades discretos. Ilustremos estos conceptos con un ejemplo.

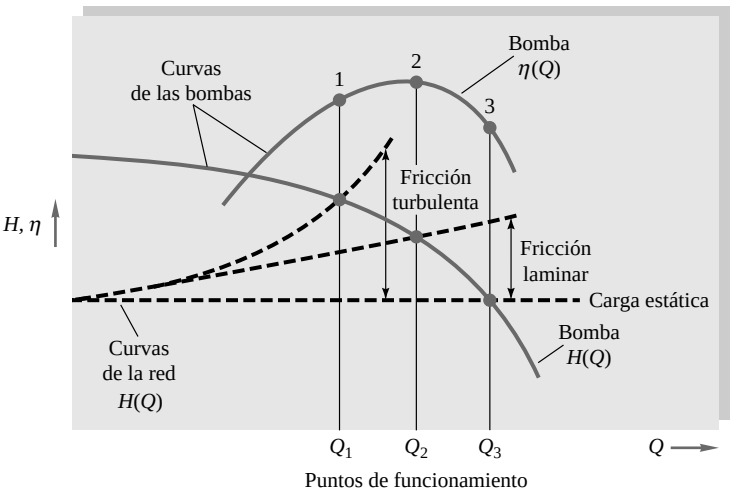


Figura 11.17. Ilustración de los puntos de funcionamiento de una bomba para tres tipos de curvas de la red.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 11.6

Se quiere utilizar la bomba de 32 in de la Figura 11.7*a* a 1170 rpm para bombear agua a 60 °F de un depósito a otro 120 ft más alto a través de una tubería de 1500 ft de largo y 16 in de diámetro *D*, con un coeficiente de fricción f = 0,030. (*a*) ¿Cuál será el punto de funcionamiento y el rendimiento? (*b*) ¿A qué velocidad debe cambiarse la bomba para que funcione en el PMR?

Solución

Apartado (*a*)

En los depósitos las velocidades son nulas. Por tanto, la carga del sistema es

$$H_s = z_2 - z_1 + \frac{V^2}{2g}\frac{fL}{D} = 120 \text{ ft} + \frac{V^2}{2g}\frac{0{,}030(1500 \text{ ft})}{\frac{16}{12} \text{ ft}}$$

Por continuidad en la tubería, $V = Q/A = Q/[\frac{1}{4}\pi(\frac{16}{12} \text{ ft})^2]$ y, sustituyendo V en la ecuación anterior, tenemos

$$H_s = 120 + 0{,}269Q^2 \qquad Q \text{ en ft}^3\text{/s} \tag{1}$$

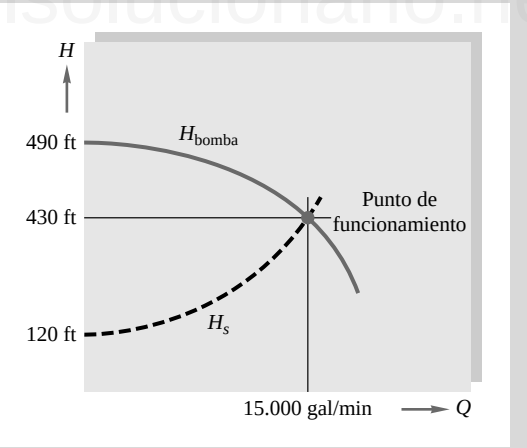
Puesto que en la Figura 11.7*a* se utilizan miles de galones por minuto en abscisas, convertiremos el valor de Q en la Ecuación (1) a estas unidades:

$$H_s = 120 + 1{,}335Q^2 \qquad Q \text{ en } 10^3 \text{ gal/min} \tag{2}$$

Podemos representar la Ecuación (2) en la Figura 11.7*a* y ver dónde corta a la curva de la altura manométrica de la bomba de 32 in, como en la Figura E11.6. Una solución gráfica proporciona aproximadamente

$$H \cong 430 \text{ ft} \qquad Q \cong 15.000 \text{ gal/min}$$

www.elsolucionario.net



E11.6

El rendimiento es aproximadamente del 82 por 100, ligeramente fuera del punto de diseño.

Es posible obtener una solución analítica si la curva de la altura manométrica de la bomba se aproxima por una parábola, lo que representa una aproximación bastante buena:

$$H_{bomba} \cong 490 - 0{,}26Q^2 \qquad Q \text{ en } 10^3 \text{ gal/min} \tag{3}$$

Las Ecuaciones (2) y (3) proporcionan el punto de funcionamiento:

$$490 - 0{,}26Q^2 = 120 + 1{,}335Q^2$$

o

$$Q^2 = \frac{490 - 120}{0{,}26 + 1{,}335} = 232$$

www.elsolucionario.net

$$Q = 15{,}2 \times 10^3 \text{ gal/min} = 15.200 \text{ gal/min} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

$$H = 490 - 0{,}26(15{,}2)^2 = 430 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Apartado (*b*)

Para cambiar el punto de funcionamiento al PMR, cambiamos n, que influye en $Q \propto n$ y $H \propto n^2$. De la Figura 11.7*a*, en el PMR, $H^* \equiv 386$ ft. Por tanto, para cualquier n, $H^* = 386(n/1170)^2$. También se tiene $Q^* \equiv 20 \times 10^3$ gal/min; luego, para cualquier n, $Q^* = 20(n/1170)$. Igualando H^* con las características del sistema, Ecuación (2), tenemos:

$$H^* = 386\left(\frac{n}{1170}\right)^2 \equiv 120 + 1{,}335\left(20\frac{n}{1170}\right)^2 \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

que proporciona $n^2 < 0$. Por tanto, con esta bomba es imposible operar en el PMR en este sistema.

Bombas conectadas en paralelo

Si una bomba proporciona la altura manométrica adecuada, pero un caudal demasiado bajo, una solución posible consiste en combinar dos bombas similares en paralelo, compartiendo la misma succión y las mismas condiciones de entrada. Una disposición en paralelo se utiliza también si varía el caudal de demanda, de modo que se usa una bomba para caudales bajos y la segunda bomba se arranca para caudales mayores. Ambas bombas deben disponer de válvulas que eviten flujo inverso cuando una de las dos se para.

Las dos bombas en paralelo no necesitan ser idénticas. Físicamente, sus caudales deben sumarse para la misma altura manométrica, como se ilustra en la Figura 11.18. Si la bomba *A* tiene una altura manométrica mayor que la bomba *B*, ésta no debe añadirse hasta que la carga de operación sea menor que la altura manométrica de la bomba *B* a caudal nulo. Puesto que la curva del sistema sube con Q, el caudal total suministrado Q_{A+B} será menor que los caudales por separado $Q_A + Q_B$ pero mayor que el suministrado por cada una de ellas. Para una curva del sistema muy horizontal (estática), dos bombas semejantes en paralelo suministran aproximadamente el mismo caudal. La potencia al freno del conjunto se obtiene sumando la potencia de cada una de las bombas *A* y *B* a la misma altura manométrica del punto de funcionamiento. El rendimiento del conjunto es igual a $\rho g(Q_{A+B})(H_{A+B})/(550\ \mathrm{P}_{f,A+B})$.

Si las bombas *A* y *B* no son idénticas, como en la Figura 11.18, la bomba *B* no debe funcionar y no puede arrancarse si el punto de funcionamiento está por encima de su altura manométrica a caudal nulo.

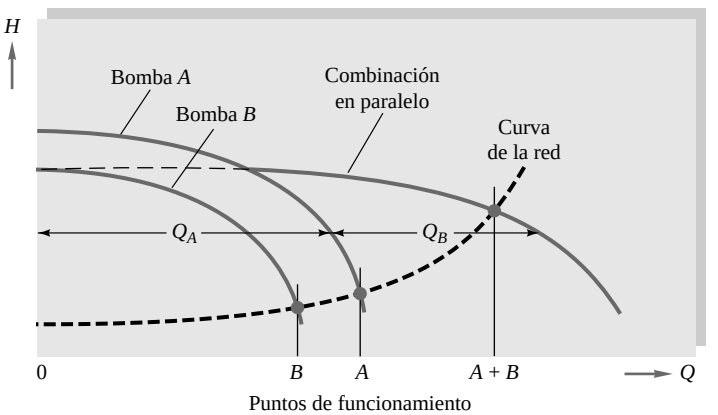


Figura 11.18. Curvas características y puntos de funcionamiento de dos bombas por separado y conectadas en paralelo a la red.

www.elsolucionario.net

Bombas conectadas en serie

Si una bomba proporciona el caudal adecuado, pero una altura manométrica demasiado baja, se puede considerar añadir una bomba semejante en serie, con la salida de la bomba *B* unida directamente al lado de succión de la bomba *A*. Como se muestra en la Figura 11.19, el principio físico para combinar dos bombas en serie es sumar las alturas manométricas de ambas para el mismo caudal, para obtener así la curva característica combinada. Las dos bombas no necesitan ser idénticas, solamente deben suministrar el mismo caudal. Las bombas podrían incluso tener diferentes velocidades, aunque normalmente están movidas por un mismo eje.

La necesidad de una combinación en serie da lugar a curvas características que decrecen más rápidamente con el caudal; esto es, la altura manométrica del conjunto es mayor que la que podría proporcionar cualquiera por separado. El punto de funcionamiento del conjunto debe corresponder a un valor mayor que el de *A* o *B* por separado, pero no tan grande como su suma. La potencia de la combinación es la suma de la potencia al freno de *A* y *B* en el punto de funcionamiento correspondiente al mismo caudal en ambas. El rendimiento del conjunto es

$$\frac{\rho g(Q_{A+B})(H_{A+B})}{550 P_{f,\,A+B}}$$

semejante al de las bombas en paralelo.

Si las bombas se usan en serie o en paralelo, el conjunto será poco económico a menos que ambas bombas funcionen cerca del punto de máximo rendimiento.

Bombas de varios escalones

Para el funcionamiento continuado con alturas manométricas muy altas, la solución es una bomba de varios escalones, con la salida de un rotor conectada directamente con la entrada del siguiente. Se han agrupado bombas centrífugas, helicocentrífugas y axiales hasta formar unos 50 escalones, con alturas manométricas por encima de 8000 pies de agua e incrementos de presión por encima de 5000 lbf/in^2. La Figura 11.20 muestra la sección de un compresor centrífugo de siete escalones para propano que proporciona un incremento de presión de 300 lbf/in^2 con un caudal de 40.000 ft^3/min y una potencia de 35.000 hp.

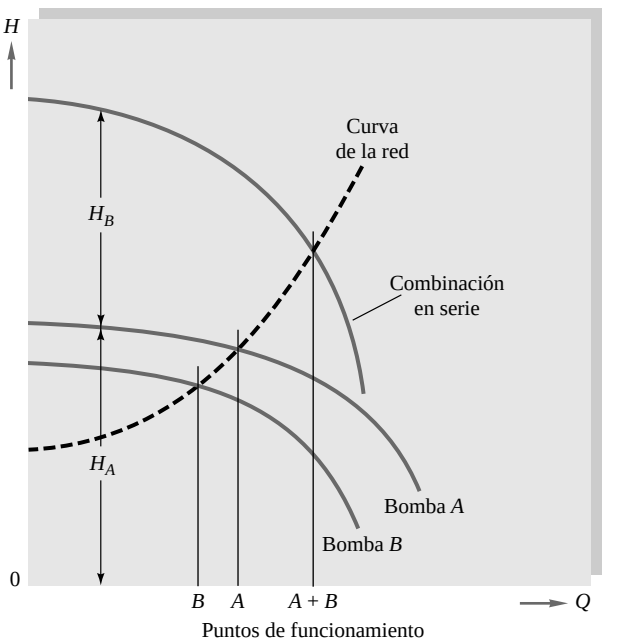


Figura 11.19. Curva característica de dos bombas conectadas en serie.

www.elsolucionario.net

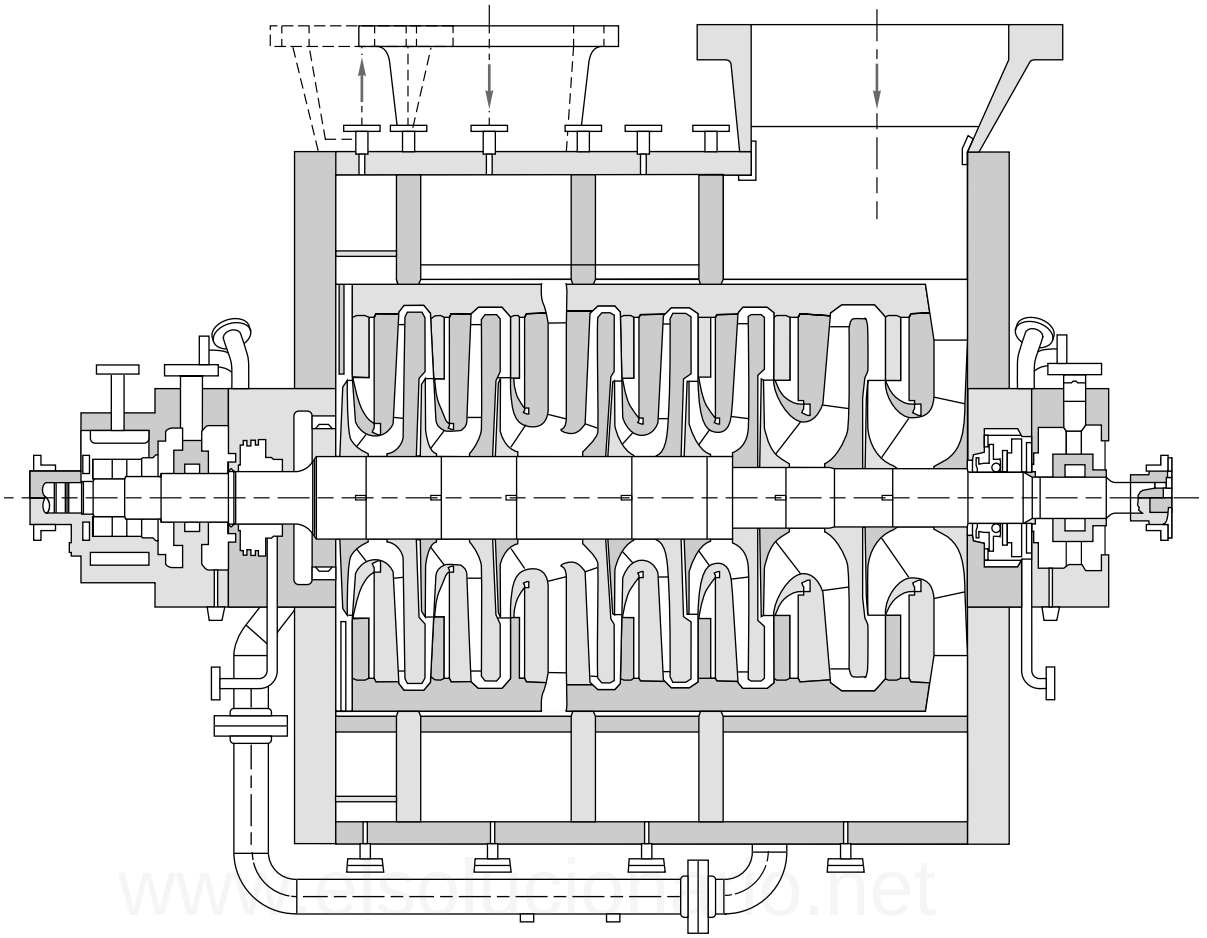


Figura 11.20. Sección transversal de un compresor centrífugo de propano de siete escalones que proporciona 40.000 ft^3/min a 35.000 hp y un salto de presiones de 300 lbf/in^2. Obsérvese la segunda entrada en el quinto escalón y el diseño variable del rotor. (*Cortesía de DeLaval-Stork V.O.F., Centrifugal Compressor Division.*)

Compresores

La mayor parte de este capítulo trata de flujos incompresibles, esto es, con variaciones despreciables de la densidad del fluido. Incluso la bomba de la Figura 11.7, que puede producir una altura manométrica de 600 ft a 1170 rpm, solamente aumenta la presión del aire en 46 lbf/ft^2, lo que implica un cambio de densidad de aproximadamente un 2 por 100. La situación cambia cuando aumenta la velocidad, recuérdese que $\Delta p \propto n^2$, y hay varios escalones de compresión, en cuyo caso se producen cambios muy grandes en la presión y la densidad. Este tipo de dispositivos se denominan *compresores*, como el de la Figura 11.20. En este caso el concepto de carga estática, $H = \Delta p/\rho g$, no es adecuado, ya que la densidad ρ varía. Las actuaciones del compresor se miden mediante (1) la relación de presiones a través de la etapa p_2/p_1 y (2) el cambio en la entalpía de remanso ($h_{02} - h_{01}$), donde $h_0 = h + \frac{1}{2}V^2$ (véase Sección 9.3). Combinando m etapas en serie se obtiene $p_{\text{final}}/p_{\text{inicial}} \equiv (p_2/p_1)^m$. Al incrementarse la densidad, se requiere menos área; obsérvese que el tamaño del rotor disminuye de derecha a izquierda en la Figura 11.20. Los compresores pueden ser de tipo centrífugo o axial [21 a 23].

El rendimiento de un compresor, entre la condición de entrada 1 y la sección final de salida f, se define como el cambio en la entalpía del gas, suponiendo flujo adiabático:

$$\Omega_{\text{comp}} = \frac{h_f \; \Phi h_{01}}{h_{0f} \; \Phi h_{01}} \equiv \frac{T_f \; \Phi T_{01}}{T_{0f} \; \Phi T_{01}}$$

www.elsolucionario.net

Los rendimientos de los compresores son similares a los de las máquinas hidráulicas ($\eta_{máx} \Xi 70$ a 80 por 100), pero su rango de caudales es más limitado: en el rango inferior como consecuencia de la *pérdida* del compresor, en la que los álabes entran en pérdida, dando lugar a la aparición de vibraciones, y en el rango superior por la aparición de *ondas de choque* (Sección 9.4), al aparecer un punto del sistema en el que el número de Mach alcanza el valor unidad. El flujo másico de un compresor se representa generalmente usando el mismo tipo de función adimensional de la Ecuación (9.47): $\dot{m}(RT_0)^{1/2}/(D^2p_0)$, en el que se alcanzará un máximo cuando comiencen a aparecer ondas de choque. Para más detalles véanse las Referencias 21 a 23.

EJEMPLO 11.7

Como extensión al Ejemplo 11.6, investigue la utilización de dos bombas de 32 in en paralelo para aumentar el caudal. ¿Es más eficiente este sistema?

Solución

Como las dos bombas son idénticas, ambas proporcionan $\frac{1}{2}Q$ a la misma velocidad de 1170 rpm. La curva del sistema es la misma y la relación entre las cargas proporciona

$$H = 490 - 0{,}26(\tfrac{1}{2}Q)^2 = 120 + 1{,}335Q^2$$

o

$$Q^2 = \frac{490 \Phi 120}{1{,}335 + 0{,}065} \qquad Q = 16.300 \text{ gal/min} \qquad \textit{Resp.}$$

Este resultado es sólo un 7 por 100 mayor que el de una bomba simple. Cada bomba proporciona un caudal $\frac{1}{2}Q =$ 8130 gal/min, para el cual el rendimiento es de sólo un 60 por 100. La potencia al freno total requerida es de 3200, mientras que una bomba simple sólo emplea 2000 hp. El diseño es poco eficiente.

www.elsolucionario.net

EJEMPLO 11.8

Supongamos que el cambio de elevación del Ejemplo 11.6 se aumenta de 120 a 500 ft, superior al que puede proporcionar una sola bomba de 32 in. Investige la posibilidad de emplear bombas de 32 in en serie a 1170 rpm.

Solución

Como ambas bombas son idénticas, la carga total será el doble y la constante 120 de la curva de carga del sistema debe reemplazarse por 500. El equilibrio de cargas proporciona

$$H = 2(490 - 0{,}26Q^2) = 500 + 1{,}335Q^2$$

o

$$Q^2 = \frac{980 \Phi 500}{1{,}335 + 0{,}52} \qquad Q = 16{,}1 \times 10^3 \text{ gal/min} \qquad \textit{Resp.}$$

La carga de funcionamiento es de $500 + 1{,}335(16{,}1)^2 = 845$ ft, un 97 por 100 mayor que la correspondiente a una sola bomba del Ejemplo 11.5. Cada bomba está operando a $16{,}1 \times 10^3$ gal/min, que en la Figura 11.7*a* representa un rendimiento del 83 por 100, un diseño bastante eficiente. Para bombear en este punto de funcionamiento se necesita una potencia de 4100 hp, unos 2050 hp para cada bomba.

11.6. TURBINAS

Una turbina extrae energía de un fluido que posee una carga elevada; pero sería demasiado simple decir que una turbina es una bomba que gira al revés. Básicamente hay dos tipos: de reacción y de impulso, según la forma en la que transforman la carga. En las *turbinas de reacción*, el fluido llena por completo los canales

www.elsolucionario.net

entre álabes, y el cambio de carga o caída de presión tiene lugar en el rotor. Los diseños de reacción pueden ser de flujo radial, heliocentrífugo y axial, y son esencialmente máquinas diseñadas para admitir un fluido con alta energía y extraer su cantidad de movimiento. Una *turbina de impulso* convierte primero la carga en un chorro de alta velocidad por medio de una tobera. En su movimiento, el chorro golpea los álabes que van pasando. Los canales del rotor no están completamente llenos de fluido y el flujo en los álabes se produce, esencialmente, a presión constante. Las turbinas de reacción son de menor tamaño, ya que el fluido llena todos los álabes a la vez.

Turbinas de reacción

Las turbinas son dispositivos de baja carga y gran caudal. El flujo es opuesto al de una bomba, entrando por la sección de mayor tamaño y descargando a través del ojo después de ceder al rotor la mayor parte de su energía. Los primeros diseños fueron muy poco eficientes porque carecían de álabes guía a la entrada para dirigir suavemente la corriente hacia los canales del rotor. La primera turbina centrípeta eficiente fue construida en 1849 por el ingeniero americano James B. Francis, y todos los diseños radiales o heliocentrífugos son conocidos como *Turbinas Francis*. Con cargas aún inferiores se pueden diseñar turbinas más compactas con flujo puramente axial, las llamadas *turbinas de hélice*. La hélice puede ser de palas fijas o ajustables (tipo Kaplan); estas últimas son más complicadas pero mucho más eficientes a bajas potencias. La Figura 11.21 muestra esquemáticamente diseños de rotor para turbinas Francis radial y helicocentrífuga y para turbinas de hélice.

Teoría ideal de turbinas radiales

Las fórmulas de Euler para turbomáquinas (11.11) también son aplicables a máquinas que extraen energía, sin más que modificar la forma de los álabes e invertir la dirección del flujo. En la Figura 11.22 se representa el rotor de una turbina axial. De nuevo se supone flujo unidimensional y sin fricción a través del rotor de la turbina. Las guías ajustables de la entrada se necesitan para obtener un buen rendimiento, ya que al conducir el flujo de entrada a los álabes con un ángulo α_2 y una velocidad absoluta V_2 se reducen las pérdidas por desprendimiento o desalineación del flujo. Después de sumar vectorialmente la velocidad del extremo del rotor $u_2 = \omega r_2$, el ángulo exterior del álabe debería ser β_2 para acomodarse a la velocidad relativa w_2, como se muestra en la figura. (Para los diagramas de velocidad de bombas, véase Figura 11.4.)

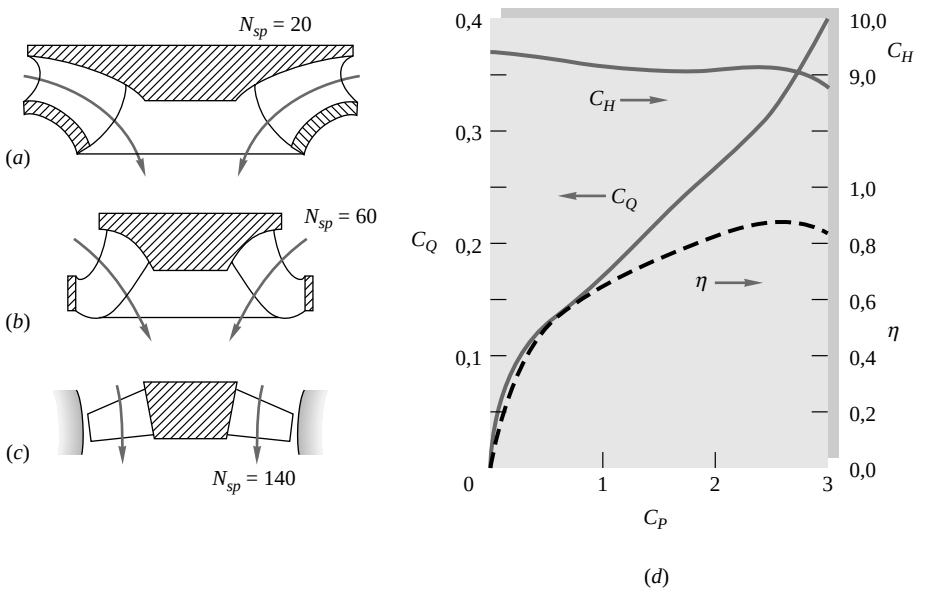


Figura 11.21. Turbinas de reacción: (*a*) Francis (tipo radial), (*b*) Francis (helicocentrípeta), (*c*) hélice (axial), (*d*) curvas características para una turbina Francis, n = 600 rpm, D = 2,25 ft, N_{sp} = 29.

www.elsolucionario.net

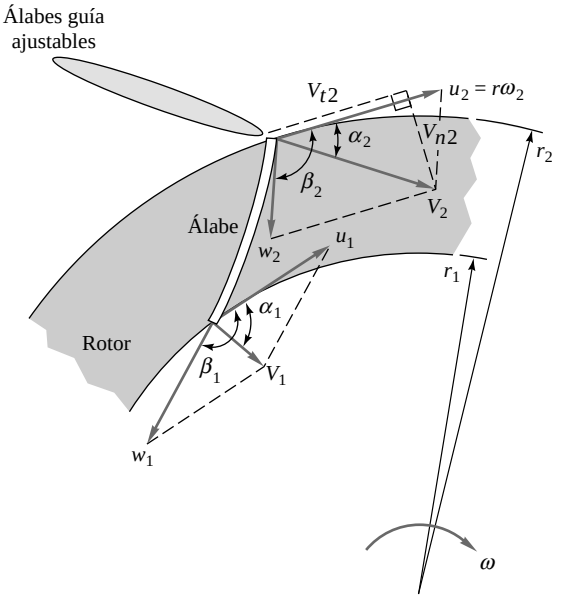


Figura 11.22. Diagramas de velocidad a la entrada y salida del rotor ideal de una turbina de reacción radial.

La aplicación del teorema del momento cinético al volumen de control de la Figura 11.22, Ecuación (3.55) (véase Ejemplo 3.14 para un caso similar), permite obtener una fórmula idealizada para la potencia P extraída por el rotor:

$$P = \omega T = \rho\omega Q(r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1}) = \rho Q(u_2 V_2 \cos \alpha_2 - u_1 V_1 \cos \alpha_1) \tag{11.35}$$

www.elsolucionario.net

donde V_{t2} y V_{t1} son las componentes circunferenciales de la velocidad a la entrada y la salida, respectivamente. Obsérvese que la Ecuación (11.35) es idéntica a la Ecuación (11.11) para una bomba radial, con la excepción de que la forma de los álabes es distinta.

La componente normal de la velocidad absoluta a la entrada $V_{n2} = V_2$ sen α_2 es proporcional al caudal Q. Si el caudal cambia y la velocidad del rotor u_2 es constante, los álabes guía deben ajustarse a un nuevo ángulo α_2 de forma que w_2 continúe siguiendo la superficie del álabe. Por tanto, los álabes guía ajustables a la entrada son fundamentales para evitar las pérdidas por aparición de ondas de choque.

Velocidad específica de turbinas

Los parámetros de las turbinas son similares a los de las bombas, pero la variable dependiente es la potencia de salida, que depende del caudal Q, la altura neta disponible H, la velocidad del rotor n y el diámetro D. El rendimiento es la potencia de salida dividida por la potencia disponible ρgQH. Las formas adimensionales son C_Q, C_H y C_P, definidas como para las bombas, Ecuaciones (11.23). Si despreciamos los efectos del número de Reynolds y de la rugosidad relativa, las relaciones funcionales se escriben con C_P como variable independiente:

$$C_H = \frac{gH}{n^2 D^2} = C_H(C_P) \qquad C_Q = \frac{Q}{nD^3} = C_Q(C_P) \qquad \Omega = \frac{P_f}{\rho gQH} = (C_P) \tag{11.36}$$

La Figura 11.21*d* muestra las curvas características típicas de una pequeña turbina Francis de tipo radial. El punto de máximo rendimiento se denomina *potencia normal*, y sus valores para esta turbina particular son

$$\eta_{máx} = 0{,}89 \qquad C_{P*} = 2{,}70 \qquad C_{Q*} = 0{,}34 \qquad C_{H*} = 9{,}03$$

www.elsolucionario.net

Un parámetro que relaciona la potencia de salida con la altura neta, con independencia del tamaño, se obtiene eliminando el diámetro entre C_H y C_P. Se denomina *velocidad específica de turbinas*:

Forma rigurosa:
$$N_{sp} = \frac{C_P^{*1/2}}{C_H^{*5/4}} = \frac{n(P_f)^{1/2}}{\rho^{1/2}(gH)^{5/4}} \tag{11.37a}$$

Forma común:
$$N_{sp} = \frac{(\text{rpm})(P_f)^{1/2}}{[H\,(\text{ft})]^{5/4}} \tag{11.37b}$$

Para el agua, $\rho = 1{,}94$ slugs/ft^3 y $N_{sp} = 273{,}3\,N'_{sp}$. Los distintos diseños de turbina se pueden clasificar, de acuerdo con el margen de velocidades específicas, del siguiente modo:

Tipo de turbina	Margen de N_{sp}	Margen de C_H
Impulso	1-10	15-50
Francis	10-110	5-25
Hélice:		
Agua	100-250	1-4
Gas, vapor	25-300	10-80

Obsérvese que N_{sp}, como N_s en el caso de las bombas, se define sólo con respecto al PMR y tiene un valor único para cada familia de turbinas. En la Figura 11.21*d*, $N_{sp} = 273{,}3(2{,}70)^{1/2}/(9{,}03)^{5/4} = 29$, con independencia de su tamaño.

Al igual que en el caso de las bombas, las turbinas de mayor tamaño son generalmente más eficientes y las Ecuaciones (11.29) se pueden usar para estimar el rendimiento en ausencia de otros datos.

El diseño completo de una turbina de generación de potencia a gran escala es un complejo proyecto de ingeniería, en el que intervienen conductos de entrada y salida, bandejas, álabes guía, compuertas, carcasas, generadores con sus sistemas de refrigeración, cojinetes y cajas de transmisión, rotores, álabes, tuberías especiales y controles automáticos. En la Figura 11.23 se presentan algunos diseños típicos de turbinas de reacción de gran tamaño. El diseño reversible bomba/turbina de la Figura 11.23*d* requiere un cuidado especial para que los álabes guía ajustables funcionen de forma eficiente en ambos sentidos.

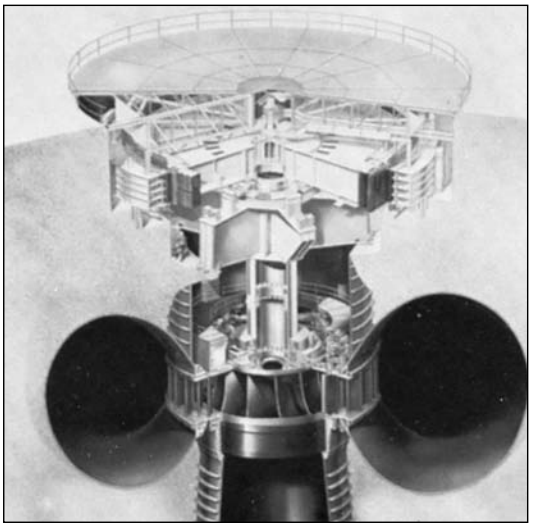
Los diseños más grandes de turbinas hidráulicas (1000 MW) resultan abrumadores cuando se comparan con la escala humana, como es el caso de la turbina mostrada en la Figura 11.24. Las ventajas económicas de los ensayos mediante modelos a escala son evidentes en esta fotografía de las turbinas Francis usadas en la presa de Grand Coulee.

Turbinas de impulso

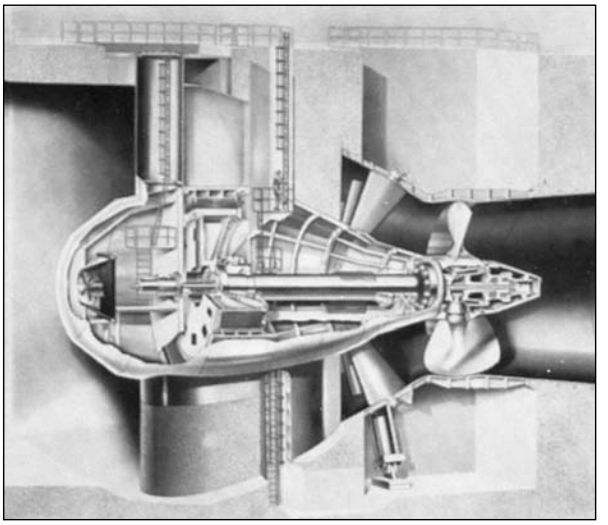
Para grandes cargas y potencias relativamente bajas, esto es, bajos N_{sp}, una turbina de reacción requeriría velocidades demasiado altas, así como una carcasa de mucho mayor espesor debido a las altas presiones que se generan en el rotor. La turbina de impulso de la Figura 11.25 es ideal para esta situación. Puesto que N_{sp} es pequeño, n será pequeño y las altas presiones estarán confinadas a la pequeña tobera, que convierte la carga en un chorro de alta velocidad V_j a la presión atmosférica. El chorro incide sobre la cazoleta y le imprime un cambio de cantidad de movimiento similar al que aparece en el análisis del volumen de control para álabes móviles del Ejemplo 3.10 o del Problema P3.51. Las cazoletas tienen forma de copa elíptica dividida por la mitad, como se observa en la Figura 11.25*b*. Se denominan *turbinas Pelton*, en honor a Lester A. Pelton (1829-1908), quien realizó el primer diseño eficiente.

Según el Ejemplo 3.10, la fuerza por unidad de gasto másico sobre una paleta, o en este caso sobre una cazoleta Pelton, es $(V_j - u)(1 - \cos\beta)$, donde u es la velocidad de la paleta y β es el ángulo de salida del chorro. Para una paleta simple, como la del Ejemplo 3.10, el flujo másico sería $\rho A_j(V_j - u)$, pero para una turbina Pelton, donde las cazoletas pasan continuamente capturando todo el flujo, el flujo másico se-

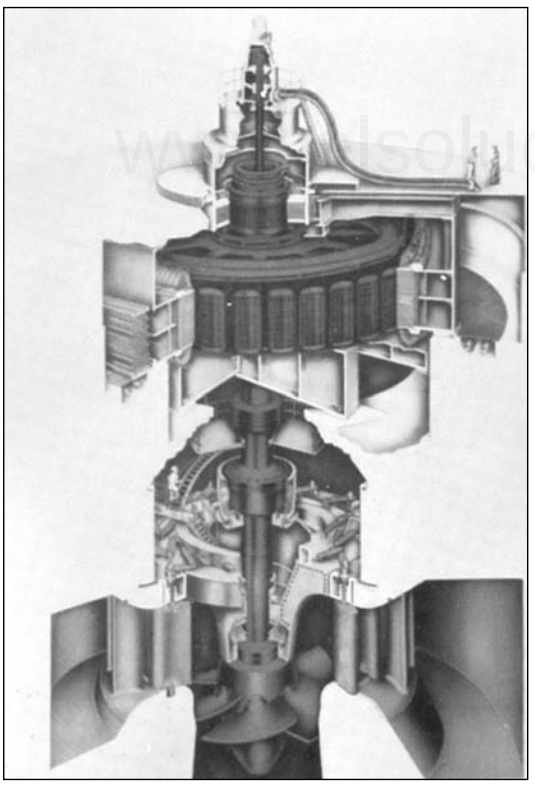
www.elsolucionario.net



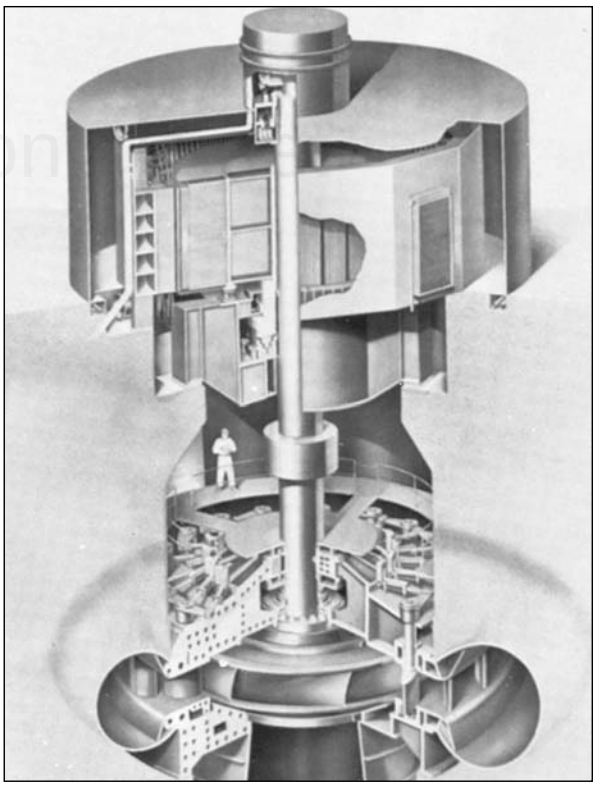
(*a*)



(*c*)



(*b*)



(*d*)

Figura 11.23. Los diseños de las turbinas de gran tamaño dependen de la carga disponible, del caudal y de las condiciones de operación: (*a*) Francis (radial), (*b*) Kaplan (hélice), (*c*) montaje en cubeta con rotor de hélice; (*d*) turbina-bomba reversible con rotor radial. (*Cortesía de Voith Siemens Hydro Power.*)

www.elsolucionario.net

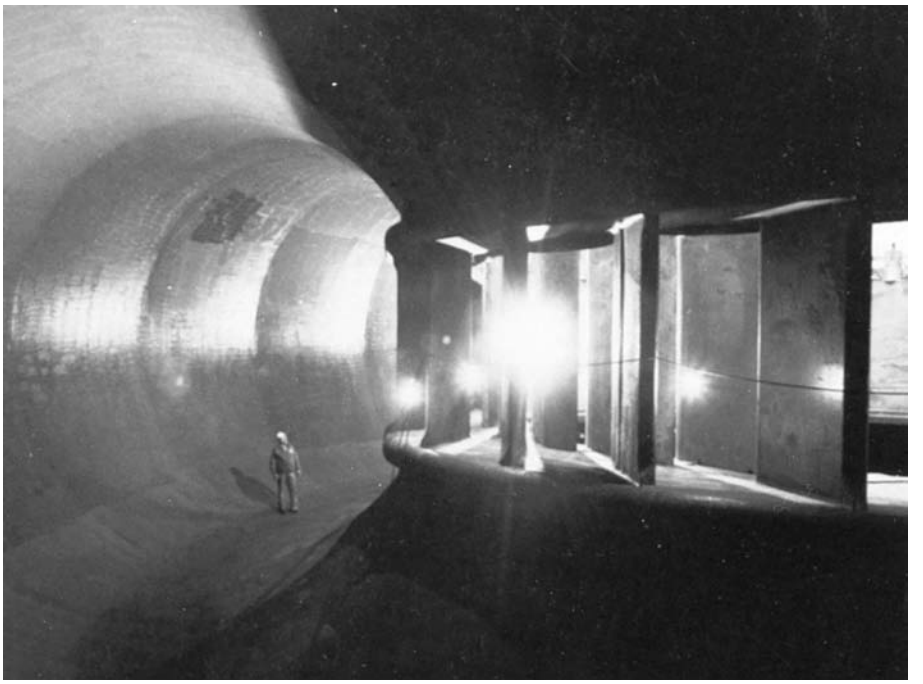


Figura 11.24. Vista interior de una de las turbinas de 1,1 millones de caballos (820 MW) instaladas en la presa de Grand Coulee, en el río Columbia. Obsérvese la carcasa en espiral, los álabes guía fijos («bastidor en anillo») y los álabes interiores ajustables («compuertas»). (*Cortesía de Voith Siemens Hydro Power.*)

ría $\rho Q = \rho A_j V_j$. Un análisis alternativo emplea la ecuación de Euler de las turbomáquinas (11.11) y el diagrama de velocidades de la Figura 11.25*c*. Obsérvese que $u_1 = u_2 = u$, y sustituyendo las velocidades absolutas tangenciales en la entrada y la salida de la turbina, la relación de potencias es:

$$P = \rho Q(u_1 V_{t1} - u_2 V_{t2}) = \rho Q\{uV_j - u[u + (V_j - u)\cos\beta]\}$$

o

$$P = \rho Q u(V_j - u)(1 - \cos\beta) \tag{11.38}$$

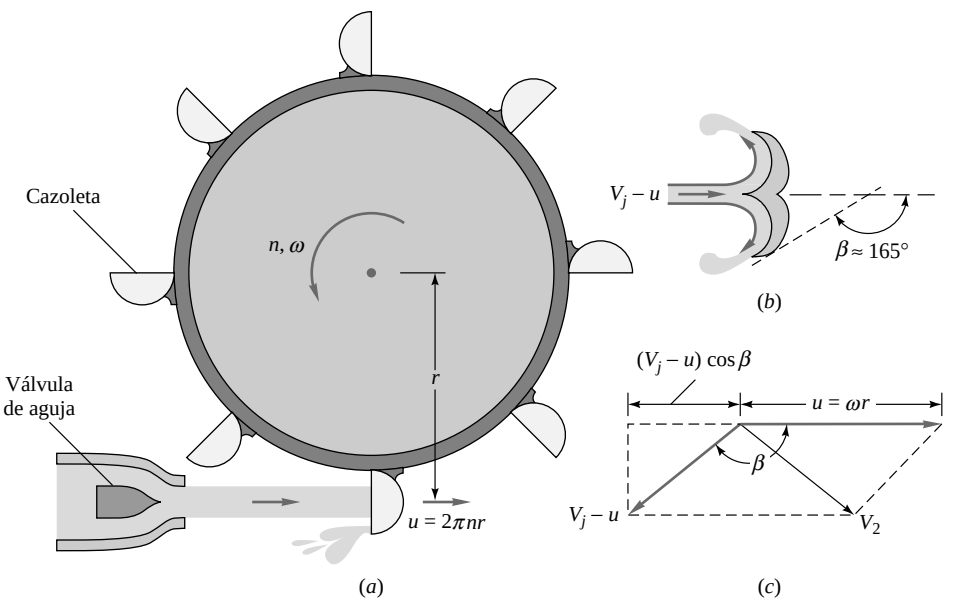


Figura 11.25. Turbina de impulso: (*a*) vista lateral de la rueda y el chorro, (*b*) cazoleta vista desde arriba, (*c*) diagrama de velocidades típico.

www.elsolucionario.net

donde $u = 2\Theta nr$ es la velocidad lineal de la cazoleta y r es el *radio de paso* o distancia al centro del chorro. El ángulo de la cazoleta $\beta = 180°$ proporciona la máxima potencia, pero físicamente es poco práctico. En la práctica, $\beta \Xi 165°$, o $1 - \cos \beta \Xi 1{,}966$, sólo un 2 por 100 menor que para potencia máxima.

La potencia teórica de una turbina de impulso, según la Ecuación (11.38), es parabólica en u y tiene un máximo en $dP/du = 0$, o

$$u^* = 2\pi n^* r = \tfrac{1}{2} V_j \tag{11.39}$$

Para una tobera perfecta, toda la altura neta se convierte en velocidad del chorro $V_j = (2gH)^{1/2}$. Realmente, dado que hay unas pérdidas en la tobera del 2 al 8 por 100, se utiliza un coeficiente de velocidad C_v:

$$V_j = C_v(2gH)^{1/2} \qquad 0{,}92 \text{ A } C_v \text{ A } 0{,}98 \tag{11.40}$$

Combinando las Ecuaciones (11.36) y (11.40), el rendimiento teórico de una turbina de impulso es

$$\boxed{\eta = 2(1 - \cos \beta)\phi(C_v - \phi)} \tag{11.41}$$

donde

$$\boxed{\forall = \frac{u}{(2gH)^{1/2}} = \text{factor de velocidad periférico}}$$

El rendimiento máximo se obtiene cuando $\phi = \tfrac{1}{2} C_v \Xi 0{,}47$.

La Figura 11.26 muestra la Ecuación (11.41) representada para una turbina ideal ($\beta = 180°$, $C_v = 1{,}0$) y para condiciones de trabajo típicas ($\beta = 160°$, $C_v = 0{,}94$). El último caso predice $\eta_{máx} = 85$ por 100 para $\phi = 0{,}47$, pero los datos de ensayo para una turbina Pelton de 24 in dan un rendimiento menor debido a las holguras, la fricción mecánica, el chapoteo y el flujo no uniforme en las cazoletas. En este ensayo $\eta_{máx} = 80$ por 100, y, generalmente hablando, una turbina de impulso no llega a ser tan eficiente como una Francis o de hélice en el PMR.

La Figura 11.27 muestra el rendimiento máximo para los tres tipos de turbinas, señalando la importancia de la velocidad específica N_{sp} como herramienta de selección para el diseñador. Estos rendimientos son máximos y se han obtenido de máquinas de gran tamaño cuidadosamente diseñadas.

La potencia disponible en una turbina puede variar como consecuencia de los cambios de altura neta o de caudal; ambos cambios son comunes en instalaciones tales como plantas hidroeléctricas. La demanda de

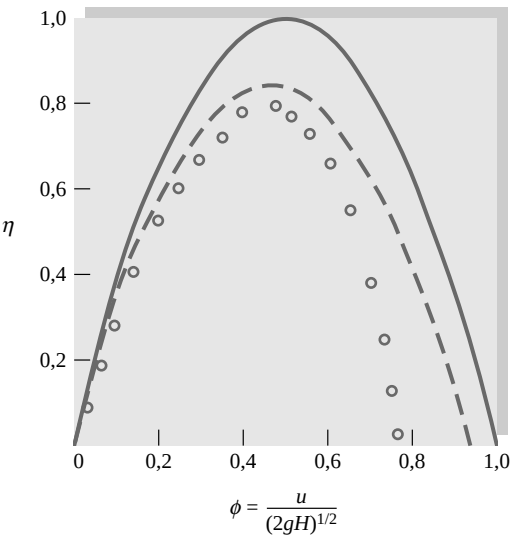


Figura 11.26. Rendimiento de una turbina de impulso calculado con la Ecuación (11.41): línea sólida = ideal, $\beta = 180°$, $C_v = 1{,}0$; línea de puntos = real, $\beta = 160°$, $C_v = 0{,}94$; círculos = datos de una turbina Pelton de 2 ft de diámetro.

www.elsolucionario.net

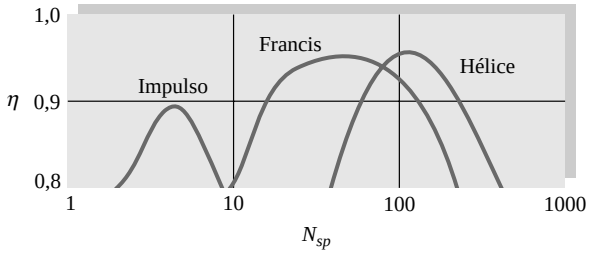


Figura 11.27. Rendimiento máximo de distintos diseños de turbinas.

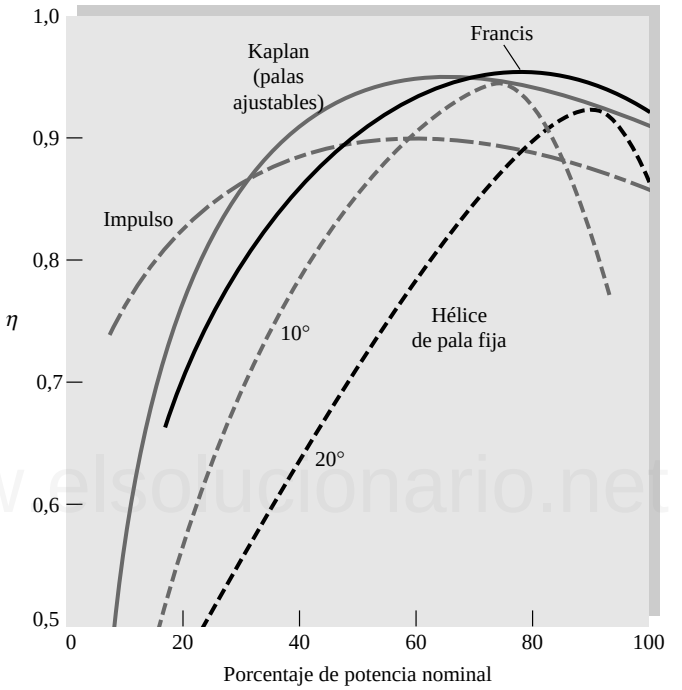


Figura 11.28. Rendimiento en función del nivel de potencia para varios diseños de turbinas, a velocidad y altura neta constantes.

potencia a la turbina también puede variar de ligera a fuerte; el cambio de respuesta se realiza variando el caudal mediante el ajuste de una válvula de compuerta o de aguja (Figura 11.25*a*). Los tres tipos de turbina tienen un rendimiento bastante uniforme en función de la potencia extraída, como se muestra en la Figura 11.28. Especialmente eficiente es la turbina de hélice de palas ajustables (tipo Kaplan), mientras que la peor es la de hélice de palas fijas. El término *potencia nominal* de la Figura 11.28 corresponde a la mayor potencia de suministro garantizada por el constructor, mientras que la *potencia normal* es la suministrada a rendimiento máximo.

Para más detalles sobre el diseño y operación de turbomáquinas se recomienda especialmente la Referencia 33. La factibilidad de microturbinas hidráulicas se discute en las Referencias 27 y 28.

EJEMPLO 11.9

Investigue la posibilidad de utilizar (*a*) una turbina Pelton similar a la de la Figura 11.26 o (*b*) una turbina Francis de la familia de las de la Figura 11.21*d* para proporcionar 30.000 hp con una altura neta de 1200 ft.

www.elsolucionario.net

Solución

Apartado (*a*)

De la Figura 11.27 se obtiene que la turbina Pelton es más eficiente

$$N_{sp} = 4,5 = \frac{(\text{rpm})(30.000 \text{ hp})^{1/2}}{(1200 \text{ ft})^{1,25}}$$

o

$$n = 183 \text{ rpm} = 3,05 \text{ rev/s}$$

De la Figura 11.26 se obtiene que el punto de máximo rendimiento ocurre cuando

$$\forall = 0,47 = \frac{\pi D(3,06 \text{ rev/s})}{[2(32,2)(1200)]^{1/2}}$$

o

$$D = 13,6 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Esta turbina Pelton es quizá un poco lenta y un poco grande. Se podría reducir D e incrementar n aumentando N_{sp} hasta 6 o 7, por ejemplo, aceptando una pequeña reducción en el rendimiento. También se podría usar una configuración de rueda doble, en la que cada una suministraría 15.000 hp, lo que permitiría cambiar D y n por un factor de $2^{1/2}$:

Rueda doble:

$$n = (183)2^{1/2} = 260 \text{ rpm} \qquad D = \frac{13,6}{2^{1/2}} = 9,6 \text{ ft} \qquad \textit{Resp.}\ (a)$$

Apartado (*b*)

La turbina Francis de la Figura 11.21*d* debe tener

www.elsolucionario.net

$$N_{sp} = 29 = \frac{(\text{rpm})(30.000 \text{ hp})^{1/2}}{(1200 \text{ ft})^{1,25}}$$

o

$$n = 1183 \text{ rpm} = 19,7 \text{ rev/s}$$

El coeficiente de potencia óptimo es

$$C_{P*} = 2,70 = \frac{P}{\rho n^3 D^5} = \frac{30.000(550)}{(1,94)(19,7)^3 D^5}$$

o

$$D^5 = 412 \qquad D = 3,33 \text{ ft} = 40 \text{ in} \qquad \textit{Resp.}\ (b)$$

Esta turbina es más rápida de lo normal y su carcasa debe soportar 1200 ft de agua o aproximadamente 520 lbf/in^2 de presión interna, pero su tamaño, de 40 in, es tremendamente atractivo. En la actualidad, las turbinas Francis están operando con alturas netas superiores a los 1500 ft.

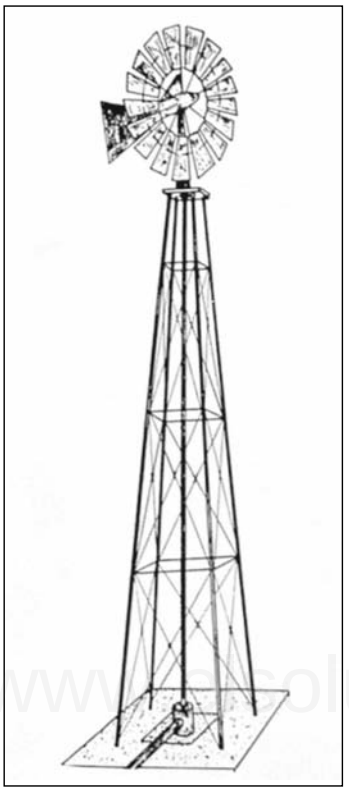
Aerogeneradores

Desde hace mucho tiempo, la energía del viento ha sido empleada como fuente de energía. Los familiares molinos de viento de cuatro palas de Holanda, Inglaterra, las islas griegas y España se han usado durante siglos para bombear agua, moler grano y serrar madera. Los desarrollos modernos se centran en la capacidad de los aerogeneradores para producir energía eléctrica. Koeppl [47] resalta el potencial de los aerogeneradores de tipo hélice. Spera [49] presenta un detallado estudio sobre la factibilidad técnica y económica de la generación de energía eléctrica a partir del viento. También pueden consultarse las Referencias 47, 48, 50 y 51.

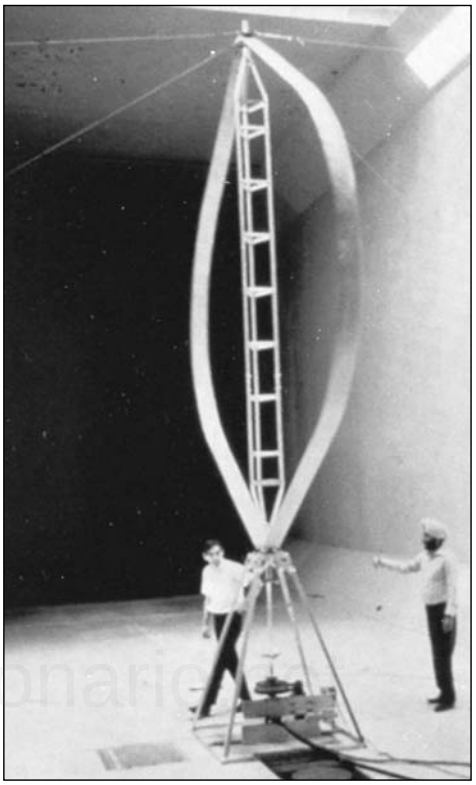
En la Figura 11.29 se presentan algunos ejemplos de diseños de aerogeneradores. El familiar molino de viento multipala norteamericano (Figura 11.29*a*) presenta una eficiencia reducida, pero están muy exten-

www.elsolucionario.net

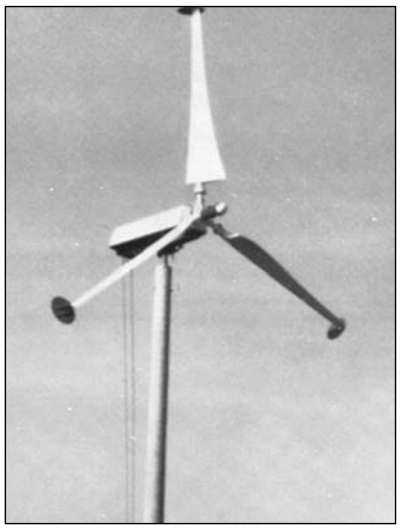
didos, pues constituyen una forma barata, fiable y robusta de bombear agua. Un diseño más eficiente es el aerogenerador de hélice de la Figura 11.29*b*, semejante al pionero sistema bipala de Smith-Putnam de 1250 kW que operó de 1941 a 1945 en la colina de Grampa, 12 millas al oeste de Rutland, en Vermont. El diseño de Smith-Putnam se rompió como consecuencia de un deficiente diseño estructural de las palas, pero fue capaz de resistir vientos de hasta 115 mi/h y su eficiencia fue ampliamente demostrada [47].



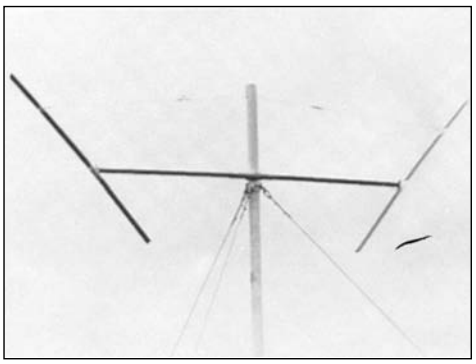
(*a*)



(*c*)



(*b*)



(*d*)

Figura 11.29. Diseños de aerogenerador: (*a*) molino de viento multipala de una granja norteamericana (HAWT), (*b*) hélice de eje horizontal (HAWT) (*cortesía de Northrop Grumman*); (*c*) aerogenerador Darrieus (VAWT) (*cortesía del National Research Council Canada*); (*d*) aerogenerador Darrieus de palas rectas (VAWT) (*cortesía del Dr. Peter Musgrove*).

www.elsolucionario.net

Los molinos de viento multipala holandeses y norteamericanos y los aerogeneradores de hélice son ejemplos de *aerogeneradores de eje horizontal* (HAWT, *horizontal-axis wind turbines*), que son eficientes pero presentan el inconveniente de que requieren sólidos arriostramientos y precisan de sistemas de transmisión para combinarlos con generadores eléctricos. Para resolver estos problemas se han diseñado los *aerogeneradores de eje vertical* (VAWT, *vertical-axis wind turbines*), en los que se simplifican las transmisiones y los requerimientos estructurales. En la Figura 11.29*c* se presenta la «batidora» VAWT inventada por G. J. M. Darrieus en 1925, que actualmente se emplea en sistemas de muestra financiados por el gobierno norteamericano. Para minimizar los esfuerzos centrífugos las palas con torsión del aerogenerador de Darrieus tienen forma de curva *troposkiana*, que es la forma de equilibrio de una cadena amarrada a dos puntos que gira sobre un eje vertical.

Otro VAWT más simple de construir que la troposkiana es el aerogenerador de Darrieus de palas rectas de la Figura 11.29*d*. Este diseño, propuesto por la Universidad de Reading, Inglaterra, tiene palas que pivotan como consecuencia de la fuerza centrífuga cuando la velocidad del viento aumenta, limitando así los esfuerzos flectores.

Teoría ideal de los aerogeneradores

El rendimiento ideal de un aerogenerador de hélice sin fricción fue predicho por A. Betz en 1920 empleando el modelo mostrado en la Figura 11.30. La hélice se representa mediante un disco imaginario que produce un salto de presiones a través del plano de la hélice, que tiene un área A y donde la velocidad local del fluido es V. El viento se representa mediante un tubo de corriente con una velocidad de entrada V_1 y una velocidad de salida V_2. La presión aumenta hasta p_b inmediatamente antes del disco y cae hasta p_a inmediatamente después, volviendo a recuperar la presión de la corriente libre en la estela aguas abajo. Como se muestra en la figura, para mantener la hélice quieta mientras extrae energía del viento, debe existir una fuerza F hacia la izquierda sobre su soporte.

Aplicando la ecuación de la cantidad de movimiento horizontal entre las secciones 1 y 2 se obtiene

$$\Sigma F_x = -F = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

www.elsolucionario.net

Una relación similar para un volumen de control que se extiende entre dos secciones situadas justo delante y justo detrás del disco proporciona

$$\Sigma F_x = -F + (p_b - p_a)A = \dot{m}(V_a - V_b) = 0$$

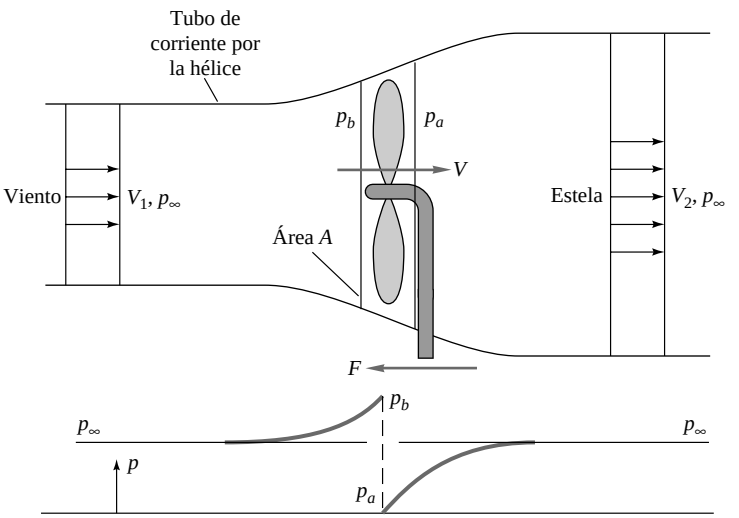


Figura 11.30. Análisis del flujo en un aerogenerador mediante la analogía del disco en un tubo de corriente.

www.elsolucionario.net

Igualando ambas ecuaciones se obtiene la fuerza sobre la hélice

$$F = (p_b - p_a)A = \dot{m}(V_1 - V_2) \tag{11.42}$$

Si suponemos que el flujo es ideal, se pueden calcular las presiones aplicando la ecuación de Bernoulli fuera del disco:

De 1 a *b*: $p_{\div} + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_b + \frac{1}{2}\rho V^2$

De *a* a 2: $p_a + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_{\div} + \frac{1}{2}\rho V_2^2$

Restando estas relaciones y teniendo en cuenta que $\dot{m} = \rho AV$ a través de la hélice, se puede sustituir $p_b - p_a$ en la Ecuación (11.42) para obtener

$$p_b - p_a = \tfrac{1}{2}\rho(V_1^2 - V_2^2) = \rho V(V_1 - V_2)$$

o

$$V = \tfrac{1}{2}(V_1 - V_2) \tag{11.43}$$

La continuidad y la conservación de la cantidad de movimiento exigen entonces que la velocidad V a través del disco sea igual a la media entre la velocidad del viento y la velocidad en la estela lejos aguas abajo.

Finalmente, la potencia extraída por el disco se puede escribir en función de V_1 y V_2 combinando las Ecuaciones (11.42) y (11.43):

$$P = FV = \rho AV^2(V_1 - V_2) = \tfrac{1}{4}\rho A(V_1^2 - V_2^2)(V_1 + V_2) \tag{11.44}$$

Para una velocidad V_1 dada, la máxima potencia posible se obtiene derivando P con respecto a V_2 e igualando a cero. El resultado es

$$P = P_{\text{máx}} = \tfrac{8}{27}\rho AV_1^3 \quad \text{para} \quad V_2 = \tfrac{1}{3}V_1 \tag{11.45}$$

www.elsolucionario.net

que corresponde a $V = 2V_1/3$ a través del disco.

La máxima potencia disponible en la hélice se obtiene de multiplicar el gasto másico a través de la hélice por la energía cinética total del viento:

$$P_{\text{disp}} = \tfrac{1}{2}\dot{m}V_1^2 = \tfrac{1}{2}\rho AV_1^3$$

Por este motivo, el máximo rendimiento posible para un aerogenerador ideal sin fricción se suele escribir en función del *coeficiente de potencia*

$$C_P = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho AV_1^3} \tag{11.46}$$

Y de la Ecuación (11.45), el máximo coeficiente de potencia es

$$C_{p,\text{máx}} = \tfrac{16}{27} = 0{,}593 \tag{11.47}$$

Éste es el denominado *número de Betz*, que sirve como referencia ideal con la que comparar el rendimiento de un aerogenerador real.

La Figura 11.31 muestra los coeficientes de potencia reales de diferentes diseños de aerogenerador. La variable independiente no es V_2/V_1 (que es una variable artificial que sólo resulta conveniente en la teoría ideal) sino la relación entre la velocidad de punta de pala ωr y la velocidad del viento. Obsérvese que la punta de la pala se puede mover mucho más rápido que el viento, algo sorprendente para los legos, pero bien conocido para los ingenieros. El aerogenerador de Darrieus comparte muchas de las ventajas de los aerogeneradores de eje vertical, pero presenta un par muy bajo a bajas velocidades (véase Figura 11.31) y gira también más lentamente que una hélice en el régimen de máxima potencia, por lo que requiere una mayor relación de multiplicación en la transmisión al generador eléctrico. El rotor de Savonius (Figura 6.29*b*) también ha sido sugerido como un diseño VAWT, por ser capaz de producir energía con velocidades del

www.elsolucionario.net

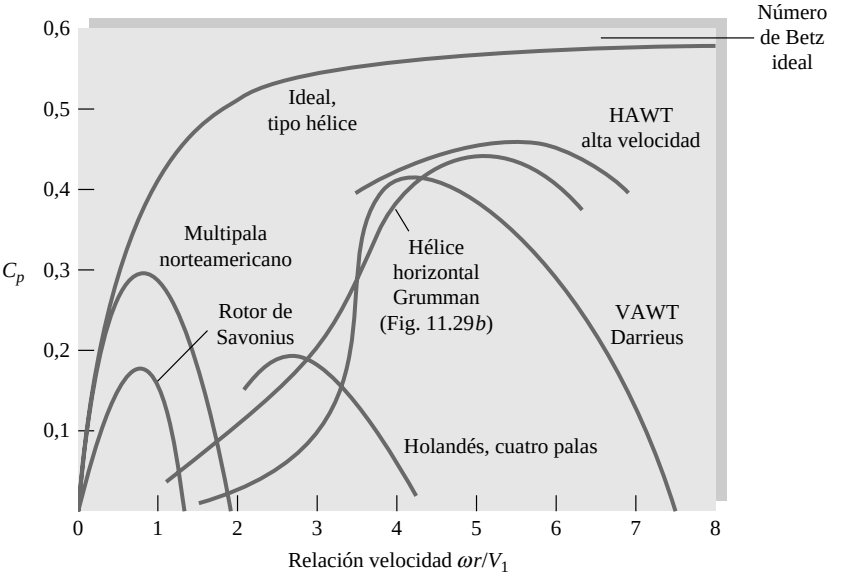


Figura 11.31. Actuaciones estimadas de diferentes diseños de aerogenerador en función de la relación de velocidad de punta de pala. (*De la Referencia 53.*)

viento muy bajas, pero es ineficiente y susceptible de sufrir daños durante tormentas, ya que no es capaz de abanderarse con vientos fuertes.

Como se muestra en la Figura 11.32, hay muchas áreas en el mundo en las que la energía eólica es una alternativa atractiva, como Irlanda, Groenlandia, Islandia, Argentina, Chile, Nueva Zelanda y España.

www.elsolucionario.net

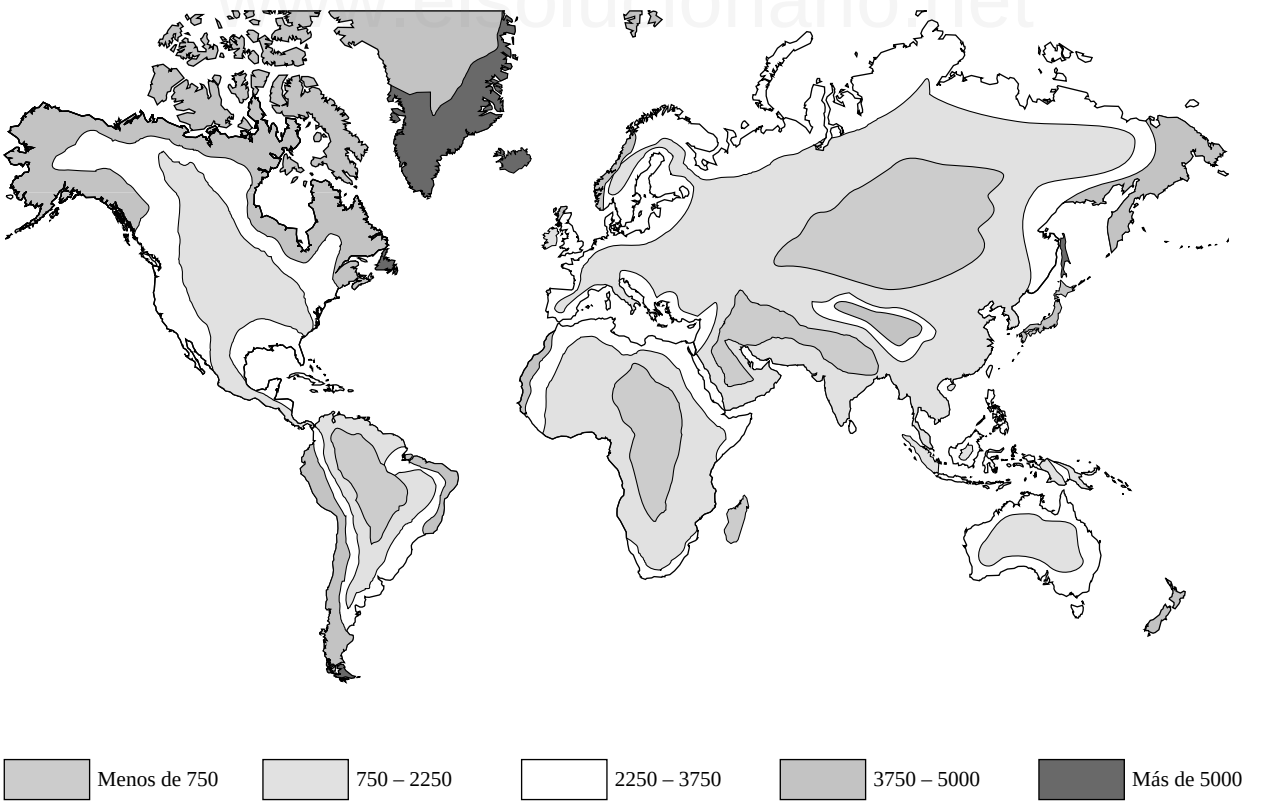


Figura 11.32. Disponibilidad mundial de energía eólica sobre tierra: producción estimada de energía eléctrica de un aerogenerador a 11,2 m/s (25 mi/h), expresada en kWh/kW. (*De la Referencia 54.*)

www.elsolucionario.net

Robinson [53] ha estimado que Australia, sólo con vientos moderados, podría producir la mitad de su energía mediante el empleo de aerogeneradores. Siempre disponibles e inagotables, los vientos, suplementados con diseños de aerogeneradores de bajo coste, se presentan como una brillante alternativa de futuro.

Por lo general, en el océano existen vientos más intensos que sobre tierra, por lo que se han sugerido muchos proyectos mar adentro [47]. En la actualidad existen varios proyectos importantes en desarrollo. En 2002, Eirtricity, la compañía irlandesa de electricidad, comenzó a construir un campo de 200 aerogeneradores en la costa del Mar de Irlanda, en aguas poco profundas situadas a 7 km de Arklow, en la costa este. Cada aerogenerador dispone de un rotor de 60 m de diámetro y puede generar una potencia de 2,6 MW. El coste estimado de la instalación es de 563 millones de dólares (aproximadamente 1000 dólares por MW). Eirtricity predice que, si existiera un apoyo político claro, la energía del viento de las costas podría producir dos tercios de las necesidades energéticas de Europa en el año 2020.

Resumen

El diseño de turbomáquinas es probablemente la aplicación más práctica y activa de los principios de la Mecánica de Fluidos. En el mundo se están usando miles de millones de bombas y turbinas y miles de compañías investigan para mejorar sus diseños. En este capítulo se han estudiado los dispositivos de desplazamiento positivo y, con más detalle, las máquinas rotodinámicas. Tomando como ejemplo la bomba centrífuga, se han desarrollado los conceptos de par, potencia, carga, caudal y rendimiento para una turbomáquina. Del análisis dimensional se obtienen las reglas de semejanza y algunas curvas características adimensionales para dispositivos centrífugos y axiales. El parámetro simple más útil de las bombas es la velocidad específica, que permite apuntar el tipo de diseño que se requiere. Una aplicación interesante es la teoría de la combinación de bombas en serie y en paralelo.

Las turbinas extraen energía de los fluidos en movimiento y pueden ser de dos tipos: turbinas de impulso, que convierten la cantidad de movimiento en una corriente a gran velocidad, y las turbinas de reacción, donde la caída de presión ocurre en el flujo interior a los álabes. Por analogía con las bombas, la velocidad específica es un parámetro fundamental en las turbinas y se emplea para clasificarlas en turbinas de impulso, Francis y diseños tipo hélice. Un caso especial de turbinas de reacción con flujo libre son los aerogeneradores. Se han discutido distintos tipos de aerogeneradores, comparando sus actuaciones.

Problemas

La mayoría de los problemas propuestos aquí son bastante sencillos. Los más difíciles, o de final abierto, se indican con un asterisco. Para resolver los problemas señalados con un icono EES se recomienda el uso del Resolvedor de Ecuaciones de Ingeniería (EES, *Engineering Equation Solver*), mientras que los problemas señalados con un disquete pueden requerir el uso de un ordenador. Los problemas estándar de final de capítulo P11.1 a P11.103 (ordenados por temas en la lista de abajo) están seguidos por los problemas conceptuales C11.1 a C11.10, los problemas extensos PE11.1 a PE11.6 y el proyecto de diseño D11.1.

Distribución de los problemas

Sección	Tema	Problemas
11.1	Introducción y clasificación	P11.1-P11.14
11.2	Teoría de bombas centrífugas	P11.15-P11.21
11.3	Actuaciones de bombas y reglas de semejanza	P11.22-P11.41
11.3	Carga neta de succión positiva	P11.42-P11.44
11.4	Velocidad específica: bombas helicocentrífugas y axiales	P11.45-P11.62
11.5	Acoplamiento de bombas a redes	P11.63-P11.73
11.5	Bombas en paralelo o en serie	P11.74-P11.81
11.5	Inestabilidades en bombas	P11.82-P11.83
11.6	Turbinas de reacción e impulso	P11.84-P11.99
11.6	Aerogeneradores	P11.100-P11.103

P11.1 Describa la geometría y funcionamiento de la bomba peristáltica de desplazamiento positivo (PDP) por excelencia del cuerpo humano. ¿En qué se diferencian ambos ventrículos?

P11.2 ¿Cuál debería ser la clasificación técnica de las siguientes turbomáquinas: (*a*) un ventilador de una vivienda, (*b*) un molino de viento, (*c*) la hélice de un avión, (*d*) la bomba de combustible de un coche, (*e*) un eyector, (*f*) una transmisión hidráulica y (*g*) la turbina de vapor de una planta de potencia?

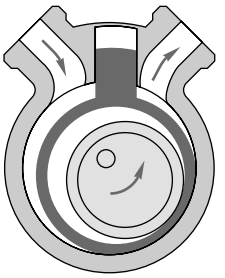
P11.3 Una PDP puede bombear casi todo tipo de fluidos, pero siempre existe un límite con viscosidades muy altas para las que su rendimiento se reduce. ¿Podría explicar cuál es la razón probable?

P11.4 Una interesante turbomáquina es el *convertidor de par*, que combina una bomba con una turbina para cambiar el par transmitido entre dos ejes. Realice un proyecto sobre este concepto y descríbalo a la clase mediante un informe, esquemas y datos de sus actuaciones.

P11.5 ¿Qué tipo de bomba es la mostrada en la Figura P11.5? ¿Cómo funciona?

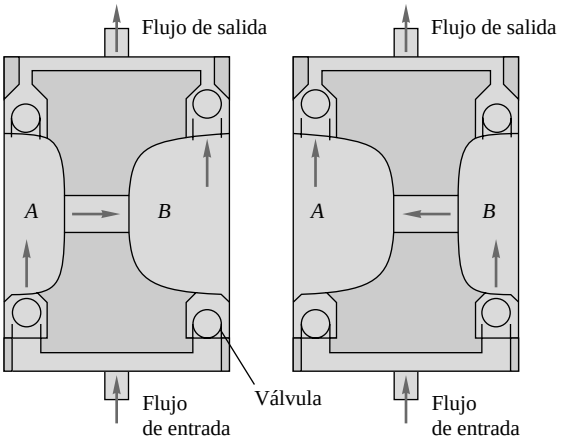
P11.6 En la Figura P11.6 se presentan dos puntos separados medio periodo durante la operación de una bomba.

www.elsolucionario.net

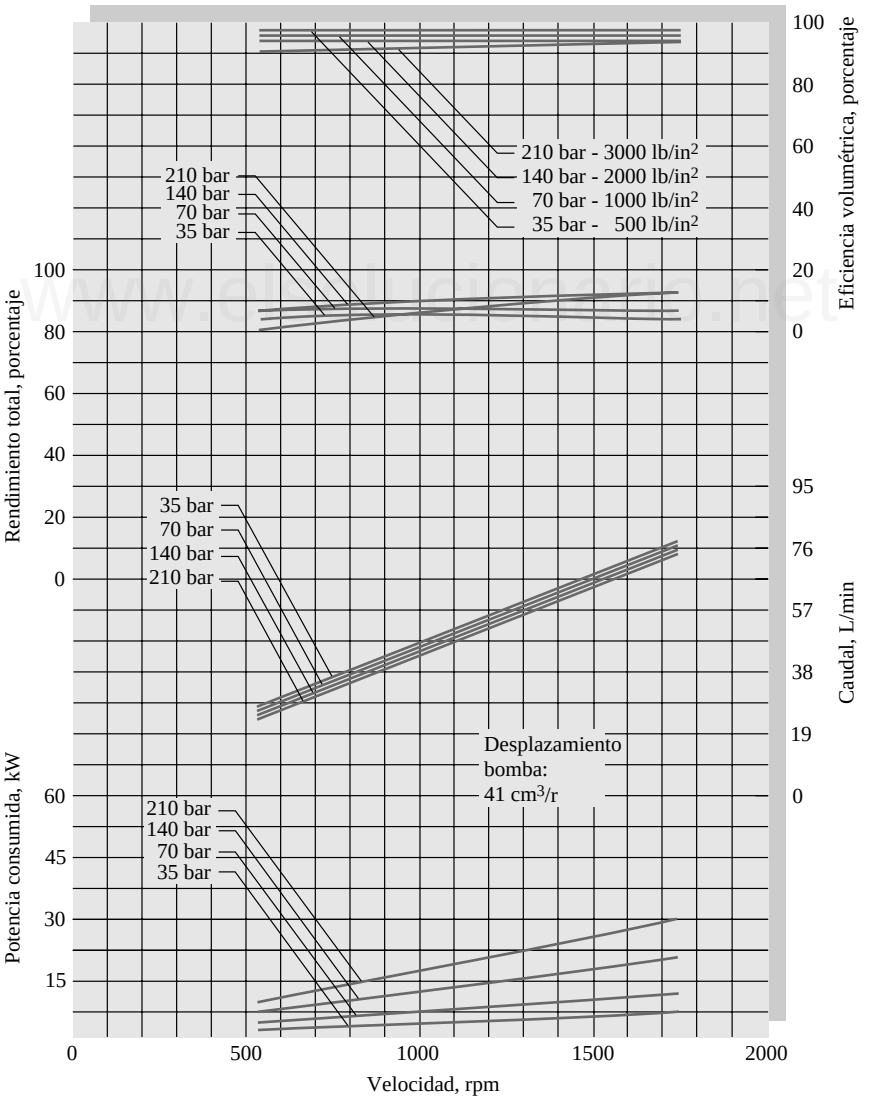


P11.5

¿De qué tipo de bomba se trata [13]? ¿Cómo funciona? Dibuje una estimación del caudal en función del tiempo durante unos pocos ciclos.



P11.6



P11.9. Actuaciones de la bomba de pistón modelo PVQ40 usada con aceite SAE 10W a 180 °F. (*Cortesía de Vickers Inc., PDN/PACE Division.*)

www.elsolucionario.net

P11.7 Un pistón PDP tiene 5 in de diámetro, una carrera de 2 in y opera a 750 rpm con un 92 por 100 de rendimiento volumétrico. (*a*) ¿Cuál es su caudal en galones por minuto? (*b*) Si la bomba funciona con aceite SAE 10W a 20 °C con una carga de 50 ft, ¿qué potencia se requiere cuando el rendimiento medio es del 84 por 100?

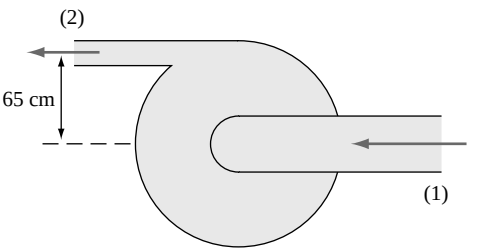
P11.8 Una bomba centrífuga proporciona 550 gal/min de agua a 20 °C con un consumo de potencia de 22 hp y un rendimiento del 71 por 100. (*a*) Estime el aumento de carga en pies y el incremento de presión en libras fuerza por pulgada cuadrada. (*b*) Estime también el aumento de carga y la potencia si se proporcionan 550 gal/min de gasolina a 20 °C.

P11.9 En la Figura P11.9 se muestran las curvas características medidas de una bomba de pistón modelo Vickers PVQ40 que trabaja con aceite SAE 10W a 180 °F ($\rho \Xi$ 910 kg/m^3). Realice observaciones generales de estos datos comparándolos con los de la Figura 11.2 y comente las principales características de funcionamiento de las bombas de pistón.

P11.10 Supongamos que la bomba de la Figura P11.9 está funcionando a 1100 rpm con un aumento de presión de 210 bar. (*a*) Empleando el desplazamiento medido, estime el caudal producido en galones por minuto. Estime, a partir del gráfico, (*b*) el caudal real y (*c*) el rendimiento medio.

P11.11 Una bomba proporciona 1500 l/min de agua a 20 °C con un incremento de presión de 270 kPa. El cambio de energía cinética y potencial es despreciable. Si el motor proporciona una potencia de 9 kW, ¿cuál es el rendimiento medio?

P11.12 En los ensayos de la bomba centrífuga de la Figura P11.12 se toman los siguientes datos: p_1 = 100 mmHg (absoluta) y p_2 = 500 mmHg (manométrica). Los conductos tienen diámetros D_1 = 12 cm y D_2 = 5 cm. El caudal es de 180 gal/min de aceite ligero (S = 0,91). Estime (*a*) la altura manométrica producida en metros y (*b*) la potencia de entrada requerida con un rendimiento del 75 por 100.

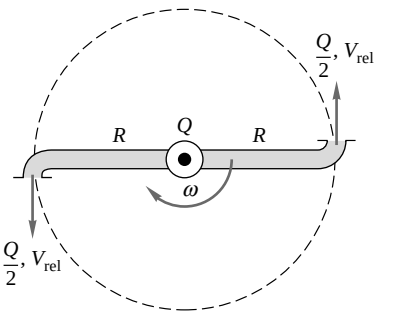


P11.12

P11.13 Una bomba de 20 hp proporciona 400 gal/min de gasolina a 20 °C con un rendimiento del 75 por 100. ¿Qué altura manométrica e incremento de presión se producen a través de la bomba?

P11.14 Una bomba proporciona gasolina a 20 °C y 12 m^3/h. En la entrada p_1 = 100 kPa, z_1 = 1 m y V_1 = 2 m/s. En la salida p_2 = 500 kPa, z_2 = 4 m y V_2 = 3 m/s. ¿Cuánta potencia se requiere si el rendimiento del motor es del 75 por 100?

P11.15 Un aspersor se puede emplear como una turbina simple. Según se muestra en la Figura P11.15, el flujo entra en el centro con dirección normal al papel y se separa en dos chorros con $Q/2$ y V_{rel} que abandonan las tuberías. Los brazos giran a una velocidad angular ω y transmiten su trabajo a un eje. Dibuje el diagrama de velocidades de esta turbina. Despreciando el efecto de la fricción, escriba una expresión para la potencia transmitida al eje. Encuentre la velocidad de rotación para la que la potencia es máxima.

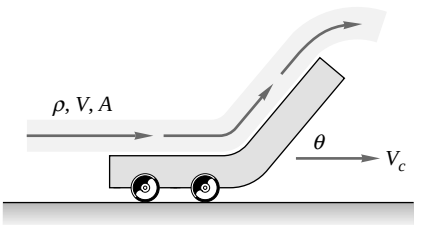


P11.15

P11.16 Para la «turbina aspersor» de la Figura P11.15, sea R = 18 cm, con un caudal total de 14 m^3/h de agua a 20 °C. Si el diámetro de la tobera de salida es de 8 mm, estime (*a*) la máxima potencia producida en watios y (*b*) la velocidad de rotación adecuada en revoluciones por minuto.

P11.17 Una bomba centrífuga tiene d_1 = 7 in, d_2 = 13 in, b_1 = 4 in, b_2 = 3 in, β_1 = 25°, β_2 = 40° y gira a 1160 rpm. Si el fluido de trabajo es gasolina a 20 °C y el flujo entra radialmente sobre los álabes, estime teóricamente (*a*) el caudal en galones por minuto, (*b*) la potencia en caballos y (*c*) la altura manométrica en pies.

P11.18 Un chorro con velocidad V incide sobre una paleta que se mueve hacia la derecha con velocidad V_c, como se mestra en la Figura P11.18. La paleta está doblada con un ángulo θ. Obtenga una expresión para la potencia producida. ¿Cuál es la velocidad de la paleta para la que la potencia es máxima?



P11.18

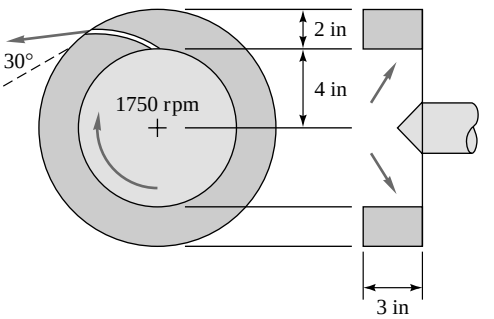
P11.19 Una bomba centrífuga tiene r_2 = 9 in, b_2 = 2 in, β_2 = 35° y gira a 1060 rpm. Si produce una altura manométrica de 180 ft, determine teóricamente (*a*) el caudal en galones por minuto y (*b*) la potencia en caballos. Asuma que el flujo entra radialmente.

P11.20 Supongamos que en el Problema P11.19 se da la potencia teórica $P_w \Xi$ 153 hp. ¿Es posible calcular (*a*) el

www.elsolucionario.net

caudal y (*b*) la altura manométrica? Resuelva el problema explicando las posibles complicaciones.

P11.21 La bomba centrífuga de la Figura P11.21 proporciona un caudal de 4200 gal/min de gasolina a 20 °C con un flujo de entrada casi radial. Estime teóricamente (*a*) la potencia en caballos, (*b*) el aumento de la altura manométrica y (*c*) el ángulo más apropiado de los álabes en el interior del rotor.



P11.21

P11.22 Una bomba centrífuga de 37 cm de diámetro funcionando a 2140 rpm con agua a 20 °C proporciona las siguientes actuaciones:

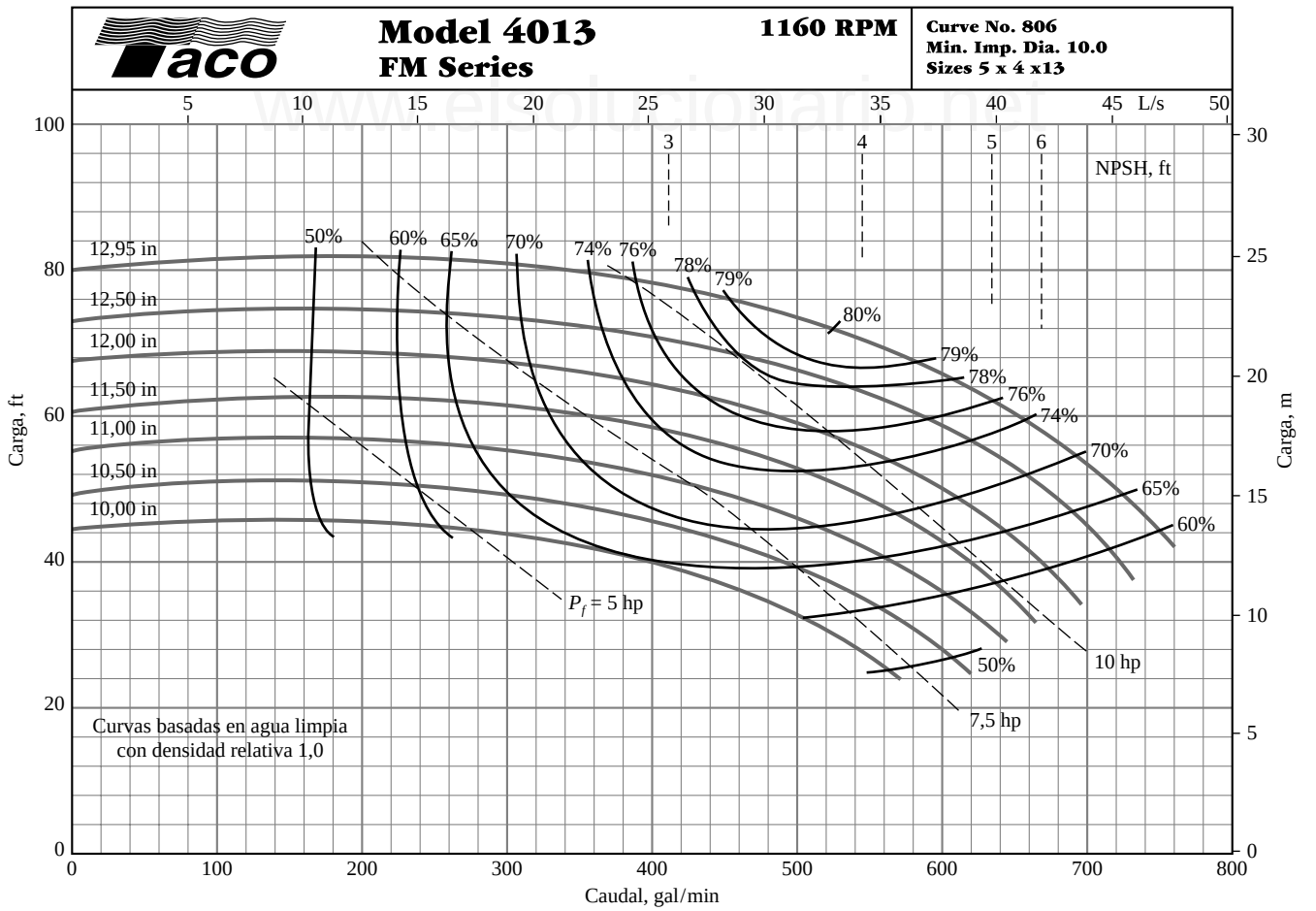
Q, m^3/s	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	030
H, m	105	104	102	100	95	85	67
P, kW	100	115	135	171	202	228	249

(*a*) Determine el punto de máximo rendimiento. (*b*) Represente C_H frente a C_Q. (*c*) Si se desea emplear esta familia de bombas para proporcionar 7000 gal/min de queroseno a 20 °C con una potencia de entrada de 400 kW, ¿cuál sería la velocidad de la bomba en revoluciones por minuto y el tamaño del rotor en centímetros? ¿Qué altura manométrica proporcionaría?

P11.23 Si la bomba de 38 in de diámetro de la Figura 11.7*b* se usa para proporcionar queroseno a 20 °C a 850 rpm y 22.000 gal/min, ¿qué (*a*) altura manométrica y (*b*) potencia al freno podría proporcionar?

P11.24 La Figura P11.24 presenta las curvas características para la bomba Taco, Inc., modelo 4013. Calcule la relación entre la altura manométrica con caudal nulo y su valor ideal U^2/g para los siete tamaños de rotor. Determine la media y la desviación típica de esta relación y compare la media con la de los seis rotores de la Figura 11.7.

P11.25 ¿A qué velocidad, en revoluciones por minuto, debería funcionar la bomba de 35 in de diámetro de la Figu-



P11.24. Actuaciones de una bomba centrífuga. (*Cortesía de Taco, Inc., Cranston, Rhode Island.*)

www.elsolucionario.net

ra 11.7*b* para producir una altura manométrica de 400 ft con un caudal de 20.000 gal/min? ¿Qué potencia al freno en caballos se requeriría? *Consejo*: ajuste $H(Q)$ mediante una ecuación.

P11.26 Determine si las curvas características de los siete tamaños de bombas Taco, Inc., representadas en la Figura P11.24 pueden representarse mediante un único diagrama adimensional de C_H, C_P y η en función de C_Q, como el de la Figura 11.8. Comente los resultados.

P11.27 La bomba de 12 in de la Figura P11.24 se aumenta de tamaño para producir una altura manométrica de 90 ft y un caudal de 1000 gal/min en el PMR. Determine los valores de (*a*) el diámetro del rotor, (*b*) la velocidad en revoluciones por minuto y (*c*) la potencia requerida, en caballos.

P11.28 El ensayo realizado por Byron Jackson Co. sobre una bomba centrífuga de agua de 14,62 in de diámetro que trabaja a 2134 rpm arroja los siguientes resultados:

Q, ft³/s	0	2	4	6	8	10
H, ft	340	340	340	330	300	220
P_f, hp	135	160	205	255	330	330

¿Cuál es el PMR? ¿Cuál es la velocidad específica? Estime el máximo caudal posible.

P11.29 Si se aplican las leyes de semejanza dimensional a la bomba del Problema P11.28 para el mismo diámetro del rotor, determine (*a*) la velocidad para la que la altura manométrica con caudal nulo es de 280 ft, (*b*) la velocidad para la que el PMR tiene un caudal de 8,0 ft³/s y (*c*) la velocidad para la que el PMR requiere una potencia de 80 hp.

P11.30 Una bomba de la misma familia que la del Problema P11.28 tiene un diámetro D = 18 in y una potencia en el PMR de 250 hp con gasolina (no agua). Empleando las leyes de escalado, estime (*a*) la velocidad resultante en revoluciones por minuto, (*b*) el caudal en el PMR y (*c*) la presión manométrica con caudal nulo.

P11.31 Una bomba centrífuga con los álabes curvados hacia atrás presenta las siguientes actuaciones ensayadas con agua a 20 °C:

Q, gal/min	0	400	800	1200	1600	2000	2400
H, ft	123	115	108	101	93	81	62
P_f, hp	30	36	40	44	47	48	46

(*a*) Estime el punto de mayor rendimiento y su valor correspondiente. (*b*) Estime el caudal y la potencia correspondientes al PMR si el diámetro se multiplica por dos y la velocidad de rotación se incrementa en un 50 por 100.

P11.32 Los datos del Problema P11.31 corresponden a una bomba que gira a una velocidad de 1200 rpm. (¿Por qué fue posible resolver el Problema P11.31 sin este dato?) (*a*) Estime el diámetro del rotor. (*Consejo*: véase el Problema P11.24). (*b*) Empleando la estimación obtenida en el apartado (*a*), calcule los parámetros C_Q^*, C_H^* y C_P^* en el PMR y compárelos con las Ecuaciones (11.27). (*c*) ¿Para qué velocidad la bomba tendría una altura manométrica de 280 ft en el PMR?

P11.33 Para las bombas de la familia de los Problemas P11.31 y P11.32, encuentre (*a*) el diámetro y (*b*) la velocidad de rotación que, en el PMR, permiten obtener un caudal de 5300 gal/min con una carga de 210 ft. (*c*) ¿Cuál es la potencia necesaria en caballos?

P11.34 Se considera una bomba geométricamente semejante a la bomba Taco de 9 in de diámetro de la Figura P11.34 para producir 1200 gal/min a 1500 rpm. Determine (*a*) el diámetro del rotor adecuado, (*b*) la potencia en el PMR, (*c*) la altura manométrica con caudal nulo y (*d*) el rendimiento máximo. El fluido empleado es queroseno, no agua.

P11.35 Una bomba centrífuga de 18 in de diámetro, que funciona a 880 rpm con agua a 20 °C, tiene las siguientes actuaciones:

Q, gal/min	0,0	2000	4000	6000	8000	10.000
H, ft	92	89	84	78	68	50
P_f, hp	100	112	130	143	156	163

Determine (*a*) el PMR, (*b*) el rendimiento máximo y (*c*) la velocidad específica. (*d*) Represente la potencia requerida como función del caudal.

P11.36 Represente las curvas características para la bomba del Problema P11.35 y compárelas con las de la Figura 11.8. Encuentre el diámetro apropiado en pulgadas y la velocidad en revoluciones por minuto para producir 400 gal/min con una carga de 200 ft. ¿Cuál es la potencia requerida en caballos?

P11.37 Sabiendo que la bomba del Problema P11.35 tiene el PMR cuando Q = 8000 gal/min, emplee las reglas de semejanza para encontrar (*a*) el diámetro del rotor adecuado, (*b*) la velocidad de rotación y (*c*) la altura manométrica producida por una bomba de la misma familia que proporcione 1000 gal/min con 12 hp de potencia.

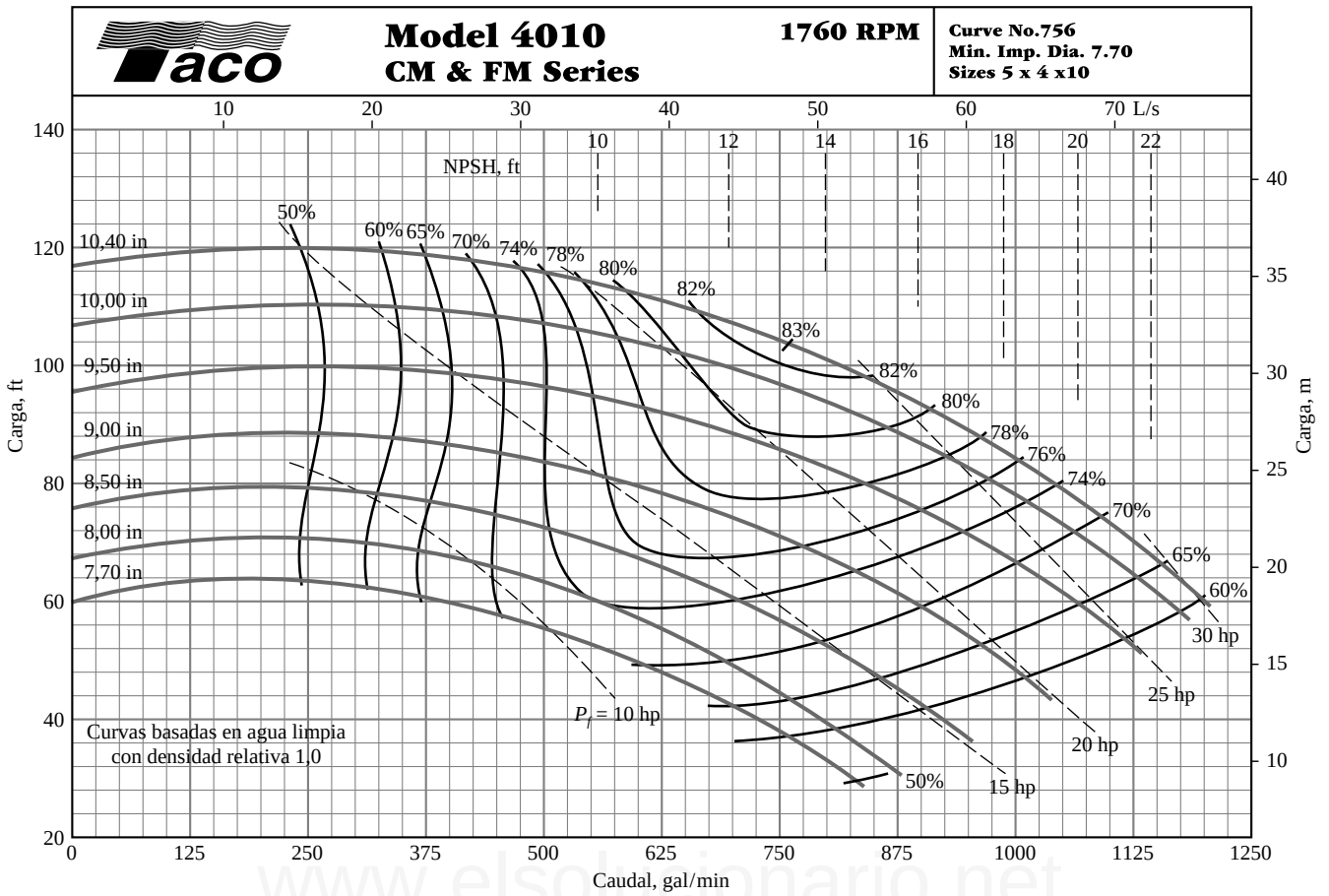
P11.38 Una bomba de 6,85 in, girando a 3500 rpm, tiene las siguientes actuaciones, medidas con agua a 20 °C:

Q, gal/min	50	100	150	200	250	300	350	400	450
H, ft	201	200	198	194	189	181	169	156	139
η, %	29	50	64	72	77	80	81	79	74

(*a*) Estime la potencia en caballos para el PMR. Si se reescala la bomba para proporcionar 20 hp a 3000 rpm, determine (*b*) el diámetro del rotor necesario, (*c*) el caudal y (*d*) el rendimiento en esta nueva condición.

P11.39 El compresor centrífugo Allis-Chalmers D30LR proporciona 33.000 ft³/min de SO_2 con un cambio de presión de 14,0 a 18,0 lbf/in² mediante un motor de 800 hp a 3550 rpm. ¿Cuál es el rendimiento medio? ¿Cuál es el caudal y el salto de presiones Δp cuando funciona a 3000 rpm? Estime el diámetro del rotor.

www.elsolucionario.net



P11.34. Actuaciones de una familia de bombas centrífugas. (*Cortesía de Taco, Inc., Cranston, Rhode Island.*)

P11.40 Según se define en la Ecuación (11.30), la velocidad específica N_s no contiene el diámetro del rotor. ¿Cuál será el tamaño de una bomba para un N_s dado? Logan [7] sugiere un parámetro denominado *diámetro específico* D_s, que es una combinación adimensional de Q, gH y D. (*a*) Si D_s es proporcional a D, determine su forma. (*b*) ¿Cuál es la relación, si es que existe, de D_s con C_Q*, C_H* y C_P*? (*c*) Estime D_s para las dos bombas de las Figuras 11.8 y 11.13.

P11.41 Se desea construir una bomba centrífuga geométricamente semejante a la del Problema P11.28 para proporcionar 6500 gal/min de gasolina a 20 °C a 1060 rpm. Estime (*a*) el diámetro del rotor resultante, (*b*) la altura manométrica, (*c*) la potencia al freno y (*d*) el rendimiento máximo.

P11.42 Una bomba de 8 in que proporciona 180 °F de agua a 800 gal/min y 2400 rpm comienza a cavitar cuando la presión y la velocidad en la entrada son, respectivamente, 12 lbf/in^2 y 20 ft/s. Encuentre la NPSH requerida para un prototipo que es cuatro veces mayor y funciona a 1000 rpm.

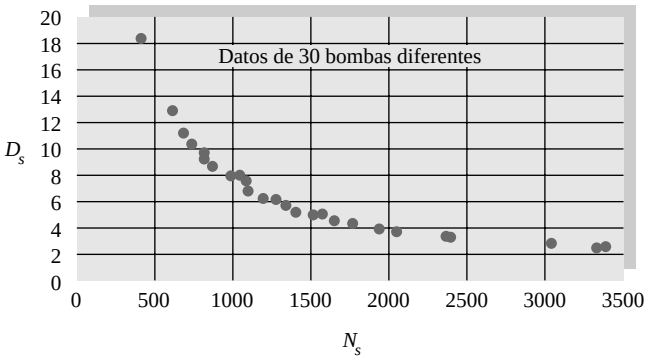
P11.43 La bomba de 28 in de diámetro de la Figura 11.7*a* funciona a 1170 rpm y es usada para bombear agua a 20 °C a través de un sistema de tuberías a 14.000 gal/min. (*a*) Determine la potencia requerida si el coeficiente de fricción es 0,018. (*b*) Si hay 65 ft de conducto de 12 in de diámetro aguas arriba de la bomba, ¿a qué profundidad por debajo de la superficie debería estar la entrada de la bomba para evitar la cavitación?

P11.44 La bomba del Problema P11.28 se reescala a 18 in de diámetro para operar con agua a 1760 rpm en el punto de máximo rendimiento. La NPSH medida es de 16 ft y las pérdidas de fricción entre la entrada y la bomba son de 22 ft. ¿Se producirá cavitación si la entrada de la bomba está situada 9 ft por debajo del nivel del depósito?

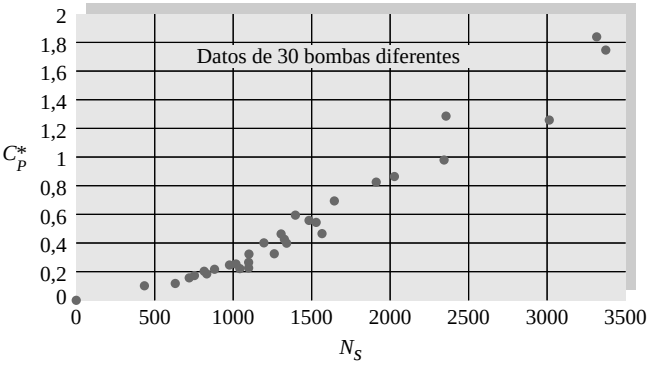
P11.45 Determine la velocidad específica de las siete bombas Taco, Inc., de la Figura P11.24. ¿Son apropiadas para diseños centrífugos? ¿Son aproximadamente iguales, teniendo en cuenta la incertidumbre experimental? Si no es así, ¿por qué no?

P11.46 La respuesta al Problema P11.40 es que el «diámetro específico» adimensional toma la forma $D_s = D(gH^*)^{1/4}/Q^{*1/2}$, evaluado en el PMR. En la Figura P11.46 se presentan los datos recopilados por el autor para 30 bombas diferentes, que indican que D_s está correlacionado con la velocidad específica N_s. Emplee esta figura para estimar el diámetro del rotor adecuado para una bomba que proporciona 20.000 gal/min de agua con una altura manométrica de 400 ft cuando gira a 1200 rpm. Sugiera una fórmula de ajuste para los cálculos. *Consejo*: pruebe con una fórmula hiperbólica.

www.elsolucionario.net



P11.46. Diámetro específico en el PMR para 30 bombas comerciales.

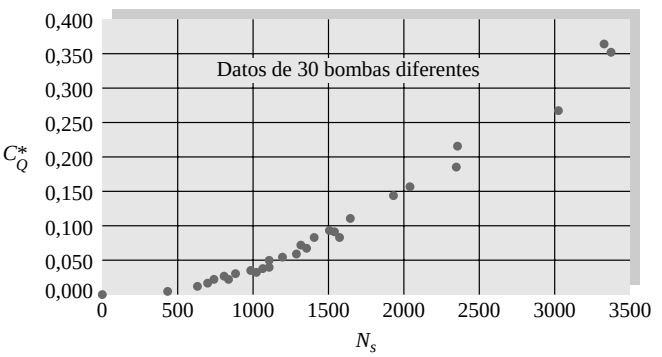


P11.50. Coeficiente de potencia en el PMR para 30 bombas comerciales.

P11.47 Una bomba casera típica para el desagüe de sótanos proporciona un caudal de 5 gal/min con una altura manométrica de 15 ft. Estime (*a*) el rendimiento máximo y (*b*) la potencia mínima requerida para el funcionamiento de la bomba a 1750 rpm.

P11.48 Una bomba opera a 42 rev/s ceca del PMR proporcionando 0,06 m^3/s con una altura manométrica de 100 m. (*a*) ¿Cuál es su velocidad específica? (*b*) ¿De qué clase parece ser esta bomba? (*c*) Estime el diámetro del rotor.

P11.49 En la Figura P11.49 se representan los valores del coeficiente adimensional de caudal en el PMR en función de la velocidad específica, recopilados por el autor a partir de 30 bombas diferentes. Determine si los valores de C_Q^* para las tres bombas de los Problemas P11.28, P11.35 y P11.38 se ajustan también a la correlación. En ese caso, sugiera una fórmula que ajuste los datos.



P11.49. Coeficiente de caudal en el PMR para 30 bombas comerciales.

P11.50 En la Figura P11.50 se representan los valores del coeficiente adimensional de potencia en el PMR en función de la velocidad específica, recopilados por el autor a partir de 30 bombas diferentes. Determine si los valores de C_P^* para las cinco bombas dadas en el Problema P11.48 también se ajustan a esta correlación. En ese caso, sugiera una fórmula que ajuste los datos.

P11.51 Un ventilador de flujo axial proporciona 40 ft^3/s de aire que entran a 20 °C y 1 atm. El paso por el que circula tiene un radio exterior de 10 in y un radio interior de 8 in. Los ángulos de los álabes son $\alpha_1 = 60°$ y $\beta_2 = 70°$ y el rotor gira a 1800 rpm. Calcule, para la primera etapa, (*a*) el incremento de altura manométrica y (*b*) la potencia requerida.

P11.52 Un ventilador axial funciona con aire a nivel del mar a 1200 rpm y tiene un diámetro en la punta del álabe de 1 m y un diámetro en la raíz de 80 cm. Los ángulos en la entrada son $\alpha_1 = 55°$ y $\beta_1 = 30°$, mientras que en la salida $\beta_2 = 60°$. Estime los valores teóricos de (*a*) el caudal, (*b*) la potencia y (*c*) el ángulo en la salida α_2.

P11.53 Si la bomba axial de la Figura 11.13 se emplea para producir 70.000 gal/min de agua a 20 °C a 1170 rpm, estime (*a*) el diámetro del rotor adecuado, (*b*) la altura manométrica para caudal nulo, (*c*) la potencia para caudal nulo y (*d*) Δp al rendimiento máximo.

P11.54 El acueducto del río Colorado emplea bombas Worthington Corp. que proporcionan 200 ft^3/s a 450 rpm con una altura manométrica de 440 ft. ¿De qué tipo de bombas se trata? Estime el diámetro del rotor.

P11.55 Se quiere bombear agua a 70 °C a 20.000 gal/min y 1800 rpm. Estime el tipo de bomba, la potencia requerida y el diámetro del rotor si se desea elevar la presión en una etapa hasta (*a*) 170 kPa y (*b*) 1350 kPa.

P11.56 Se quieren bombear 40.000 gal/min de gasolina a 20 °C con una altura manométrica de 90 ft. Encuentre el tamaño del rotor, la velocidad y la potencia necesaria para emplear la familia de bombas (*a*) de la Figura 11.8 y (*b*) de la Figura 11.13. ¿Cuál es el mejor diseño?

P11.57 Las actuaciones de un ventilador de aire de 21 in de diámetro a 3550 rpm son las siguientes:

Δp, in H_2O	29	30	28	21	10
Q, ft^3/min	500	1000	2000	3000	4000
Hp	6	8	12	18	25

Observe que la expresión ficticia del aumento de presión se da en términos de agua en lugar de aire. ¿Cuál es la velocidad específica? ¿Cómo se comparan las

www.elsolucionario.net

actuaciones con las de la Figura 11.8? ¿Cuáles son los valores de C_Q^*, C_H^*, y C_P^*?

P11.58 La bomba de agua de Worthington Corp. modelo A-12251, funcionando con el máximo rendimiento, produce 53 ft de altura manométrica a 3500 rpm, 1,1 hp a 3200 rpm y 60 gal/min a 2940 rpm. ¿De qué tipo de bomba se trata? ¿Cuál es su rendimiento y cómo se compara con la Figura 11.14? Estime el diámetro del rotor.

P11.59 Se desea proporcionar 700 ft^3/min de gas propano (de peso molecular = 44,06) a 1 atm y 20 °C con un incremento de presión de 8,0 in H_2O en una sola etapa. Determine el tamaño y la velocidad apropiados para emplear las bombas de la familia de (*a*) el Problema P11.57 y (*b*) la Figura 11.13. ¿Cuál es el mejor diseño?

P11.60 Se desea emplear una bomba de 45 hp para generar una altura manométrica de 200 ft cuando funciona en el PMR con gasolina a 20 °C y girando a 1200 rpm. Empleando las correlaciones de las Figuras P11.49 y P11.50, determine (*a*) la velocidad específica apropiada, (*b*) el caudal y (*c*) el diámetro del rotor.

P11.61 El ventilador de acondicionamiento de una mina proporciona 500 m^3/s de aire a nivel del mar cuando gira a 295 rpm, con un incremento de presión de 1100 Pa. ¿Es el ventilador axial, centrífugo o helicocentrífugo? Estime su diámetro en ft. Si el caudal se incrementa en un 50 por 100 para el mismo diámetro, ¿en qué porcentaje cambia el aumento de presión?

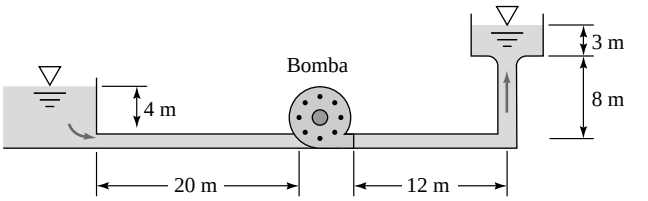
P11.62 El ventilador real discutido en el Problema P11.61 tenía un diámetro de 20 ft [Ref. 20, pág. 339]. ¿Cuál sería el diámetro adecuado para que la familia de bombas de la Figura 11.14 proporcionara 500 m^3/s a 295 rpm y en el PMR? ¿Cuál sería el aumento de presión resultante en pascales?

P11.63 La bomba de 36,75 in de la Figura 11.7*a* a 1170 rpm se emplea para bombear agua a 60 °F de un depósito situado a 1000 ft mediante un conducto de 12 in de diámetro interior hasta un punto situado a 200 ft sobre la superficie del depósito. ¿Cuáles son el caudal y la potencia resultantes? Si hay 40 ft de conducto aguas arriba de la bomba, ¿a qué profundidad por debajo de la superficie del depósito debería estar la entrada de la bomba para evitar la cavitación?

P11.64 Un ventilador de láminas es esencialmente un rotor centrífugo que descarga a un tubo. Suponga que el tubo es de PVC liso, de 4 ft de largo y con un diámetro de 2,5 in. La velocidad de salida que se desea es de 73 mi/h en aire estándar a nivel del mar. Haciendo uso de la familia de bombas de las Ecuaciones (11.27) para mover el ventilador, calcule aproximadamente (*a*) el diámetro y (*b*) la velocidad de rotación apropiados. (*c*) ¿Es un buen diseño?

P11.65 La bomba de 38 in de la Figura 11.7*a* se emplea en serie para bombear agua a 20 °C a una altura de 3000 ft a través de 4000 ft de un conducto de hierro fundido de 18 in de diámetro interior. Para mejorar su funcionamiento, ¿cuántas bombas en serie son necesarias si la velocidad de rotación es de (*a*) 710 rpm y (*b*) 1200 rpm?

P11.66 Se propone emplear la bomba del Problema P11.35 a 880 rpm para bombear agua a 20 °C a través del sistema de la Figura P11.66. El conducto está fabricado con acero comercial de 20 cm de diámetro. ¿Qué caudal en pies cúbicos por minuto resultará? ¿Es una aplicación eficiente?



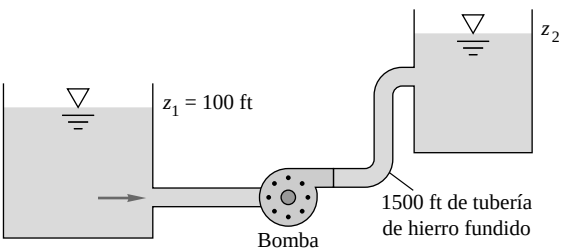
P11.66

P11.67 La bomba del Problema P11.35 gira a 880 rpm para bombear agua a 20 °C a través de 75 m de un conducto horizontal de hierro galvanizado. El resto de las pérdidas del sistema se consideran despreciables. Determine el caudal y la potencia de entrada para (*a*) un conducto con diámetro D = 20 cm y (*b*) el diámetro que permite obtener la máxima eficiencia de funcionamiento de la bomba.

P11.68 Supongamos que se emplea la bomba de flujo axial de la Figura 11.13 para mover el ventilador de hojas del Problema P11.64. Calcule aproximadamente (*a*) el diámetro y (*b*) la velocidad de giro apropiadas. (*c*) ¿Es un buen diseño?

P11.69 La bomba del Problema P11.38, cuando gira a 3500 rpm, se emplea para mover agua a 20 °C a través de 600 ft de tubería de hierro fundido hasta una altura de 100 ft. Determine (*a*) el diámetro del conducto adecuado para operar en el PMR y (*b*) el caudal resultante si el diámetro del conducto es de 3 in.

P11.70 La bomba del Problema P11.28, cuando gira a 2134 rpm, se emplea para mover agua a 20 °C en el sistema de la Figura P11.70. (*a*) Si está operando en el PMR, ¿cuál es la elevación z_2? (*b*) Si z_2 = 225 ft, ¿cuál es el caudal si d = 8 in?



P11.70

P11.71 La bomba del Problema P11.38, cuando funciona a 3500 rpm, mueve agua a 20 °C a través de 7200 ft de un conducto horizontal de acero comercial de 5 in de diámetro. El circuito tiene entrada y salida abruptas, cuatro codos de 90° y una válvula de compuerta. Estime (*a*) el caudal si la bomba está completamente abierta y (*b*) el porcentaje de apertura de la válvula que permite que la bomba opere en el PMR. (*c*) Si la condición anterior se mantiene continuamente durante un año, estime el coste de energía si la tarifa es 10 ¢/kWh.

www.elsolucionario.net

P11.72 Las actuaciones de una pequeña bomba comercial son las siguientes:

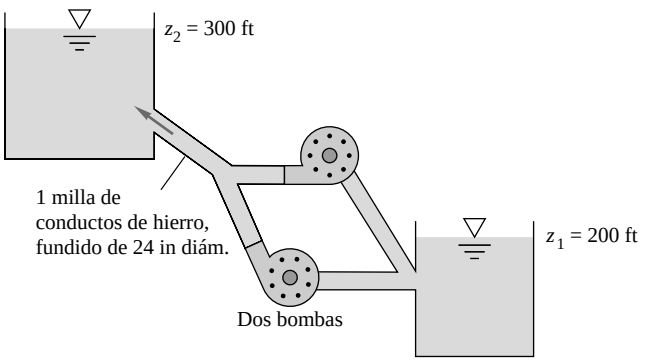
Q, gal/min	0	10	20	30	40	50	60	70
H, ft	75	75	74	72	68	62	47	24

Esta bomba proporciona agua a 20°C a una manguera horizontal de $\frac{5}{8}$ in de diámetro ($\varepsilon \Xi$ 0,01 in) que tiene una longitud de 50 ft. Estime (*a*) el caudal y (*b*) el diámetro de la manguera que haría que la bomba operase en el PMR.

P11.73 La bomba de pistón de la Figura P11.9 funciona a 1500 rpm para mover aceite SAE 10W a través de un conducto vertical de 100 m de acero forjado de 2 cm de diámetro. Si se desprecian las otras pérdidas del sistema, estime (*a*) el caudal, (*b*) el incremento de presiones y (*c*) la potencia requerida.

P11.74 La bomba de 32 in de la Figura 11.7*a* se emplea a 1170 rpm en un sistema cuya curva de carga es H_s (ft) = 100 + 1,5 Q^2, con Q en miles de galones de agua por minuto. Encuentre el caudal y la potencia al freno requeridos para (*a*) una bomba, (*b*) dos bombas en paralelo y (*c*) dos bombas en serie. ¿Cuál es la mejor configuración?

P11.75 Las dos bombas de 35 in de la Figura 11.7*b* están instaladas en paralelo en el sistema de la Figura P11.75. Despreciando las otras pérdidas para agua a 20 °C, estime el caudal y la potencia requerida si (*a*) ambas bombas están funcionando y (*b*) una bomba está parada y la otra funcionando.



P11.75

P11.76 Las dos bombas de 32 in de la Figura 11.7*a* están combinadas en paralelo para mover agua a 60 °F a través de 1500 ft de conducto horizontal. Si f = 0,025, ¿cuál es el diámetro del conducto que asegura un caudal de 35.000 gal/min para n = 1170 rpm?

P11.77 Dos bombas del tipo de las ensayadas en el Problema P11.22 se quieren emplear a 2140 rpm para bombear verticalmente agua a 20 °C mediante un conducto de 100 m de acero comercial. ¿Deberían estar en serie o en paralelo? ¿Cuál es el diámetro adecuado para el funcionamiento más eficiente?

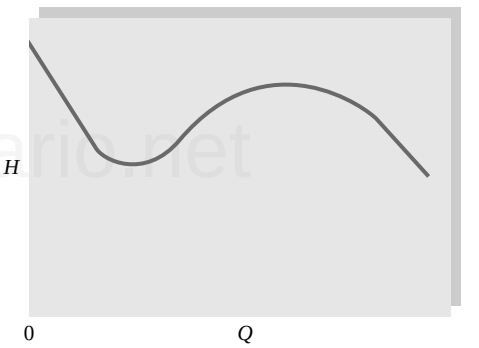
P11.78 Suponiendo que las dos bombas de la Figura P11.75 se modifican para estar en serie funcionando a 710 rpm, ¿cuál es el diámetro del conducto que se requiere para que funcionen en el PMR?

P11.79 Las dos bombas de 32 in de la Figura 11.7*a* van a ser colocadas en serie a 1170 rpm para subir agua mediante un conducto vertical de 500 ft de hierro fundido. ¿Cuál debería ser el diámetro del conducto para el funcionamiento más eficiente? Desprecie las pérdidas menores.

P11.80 Se propone emplear en paralelo una bomba de 32 in y otra de 28 in de las de la Figura 11.7*a* para mover agua a 60 °F. La curva de carga del sistema es H_s = 50 + 0,3 Q^2, con Q en miles de galones por minuto. ¿Cuál será la altura manométrica y el caudal si ambas bombas funcionan a 1170 rpm? Si la bomba de 28 in reduce su velocidad por debajo de 1170 rpm, ¿a qué velocidad dejará de bombear?

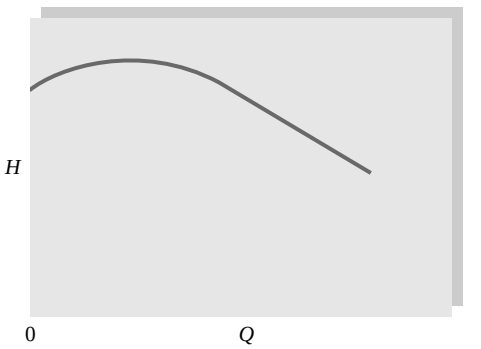
P11.81 Reconsidere el sistema de la Figura P6.62. Emplee la bomba Byron Jackson del Problema P11.28 funcionando a 2134 rpm, sin escalar, para bombear el fluido. Determine el caudal entre los depósitos. ¿Cuál es la bomba más eficiente?

P11.82 La curva en S de carga en función del caudal de la Figura P11.82 representa el funcionamiento de una bomba axial determinada. Explique cómo una curva de estas características podría producir inestabilidades en el flujo. ¿Cómo se podría evitar esta inestabilidad?



P11.82

P11.83 La curva de carga en función de caudal de la Figura P11.83 es característica de una bomba determinada. Explique cómo una curva de estas características podría producir inestabilidades en el funcionamiento de la bomba. ¿Qué problemas adicionales podrían producirse cuando las dos bombas están en paralelo? ¿Cómo podría evitarse esta inestabilidad?



P11.83

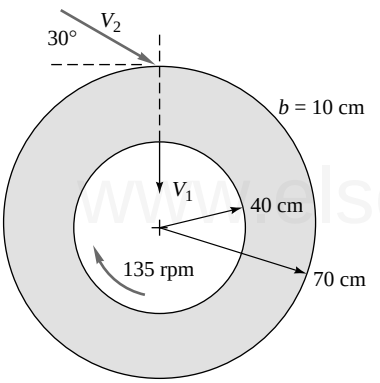
www.elsolucionario.net

P11.84 Cierto número de turbinas se van a instalar de forma que la altura manométrica total sea de 400 ft y el flujo de 250.000 gal/min. Discuta el tipo, número y tamaño de la turbina que debe seleccionarse si el generador seleccionado es de (*a*) 48 polos, 60 ciclos (n = 150 rpm) y (*b*) 8 polos (n = 900 rpm). ¿Por qué son deseables al menos dos turbinas desde el punto de vista de la planificación?

P11.85 Las turbinas de la planta Conowingo, en el río Susquehanna, proporcionan 54.000 hp a 82 rpm con una carga de 89 ft. ¿De qué tipo son estas turbinas? Estime el caudal y el diámetro del rotor.

P11.86 La planta hidroeléctrica de Tupperware, en el río Blackstone, tiene cuatro turbinas de 36 in de diámetro, cada una de las cuales proporciona 447 kW a 200 rpm y 205 ft^3/s con una carga de 30 ft. ¿De qué tipo de turbinas se trata? ¿Cuál es su rendimiento en comparación con las de la Figura 11.21?

P11.87 En la Figura P11.87 se presenta una turbina radial ideal. El flujo entra a 30° y sale radialmente de su interior. El caudal es de 3,5 m^3/s de agua a 20 °C. La anchura de los álabes es de 10 cm. Calcule la potencia teórica obtenida.



P11.87

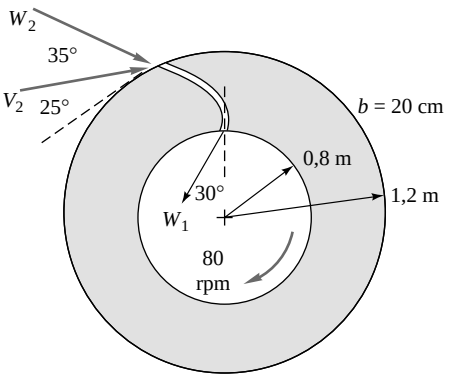
P11.88 Las actuaciones de una pequeña turbina de agua (D = 8,25 cm), que opera con una altura manométrica de 49 ft, son las siguientes:

Q, m^3/h	18,7	18,7	18,5	18,3	17,6	16,7	15,1	11,5
RPM	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
η	0	14%	27%	38%	50%	65%	61%	11%

(*a*) ¿De qué tipo de turbina parece tratase? (*b*) ¿Por qué estos datos son tan diferentes a los datos adimensionales presentados en la Figura 11.21*d*? Suponga que se desea emplear una turbina geométricamente semejante con una altura manométrica de 150 ft y un caudal de 6,7 ft^3/s. Estime (*c*) el diámetro de la turbina, (*d*) la velocidad de rotación y (*e*) la potencia en las condiciones de mayor rendimiento.

P11.89 Una turbina Pelton de 12 ft de diámetro opera con una altura manométrica de 2000 ft. Estime la velocidad, potencia de salida y caudal en las condiciones de mayor rendimiento si el diámetro de salida de la tobera es de 4 in.

P11.90 En la Figura P11.90 se muestra una turbina radial ideal. El flujo entra formando 25° con el ángulo de los álabes, según se muestra. El caudal es de 8 m^3/s de agua a 20 °C. La anchura de los álabes es de 20 cm. Calcule la potencia teórica producida.



P11.90

P11.91 El flujo a través de una *turbina* axial se puede idealizar modificando los diagramas de rotor y estátor de la Figura 11.12 para la absorción de energía. Esquematice una configuración adecuada de flujo y álabes y los correspondientes diagramas de velocidades. Para más detalles, véase el Capítulo 8 de la Referencia 25.

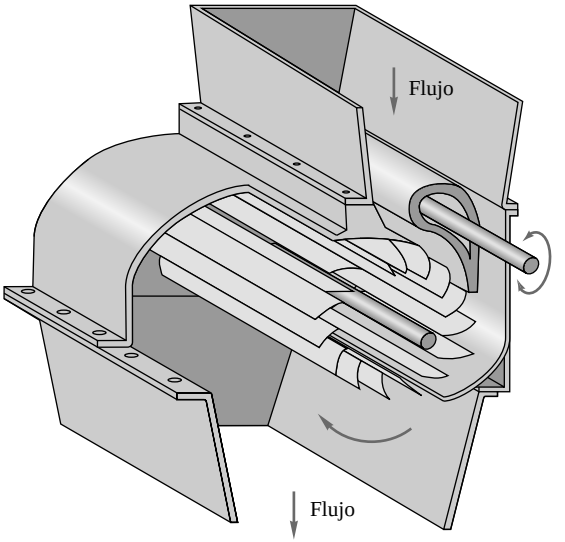
P11.92 Se está construyendo una presa en un río para instalar en ella una turbina hidráulica. El caudal es de 1500 m^3/h, la altura manométrica disponible es de 24 m y la velocidad de la turbina será de 480 rpm. Estime el tamaño de la turbina y la factibilidad de emplear (*a*) una turbina Francis y (*b*) una turbina Pelton.

P11.93 La Figura P11.93 muestra la sección transversal de una turbina «Banki» o de *flujo cruzado* [55], que se asemeja a una jaula de ardilla con álabes curvos ranurados. El flujo entra a las 2 en punto, pasa a través del centro para ser conducido hacia los álabes, abandonando la turbina a las 8 en punto. Muestre a la clase el funcionamiento de este diseño y sus ventajas, así como un diagrama vectorial de velocidades idealizado.

P11.94 La turbina helicocentrífuga de la Figura P11.93 fue construida y ensayada en la Universidad de Rhode Island. Los álabes están fabricados con un tubo de PVC cortado longitudinalmente en tres piezas de 120°. Cuando fue ensayada en agua con una altura manométrica de 5,3 ft y un caudal de 630 gal/min, la potencia medida fue de 0,6 hp. Estime (*a*) el rendimiento y (*b*) la velocidad específica si n = 200 rpm.

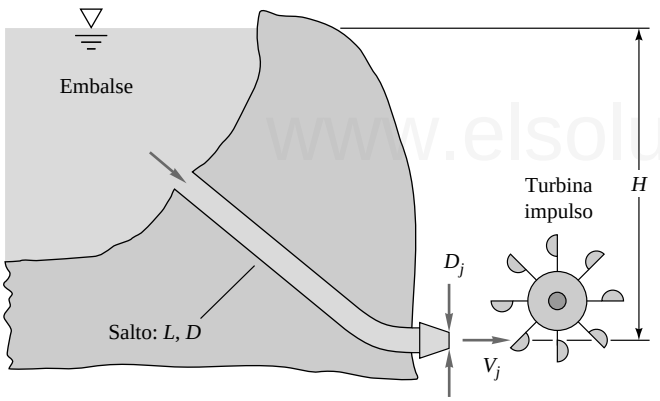
P11.95 Se puede hacer una estimación teórica del diámetro del salto hidráulico de la instalación de una turbina de impulso como la de la Figura P11.95. Suponga que L y H son conocidos y que las actuaciones de la turbina se pueden idealizar mediante las Ecuaciones (11.38) y (11.39). Tenga en cuenta las pérdidas de h_f debido a la fricción en el salto, pero desprecie el resto de las pérdidas. Demuestre que (*a*) la potencia máxima se genera cuando $h_f = H/3$, (*b*) la velocidad óptima del chorro

www.elsolucionario.net



P11.93

es $(4gH/3)^{1/2}$ y (*c*) el diámetro óptimo de la turbina es $D_j = [D^5/(2\ fL)]^{1/4}$, donde f es el coeficiente de fricción del conducto.

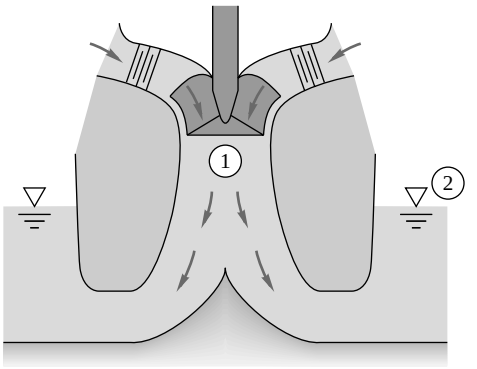


P11.95

P11.96 Aplique los resultados del Problema P11.95 para determinar (*a*) el diámetro del salto y (*b*) el diámetro de la tobera óptimos para una altura manométrica de 800 ft y un caudal de 40.000 gal/min si el salto tiene 1500 ft de tubería de acero comercial.

P11.97 Considere la siguiente versión no óptima del Problema P11.95: H = 450 m, L = 5 km, D = 1,2 m, D_j = 20 cm. El salto está hecho de hormigón de ε = 1 mm. El diámetro de la turbina de impulso es de 3,2 m. Estime (*a*) la potencia generada por la turbina con un rendimiento del 80 por 100 y (*b*) la mejor velocidad de la turbina en revoluciones por minuto. Desprecie las pérdidas menores.

P11.98 Las turbinas de Francis y Kaplan a menudo se instalan con *tubos de descarga*, Figura P11.98, que conducen el flujo de salida hasta la zona de aguas remansadas. Explique al menos dos ventajas de emplear este tipo de instalación.



P11.98

P11.99 Las turbinas también pueden cavitar cuando la presión en el punto 1 de la Figura P11.98 se reduce demasiado. Empleando la NPSH definida por la Ecuación (11.20), Wislicenus [4] proporcionó un criterio empírico para la cavitación:

$$N_{ss} = \frac{(\text{rpm})(\text{gal/min})^{1/2}}{[\text{NPSH (ft)}]^{3/4}} \quad \text{B}\,11.000$$

Emplee este criterio para calcular la altura $z_1 - z_2$ a la que se puede colocar el ojo de la turbina de la Figura P11.98, suponiendo que se trata de una turbina Francis con una carga de 300 ft, N_{sp} = 40 y p_a = 14 lbf/in^2, antes de que se produzca la cavitación con agua a 60 °F.

P11.100 Uno de los mayores aerogeradores que están actualmente en funcionamiento es el aerogenerador HAWT de dos palas de ERDA/NASA en Sandusky, Ohio. Las palas tienen un diámetro de 125 ft y proporcionan su potencia máxima con vientos de 19 mi/h. En estas condiciones, estime (*a*) la potencia generada en kilowatios, (*b*) la velocidad del rotor en rpm y (*c*) la velocidad V_2 aguas abajo del rotor.

P11.101 En Lumsden, Saskatchewan, se encuentra en funcionamiento un aerogenerador VAWT de tipo Darrieus con una altura de 32 ft y un diámetro de 20 ft, que barre un área de 432 ft^2. Estime (*a*) la potencia máxima y (*b*) la velocidad del rotor si opera con vientos de 16 mi/h.

P11.102 Un molino de viento multipala HAWT norteamericano de 6 ft de diámetro se emplea para bombear agua hasta una altura de 10 ft a través de un conducto de hierro de fundición de 3 in de diámetro. Si la velocidad del viento es de 12 mi/h, estime el caudal de agua bombeada en galones por minuto.

P11.103 El Departamento de Energía norteamericano construyó un aerogenerador VAWT de tipo Darrieus de gran tamaño en Sandia, Nuevo Méjico. Tiene una altura de 60 ft y un diámetro de 30 ft, barriendo un área de 1200 ft^2. Si está obligado a girar a 90 rpm, use la Figura 11.31 para pintar la potencia producida en kilovatios en función de la velocidad del viento en el intervalo V = 5 a 40 mi/h.

www.elsolucionario.net

Problemas conceptuales

C11.1 Sabemos que un rotor de palas encapsulado puede proporcionar energía a un fluido, generalmente en forma de incremento de presión. ¿Cómo ocurre realmente? Discuta, dibujando esquemas, el mecanismo físico por el que el rotor transfiere realmente la energía al fluido.

C11.2 Las bombas dinámicas (al contrario que las PDP) tienen dificultades para bombear fluidos muy viscosos. Lobanoff y Ross [15] sugieren la siguiente regla aproximada: D (in) > $0{,}015\nu/\nu_{agua}$, donde D es el diámetro del conducto de descarga. Así, por ejemplo, el aceite SAE 30W ($\Xi 300\nu_{agua}$) requeriría un conducto de salida de al menos 4,5 in. ¿Podría explicar algunas razones para esta limitación?

C11.3 El concepto de NPSH indica que las bombas dinámicas para líquidos deben estar generalmente sumergidas bajo la superficie. ¿Puede explicarlo? ¿Cuál es el efecto de incrementar la temperatura del líquido?

C11.4 Wallis [20] sugiere para las actuaciones adimensionales de un ventilador que el coeficiente de carga debe ser reemplazado por FTP/($\rho n^2 D^2$), donde FTP es el cambio total de presión del ventilador (*fan total pressure change*). Explique la utilidad de esta modificación.

C11.5 Los datos de actuaciones de las bombas centrífugas muestran una disminución del rendimiento con el tamaño del rotor, incluso cuando están escaladas geométricamente. Discuta las razones físicas de este comportamiento.

C11.6 Considere el diagrama de curvas características de una bomba de la Figura 11.8. ¿Qué parámetros adimensionales podrían modificar o incluso destruir las semejanzas indicadas en tales datos?

C11.7 Un parámetro no discutido en este libro es el *número de álabes* de un rotor. Busque información sobre este tema e informe a la clase sobre su efecto en las actuaciones.

C11.8 Explique por qué las curvas características de algunas bombas pueden dar lugar a condiciones de funcionamiento inestables.

C11.9 ¿Por qué las turbinas de Francis y Kaplan en general no se consideran apropiadas para instalaciones hidroeléctricas con más de 1000 ft de carga disponible?

C11.10 Busque alguna información sobre las actuaciones de las *hélices libre* que se emplean en aviones de pequeño tamaño y baja velocidad. ¿Cuáles son sus parámetros adimensionales típicos? ¿Cómo se comparan sus rendimientos y actuaciones con los de las bombas de flujo axial?

Problemas extensos

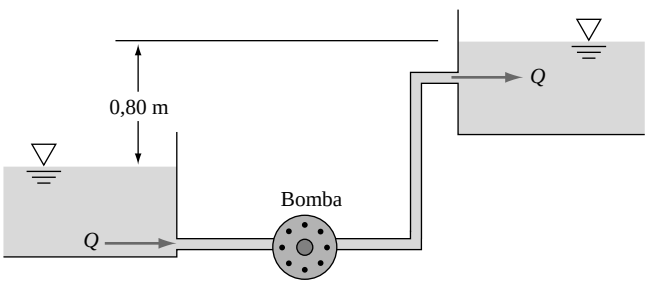
www.elsolucionario.net

PE11.1 La carga neta de la bomba de un pequeño acuario está dada por su fabricante en función del caudal según se presenta en la siguiente tabla:

Q, m³/s	H, mH_2O
0	1,10
$1{,}0 \times 10^{-6}$	1,00
$2{,}0 \times 10^{-6}$	0,80
$3{,}0 \times 10^{-6}$	0,60
$4{,}0 \times 10^{-6}$	0,35
$5{,}0 \times 10^{-6}$	0,0

¿Cuál es el caudal máximo que puede obtenerse si se emplea esta bomba para mover agua del depósito inferior al superior de la Figura PE11.1? *Nota*: los conductos son lisos, con un diámetro interior de 5,0 mm y una longitud total de 29,8 m. El agua se encuentra a la presión y temperatura de la habitación. Se pueden despreciar las pérdidas menores en el sistema.

PE11.2 Reconsidere el Problema P6.62 como un ejercicio sobre la selección de una bomba. Seleccione el tamaño del rotor y la velocidad de rotación de una bomba de Byron Jackson de la familia del Problema P11.28 para proporcionar un caudal de 3 ft³/s al sistema de la Figura P6.68 con un consumo mínimo de potencia. Calcule la potencia requerida en caballos de vapor.

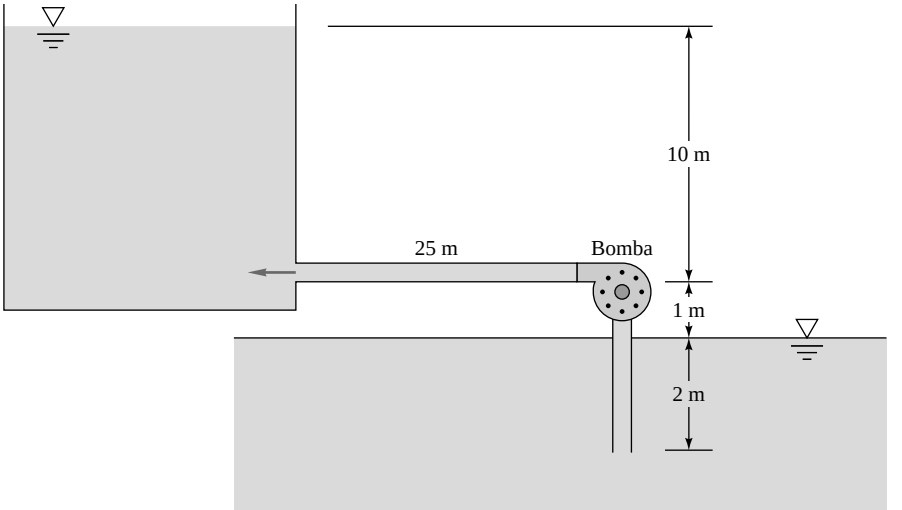


PE11.1

PE11.3 Reconsidere el Problema P6.77 como un ejercicio sobre la selección de una turbina. Seleccione el tamaño del rotor y la velocidad de rotación de una turbina de Francis de la familia de la Figura 11.21*d* para obtener la máxima potencia de la turbina. Calcule la potencia obtenida y discuta sobre la utilidad del diseño.

PE11.4 El sistema de la Figura PE11.4 se ha diseñado para conducir agua a 20 °C de un depósito a nivel del mar a otro depósito a través de un conducto de hierro fundido de 38 cm de diámetro. Se producen unas pequeñas pérdidas de $\Sigma K_1 = 0{,}5$ antes de la entrada de la bomba, y de $\Sigma K_2 = 7{,}2$ después de la salida de la bomba. (*a*) Seleccione una bomba de la Figura 11.7*a* o la Figura 11.7*b*, funcionando a las velocidades especificadas, que pueda realizar estas funciones con el máximo

www.elsolucionario.net



PE11.4

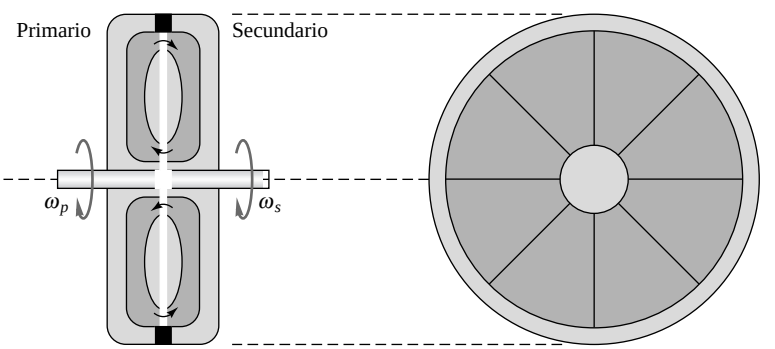
rendimiento. Determine (*b*) el caudal resultante, (*c*) la potencia al freno y (*d*) si la bomba, situada en su posición actual, está libre de cavitación.

PE11.5 Estime el rendimiento de la bomba del Problema P11.23 de dos formas. (*a*) Léalo directamente de la Figura 11.7*b* (para la bomba de agua dinámicamente semejante) y (*b*) calcúlelo a partir de la Ecuación (11.5) para el flujo de queroseno. Compare los resultados y discuta las diferencias.

PE11.6 Una turbomáquina interesante [58] es el *acoplamiento fluido* de la Figura PE11.6, en el que el rotor de una bomba hace circular fluido con el que impulsa una turbina secundaria unida a un eje distinto. Ambos rotores tienen álabes radiales. Estos acoplamientos son comunes en las transmisiones de todo tipo de vehículos y maquinarias. El *deslizamiento* del acoplamiento se define como la diferencia adimensional entre las velocidades de rotación de los dos ejes, $s = 1 - \omega_s/\omega_p$. Para un volumen de fluido dado, el par transmitido T es función de s, ρ, ω_p, y el diámetro del rotor D. (*a*) Adimensionalice esta función en dos grupos dimensionales, uno de ellos proporcional a T. Aplíquelo a un acoplamiento de 1 ft de diámetro a 2500 rpm, lleno de un fluido hidráulico a 56 lbm/ft^3, con los siguientes datos de momento en función del deslizamiento:

Desplazamiento, s	0%	5%	10%	15%	20%	25%
Momento T, ft · lbf	0	90	275	440	580	680

(*b*) Si este acoplamiento opera a 3600 rpm, ¿para qué valor de deslizamiento transmitirá un momento de 900 ft · lbf? (*c*) ¿Cuál es el diámetro adecuado para que un acoplamiento geométricamente semejante opere a 3000 rpm y un 5 por 100 de deslizamiento y transmita un momento de 600 ft · lbf?



PE11.6

www.elsolucionario.net

Proyecto de diseño

D11.1 Para reducir los costes de electricidad, el sistema de suministro de agua de una ciudad descarga por gravedad el agua de cinco grandes depósitos durante el día y los rellena de 10 de la noche a 6 de la mañana mediante una tarifa nocturna barata de 7 centavos por kilovatio. La cantidad de agua que hay que reemplazar por la noche varía de 5×10^5 a 2×10^6 gal, con no más de 5×10^5 galones a cualquiera de los depósitos. La elevación de los depósitos varía de 40 a 100 ft. El trabajo es realizado mediante una bomba de velocidad constante que toma agua de un gran acuífero y la impulsa hasta los depósitos a través de cinco líneas de conductos de hierro fundido. Las distancias de la bomba a los cinco depósitos varían de 1 a 3 millas. Por término medio, cada línea tiene un codo cada 100 ft y cuatro válvulas de mariposa, cuyo ángulo de apertura se puede controlar. Seleccione una bomba de entre las de las familias presentadas en los seis conjuntos de datos del capítulo: Figuras 11.8, P11.24 y P11.34 más los Problemas P11.28, P11.35 y P11.38. Suponga semejanza ideal (sin efectos del Reynolds ni de la rugosidad). El objetivo es determinar el tamaño de la bomba y de los conductos que permiten un coste mínimo durante un periodo de 5 años. Algunas sugerencias sobre costes son:

(*a*) Bomba y motor: 2500 dólares más 1500 dólares por pulgada de conducto.
(*b*) Válvulas: 100 dólares más 100 por pulgada de conducto.
(*c*) Conductos: 50 centavos por pulgada de diámetro y por pie de longitud.

Dado que los parámetros de flujo y elevación varían considerablemente, una variación diaria aleatoria dentro del rango especificado podría proporcionar una aproximación realista.

Referencias

1. D. G. Wilson, «Turbomachinery-From Paddle Wheels to Turbojets», *Mech. Eng*., vol. 104, oct. 1982, págs. 28-40.
2. D. Japikse y N. C. Baines, *Introduction to Turbomachinery*, Concepts ETI Inc., Hanover, NH, 1997.
3. E. S. Logan, Jr. (ed.), *Handbook of Turbomachinery*, Marcel Dekker, Nueva York, 1994.
4. G. F. Wislicenus, *Fluid Mechanics of Turbomachinery*, 2.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1965.
5. S. L. Dixon, *Fluid Mechanics and Thermodynamics of Turbomachinery*, 2.ª ed., Butterworth-Heinemann, Woburn, MA, 1998.
6. J. A. Schetz y A. E. Fuhs, *Handbook of Fluid Dynamics and Fluid Machinery*, Wiley, Nueva York, 1996.
7. E. S. Logan, Jr., *Turbomachinery: Basic Theory and Applications*, 2.ª ed., Marcel Dekker, Nueva York, 1993.
8. A. J. Stepanoff, *Centrifugal and Axial Flow Pumps*, 2.ª ed., Wiley, Nueva York, 1957.
9. J. Tuzson, *Centrifugal Pump Design*, Wiley, Nueva York, 2000.
10. S. Yedidiah, *Centrifugal Pump User's Guidebook: Problems and Solutions*, Chapman and Hall, Nueva York, 1996.
11. L. Nelik, *Centrifugal and Rotary Pumps*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.
12. D. Japikse, R. Furst y W. D. Marscher, *Centrifugal Pump Design and Performance*, Concepts ETI Inc., Hanover, NH, 1997.
13. M. W. Volk, *Pump Characteristics and Applications*, Marcel Dekker, Nueva York, 1996.
14. I. J. Karassik y T. McGuire, *Centrifugal Pumps*, Chapman and Hall, Nueva York, 1996.
15. V. L. Lobanoff y R. R. Ross, *Centrifugal Pumps, Design and Application*, Gulf Pub., Houston, TX, 1985.
16. H. L. Stewart, *Pumps*, 5.ª ed. Macmillan, Nueva York, 1991.
17. A. B. McKenzie, *Axial Flow Fans and Compressors: Aerodynamic Design and Performance*, Ashgate Publishing, Brookfield, VT, 1997.
18. A. J. Wennerstrom, *Design of Highly Loaded Axial-Flow Fans and Compressors*, Concepts ETI Inc., Hanover, NH, 1997.
19. R. Jorgensen (ed.), *Fan Engineering*, Buffalo Forge, Buffalo, NY, 1983.
20. R. A. Wallis, *Axial Flow Fans and Ducts*, Wiley, Nueva York, 1983.
21. H. P. Bloch, A *Practical Guide to Compressor Technology*, McGraw-Hill, Nueva York, 1996.
22. M. T. Gresh, *Compressor Performance, Aerodynamics for the User*, 2.ª ed., Butterworth-Heinemann, Woburn, MA, 2001.
23. N. A. Cumpsty, *Compressor Aerodynamics*, Longmans, London, 1989.
24. H. I. H. Saravanamuttoo, H. Cohen y G. F. C. Rogers, *Gas Turbine Theory*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.
25. W. W. Bathe, *Fundamentals of Gas Turbines*, 2.ª ed., Wiley, Nueva York, 1995.
26. M. P. Boyce, *Gas Turbine Engineering Handbook*, Butterworth-Heinemann, Woburn, MA, 2001.
27. J. Tong (ed.), *Mini-Hydropower*, Wiley, Nueva York, 1997.
28. Jeremy Thake, *The Micro-Hydro Pelton Turbine Manual*, Intermediate Technology Pub., Colchester, Essex, UK, 2000.
29. P. C. Hanlon (ed.), *Compressor Handbook*, McGraw-Hill, Nueva York, 2001.
30. Hydraulic Institute, *Hydraulic Institute Pump Standards Complete*, Nueva York, 1994.
31. P. Cooper, J. Messina, C. Heald e I. J. Karassik (ed.), *Pump Handbook*, 3.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2000.

www.elsolucionario.net

32. J. S. Gulliver y R. E. A. Arndt, *Hydropower Engineering Handbook*, McGraw-Hill, Nueva York, 1990.
33. R. L. Daugherty, J. B. Franzini y E. J. Finnemore, *Fluid Mechanics and Engineering Applications*, 9.ª ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1997.
34. R. H. Sabersky, E. M. Gates, A. J. Acosta y E. G. Hauptmann, *Fluid Flow: A First Course in Fluid Mechanics*, 4.ª ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1994.
35. J. P. Poynton, *Metering Pumps*, Marcel Dekker, Nueva York, 1983.
36. Hydraulic Institute, *Reciprocating Pump Test Standard*, Nueva York, 1994.
37. T. L. Henshaw, *Reciprocating Pumps*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1987.
38. J. E. Miller, *The Reciprocating Pump: Theory, Design and Use*, Wiley, Nueva York, 1987.
39. D. G. Wilson, *The Design of High-Efficiency Turbomachinery and Gas Turbines*, 2.ª ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 1998.
40. M. C. Roco, P. Hamelin, T. Cader y G. Davidson, «Animation of LDV Measurements in a Centrifugal Pump», in *Fluid Machinery Forum-1990*, U.S. Rohatgi (ed.), FED, vol. 96, American Society of Mechanical Engineers, Nueva York, 1990.
41. E. M. Greitzer, «The Stability of Pumping Systems: The 1980 Freeman Scholar Lecture», *J. Fluids Eng*., vol. 103, junio 1981, págs. 193-242.
42. B. Lakshminarayana, *Fluid Dynamics and Heat Transfer in Turbomachinery*, Wiley, Nueva York, 1995.
43. L. F. Moody, «The Propeller Type Turbine», *ASCE Trans*., vol. 89, 1926, pág. 628.
44. H. H. Anderson, «Prediction of Head, Quantity, and Efficiency in Pumps-The Area-Ratio Principle», en *Performance Prediction of Centrifugal Pumps and Compressors*, vol. I00127, ASME Symp., Nueva York, 1980, págs. 201-211.
45. Y. T. Lee y C. Hah (eds.), *Symposium on Numerical Modeling of Aerodynamics and Hydrodynamics in Turbomachinery*, Joint ASME-European Fluids Engineering Conference, Montreal, Canadá, julio, 2002.
46. D. J. Mahoney (ed.), *Proceedings of the 1997 International Conference on Hydropower*, ASCE, Reston, VA, 1997.
47. G. W. Koeppl, *Putnam's Power from the Wind*, 2.ª ed., Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1982.
48. R. L. Hills, *Power from Wind: A History of Windmill Technology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
49. D. A. Spera, *Wind Turbine Technology: Fundamental Concepts of Wind Turbine Engineering*, ASME Press, Nueva York, 1994.
50. A. J. Wortman, *Introduction to Wind Turbine Engineering*, Butterworth, Woburn, Mass., 1983.
51. R. Harrison, E. Hau y H. Snel, *Large Wind Turbines*, Wiley, Nueva York, 2000.
52. L. Fielding, *Turbine Design*, ASME Press, Nueva York, 2000.
53. M. L. Robinson, «The Darrieus Wind Turbine for Electrical Power Generation», *Aeronaut. J.*, junio 1981, págs. 244-255.
54. D. F. Warne y P. G. Calnan, «Generation of Electricity from the Wind», *IEE Rev.*, vol. 124, núm. 11R, noviembre 1977, págs. 963-985.
55. L. A. Haimerl, «The Crossflow Turbine», *Waterpower*, enero 1960, págs. 5-13; véase también *ASME Symp. Small Hydropower Fluid Mach*., vol. 1, 1980, y vol. 2, 1982.
56. K. Eisele et al., «Flow Analysis in a Pump Diffuser: Part 1, Measurements; Part 2, CFD», *J. Fluids Eng*., vol. 119, diciembre 1997, págs. 968-984.
57. D. Japikse y N. C. Baines, *Turbomachinery Diffuser Design Technology*, Concepts ETI Inc., Hanover, NH, 1998.
58. B. Massey y J. Ward-Smith, *Mechanics of Fluids*, 7.ª ed., Nelson Thornes Publishing, Cheltenham, UK, 1998.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Apéndice A
Propiedades físicas de los fluidos

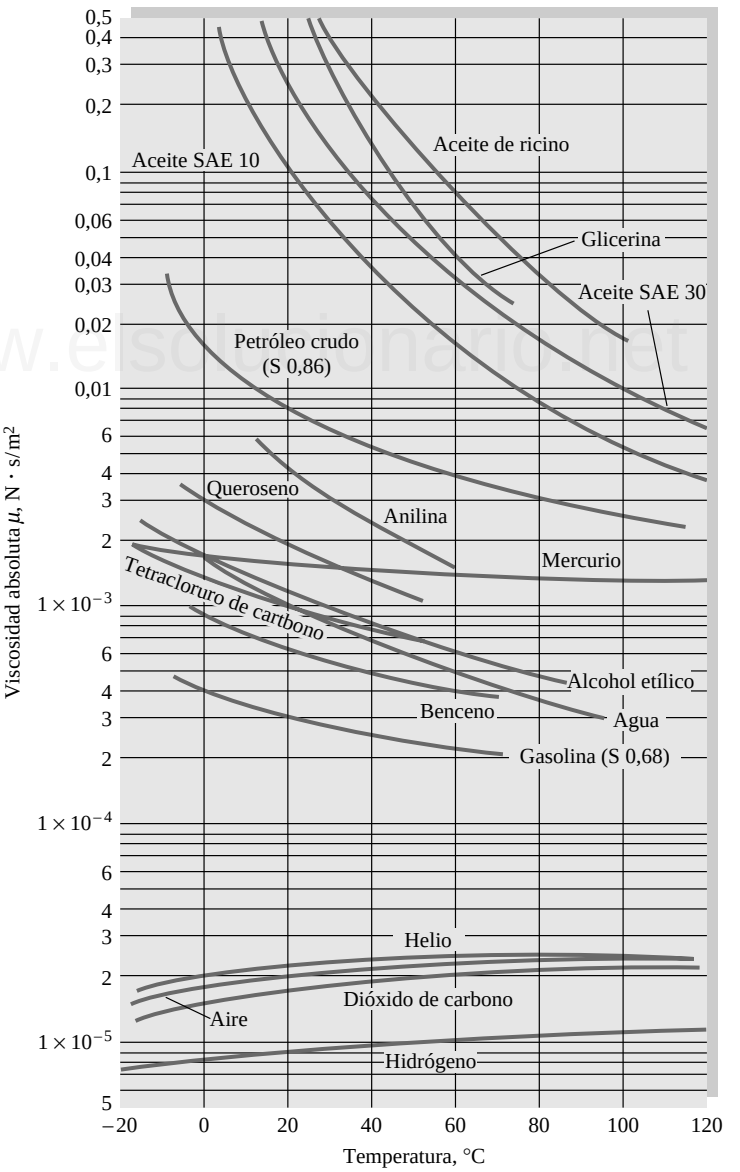


Figura A.1. Viscosidad absoluta de fluidos comunes a 1 atm.

www.elsolucionario.net

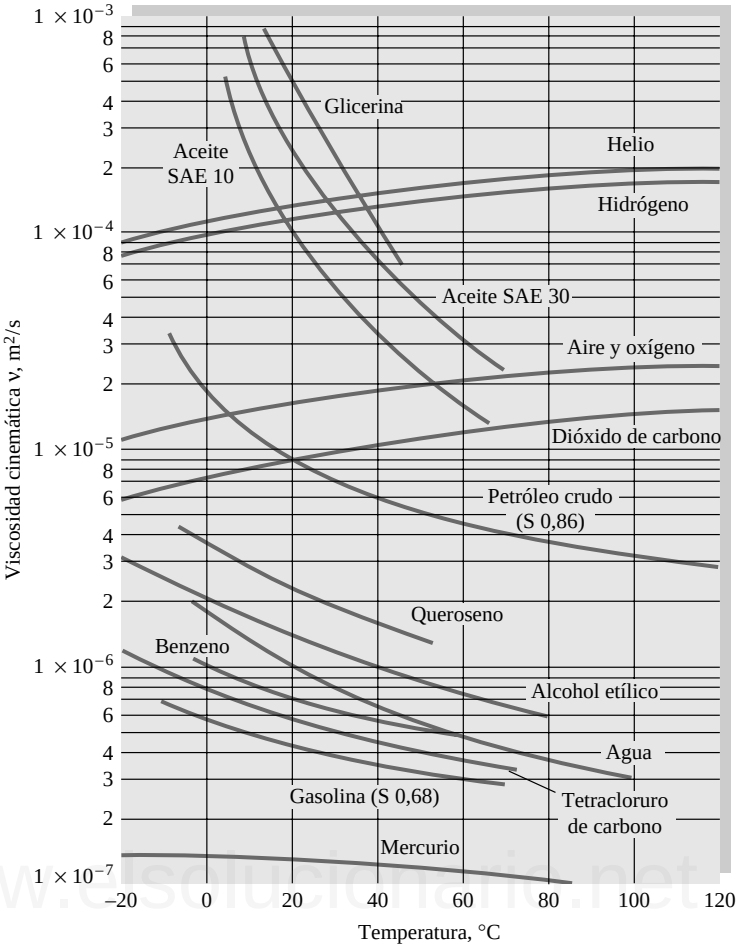


Figura A.2. Viscosidad cinemática de fluidos comunes a 1 atm.

www.elsolucionario.net

Tabla A.1. Viscosidad y densidad del agua a 1 atm.

T, °C	ρ, kg/m³	μ, N · s/m²	ν, m²/s	T, °F	ρ, slug/ft³	μ, lb · s/ft²	ν, ft²/s
0	1000	$1{,}788 \times 10^{-3}$	$1{,}788 \times 10^{-6}$	32	1,940	$3{,}73 \times 10^{-5}$	$1{,}925 \times 10^{-5}$
10	1000	$1{,}307 \times 10^{-3}$	$1{,}307 \times 10^{-6}$	50	1,940	$2{,}73 \times 10^{-5}$	$1{,}407 \times 10^{-5}$
20	998	$1{,}003 \times 10^{-3}$	$1{,}005 \times 10^{-6}$	68	1,937	$2{,}09 \times 10^{-5}$	$1{,}082 \times 10^{-5}$
30	996	$0{,}799 \times 10^{-3}$	$0{,}802 \times 10^{-6}$	86	1,932	$1{,}67 \times 10^{-5}$	$0{,}864 \times 10^{-5}$
40	992	$0{,}657 \times 10^{-3}$	$0{,}662 \times 10^{-6}$	104	1,925	$1{,}37 \times 10^{-5}$	$0{,}713 \times 10^{-5}$
50	988	$0{,}548 \times 10^{-3}$	$0{,}555 \times 10^{-6}$	122	1,917	$1{,}14 \times 10^{-5}$	$0{,}597 \times 10^{-5}$
60	983	$0{,}467 \times 10^{-3}$	$0{,}475 \times 10^{-6}$	140	1,908	$0{,}975 \times 10^{-5}$	$0{,}511 \times 10^{-5}$
70	978	$0{,}405 \times 10^{-3}$	$0{,}414 \times 10^{-6}$	158	1,897	$0{,}846 \times 10^{-5}$	$0{,}446 \times 10^{-5}$
80	972	$0{,}355 \times 10^{-3}$	$0{,}365 \times 10^{-6}$	176	1,886	$0{,}741 \times 10^{-5}$	$0{,}393 \times 10^{-5}$
90	965	$0{,}316 \times 10^{-3}$	$0{,}327 \times 10^{-6}$	194	1,873	$0{,}660 \times 10^{-5}$	$0{,}352 \times 10^{-5}$
100	958	$0{,}283 \times 10^{-3}$	$0{,}295 \times 10^{-6}$	212	1,859	$0{,}591 \times 10^{-5}$	$0{,}318 \times 10^{-5}$

Curva de ajuste sugerida para el agua en el intervalo 0 A T A 100 °C:

$$\rho\,(\text{kg/m}^3) \approx 1000 - 0{,}0178\,|\,T^\circ\text{C} - 4^\circ\text{C}\,|^{1{,}7} \pm 0{,}2\%$$

$$\ln \frac{\mu}{\mu_0} \approx -1{,}704 - 5{,}306z + 7{,}003z^2$$

$$z = \frac{273\ \text{K}}{T\ \text{K}} \qquad \mu_0 = 1{,}788 \times 10^{-3}\ \text{kg/(m}\cdot\text{s)}$$

Tabla A.2. Viscosidad y densidad del aire a 1 atm.

T, °C	ρ, kg/m³	μ, N · s/m²	ν, m²/s	T, °F	ρ, slug/ft³	μ, lb · s/ft²	ν, ft²/s
–40	1,52	$1{,}51 \times 10^{-5}$	$0{,}99 \times 10^{-5}$	–40	$2{,}94 \times 10^{-3}$	$3{,}16 \times 10^{-7}$	$1{,}07 \times 10^{-4}$
0	1,29	$1{,}71 \times 10^{-5}$	$1{,}33 \times 10^{-5}$	32	$2{,}51 \times 10^{-3}$	$3{,}58 \times 10^{-7}$	$1{,}43 \times 10^{-4}$
20	1,20	$1{,}80 \times 10^{-5}$	$1{,}50 \times 10^{-5}$	68	$2{,}34 \times 10^{-3}$	$3{,}76 \times 10^{-7}$	$1{,}61 \times 10^{-4}$
50	1,09	$1{,}95 \times 10^{-5}$	$1{,}79 \times 10^{-5}$	122	$2{,}12 \times 10^{-3}$	$4{,}08 \times 10^{-7}$	$1{,}93 \times 10^{-4}$
100	0,946	$2{,}17 \times 10^{-5}$	$2{,}30 \times 10^{-5}$	212	$1{,}84 \times 10^{-3}$	$4{,}54 \times 10^{-7}$	$2{,}47 \times 10^{-4}$
150	0,835	$2{,}38 \times 10^{-5}$	$2{,}85 \times 10^{-5}$	302	$1{,}62 \times 10^{-3}$	$4{,}97 \times 10^{-7}$	$3{,}07 \times 10^{-4}$
200	0,746	$2{,}57 \times 10^{-5}$	$3{,}45 \times 10^{-5}$	392	$1{,}45 \times 10^{-3}$	5.37×10^{-7}	$3{,}71 \times 10^{-4}$
250	0,675	$2{,}75 \times 10^{-5}$	$4{,}08 \times 10^{-5}$	482	$1{,}31 \times 10^{-3}$	$5{,}75 \times 10^{-7}$	$4{,}39 \times 10^{-4}$
300	0,616	$2{,}93 \times 10^{-5}$	$4{,}75 \times 10^{-5}$	572	$1{,}20 \times 10^{-3}$	$6{,}11 \times 10^{-7}$	$5{,}12 \times 10^{-4}$
400	0,525	$3{,}25 \times 10^{-5}$	$6{,}20 \times 10^{-5}$	752	$1{,}02 \times 10^{-3}$	$6{,}79 \times 10^{-7}$	$6{,}67 \times 10^{-4}$
500	0,457	$3{,}55 \times 10^{-5}$	$7{,}77 \times 10^{-5}$	932	$0{,}89 \times 10^{-3}$	$7{,}41 \times 10^{-7}$	$8{,}37 \times 10^{-4}$

Curva de ajuste sugerida para el aire:

$$\rho = \frac{p}{RT} \qquad R_{\text{aire}} = 287\ \text{J/(kg}\cdot\text{K)}$$

Ley potencial:
$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{0{,}7}$$

Ley de Sutherland:
$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S} \qquad S_{\text{aire}} = 110{,}4\ \text{K}$$

con T_0 = 273 K, $\mu_0 = 1{,}71 \times 10^{-5}$ kg/(m · s) y T en grados Kelvin.

www.elsolucionario.net

Tabla A.3. Propiedades de líquidos comunes a 1 atm y 20 °C (68 °F).

Líquido	ρ, kg/m^3	μ, kg/(m · s)	Υ, N/m*	p_v, N/m^2	Módulo de compresibilidad, N/m^2	Parámetro de viscosidad, C†
Amoniaco	608	$2{,}20 \times 10^{-4}$	$2{,}13 \times 10^{-2}$	$9{,}10 \times 10^{-5}$	—	1,05
Benceno	881	$6{,}51 \times 10^{-4}$	$2{,}88 \times 10^{-2}$	$1{,}01 \times 10^{-4}$	$1{,}4 \times 10^{-9}$	4,34
Tetracloruro de carbono	1590	$9{,}67 \times 10^{-4}$	$2{,}70 \times 10^{-2}$	$1{,}20 \times 10^{-4}$	$9{,}65 \times 10^{-8}$	4,45
Etanol	789	1.20×10^{-3}	$2{,}28 \times 10^{-2}$	$5{,}7 \times 10^{-3}$	$9{,}0 \times 10^{-8}$	5,72
Etilenglicol	1117	$2{,}14 \times 10^{-2}$	$4{,}84 \times 10^{-2}$	$1{,}2 \times 10^{-1}$	—	11,7
Freón 12	1327	$2{,}62 \times 10^{-4}$	—	—	—	1,76
Gasolina	680	$2{,}92 \times 10^{-4}$	$2{,}16 \times 10^{-2}$	$5{,}51 \times 10^{-4}$	$9{,}58 \times 10^{-8}$	3,68
Glicerina	1260	1,49	$6{,}33 \times 10^{-2}$	$1{,}4 \times 10^{-2}$	$4{,}34 \times 10^{-9}$	28,0
Queroseno	804	$1{,}92 \times 10^{-3}$	$2{,}8 \times 10^{-2}$	$3{,}11 \times 10^{-3}$	$1{,}6 \times 10^{-9}$	5,56
Mercurio	13.550	$1{,}56 \times 10^{-3}$	$4{,}84 \times 10^{-1}$	$1{,}1 \times 10^{-3}$	$2{,}55 \times 10^{-10}$	1,07
Metanol	791	$5{,}98 \times 10^{-4}$	$2{,}25 \times 10^{-2}$	$1{,}34 \times 10^{-4}$	$8{,}3 \times 10^{-8}$	4,63
Aceite SAE 10W	870	$1{,}04 \times 10^{-1}$‡	$3{,}6 \times 10^{-2}$	—	$1{,}31 \times 10^{-9}$	15,7
Aceite SAE 10W30	876	$1{,}7 \times 10^{-1}$‡	—	—	—	14,0
Aceite SAE 30W	891	$2{,}9 \times 10^{-1}$‡	$3{,}5 \times 10^{-2}$	—	$1{,}38 \times 10^{-9}$	18,3
Aceite SAE 50W	902	$8{,}6 \times 10^{-1}$‡	—	—	—	20,2
Agua	998	$1{,}00 \times 10^{-3}$	$7{,}28 \times 10^{-2}$	$2{,}34 \times 10^{-3}$	$2{,}19 \times 10^{-9}$	Tabla A.1
Agua de mar (30%)	1025	$1{,}07 \times 10^{-3}$	$7{,}28 \times 10^{-2}$	$2{,}34 \times 10^{-3}$	$2{,}33 \times 10^{-9}$	7,28

* En contacto con aire.

† La variación de la viscosidad con la temperatura para estos líquidos puede ajustarse con la relación empírica

$$\frac{\mu}{\mu_{20°C}} = \exp\left[C\left(\frac{293\ \text{K}}{T\ \text{K}} - 1\right)\right]$$

con una precisión del ±6 por 100 en el intervalo 0 ≤ T ≤ 100 °C.

‡ Valores representativos. Las clasificaciones de aceites SAE permiten variaciones de hasta el ±50 por 100, especialmente a bajas temperaturas.

Tabla A.4. Propiedades de gases comunes a 1 atm y 20 °C (68 °F).

Gas	Peso molecular	R, m^2/(s^2 · s)	ρg, N/m^3	μ, N · s/m^2	Relación de calores específicos	Exponente de la ley potencial, n*
H_2	2,016	4124	0,822	$9{,}05 \times 10^{-6}$	1,41	0,68
He	4,003	2077	1,63	$1{,}97 \times 10^{-5}$	1,66	0,67
H_2O	18,02	461	7,35	$1{,}02 \times 10^{-5}$	1,33	1,15
Ar	39,944	208	16,3	$2{,}24 \times 10^{-5}$	1,67	0,72
Aire seco	28,96	287	11,8	$1{,}80 \times 10^{-5}$	1,40	0,67
CO_2	44,01	189	17,9	$1{,}48 \times 10^{-5}$	1,30	0,79
CO	28,01	297	11,44	$1{,}82 \times 10^{-5}$	1,40	0,71
N_2	28,02	297	11,4	$1{,}76 \times 10^{-5}$	1,40	0,67
O_2	32,00	260	13,1	$2{,}00 \times 10^{-5}$	1,40	0,69
NO	30,01	277	12,1	$1{,}90 \times 10^{-5}$	1,40	0,78
N_2O	44,02	189	17,9	$1{,}45 \times 10^{-5}$	1,31	0,89
Cl_2	70,91	117	28,9	$1{,}03 \times 10^{-5}$	1,34	1,00
CH_4	16,04	518	6,54	$1{,}34 \times 10^{-5}$	1,32	0,87

* La ley potencial, Ecuación (1.27), $\mu/\mu_{293K} = (T/293)^n$, ajusta las propiedades de estos gases con un error inferior al ±4 por 100 en el intervalo 250 ≤ T ≤ 1000 K. Las temperaturas deben de estar expresadas en grados Kelvin.

www.elsolucionario.net

Tabla A.5. Tensión superficial, presión de vapor y velocidad del sonido del agua.

T, °C	Υ, N/m	p_v, kPa	a, m/s
0	0,0756	0,611	1402
10	0,0742	1,227	1447
20	0,0728	2,337	1482
30	0,0712	4,242	1509
40	0,0696	7,375	1529
50	0,0679	12,34	1542
60	0,0662	19,92	1551
70	0,0644	31,16	1553
80	0,0626	47,35	1554
90	0,0608	70,11	1550
100	0,0589	101,3	1543
120	0,0550	198,5	1518
140	0,0509	361,3	1483
160	0,0466	617,8	1440
180	0,0422	1002	1389
200	0,0377	1554	1334
220	0,0331	2318	1268
240	0,0284	3344	1192
260	0,0237	4688	1110
280	0,0190	6412	1022
300	0,0144	8581	920
320	0,0099	11.274	800
340	0,0056	14.586	630
360	0,0019	18.651	370
374*	0,0*	22.090*	0*

* Punto crítico.

Tabla A.6. Propiedades de la atmósfera estándar.

z, m	T, K	p, Pa	ρ, kg/m^3	a, m/s
–500	291,41	107.508	1,2854	342,2
0	288,16	101.350	1,2255	340,3
500	284,91	95.480	1,1677	338,4
1000	281,66	89.889	1,1120	336,5
1500	278,41	84.565	1,0583	334,5
2000	275,16	79.500	1,0067	332,6
2500	271,91	74.684	0,9570	330,6
3000	268,66	70.107	0,9092	328,6
3500	265,41	65.759	0,8633	326,6
4000	262,16	61.633	0,8191	324,6
4500	258,91	57.718	0,7768	322,6
5000	255,66	54.008	0,7361	320,6
5500	252,41	50.493	0,6970	318,5
6000	249,16	47.166	0,6596	316,5
6500	245,91	44.018	0,6237	314,4
7000	242,66	41.043	0,5893	312,3
7500	239,41	38.233	0,5564	310,2
8000	236,16	35.581	0,5250	308,1
8500	232,91	33.080	0,4949	306,0
9000	229,66	30.723	0,4661	303,8
9500	226,41	28.504	0,4387	301,7
10.000	223,16	26.416	0,4125	299,5
10.500	219,91	24.455	0,3875	297,3
11.000	216,66	22.612	0,3637	295,1
11.500	216,66	20.897	0,3361	295,1
12.000	216,66	19.312	0,3106	295,1
12.500	216,66	17.847	0,2870	295,1
13.000	216,66	16.494	0,2652	295,1
13.500	216,66	15.243	0,2451	295,1
14.000	216,66	14.087	0,2265	295,1
14.500	216,66	13.018	0,2094	295,1
15.000	216,66	12.031	0,1935	295,1
15.500	216,66	11.118	0,1788	295,1
16.000	216,66	10.275	0,1652	295,1
16.500	216,66	9496	0,1527	295,1
17.000	216,66	8775	0,1411	295,1
17.500	216,66	8110	0,1304	295,1
18.000	216,66	7495	0,1205	295,1
18.500	216,66	6926	0,1114	295,1
19.000	216,66	6401	0,1029	295,1
19.500	216,66	5915	0,0951	295,1
20.000	216,66	6467	0,0879	295,1
22.000	218,6	4048	0,0645	296,4
24.000	220,6	2972	0,0469	297,8
26.000	222,5	2189	0,0343	299,1
28.000	224,5	1616	0,0251	300,4
30.000	226,5	1197	0,0184	301,7
40.000	250,4	287	0,0040	317,2
50.000	270,7	80	0,0010	329,9
60.000	255,7	22	0,0003	320,6
70.000	219,7	6	0,0001	297,2

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Apéndice B
Tablas para flujos compresibles

Tabla B.1. Flujo isentrópico de un gas perfecto, $\gamma = 1{,}4$.

Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*	Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
0,0	1,0	1,0	1,0	÷	0,78	0,6690	0,7505	0,8915	1,0471
0,02	0,9997	0,9998	0,9999	28,9421	0,8	0,6560	0,7400	0,8865	1,0382
0,04	0,9989	0,9992	0,9997	14,4815	0,82	0,6430	0,7295	0,8815	1,0305
0,06	0,9975	0,9982	0,9993	9,6659	0,84	0,6300	0,7189	0,8763	1,0237
0,08	0,9955	0,9968	0,9987	7,2616	0,86	0,6170	0,7083	0,8711	1,0179
0,1	0,9930	0,9950	0,9980	5,8218	0,88	0,6041	0,6977	0,8659	1,0129
0,12	0,9900	0,9928	0,9971	4,8643	0,9	0,5913	0,6870	0,8606	1,0089
0,14	0,9864	0,9903	0,9961	4,1824	0,92	0,5785	0,6764	0,8552	1,0056
0,16	0,9823	0,9873	0,9949	3,6727	0,94	0,5658	0,6658	0,8498	1,0031
0,18	0,9776	0,9840	0,9936	3,2779	0,96	0,5532	0,6551	0,8444	1,0014
0,2	0,9725	0,9803	0,9921	2,9635	0,98	0,5407	0,6445	0,8389	1,0003
0,22	0,9668	0,9762	0,9904	2,7076	1,0	0,5283	0,6339	0,8333	1,0000
0,24	0,9607	0,9718	0,9886	2,4956	1,02	0,5160	0,6234	0,8278	1,0003
0,26	0,9541	0,9670	0,9867	2,3173	1,04	0,5039	0,6129	0,8222	1,0013
0,28	0,9470	0,9619	0,9846	2,1656	1,06	0,4919	0,6024	0,8165	1,0029
0,3	0,9395	0,9564	0,9823	2,0351	1,08	0,4800	0,5920	0,8108	1,0051
0,32	0,9315	0,9506	0,9799	1,9219	1,1	0,4684	0,5817	0,8052	1,0079
0,34	0,9231	0,9445	0,9774	1,8229	1,12	0,4568	0,5714	0,7994	1,0113
0,36	0,9143	0,9380	0,9747	1,7358	1,14	0,4455	0,5612	0,7937	1,0153
0,38	0,9052	0,9313	0,9719	1,6587	1,16	0,4343	0,5511	0,7879	1,0198
0,4	0,8956	0,9243	0,9690	1,5901	1,18	0,4232	0,5411	0,7822	1,0248
0,42	0,8857	0,9170	0,9659	1,5289	1,2	0,4124	0,5311	0,7764	1,0304
0,44	0,8755	0,9094	0,9627	1,4740	1,22	0,4017	0,5213	0,7706	1,0366
0,46	0,8650	0,9016	0,9554	1,4246	1,24	0,3912	0,5115	0,7648	1,0432
0,48	0,8541	0,8935	0,9559	1,3801	1,26	0,3809	0,5019	0,7590	1,0504
0,5	0,8430	0,8852	0,9524	1,3398	1,28	0,3708	0,4923	0,7532	1,0581
0,52	0,8317	0,8766	0,9487	1,3034	1,3	0,3609	0,4829	0,7474	1,0663
0,54	0,8201	0,8679	0,9449	1,2703	1,32	0,3512	0,4736	0,7416	1,0750
0,56	0,8082	0,8589	0,9410	1,2403	1,34	0,3417	0,4644	0,7358	1,0842
0,58	0,7982	0,8498	0,9370	1,2130	1,36	0,3323	0,4553	0,7300	1,0940
0,6	0,7840	0,8405	0,9328	1,1882	1,38	0,3232	0,4463	0,7242	1,1042
0,62	0,7716	0,8310	0,9286	1,1656	1,4	0,3142	0,4374	0,7184	1,1149
0,64	0,7591	0,8213	0,9243	1,1451	1,42	0,3055	0,4287	0,7126	1,1262
0,66	0,7465	0,8115	0,9199	1,1265	1,44	0,2969	0,4201	0,7069	1,1379
0,68	0,7338	0,8016	0,9153	1,1097	1,46	0,2886	0,4116	0,7011	1,1501
0,7	0,7209	0,7916	0,9107	1,0944	1,48	0,2804	0,4032	0,6954	1,1629
0,72	0,7080	0,7814	0,9061	1,0806	1,5	0,2724	0,3950	0,6897	1,1762
0,74	0,6951	0,7712	0,9013	1,0681	1,52	0,2646	0,3869	0,6840	1,1899
0,76	0,6821	0,7609	0,8964	1,0570	1,54	0,2570	0,3789	0,6783	1,2042

www.elsolucionario.net

Tabla B.1. *(Continuación)* Flujo isentrópico de un gas perfecto, $\gamma = 1{,}4$.

Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*	Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
1,56	0,2496	0,3710	0,6726	1,2190	2,72	0,0417	0,1033	0,4033	3,2440
1,58	0,2423	0,3633	0,6670	1,2344	2,74	0,0404	0,1010	0,3998	3,3061
1,6	0,2353	0,3557	0,6614	1,2502	2,76	0,0392	0,0989	0,3963	3,3695
1,62	0,2284	0,3483	0,6558	1,2666	2,78	0,0380	0,0967	0,3928	3,4342
1,64	0,2217	0,3409	0,6502	1,2836	2,8	0,0368	0,0946	0,3894	3,5001
1,66	0,2151	0,3337	0,6447	1,3010	2,82	0,0357	0,0926	0,3860	3,5674
1,68	0,2088	0,3266	0,6392	1,3190	2,84	0,0347	0,0906	0,3827	3,6359
1,7	0,2026	0,3197	0,6337	1,3376	2,86	0,0336	0,0886	0,3794	3,7058
1,72	0,1966	0,3129	0,6283	1,3567	2,88	0,0326	0,0867	0,3761	3,7771
1,74	0,1907	0,3062	0,6229	1,3764	2,9	0,0317	0,0849	0,3729	3,8498
1,76	0,1850	0,2996	0,6175	1,3967	2,92	0,0307	0,0831	0,3696	3,9238
1,78	0,1794	0,2931	0,6121	1,4175	2,94	0,0298	0,0813	0,3665	3,9993
1,8	0,1740	0,2868	0,6068	1,4390	2,96	0,0289	0,0796	0,3633	4,0763
1,82	0,1688	0,2806	0,6015	1,4610	2,98	0,0281	0,0779	0,3602	4,1547
1,84	0,1637	0,2745	0,5963	1,4836	3,0	0,0272	0,0762	0,3571	4,2346
1,86	0,1587	0,2686	0,5910	1,5069	3,02	0,0264	0,0746	0,3541	4,3160
1,88	0,1539	0,2627	0,5859	1,5308	3,04	0,0256	0,0730	0,3511	4,3990
1,9	0,1492	0,2570	0,5807	1,5553	3,06	0,0249	0,0715	0,3481	4,4835
1,92	0,1447	0,2514	0,5756	1,5804	3,08	0,0242	0,0700	0,3452	4,5696
1,94	0,1403	0,2459	0,5705	1,6062	3,1	0,0234	0,0685	0,3422	4,6573
1,96	0,1360	0,2405	0,5655	1,6326	3,12	0,0228	0,0671	0,3393	4,7467
1,98	0,1318	0,2352	0,5605	1,6597	3,14	0,0221	0,0657	0,3365	4,8377
2,0	0,1278	0,2300	0,5556	1,6875	3,16	0,0215	0,0643	0,3337	4,9304
2,02	0,1239	0,2250	0,5506	1,7160	3,18	0,0208	0,0630	0,3309	5,0248
2,04	0,1201	0,2200	0,5458	1,7451	3,2	0,0202	0,0617	0,3281	5,1210
2,06	0,1164	0,2152	0,5409	1,7750	3,22	0,0196	0,0604	0,3253	5,2189
2,08	0,1128	0,2104	0,5361	1,8056	3,24	0,0191	0,0591	0,3226	5,3186
2,1	0,1094	0,2058	0,5313	1,8369	3,26	0,0185	0,0579	0,3199	5,4201
2,12	0,1060	0,2013	0,5266	1,8690	3,28	0,0180	0,0567	0,3173	5,5234
2,14	0,1027	0,1968	0,5219	1,9018	3,3	0,0175	0,0555	0,3147	5,6286
2,16	0,0996	0,1925	0,5173	1,9354	3,32	0,0170	0,0544	0,3121	5,7358
2,18	0,0965	0,1882	0,5127	1,9698	3,34	0,0165	0,0533	0,3095	5,8448
2,2	0,0935	0,1841	0,5081	2,0050	3,36	0,0160	0,0522	0,3069	5,9558
2,22	0,0906	0,1800	0,5036	2,0409	3,38	0,0156	0,0511	0,3044	6,0687
2,24	0,0878	0,1760	0,4991	2,0777	3,4	0,0151	0,0501	0,3019	6,1837
2,26	0,0851	0,1721	0,4947	2,1153	3,42	0,0147	0,0491	0,2995	6,3007
2,28	0,0825	0,1683	0,4903	2,1538	3,44	0,0143	0,0481	0,2970	6,4198
2,3	0,0800	0,1646	0,4859	2,1931	3,46	0,0139	0,0471	0,2946	6,5409
2,32	0,0775	0,1609	0,4816	2,2333	3,48	0,0135	0,0462	0,2922	6,6642
2,34	0,0751	0,1574	0,4773	2,2744	3,5	0,0131	0,0452	0,2899	6,7896
2,36	0,0728	0,1539	0,4731	2,3164	3,52	0,0127	0,0443	0,2875	6,9172
2,38	0,0706	0,1505	0,4688	2,3593	3,54	0,0124	0,0434	0,2852	7,0471
2,4	0,0684	0,1472	0,4647	2,4031	3,56	0,0120	0,0426	0,2829	7,1791
2,42	0,0663	0,1439	0,4606	2,4479	3,58	0,0117	0,0417	0,2806	7,3155
2,44	0,0643	0,1408	0,4565	2,4936	3,6	0,0114	0,0409	0,2784	7,4501
2,46	0,0623	0,1377	0,4524	2,5403	3,62	0,0111	0,0401	0,2762	7,5891
2,48	0,0604	0,1346	0,4484	2,5880	3,64	0,0108	0,0393	0,2740	7,7305
2,5	0,0585	0,1317	0,4444	2,6367	3,66	0,0105	0,0385	0,2718	7,8742
2,52	0,0567	0,1288	0,4405	2,6865	3,68	0,0102	0,0378	0,2697	8,0204
2,54	0,0550	0,1260	0,4366	2,7372	3,7	0,0099	0,0370	0,2675	8,1691
2,56	0,0533	0,1232	0,4328	2,7891	3,72	0,0096	0,0363	0,2654	8,3202
2,58	0,0517	0,1205	0,4289	2,8420	3,74	0,0094	0,0356	0,2633	8,4739
2,6	0,0501	0,1179	0,4252	2,8960	3,76	0,0091	0,0349	0,2613	8,6302
2,62	0,0486	0,1153	0,4214	2,9511	3,78	0,0089	0,0342	0,2592	8,7891
2,64	0,0471	0,1128	0,4177	3,0073	3,8	0,0086	0,0335	0,2572	8,9506
2,66	0,0457	0,1103	0,4141	3,0647	3,82	0,0084	0,0329	0,2552	9,1148
2,68	0,0443	0,1079	0,4104	3,1233	3,84	0,0082	0,0323	0,2532	9,2817
2,7	0,0430	0,1056	0,4068	3,1830	3,86	0,0080	0,0316	0,2513	9,4513

www.elsolucionario.net

Tabla B.1. *(Final)* Flujo isentrópico de un gas perfecto, $\gamma = 1{,}4$.

Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*	Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
3,88	0,0077	0,0310	0,2493	9,6237	4,46	0,0036	0,0181	0,2009	16,0092
3,9	0,0075	0,0304	0,2474	9,7990	4,48	0,0035	0,0178	0,1994	16,2837
3,92	0,0073	0,0299	0,2455	9,9771	4,5	0,0035	0,0174	0,1980	16,5622
3,94	0,0071	0,0293	0,2436	10,1581	4,52	0,0034	0,0171	0,1966	16,8449
3,96	0,0069	0,0287	0,2418	10,3420	4,54	0,0033	0,0168	0,1952	17,1317
3,98	0,0068	0,0282	0,2399	10,5289	4,56	0,0032	0,0165	0,1938	17,4228
4,0	0,0066	0,0277	0,2381	10,7188	4,58	0,0031	0,0163	0,1925	17,7181
4,02	0,0064	0,0271	0,2363	10,9117	4,6	0,0031	0,0160	0,1911	18,0178
4,04	0,0062	0,0266	0,2345	11,1077	4,62	0,0030	0,0157	0,1898	18,3218
4,06	0,0061	0,0261	0,2327	11,3068	4,64	0,0029	0,0154	0,1885	18,6303
4,08	0,0059	0,0256	0,2310	11,5091	4,66	0,0028	0,0152	0,1872	19,9433
4,1	0,0058	0,0252	0,2293	11,7147	4,68	0,0028	0,0149	0,1859	19,2608
4,12	0,0056	0,0247	0,2275	11,9234	4,7	0,0027	0,0146	0,1846	19,5828
4,14	0,0055	0,0242	0,2258	12,1354	4,72	0,0026	0,0144	0,1833	19,9095
4,16	0,0053	0,0238	0,2242	12,3508	4,74	0,0026	0,0141	0,1820	20,2409
4,18	0,0052	0,0234	0,2225	12,5695	4,76	0,0025	0,0139	0,1808	20,5770
4,2	0,0051	0,0229	0,2208	12,7916	4,78	0,0025	0,0137	0,1795	20,9179
4,22	0,0049	0,0225	0,2192	13,0172	4,8	0,0024	0,0134	0,1783	21,2637
4,24	0,0048	0,0221	0,2176	13,2463	4,82	0,0023	0,0132	0,1771	21,6144
4,26	0,0047	0,0217	0,2160	13,4789	4,84	0,0023	0,0130	0,1759	21,9700
4,28	0,0046	0,0213	0,2144	13,7151	4,86	0,0022	0,0128	0,1747	22,3306
4,3	0,0044	0,0209	0,2190	13,9549	4,88	0,0022	0,0125	0,1735	22,6963
4,32	0,0043	0,0205	0,2113	14,1984	4,9	0,0021	0,0123	0,1724	23,0671
4,34	0,0042	0,0202	0,2098	14,4456	4,92	0,0021	0,0121	0,1712	23,4431
4,36	0,0041	0,0198	0,2083	14,6965	4,94	0,0020	0,0119	0,1700	23,8243
4,38	0,0040	0,0194	0,2067	14,9513	4,96	0,0020	0,0117	0,1689	24,2109
4,4	0,0039	0,0191	0,2053	15,2099	44,98	0,0019	0,0115	0,1678	24,6027
4,42	0,0038	0,0187	0,2038	15,4724	5	0,0019	0,0113	0,1667	25,0000
4,44	0,0037	0,0184	0,2023	15,7388					

Tabla B.2. Onda de choque normal, relaciones para un gas perfecto, $\gamma = 1{,}4$.

Ma_{n1}	Ma_{n2}	p_2/p_1	$V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	A^*_2/A^*_1
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,02	0,9805	1,0471	1,0334	1,0132	1,0000	1,0000
1,04	0,9620	1,0952	1,0671	1,0263	0,9999	1,0001
1,06	0,9444	1,1442	1,1009	1,0393	0,9998	1,0002
1,08	0,9277	1,1941	1,1349	1,0522	0,9994	1,0006
1,1	0,9118	1,2450	1,1691	1,0649	0,9989	1,0011
1,12	0,8966	1,2968	1,2034	1,0776	0,9982	1,0018
1,14	0,8820	1,3495	1,2378	1,0903	0,9973	1,0027
1,16	0,8682	1,4032	1,2723	1,1029	0,9961	1,0040
1,18	0,8549	1,4578	1,3069	1,1154	0,9946	1,0055
1,2	0,8422	1,5133	1,3416	1,1280	0,9928	1,0073
1,22	0,8300	1,5698	1,3764	1,1405	0,9907	1,0094
1,24	0,8183	1,6272	1,4112	1,1531	0,9884	1,0118
1,26	0,8071	1,6855	14460	1,1657	0,9857	1,0145
1,28	0,7963	1,7448	1,4808	1,1783	0,9827	1,0176
1,3	0,7860	1,8050	1,5157	1,1909	0,9794	1,0211
1,32	0,7760	1,8661	1,5505	1,2035	0,9758	1,0249
1,34	0,7664	1,9282	1,5854	1,2162	0,9718	1,0290
1,36	0,7572	1,9912	1,6202	1,2290	0,9676	1,0335
1,38	0,7483	2,0551	1,6549	1,2418	0,9630	1,0384
1,4	0,7397	2,1200	1,6897	1,2547	0,9582	1,0436

www.elsolucionario.net

Tabla B.2. *(Continuación)* Onda de choque normal, relaciones para un gas perfecto, $\gamma = 1{,}4$.

Ma_{n1}	Ma_{n2}	p_2/p_1	$V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	A^*_2/A^*_1
1,42	0,7314	2,1858	1,7243	1,2676	0,9531	1,0492
1,44	0,7235	2,2525	1,7589	1,2807	0,9476	1,0552
1,46	0,7157	2,3202	1,7934	1,2938	0,9420	1,0616
1,48	0,7083	2,3888	1,8278	1,3069	0,9360	1,0684
1,5	0,7011	2,4583	1,8621	1,3202	0,9298	1,0755
1,52	0,6941	2,5288	1,8963	1,3336	0,9233	1,0830
1,54	0,6874	2,6002	1,9303	1,3470	0,9166	1,0910
1,56	0,6809	2,6725	,9643	1,3606	0,9097	1,0993
1,58	0,6746	2,7458	1,9981	1,3742	0,9026	1,1080
1,6	0,6684	2,8200	2,0317	1,3880	0,8952	1,1171
1,62	0,6625	2,8951	2,0653	1,4018	0,8877	1,1266
1,64	0,6568	2,9712	2,0986	1,4158	0,8799	1,1365
1,66	0,6512	3,0482	2,1318	1,4299	0,8720	1,1468
1,68	0,6458	3,1261	2,1649	1,4440	0,8639	1,1575
1,7	0,6405	3,2050	2,1977	1,4583	0,8557	1,1686
1,72	0,6355	3,2848	2,2304	1,4727	0,8474	1,1801
1,74	0,6305	3,3655	2,2629	1,4873	0,8389	1,1921
1,76	0,6257	3,4472	2,2952	1,5019	0,8302	1,2045
1,78	0,6210	3,5298	2,3273	1,5167	0,8215	1,2173
1,8	0,6165	3,6133	2,3592	1,5316	0,8127	1,2305
1,82	0,6121	3,6978	2,3909	1,5466	0,8038	1,2441
1,84	0,6078	3,7832	2,4224	1,5617	0,7948	1,2582
1,86	0,6036	3,8695	2,4537	1,5770	0,7857	1,2728
1,88	0,5996	3,9568	2,4848	1,5924	0,7765	1,2877
1,9	0,5956	4,0450	2,2157	1,6079	0,7674	1,3032
1,92	0,5918	4,1341	2,5463	1,6236	0,7581	1,3191
1,94	0,5880	4,2242	2,5767	1,6394	0,7488	1,3354
1,96	0,5844	4,3152	2,6069	1,6553	0,7395	1,3522
1,98	0,5808	4,4071	2,6369	1,6713	0,7302	1,3695
2,0	0,5774	4,5000	2,6667	1,6875	0,7209	1,3872
2,02	0,5740	4,5938	2,6962	1,7038	0,7115	1,4054
2,04	0,5707	4,6885	2,7255	1,7203	0,7022	1,4241
2,06	0,5675	4,7842	2,7545	1,7369	0,6928	1,4433
2,08	0,5643	4,8808	2,7833	1,7536	0,6835	1,4630
2,1	0,5613	4,9783	2,8119	1,7705	0,6742	1,4832
2,12	0,5583	5,0768	2,8402	1,7875	0,6649	1,5039
2,14	0,5554	5,1762	2,8683	1,8046	0,6557	1,5252
2,16	0,5525	5,2765	2,8962	1,8219	0,6464	1,5469
2,18	0,5498	5,3778	2,9238	1,8393	0,6373	1,5692
2,2	0,5471	5,4800	2,9512	1,8569	0,6281	1,5920
2,22	0,5444	5,5831	2,9784	1,8746	0,6191	1,6154
2,24	0,5418	5,6872	3,0053	1,8924	0,6100	1,6393
2,26	0,5393	5,7922	3,0319	1,9104	0,6011	1,6638
2,28	0,5368	5,8981	3,0584	1,9285	0,4921	1,6888
2,3	0,5344	6,0050	3,0845	1,9468	0,5833	1,7144
2,32	0,5321	6,1128	3,1105	1,9652	0,5745	1,7406
2,34	0,5297	6,2215	3,1362	1,9838	0,5658	1,7674
2,36	0,5275	6,3312	3,1617	2,0025	0,5572	1,7948
2,38	0,5253	6,4418	3,1869	2,0213	0,5486	1,8228
2,4	0,5231	6,5533	3,2119	2,0403	0,5401	1,8514
2,42	0,5210	6,6658	3,2367	2,0595	0,5317	1,8806
2,44	0,5189	6,7792	3,2612	2,0788	0,5234	1,9105
2,46	0,5169	6,8935	3,2855	2,0982	0,5152	1,9410
2,48	0,5149	7,0088	3,3095	2,1178	0,5071	1,9721
2,5	0,5130	7,1250	3,3333	2,1375	0,4990	2,0039
2,52	0,5111	7,2421	3,3569	2,1574	0,4911	2,0364
2,54	0,5092	7,3602	3,3803	2,1774	0,4832	2,0696
2,56	0,5074	7,4792	3,4034	2,1976	0,4754	2,1035

www.elsolucionario.net

Tabla B.2. *(Continuación)* Onda de choque normal, relaciones para un gas perfecto, $\gamma = 1{,}4$.

Ma_{n1}	Ma_{n2}	p_2/p_1	$V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	A^*_2/A^*_1
2,58	0,5056	7,5991	3,4263	2,2179	0,4677	2,1381
2,6	0,5039	7,7200	3,4490	2,2383	0,4601	2,1733
2,62	0,5022	7,8418	3,4714	2,2590	0,4526	2,2093
2,64	0,5005	7,9645	3,4937	2,2797	0,4452	2,2461
2,66	0,4988	8,0882	3,5157	2,3006	0,4379	2,2835
2,68	0,4972	8,2128	3,5374	2,3217	0,4307	2,3218
2,7	0,4956	8,3383	3,5590	2,3429	0,4236	2,3608
2,72	0,4991	8,4648	3,5803	2,3642	0,4166	2,4005
2,74	0,4926	8,5922	3,6015	2,3858	0,4097	2,4411
2,76	0,4911	8,7205	3,6224	2,4074	0,4028	2,4825
2,78	0,4896	8,8498	3,6431	2,4292	0,3961	2,5246
2,8	0,4882	8,9800	2,6636	2,4512	0,3895	2,5676
2,82	0,4868	9,1111	3,6838	2,4733	0,3829	2,6115
2,84	0,4854	9,2432	3,7039	2,4955	0,3765	2,6561
2,86	0,4840	9,3762	3,7238	2,5179	0,3701	2,7017
2,88	0,4827	9,5101	3,7434	2,5405	0,3639	2,7481
2,9	0,4814	9,6450	3,7629	2,5632	0,3577	2,7954
2,92	0,4801	9,7808	3,7821	2,5861	0,3517	2,8436
2,94	0,4788	9,9175	3,8012	2,6091	0,3457	2,8927
2,96	0,4776	10.0552	3,8200	2,6322	0,3398	2,9427
2,98	0,4764	10,1938	3,8387	2,6555	0,3340	2,9937
3,0	0,4752	10,3333	3,8571	2,6790	0,3283	3,0456
3,02	0,4740	10,4738	3,8754	2,7026	0,3227	3,0985
3,04	0,4729	10,6152	3,8935	2,7264	0,3172	3,1523
3,06	0,4717	19,7575	3,9114	2,7503	0,3118	3,2072
3,08	0,4706	10,9008	3,9291	2,7744	0,3065	3,2630
3,1	0,4695	11,0450	3,9466	2,7986	0,3012	3,3199
3,12	0,4685	11,1901	3,9639	2,8230	0,2960	3,3778
3,14	0,4674	11,3362	3,9811	2,8475	0,2910	3,4358
3,16	0,4664	11,4832	3,9981	2,8722	0,2860	3,4969
3,18	0,4654	11,6311	4,0149	2,8970	0,2811	3,5580
3,2	0,4643	11,7800	4,0315	2,9220	0,2762	3,6202
3,22	0,4634	11,9298	4,0479	2,9471	0,2715	3,6835
3,24	0,4624	12,0805	4,0642	2,9724	0,2668	3,7480
3,26	0,4614	12,2322	4,0803	2,9970	0,2622	3,8136
3,28	0,4605	12,3848	4,0963	3,0234	0,2577	3,8803
3,3	0,4596	12,5383	4,1120	3,0492	0,2533	3,9483
3,32	0,4587	12,6928	4,1276	3,0751	0,2489	4,0174
3,34	0,4578	12,8482	4,1431	3,1011	0,2446	4,0877
3,36	0,4569	13,0045	4,1583	3,1273	0,2404	4,1593
3,38	0,4560	13,1618	4,1734	3,1537	0,2363	4,2321
3,4	0,4552	13,3200	4,1884	3,1802	0,2322	4,3062
3,42	0,4544	13,4791	4,2032	3,2069	0,2282	4,3815
3,44	0,4535	13,6392	4,2178	3,2337	0,2243	4,4581
3,46	0,4527	13,8002	4,2323	3,2607	0,2205	4,5361
3,48	0,4519	13,9421	4,2467	3,2878	0,2167	4,6154
3,5	0,4512	14,1250	4,2609	3,3151	0,2129	4,6960
3,52	0,4504	14,2888	4,2749	3,3425	0,2093	4,7780
3,54	0,4496	14,4535	4,2888	3,3701	0,2057	4,8614
3,56	0,4489	14,6192	4,3026	3,3978	0,2022	4,9461
3,58	0,4481	14,7858	4,3162	3,4257	0,1987	5,0324
3,6	0,4474	14,9533	4,3296	3,4537	0,1953	5,1200
3,62	0,4467	15,1218	4,3429	3,4819	0,1920	5,2091
3,64	0,4460	15,2912	4,3561	3,5103	0,1887	5,2997
3,66	0,4453	15,4615	4,3692	3,5388	0,1855	5,3918
3,68	0,4446	15,6328	4,3821	3,5674	0,1823	5,4854
3,7	0,4439	15,8050	4,3949	3,5962	0,1792	5,5806
3,72	0,4433	15,9781	4,4075	3,6252	0,1761	5,6773

www.elsolucionario.net

Tabla B.2. *(Continuación)* Onda de choque normal, relaciones para un gas perfecto, $\gamma = 1{,}4$.

Ma_{n1}	Ma_{n2}	p_2/p_1	$V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	A^*_2/A^*_1
3,74	0,4426	16,1522	4,4200	3,6543	0,1731	5,7756
3,76	0,4420	16,3272	4,4324	3,6836	0,1702	5,8755
3,78	0,4414	16,5031	4,4447	3,7130	0,1673	5,9770
3,8	0,4407	16,6800	4,4568	3,7426	0,1645	6,0801
3,82	0,4401	16,8578	4,4688	3,7723	0,1617	6,1849
3,84	0,3295	17,0365	4,4807	3,8022	0,1589	6,2915
3,86	0,4389	17,2162	4,4924	3,8323	0,1563	6,3997
3,88	0,4383	17,3968	4,5041	3,8625	0,1536	6,5096
3,9	0,4377	17,5783	4,4156	3,8928	0,1510	6,6213
3,92	0,4372	17,7608	4,5270	3,9233	0,1485	6,7348
3,94	0,4366	17,9442	4,5383	3,9540	0,1460	6,8501
3,96	0,4360	18,1285	4,5494	3,9848	0,1435	6,9672
3,98	0,4355	18,3138	4,5605	4,0158	0,1411	7,0861
4,0	0,4350	18,5000	4,5714	4,0469	0,1388	7,2069
4,02	0,4344	18,6871	4,5823	4,0781	0,1364	7,3296
4,04	0,4339	19,8752	4,5930	4,1096	0,1342	7,4542
4,06	0,4334	19,0642	4,6036	4,1412	0,1319	7,5807
4,08	0,4329	19,2541	4,6141	4,1729	0,1297	7,7092
4,1	0,4324	19,4450	4,6245	4,2048	0,1276	7,8397
4,12	0,4319	19,6368	4,6348	4,2368	0,1254	7,9722
4,14	0,4314	19,8295	4,6450	4,2690	0,1234	8,1067
4,16	0,4309	20,0232	4,6550	4,3014	0,1213	8,2433
4,18	0,4304	20,2178	4,6650	4,3339	0,1193	8.3819
4,2	0,4299	20,4133	4,6749	4,3666	0,1173	8,5227
4,22	0,4295	20,6098	4,6847	4,3994	0,1154	8,6656
4,24	0,4290	20,8072	4,6944	4,4324	0,1135	8,8107
4,26	0,4286	21,0055	4,7040	4,4655	0,1116	8,9579
4,28	0,4281	21,2048	4,7135	4,4988	0,1098	9,1074
4,3	0,4277	21,4050	4,7229	4,5322	0,1080	9,2591
4,32	0,4272	21,6061	4,7322	4,5658	0,1062	9,4131
4,34	0,4268	21,8082	4,7414	4,5995	0,1045	9,5694
4,36	0,4264	22,0112	4,7505	4,6334	0,1028	9,7280
4,38	0,4260	22,2151	4,7595	4,6675	0,1011	9,8889
4,4	0,4255	22,4200	4,7685	4,7017	0,0995	10,0522
4,42	0,4251	22,6258	4,7773	4,7361	0,0979	10,2179
4,44	0,4247	22,8325	4,7861	4,7706	0,0963	10,3861
4,46	0,4243	23,0402	4,7948	4,8053	0,0947	10,5567
4,48	0,4239	23,2488	4,8034	4,8401	0,0932	19,7298
4,5	0,4236	23,4583	4,8119	4,8751	0,0917	10,9054
4,52	0,4243	23,6688	4,8203	4,9102	0,0902	11,0835
4,54	0,4228	23,8802	4,8287	4,9455	0,0888	11,2643
4,56	0,4224	24,0925	4,8369	4,9810	0,0874	11,4476
4,58	0,4220	24,3058	4,8451	5,0166	0,0860	11,6336
4,6	0,4217	24,5200	4,8532	5,0523	0,0846	11,8222
4,62	0,4213	24,7351	4,8612	5,0882	0,0832	12,0136
4,64	0,4210	24,9512	4,8692	5,1243	0,0819	12,2076
4,66	0,4206	25,1682	4,8771	5,1605	0,0806	12,4044
4,68	0,4203	25,3861	4,8849	5,1969	0,0793	12,6040
4,7	0,4199	25,6050	4,8926	5,2334	0,0781	12,8065
4,72	0,4196	25,8248	4,9002	5,2701	0,0769	13,0117
4,74	0,4192	26,0455	4,9078	5,3070	0,0756	13,2199
4,76	0,4189	26,2672	4,9153	5,3440	0,0745	13.4310
4,78	0,4186	26,4898	4,9227	5,3811	0,0733	13,6450
4,8	0,4183	26,7133	4,9301	5,4184	0,0721	13,8630
4,82	0,4179	26,9378	4,9374	5,4559	0,0710	14,0820
4,84	0,4176	27,1632	4,9446	5,4935	0,0699	14,3050
4,86	0,4173	27,3895	4,9518	5,5313	0,0688	14,5312
4,88	0,4170	27,6168	4,9589	5,5692	0,0677	14,7604

www.elsolucionario.net

Tabla B.2. *(Final)* Onda de choque normal, relaciones para un gas perfecto, $\gamma = 1{,}4$.

Ma_{n1}	Ma_{n2}	p_2/p_1	$V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1$	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	A_2^*/A_1^*
4,9	0,4167	27,8450	4,9659	5,6073	0,0667	14,9928
4,92	0,4164	28,0741	4,9728	5,6455	0,0657	15,2284
4,94	0,4161	28,3042	4,9797	5,6839	0,0647	15,4672
4,96	0,4158	28,5352	4,9865	5,7224	0,0637	15,7902
4,98	0,4155	28,7671	4,9933	5,7611	0,0627	15,9545
5,0	0,4152	29,0000	5,0000	5,8000	0,0617	16,2032

Tabla B.3. Flujo adiabático con fricción en un conducto de sección constante para $\gamma = 1{,}4$.

Ma	$\bar{f}L^*/D$	p/p^*	T/T^*	$\rho^*/\rho = V/V^*$	p_0/p_0^*
0,0	÷	÷	1,2000	0,0	÷
0,02	1778,4500	54,7701	1,1999	0,0219	28,9421
0,04	440,3520	27,3817	1,1996	0,0438	14,4815
0,06	193,0310	18,2508	1,1991	0,0657	9,6659
0,08	106,7180	13,6843	1,1985	0,0876	7,2616
0,1	66,9216	10,9435	1,1976	0,1094	5,8218
0,12	45,4080	9,1156	1,1966	0,1313	4,8643
0,14	32,5113	7,8093	1,1953	0,1531	4,1824
0,16	24,1978	6,8291	1,1939	0,1748	3,6727
0,18	18,5427	6,0662	1,1923	0,1965	3,2779
0,2	14,5333	5,4554	1,1905	0,2182	2,9635
0,22	11,5961	4,9554	1,1885	0,2398	2,7076
0,24	9,3865	4,5383	1,1863	0,2614	2,4956
0,26	7,6876	4,1851	1,1840	0,2829	2,3173
0,28	6,3572	3,8820	1,1815	0,3043	2,1656
0,3	5,2993	3,6191	1,1788	0,3257	2,0351
0,32	4,4467	3,3887	1,1759	0,3470	1,9219
0,34	3,7520	3,1853	1,1729	0,3682	1,8229
0,36	3,1801	3,0042	1,1697	0,3893	1,7358
0,38	2,7054	2,8420	1,1663	0,4104	1,6587
0,4	2,3085	2,6958	1,1628	0,4313	1,5901
0,42	1,9744	2,5634	1,1591	0,4522	1,5289
0,44	1,6915	2,4428	1,1553	0,4729	1,4740
0,46	1,4509	2,3326	1,1513	0,4936	1,4246
0,48	1,2453	2,2313	1,1471	0,5141	1,3801
0,5	1,0691	2,1381	1,1429	0,5345	1,3398
0,52	0,9174	2,0519	1,1384	0,5548	1,3034
0,54	0,7866	1,9619	1,1339	0,5750	1,2703
0,56	0,6736	1,8975	1,1292	0,5951	1,2403
0,58	0,5757	1,8282	1,1244	0,6150	1,2130
0,6	0,4908	1,7634	1,1194	0,6348	1,1882
0,62	0,4172	1,7026	1,1143	0,6545	1,1656
0,64	0,3533	1,6456	1,1091	0,6740	1,1451
0,66	0,2979	1,5919	1,1038	0,6934	1,1265
0,68	0,2498	1,5413	1,0984	0,7127	1,1097
0,7	0,2081	1,4935	1,0929	0,7318	1,0944
0,72	0,1721	1,4482	1,0873	0,7508	1,0806
0,74	0,1411	1,4054	1,0815	0,7696	1,0681
0,76	0,1145	1,3647	1,0757	0,7883	1,0570
0,78	0,0917	1,3261	1,0698	0,8068	1,0471
0,8	0,0723	1,2893	1,0638	0,8251	1,0382
0,82	0,0559	1,2542	1,0578	0,8433	1,0305
0,84	0,0423	1,2208	1,0516	0,8614	1,0237
0,86	0,0310	1,1889	1,0454	0,8793	1,0179

www.elsolucionario.net

Tabla B.3. *(Continuación)* Flujo adiabático con fricción en un conducto de sección constante para $\gamma = 1{,}4$.

Ma	$\bar{f}L^*/D$	p/p^*	T/T^*	$\rho^*/\rho = V/V^*$	p_0/p_0^*
0,88	0,0218	1,1583	1,0391	0,8970	1,0129
0,9	0,0145	1,1291	1,0327	0,9146	1,0089
0,92	0,0089	1,1011	1,0263	0,9320	1,0056
0,94	0,0048	1,0743	1,0198	0,9493	1,0031
0,96	0,0021	1,0485	1,0132	0,9663	1,0014
0,98	0,0005	1,0238	1,0066	0,9833	1,0003
1,0	0,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,02	0,0005	0,9771	0,9933	1,0166	1,0003
1,04	0,0018	0,9551	0,9866	1,0330	1,0013
1,06	0,0038	0,9338	0,9798	1,0492	1,0029
1,08	0,0066	0,9133	0,9730	1,0653	1,0051
1,1	0,0099	0,8936	0,9662	1,0812	1,0079
1,12	0,0138	0,8745	0,9593	1,0970	1,0113
1,14	0,0182	0,8561	0,9524	1,1126	1,0153
1,16	0,0230	0,8383	0,9455	1,1280	1,0198
1,18	0,0281	0,8210	0,9386	1,1432	1,0248
1,2	0,0336	0,8044	0,9317	1,1583	1,0304
1,22	0,0394	0,7882	0,9247	1,1732	1,0366
1,24	0,0455	0,7726	0,9178	1,1879	1,0432
1,26	0,0517	0,7574	0,9108	1,2025	1,0504
1,28	0,0582	0,7427	0,9038	1,2169	1,0581
1,3	0,0648	0,7285	0,8969	1,2311	1,0663
1,32	0,0716	0,7147	0,8899	1,2452	1,0750
1,34	0,0785	0,7012	0,8829	1,2591	1,0842
1,36	0,0855	0,6882	0,8760	1,2729	1,0940
1,38	0,0926	0,6755	0,8690	1,2864	1,1042
1,4	0,0997	0,6632	0,8621	1,2999	1,1149
1,42	0,1069	0,6512	0,8551	1,3131	1,1262
1,44	0,1142	0,6396	0,8482	1,3262	1,1379
1,46	0,1215	0,6282	0,8413	1,3392	1,1501
1,48	0,1288	0,6172	0,8344	1,3520	1,1629
1,5	0,1361	0,6065	0,8276	1,3646	1,1762
1,52	0,1433	0,5960	0,8207	1,3770	1,1899
1,54	0,1506	0,5858	0,8139	1,3894	1,2042
1,56	0,1579	0,5759	0,8071	1,4015	1,2190
1,58	0,1651	0,5662	0,8004	1,4135	1,2344
1,6	0,1724	0,5568	0,7937	1,4254	1,2502
1,62	0,1795	0,5476	0,7869	1,4371	1,2666
1,64	0,1867	0,5386	0,7803	1,4487	1,2836
1,66	0,1938	0,5299	0,7736	1,4601	1,3010
1,68	0,2008	0,5213	0,7670	1,4713	1,3190
1,7	0,2078	0,5130	0,7605	1,4825	1,3376
1,72	0,2147	0,5048	0,7539	1,4935	1,3567
1,74	0,2216	0,4969	0,7474	1,5043	1,3764
1,76	0,2284	0,4891	0,7410	1,5150	1,3967
1,78	0,2352	0,4815	0,7345	1,5256	1,4175
1,8	0,2419	0,4741	0,7282	1,5360	1,4390
1,82	0,2485	0,4668	0,7218	1,5463	1,4610
1,84	0,2551	0,4597	0,7155	1,5564	1,4836
1,86	0,2616	0,4528	0,7093	1,5664	1,5069
1,88	0,2680	0,4460	0,7030	1,5763	1,5308
1,9	0,2743	0,4394	0,6969	1,5861	1,5553
1,92	0,2806	0,4329	0,6907	1,5957	1,5804
1,94	0,2668	0,4265	0,6847	1,6052	1,6062
1,96	0,2929	0,4203	0,6786	1,6146	1,6326
1,98	0,2990	0,4142	0,6726	1,6239	1,6597
2,0	0,3050	0,4082	0,6667	1,6330	1,6875
2,02	0,3109	0,4024	0,6608	1,6420	1,7160

www.elsolucionario.net

Tabla B.3. *(Continuación)* Flujo adiabático con fricción en un conducto de sección constante para $\gamma = 1{,}4$.

Ma	$\bar{f}L^*/D$	p/p^*	T/T^*	$\rho^*/\rho = V/V^*$	p_0/p_0^*
2,04	0,3168	0,3967	0,6549	1,6509	1,7451
2,06	0,3225	0,3911	0,6491	1,6597	1,7750
2,08	0,3282	0,3856	0,6433	1,6683	1,8056
2,1	0,3339	0,3802	0,6376	1,6769	1,8369
2,12	0,3394	0,3750	0,6320	1,6853	1,8690
2,14	0,3449	0,3698	0,6263	1,6936	1,9018
2,16	0,3503	0,3648	0,6208	1,7018	1,9354
2,18	0,3556	0,3598	0,6152	1,7099	1,9698
2,2	0,3609	0,3549	0,6098	1,7179	2,0050
2,22	0,3661	0,3502	0,6043	1,7258	2,0409
2,24	0,3712	0,3455	0,5989	1,7336	2,0777
2,26	0,3763	0,3409	0,5936	1,7412	2,1153
2,28	0,3813	0,3364	0,5883	1,7488	2,1538
2,3	0,3862	0,3320	0,5831	1,7563	2,1931
2,32	0,3911	0,3277	0,5779	1,7637	2,2333
2,34	0,3959	0,3234	0,5728	1,7709	2,2744
2,36	0,4006	0,3193	0,5677	1,7781	2,3164
2,38	0,4053	0,3152	0,5626	1,7852	2,3593
2,4	0,4099	0,3111	0,5576	1,7922	2,4031
2,42	0,4144	0,3072	0,5527	1,7991	2,4479
2,44	0,4189	0,3033	0,5478	1,8059	2,4936
2,46	0,4233	0,2995	0,5429	1,8126	2,5403
2,48	0,4277	0,2958	0,5381	1,8192	2,5880
2,5	0,4320	0,2921	0,5333	1,8257	2,6367
2,52	0,4362	0,2885	0,5286	1,8322	2,6865
2,54	0,4404	0,2850	0,5239	1,8386	2,7372
2,56	0,4445	0,2815	0,5193	1,8448	2,7891
2,58	0,4486	0,2781	0,5147	1,8510	2,8420
2,6	0,4526	0,2747	0,5102	1,8571	2,8960
2,62	0,4565	0,2714	0,5057	1,8632	2,9511
2,64	0,4604	0,2682	0,5013	1,8691	3,0073
2,66	0,4643	0,2650	0,4969	1,8750	3,0647
2,68	0,4681	0,2619	0,4925	1,8808	3,1233
2,7	0,4718	0,2588	0,4882	1,8865	3,1830
2,72	0,4755	0,2558	0,4839	1,8922	3,2440
2,74	0,4791	0,2528	0,4797	1,8978	3,3061
2,76	0,4827	0,2498	0,4755	1,9033	3,3695
2,78	0,4863	0,2470	0,4714	1,9087	3,4342
2,8	0,4898	0,2441	0,4673	1,9140	3,5001
2,82	0,4932	0,2414	0,4632	1,9193	3,5674
2,84	0,4966	0,2386	0,4592	1,9246	3,6359
2,86	0,5000	0,2359	0,4552	1,9297	3,7058
2,88	0,5033	0,2333	0,4513	1,9348	3,7771
2,9	0,5065	0,2307	0,4474	1,9398	3,8498
2,92	0,5097	0,2281	0,4436	1,9448	3,9238
2,94	0,5129	0,2256	0,4398	1,9497	3,9993
2,96	0,5160	0,2231	0,4360	1,9545	4,0763
2,98	0,5191	0,2206	0,4323	1,9593	4,1547
3,0	0,5222	0,2182	0,4286	1,9640	4,2346
3,02	0,5252	0,2158	0,4249	1,9686	4.3160
3,04	0,5281	0,2135	0,4213	1,9732	4,3989
3,06	0,5310	0,2112	0,4177	1,9777	4,4835
3,08	0,5339	0,2090	0,4142	1,9822	4,5696
3,1	0,5368	0,2067	0,4107	1,9866	4,6573
3,12	0,5396	0,2045	0,4072	1,9910	4,7467
3,14	0,5424	0,2024	0,4038	1,9953	4,8377
3,16	0,5451	0,2002	0,4004	1,9995	4,9304
3,18	0,5478	0,1981	0,3970	2,0037	5,0248

www.elsolucionario.net

Tabla B.3. *(Final)* Flujo adiabático con fricción en un conducto de sección constante para $\gamma = 1{,}4$.

Ma	$\bar{f}L^*/D$	p/p^*	T/T^*	$\rho^*/\rho = V/V^*$	p_0/p_0^*
3,2	0,5504	0,1961	0,3937	2,0079	5,1210
3,22	0,5531	0,1940	0,3904	2,0120	5,2189
3,24	0,5557	0,1920	0,3872	2,0160	5,3186
3,26	0,5582	0,1901	0,3839	2,0200	5,4201
3,28	0,5607	0,1881	0,3807	2,0239	5,5234
3,3	0,5632	0,1862	0,3776	2,0278	5,6286
3,32	0,5657	0,1843	0,3745	2,0317	5,7358
3,34	0,5681	0,1825	0,3714	2,0355	5,8448
3,36	0,5705	0,1806	0,3683	2,0392	5,9558
3,38	0,5729	0,1788	0,3653	2,0429	6,0687
3,4	0,5752	0,1770	0,3623	2,0466	6,1837
3,42	0,5775	0,1753	0,3594	2,0502	6,3007
3,44	0,5798	0,1736	0,3564	2,0537	6,4198
3,46	0,5820	0,1718	0,3535	2,0573	6,5409
3,48	0,5842	0,1702	0,3507	2,0607	6,6642
3,5	0,5864	0,1685	0,3478	2,0642	6,7896
3,52	0,5886	0,1669	0,3450	2,0676	6,9172
3,54	0,5907	0,1653	0,3422	2,0709	7,0471
3,56	0,5928	0,1637	0,3395	2,0743	7,1791
3,58	0,5949	0,1621	0,3368	2,0775	7,3135
3,6	0,5970	0,1616	0,3341	2,0808	7,4501
3,62	0,5990	0,1590	0,3314	2,0840	7,5891
3,64	0,6010	0,1575	0,3288	2,0871	7,7305
3,66	0,6030	0,1560	0,3262	2,0903	7,8742
3,68	0,6049	0,1546	0,3236	2,0933	8,0204
3,7	0,6068	0,1531	0,3210	2,0964	8,1691
3,72	0,6087	0,1517	0,3185	2,0994	8,3202
3,74	0,6106	0,1503	0,3160	2,1024	8,4739
3,76	0,6125	0,1489	0,3135	2,1053	8,6302
3,78	0,6143	0,1475	0,3111	2,1082	8,7891
3,8	0,6161	0,1462	0,3086	2,1111	8,9506
3,82	0,6179	0,1449	0,3062	2,1140	9,1148
3,84	0,6197	0,1436	0,3039	2,1168	9,2817
3,86	0,6214	0,1423	0,3015	2,1195	9,4513
3,88	0,6231	9,1410	0,2992	2,1223	9,6237
3,9	0,6248	0,1397	0,2969	2,1250	9,7990
3,92	0,6265	0,1385	0,2946	2,1277	9,9771
3,94	0,6282	0,1372	0,2923	2,1303	10,1581
3,96	0,6298	0,1360	0,2901	2,1329	10,3420
3,98	0,6315	0,1348	0,2879	2,1355	10,5289
4,0	0,6331	0,1336	0,2857	2,1381	10,7188

Tabla B.4. Flujo en un conducto sin fricción y con transferencia de calor para $\gamma = 1{,}4$.

Ma	T_0/T_0^*	p/p^*	T/T^*	$\rho^*/\rho = V/V^*$	p_0/p_0^*
0,0	0,0	2,4000	0,0	0,0	1,2679
0,02	0,0019	2,3987	0,0023	0,0010	1,2675
0,04	0,0076	2,3946	0,0092	0,0038	1,2665
0,06	0,0171	2,3800	0,0205	0,0086	1,2647
0,08	0,0302	2,3787	0,0362	0,0152	1,2623
0,1	0,0468	2,3669	0,0560	0,0237	1,2591
0,12	0,0666	2,3526	0,0797	0,0339	1,2554
0,14	0,0895	2,3359	0,1069	0,0458	1,2510
0,16	0,1151	2,3170	0,1374	0,0593	1,2461

www.elsolucionario.net

Tabla B.4. *(Continuación)* Flujo en un conducto sin fricción y con transferencia de calor para $\gamma = 1{,}4$.

Ma	T_0/T_0^*	p/p^*	T/T^*	$\rho^*/\rho = V/V^*$	p_0/p_0^*
0,18	0,1432	2,2959	0,1708	0,0744	1,2406
0,2	0,1736	2,2727	0,2066	0,0909	1,2346
0,22	0,2057	2,2477	0,2445	0,1088	1,2281
0,24	0,2395	2,2209	0,2841	0,1279	1,2213
0,26	0,2745	2,1925	0,3250	0,1482	1,2140
0,28	0,3104	2,1626	0,3667	0,1696	1,2064
0,3	0,3469	2,1314	0,4089	0,1918	1,1985
0,32	0,3837	2,0991	0,4512	0,2149	1,1904
0,34	0,4206	2,0657	0,4933	0,2388	1,1822
0,36	0,4572	2,0314	0,5348	0,2633	1,1737
0,38	0,4935	1,9964	0,5755	0,2883	1,1652
0,4	0,5290	1,9608	0,6151	0,3137	1,1566
0,42	0,5638	1,9247	0,6535	0,3395	1,1480
0,44	0,5975	1,8882	0,6903	0,3656	1,1394
0,46	0,6301	1,8515	0,7254	0,3918	1,1308
0,48	0,6614	1,8147	0,7587	0,4181	1,1224
0,5	0,6914	1,7778	0,7901	0,4444	1,1141
0,52	0,7199	1,7409	0,8196	0,4708	1,1059
0,54	0,7470	1,7043	0,8469	0,4970	1,0979
0,56	0,7725	1,6678	0,8723	0,5230	1,0901
0,58	0,7965	1,6316	0,8955	0,5489	1,0826
0,6	0,8189	1,5957	0,9167	0,5745	1,0753
0,62	0,8398	1,5603	0,9358	0,5998	1,0682
0,64	0,8592	1,5253	0,9530	0,6248	1,0615
0,66	0,8771	1,4908	0,9682	0,6494	1,0550
0,68	0,8935	1,4569	0,9814	0,6737	1,0489
0,7	0,9085	1,4235	0,9929	0,6975	1,0431
0,72	0,9221	1,3907	1,0026	0,7209	1,0376
0,74	0,9344	1,3585	1,0106	0,7439	1,0325
0,76	0,9455	1,3270	1,0171	0,7665	1,0278
0,78	0,9553	1,2961	1,0220	0,7885	1,0234
0,8	0,9639	1,2658	1,0255	0,8101	1,0193
0,82	0,9715	1,2362	1,0276	0,8313	1,0157
0,84	0,9781	1,2073	1,0285	0,8519	1,0124
0,86	0,9836	1,1791	1,0283	0,8721	1,0095
0,88	0,9883	1,1515	1,0269	0,8918	1,0070
0,9	0,9921	1,1246	1,0245	0,9110	1,0049
0,92	0,9951	1,0984	1,0212	0,9297	1,0031
0,94	0,9973	1,0728	1,0170	0,9480	1,0017
0,96	0,9988	1,0479	1,0121	0,9658	1,0008
0,98	0,9997	1,0236	1,0064	0,9831	1,0002
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,02	0,9997	0,9770	0,9930	1,0164	1,0002
1,04	0,9989	0,9546	0,9855	1,0325	1,0008
1,06	0,9977	0,9327	0,9776	1,0480	1,0017
1,08	0,9960	0,9115	0,9691	1,0632	1,0031
1,1	0,9939	0,8909	0,9603	1,0780	1,0049
1,12	0,9915	0,8708	0,9512	1,0923	1,0070
1,14	0,9887	0,8512	0,9417	1,1063	1,0095
1,16	0,9856	0,8322	0,9320	1,1198	1,0124
1,18	0,9823	0,8137	0,9220	1,1330	1,0157
1,2	0,9787	0,7958	0,9118	1,1459	1,0194
1,22	0,9749	0,7783	0,9015	1,1584	1,0235
1,24	0,9709	0,7613	0,8911	1,1705	1,0279
1,26	0,9668	0,7447	0,8805	1,1823	1,0328
1,28	0,9624	0,7287	0,8699	1,1938	1,0380
1,3	0,9534	0,7130	0,8592	1,2050	1,0437
1,32	0,9534	0,6978	0,8484	1,2159	1,0497

www.elsolucionario.net

Tabla B.4. *(Continuación)* Flujo en un conducto sin fricción y con transferencia de calor para $\gamma = 1{,}4$.

Ma	T_0/T_0^*	p/p^*	T/T^*	$\rho^*/\rho = V/V^*$	p_0/p_0^*
1,34	0,9487	0,6830	0,8377	1,2264	1,0561
1,36	0,9440	0,6686	0,8269	1,2367	1,0629
1,38	0,9391	0,6546	0,8161	1,2467	1,0701
1,4	0,9343	0,6410	0,8054	1,2564	1,0777
1,42	0,9293	0,6278	0,7947	1,2659	1,0856
1,44	0,9243	0,6149	0,7840	1,2751	1,0940
1,46	0,9193	0,6024	0,7735	1,2840	1,1028
1,48	0,9143	0,5902	0,7629	1,2927	1,1120
1,5	0,9093	0,5783	0,7525	1,3012	1,1215
1,52	0,9042	0,5668	0,7422	1,3095	1,1315
1,54	0,8992	0,5555	0,7319	1,3175	1,1419
1,56	0,8942	0,5446	0,7217	1,3253	1,1527
1,58	0,8892	0,5339	0,7117	1,3329	1,1640
1,6	0,8842	0,5236	0,7017	1,3403	1,1756
1,62	0,8792	0,5135	0,6919	1,3475	1,1877
1,64	0,8743	0,5036	0,6822	1,3546	1,2002
1,66	0,8694	0,4940	0,6726	1,3614	1,2131
1,68	0,8645	0,4847	0,6631	1,3681	1,2264
1,7	0,8597	0,4756	0,6538	1,3746	1,2402
1,72	0,8549	0,4668	0,6445	1,3809	1,2545
1,74	0,8502	0,4581	0,6355	1,3870	1,2692
1,76	0,8455	0,4497	0,6265	1,3931	1,2843
1,78	0,8409	0,4415	0,6176	1,3989	1,2999
1,8	0,8363	0,4335	0,6089	1,4046	1,3159
1,82	0,8317	0,4257	0,6004	1,4102	1,3324
1,84	0,8273	0,4181	0,5919	1,4156	1,3494
1,86	0,8228	0,4107	0,5836	1,4209	1,3669
1,88	0,8185	0,4035	0,5754	1,4261	1,3849
1,9	0,8141	0,3964	0,5673	1,4311	1,4033
1,92	0,8099	0,3895	0,5594	1,4360	1,4222
1,94	0,8057	0,3828	0,5516	1,4408	1,4417
1,96	0,8015	0,3763	0,5439	1,4455	1,4616
1,98	0,7974	0,3699	0,5364	1,4501	1,4821
2,0	0,7934	0,3636	0,5289	1,4545	1,5031
2,02	0,7894	0,3575	0,5216	1,4589	1,5246
2,04	0,7855	0,3516	0,5144	1,4632	1,5467
2,06	0,7816	0,3458	0,5074	1,4673	1,5693
2,08	0,7778	0,3401	0,5004	1,4714	1,5924
2,1	0,7741	0,3345	0,4936	1,4753	1,6162
2,12	0,7704	0,3291	0,4868	1,4792	1,6404
2,14	0,7667	0,3238	0,4802	1,4830	1,6653
2,16	0,7631	0,3186	0,4737	1,4867	1,6908
2,18	0,7596	0,3136	0,4673	1,4903	1,7168
2,2	0,7561	0,3086	0,4611	1,4938	1,7434
2,22	0,7527	0,3038	0,4549	1,4973	1,7707
2,24	0,7493	0,2991	0,4488	1,5007	1,7986
2,26	0,7460	0,2945	0,4428	1,5040	1,8271
2,28	0,7428	0,2899	0,4370	1,5072	1,8562
2,3	0,7395	0,2855	0,4312	1,5104	1,8860
2,32	0,7364	0,2812	0,4256	1,5134	1,9165
2,34	0,7333	0,2769	0,4200	1,5165	1,9476
2,36	0,7302	0,2728	0,4145	1,5194	1,9794
2,38	0,7272	0,2688	0,4091	1,5223	2,0119
2,4	0,7242	0,2648	0,4038	1,5252	2,0451
2,42	0,7213	0,2609	0,3986	1,5279	2,0789
2,44	0,7184	0,2571	0,3935	1,5306	2,1136
2,46	0,7156	0,2534	0,3885	1,5333	2,1489
2,48	0,7128	0,2497	0,3836	1,5359	2,1850

www.elsolucionario.net

Tabla B.4. *(Continuación)* Flujo en un conducto sin fricción y con transferencia de calor para $\gamma = 1{,}4$.

Ma	T_0/T_0^*	p/p^*	T/T^*	$\rho^*/\rho = V/V^*$	p_0/p_0^*
2,5	0,7101	0,2462	0,3787	1,5385	2,2218
2,52	0,7074	0,2427	0,3739	1,5410	2,2594
2,54	0,7047	0,2392	0,3692	1,5434	2,2978
2,56	0,7021	0,2359	0,3646	1,5458	2,3370
2,58	0,6995	0,2326	0,3601	1,5482	2,3770
2,6	0,6970	0,2294	0,3556	1,5505	2,4177
2,62	0,6945	0,2262	0,3512	1,5527	2,4593
2,64	0,6921	0,2231	0,3469	1,5549	2,5018
2,66	0,6896	0,2201	0,3427	1,5571	2,5451
2,68	0,6873	0,2171	0,3385	1,5592	2,5892
2,7	0,6849	0,2142	0,3344	1,5613	2,6343
2,72	0,6826	0,2113	0,3304	1,5634	2,6802
2,74	0,6804	0,2085	0,3264	1,5654	2,7270
2,76	0,6781	0,2058	0,3225	1,5673	2,7748
2,78	0,6761	0,2030	0,3186	1,5693	2,8235
2,8	0,6738	0,2004	0,3149	1,5711	2,8731
2,82	0,6717	0,1978	0,3111	1,5730	2,9237
2,84	0,6696	0,1953	0,3075	1,5748	2,9752
2,86	0,6675	0,1927	0,3039	1,5766	3,0278
2,88	0,6655	0,1903	0,3004	1,5784	3,0813
2,9	0,6635	0,1879	0,2969	1,5801	3,1359
2,92	0,6615	0,1855	0,2934	1,5818	3,1914
2,94	0,6596	0,1832	0,2901	1,5834	3,2481
2,96	0,6577	0,1809	0,2868	1,5851	3,3058
2,98	0,6558	0,1787	0,2835	1,5867	3,3646
3,0	0,6540	0,1765	0,2803	1,5882	3,4245
3,02	0,6522	0,1743	0,2771	1,5898	3,4854
3,04	0,6504	0,1722	0,2740	1,5913	3,5476
3,06	0,6486	0,1701	0,2709	1,5928	3,6108
3,08	0,6469	0,1681	0,2679	1,5942	3,6752
3,1	0,6452	0,1660	0,2650	1,5957	3,7408
3,12	0,6435	0,1641	0,2620	1,5971	3,8076
3,14	0,6418	0,1621	0,2592	1,5985	3,8756
3,16	0,6402	0,1602	0,2563	1,5998	3,9449
3,18	0,6386	0,1583	0,2535	1,6012	4,0154
3,2	0,6370	0,1565	0,2508	1,6025	4,0871
3,22	0,6354	0,1547	0,2481	1,6038	4,1602
3,24	0,6339	0,1529	0,2454	1,6051	4,2345
3,26	0,6324	0,1511	0,2428	1,6063	4,3101
3,28	0,6309	0,1494	0,2402	1,6076	4,3871
3,3	0,6294	0,1477	0,2377	1,6088	4,4655
3,32	0,6280	0,1461	0,2352	1,6100	4,5452
3,34	0,6265	0,1444	0,2327	1,6111	4,6263
3,36	0,6251	0,1428	0,2303	1,6123	4,7089
3,38	0,6237	0,1412	0,2279	1,6134	4,7929
3,4	0,6224	0,1397	0,2255	1,6145	4,8783
3,42	0,6210	0,1366	0,2232	1,6156	4,9652
3,44	0,6197	0,1366	0,2209	1,6167	5,0536
3,46	0,6184	0,1351	0,2186	1,6178	5,1435
3,48	0,6171	0,1337	0,2164	1,6188	5,2350
3,5	0,6158	0,1322	0,2142	1,6198	5,3280
3,52	0,6145	0,1308	0,2120	1,6208	5,4226
3,54	0,6133	0,1294	0,2099	1,6218	5,5188
3,56	0,6121	0,1280	0,2078	1,6228	5,6167
3,58	0,6109	0,1267	0,2057	1,6238	5,7162
3,6	0,6097	0,1254	0,2037	1,6247	5,8173
3,62	0,6085	0,1241	0,2017	1,6257	5,9201
3,64	0,6074	0,1228	0,1997	1,6266	6,0247

www.elsolucionario.net

Tabla B.4. *(Final)* Flujo en un conducto sin fricción y con transferencia de calor para $\gamma = 1{,}4$.

Ma	T_0/T_0^*	p/p^*	T/T^*	$\rho^*/\rho = V/V^*$	p_0/p_0^*
3,66	0,6062	0,1215	0,1977	1,6275	6,1310
3,68	0,6051	0,1202	0,1958	1,6284	6,2390
3,7	0,6040	0,1190	0,1939	1,6293	6,3488
3,72	0,6029	0,1178	0,1920	1,6301	6,4605
3,74	0,6018	0,1166	0,1902	1,6310	6,5739
3,76	0,6008	0,1154	0,1884	1,6218	6,6893
3,78	0,5997	0,1143	0,1866	1,6327	6,8065
3,8	0,5987	0,1131	0,1848	1,6335	6,9256
3,82	0,5977	0,1120	0,1830	1,6343	7,0466
3,84	0,5967	0,1109	0,1813	1,6351	7,1696
3,86	0,5957	0,1098	0,1796	1,6359	7,2945
3,88	0,5947	0,1087	0,1779	1,6366	7,4215
3,9	0,5937	0,1077	0,1763	1,6374	7,5505
3,92	0,5928	0,1066	0,1746	1,6381	7,6816
3,94	0,5918	0,1056	0,1730	1,6389	7,8147
3,96	0,5909	0,1046	0,1714	1,6396	7,9499
3,98	0,5900	0,1036	0,1699	1,6403	8,0873
4,0	0,5891	0,1026	0,1683	1,6410	8,2269

Tabla B.5. Función de Prandtl-Meyer para expansiones supersónicas para $\gamma = 1{,}4$.

Ma	ω, grad	Ma	ω, grad	Ma	ω, grad	Ma	ω, grad
1,00	0,0						
1,05	0,49	2,65	42,53	4,25	68,94	5,85	83,90
1,10	1,34	2,70	43,62	4,30	69,54	5,90	84,26
1,15	2,38	2,75	44,69	4,35	70,13	5,95	84,61
1,20	3,56	2,80	45,75	4,40	70,71	6,00	84,96
1,25	4,83	2,85	46,78	4,45	71,27	6,05	85,30
1,30	6,17	2,90	47,79	4,50	71,83	6,10	85,63
1,35	7,56	2,95	48,78	4,55	72,38	6,15	85,97
1,40	8,99	3,00	49,76	4,60	72,92	6,20	86,29
1,45	10,44	3,05	50,71	4,65	73,45	6,25	86,62
1,50	11,91	3,10	51,65	4,70	73,97	6,30	86,94
1,55	13,38	3,15	52,57	4,75	74,48	6,35	87,25
1,60	14,86	3,20	53,47	4,80	74,99	6,40	87,56
1,65	16,34	3,25	54,35	4,85	75,48	6,45	87,87
1,70	17,81	3,30	55,22	4,90	75,97	6,50	88,17
1,75	19,27	3,35	56,07	4,95	76,45	6,55	88,47
1,80	20,73	3,40	56,91	5,00	76,92	6,60	88,76
1,85	22,16	3,45	57,73	5,05	77,38	6,65	89,05
1,90	23,59	3,50	58,53	5,10	77,84	6,70	89,33
1,95	24,99	3,55	59,32	5,15	78,29	6,75	89,62
2,00	26,38	3,60	60,09	5,20	78,73	6,80	89,90
2,05	27,75	3,65	60,85	5,25	79,17	6,85	90,17
2,10	29,10	3,70	61,60	5,30	79,60	6,90	90,44
2,15	30,43	3,75	62,33	5,35	80,02	6,95	90,71
2,20	31,73	3,80	63,04	5,40	80,43	7,00	90,97
2,25	33,02	3,85	63,75	5,45	80,84	7,05	91,23
2,30	34,28	3,90	64,44	5,50	81,24	7,10	91,49
2,35	35,53	3,95	65,12	5,55	81,64	7,15	91,75
2,40	36,75	4,00	65,78	5,60	82,03	7,20	92,00
2,45	37,95	4,05	66,44	5,65	82,42	7,25	92,24
2,50	39,12	4,10	67,08	5,70	82,80	7,30	92,49
2,55	40,28	4,15	67,71	5,75	83,17	7,35	92,73
2,60	41,41	4,20	68,33	5,80	83,54	7,40	92,97

www.elsolucionario.net

Tabla B.5. *(Continuación)* Función de Prandtl-Meyer para expansiones supersónicas para $\gamma = 1{,}4$.

Ma	ω, grad	Ma	ω, grad	Ma	ω, grad	Ma	ω, grad
7,45	93,21	7,85	95,00	8,25	96,63	8,65	98,12
7,50	93,44	7,90	95,21	8,30	96,82	8,70	98,29
7,55	93,67	7,95	95,42	8,35	97,01	8,75	98,47
7,60	93,90	8,00	95,62	8,40	97,20	8,80	98,64
7,65	94,12	8,05	95,83	8,45	97,39	8,85	98,81
7,70	94,34	8,10	96,03	8,50	97,57	8,90	98,98
7,75	94,56	8,15	96,23	8,55	97,76	8,95	99,15
7,80	94,78	8,20	96,43	8,60	97,94	9,00	99,32

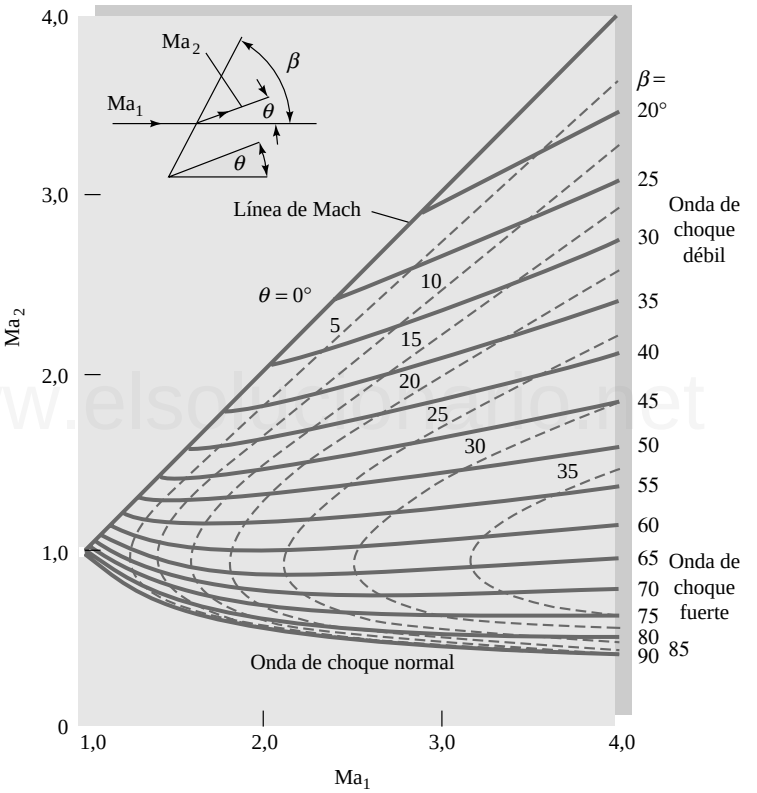
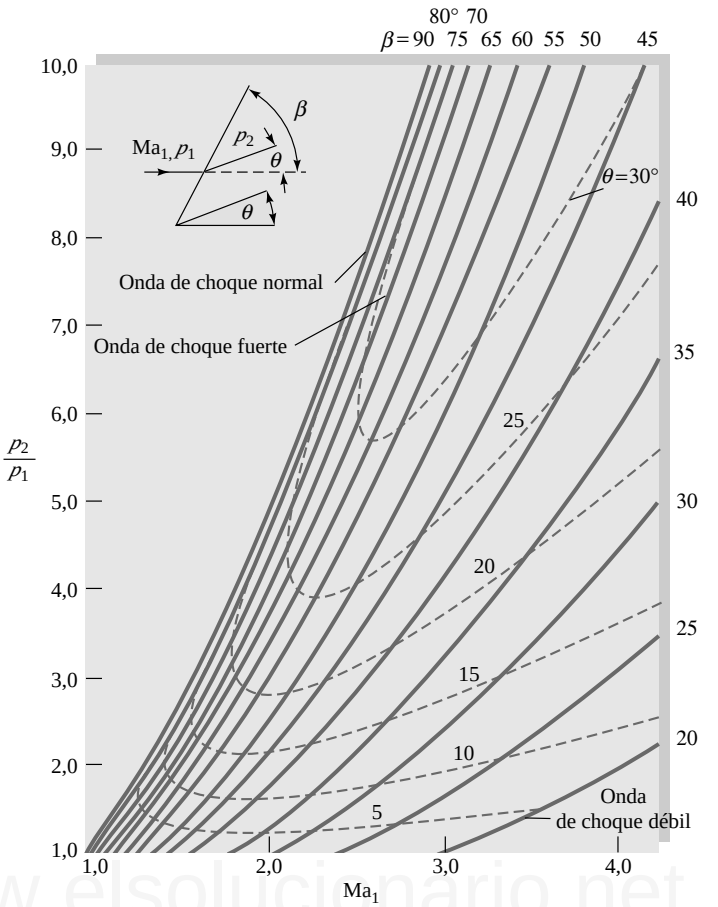


Figura B.1. Número de Mach aguas abajo de una onda de choque oblicua para $\gamma = 1{,}4$.

www.elsolucionario.net



www.elsolucionario.net

Figura B.2. Relación de presiones aguas abajo de una onda de choque oblicua para $\gamma = 1{,}4$.

www.elsolucionario.net

Apéndice C
Factores de conversión

Durante este periodo de transición existe la necesidad de convertir unidades del sistema británico (BG) a unidades del sistema internacional (SI) y viceversa (véase Tabla 1.2). A continuación se presentan algunas relaciones adicionales. Los factores de conversión se encuentran a continuación.

Longitud	**Volumen**
1 ft = 12 in = 0,3048 m 1 mi = 5280 ft = 1609,344 m 1 milla náutica (mn) = 6076 ft = 1852 m 1 yd = 3 ft = 0,9144 m 1 angstrom (Å) = $1,0 \times 10^{-10}$ m	1 ft^3 = 0,028317 m^3 1 galón (gal) (EE.UU.) = 231 in^3 = 0,0037854 m^3 1 litro = 0,001 m^3 = 0,035315 ft^3 1 onza líquida (EE.UU.) = $2,9574 \times 10^{-5}$ m^3 1 cuarto (qt) (EE.UU.) = $9,4635 \times 10^{-4}$ m^3
Masa	**Área**
1 slug = 32,174 lbm = 14,594 kg 1 lbm = 0,4536 kg 1 tonelada (EE.UU.) = 2000 lbm = 907,185 kg 1 tonelada = 1000 kg	1 ft^2 = 0,092903 m^2 1 mi^2 = $2,78784 \times 10^7$ ft^2 = $2,59 \times 10^6$ m^2 1 acre = 43.560 ft^2 = 4046,9 m^2 1 hectárea (ha) = 10.000 m^2
Velocidad	**Aceleración**
1 ft/s = 0,3048 m/s 1 mi/h = 1,466666 ft/s = 0,44704 m/s 1 nudo (kn) = 1 mn/h = 1,6878 ft/s = 0,5144 m/s	1 ft/s^2 = 0,3048 m/s^2
Gasto másico	**Flujo volumétrico**
1 slug/s = 14,594 kg/s 1 lbm/s = 0, 4536 kg/s	1 gal/min = 0,002228 ft^3/s = 0,06309 L/s 1×10^6 gal/día = 1,5472 ft^3/s = 0,04381 m^3/s
Presión	**Fuerza**
1 lbf/ft^2 = 47,88 Pa 1 lbf/in^2 = 144 lbf/ft^2 = 6895 Pa 1 atm = 2116,2 lbf/ft^2 = 14,696 lbf/in^2 = 101,325 Pa 1 inHg (a 20 °C) = 3375 Pa 1 bar = $1,0 \times 10^5$ Pa	1 lbf = 4,448222 N = 16 oz 1 kgf = 2,2046 lbf = 9,80665 N 1 tonelada fuerza (EE.UU.) = 2000 lbf 1 dyne = $1,0 \times 10^{-5}$ N 1 onza (oz) (avoirdupois) = 0,27801 N
Energía	**Potencia**
1 ft · lbf = 1,35582 J 1 Btu = 252 cal = 1055,056 J = 778,17 ft · lbf 1 kilowatio hora (kWh) = $3,6 \times 10^6$ J	1 CV = 550 ft · lbf/s = 745,7 W 1 ft · lbf/s = 1,3558 W

www.elsolucionario.net

Peso específico	Densidad
1 lbf/ft^3 = 157,09 N/m^3	1 slug/ft^3 = 515,38 kg/m^3 1 lbm/ft^3 = 16,0185 kg/m^3 1 g/cm^3 = 1000 kg/m^3
Viscosidad	**Viscosidad cinemática**
1 slug/(ft · s) = 47,88 kg/(m · s) 1 poise (P) = 1 g/(cm · s) = 0,1 kg/(m · s)	1 ft^2/h = 0,000025806 m^2/s 1 stokes (St) = 1 cm^2/s = 0,0001 m^2/s

Lectura de escalas de temperatura			
$T_F = \frac{9}{5} T_C + 32$	$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$	$T_R = T_F + 459{,}69$	$T_K = T_C + 273{,}16$

Donde los subíndices F, C, R, y K se refieren a lecturas en las escalas Fahrenheit, Celsius, Kelvin y Rankine, respectivamente.

Calor específico o constante de los gases*	Conductividad térmica*
1 ft · lbf/(slug · °R) = 0,16723 N · m/(kg · K) 1 Btu/(lbm · °R) = 4186,8 J/(kg · K)	1 Btu/(H · ft · °R) = 1,7307 W/(m · K)

* Aunque la escala de temperatura absoluta (Kelvin) y la escala Celsius tienen distintos orígenes de temperatura, los intervalos son iguales: 1 Kelvin = 1 grado Celsius. Lo mismo ocurre para la escala absoluta Rankine y la escala Fahrenheit: 1 grado Rankine = 1 grado Fahrenheit. Es costumbre expresar las diferencias de temperatura en unidades de temperatura absoluta.

www.elsolucionario.net

Factores de conversión de unidades del sistema británico al sistema internacional (SI)

	Para convertir	En	Multiplicar por
Aceleración	ft/s^2	m/s^2	0,3048
Área	ft^2	m^2	$9{,}2903 \times 20^{-2}$
	mi^2	m^2	$2{,}5900 \times 10^6$
	acres	m^2	$4{,}0469 \times 10^3$
Calor específico	ft^2/(s^2 · °R)	m^2/(s^2 · K)	$1{,}6723 \times 10^{-1}$
Densidad	slug/ft^3	kg/m^3	$5{,}1538 \times 10^2$
	lbm/ft^3	kg/m^3	$1{,}6019 \times 10^1$
Energía	ft · lbf	J	1,3558
	Btu	J	$1{,}0551 \times 10^3$
	cal	J	4,1868
Flujo o gasto másico	slug/s	kg/s	$1{,}4594 \times 10^1$
	lbm/s	kg/s	$4{,}5359 \times 10^{-1}$
Flujo volumétrico	ft^3/s	m^3/s	$2{,}8317 \times 10^{-2}$
	galones/min	m^3/s	$6{,}3090 \times 10^{-5}$
Fuerza	lbf	N	4,4482
	kgf	N	9,8067

www.elsolucionario.net

Factores de Conversión de Unidades del Sistema Británico al Sistema Internacional(SI) *(continuación)*

	Para convertir	En	Multiplicar por
Longitud	ft	m	0,3048
	in	m	$2{,}5400 \times 10^{-2}$
	mi (terrestre)	m	$1{,}6093 \times 10^{3}$
	mi (náutica)	m	$1{,}8520 \times 10^{3}$
Masa	slug	kg	$1{,}4594 \times 10^{1}$
	lbm	kg	$4{,}5359 \times 10^{-1}$
Peso específico	lbf/ft^3	N/m^3	$1{,}5709 \times 10^{2}$
Potencia	$ft \cdot lbf/s$	W	1,3558
	hp	W	$7{,}4570 \times 10^{2}$
Presión	lbf/ft^2	Pa	$4{,}7880 \times 10^{1}$
	lbf/in^2	Pa	$6{,}8948 \times 10^{3}$
	atm	Pa	$1{,}0133 \times 10^{5}$
	mm Hg	Pa	$1{,}3332 \times 10^{2}$
Temperatura	°F	°C	$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32°)$
	°R	K	0,5556
Tensión superficial	lbf/ft	N/m	$1{,}4594 \times 10^{1}$
Velocidad	ft/s	m/s	0,3048
	mi/h	m/s	$4{,}4704 \times 10^{-1}$
	nudo	m/s	$5{,}1444 \times 10^{-1}$
Viscosidad	$lbf \cdot s/ft^2$	$N \cdot s/m^2$	$4{,}7880 \times 10^{1}$
	$g/(cm \cdot s)$	$N \cdot s/m^2$	0,1
Volumen	ft^3	m^3	$2{,}8317 \times 10^{-2}$
	litro	m^3	0,001
	galón (EE.UU.)	m^3	$3{,}7854 \times 10^{-3}$
	onza líquida (EE.UU.)	m^3	$2{,}9574 \times 10^{-5}$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Apéndice D
Ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas

A continuación se presentan las ecuaciones del movimiento de un fluido newtoniano incompresible con propiedades constantes μ, k y c_p en coordenadas cilíndricas (r, θ, z), definidas en función de las coordenadas cartesianas (x, y, z) como se indica en la Figura 4.2:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad z = z \tag{D.1}$$

Las componentes de la velocidad son v_r, v_θ y v_z. Las ecuaciones son las siguientes:

Continuidad:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0 \tag{D.2}$$

www.elsolucionario.net

Derivada convectiva:

$$\mathbf{v}\cdot\nabla() = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{D.3}$$

Operador laplaciano:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{D.4}$$

Ecuación de la cantidad de movimiento según r:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)v_r - \frac{1}{r}v_\theta^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \nu\left[\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right] \tag{D.5}$$

Ecuación de la cantidad de movimiento según θ:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)v_\theta + \frac{1}{r}v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \nu\left[\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \tag{D.6}$$

Ecuación de la cantidad de movimiento según z:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)v_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu\nabla^2 v_z \tag{D.7}$$

www.elsolucionario.net

Ecuación de la energía:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T \right) = k \nabla^2 T + \mu [2 \varepsilon_{rr}^2 + 2 \varepsilon_{\theta\theta}^2 + 2 \varepsilon_{zz}^2) + \varepsilon_{r\theta}^2 + \varepsilon_{rz}^2 + \varepsilon_{\theta z}^2] \tag{D.8}$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} & \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \end{aligned} \tag{D.9}$$

Componentes del tensor de esfuerzos viscosos:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= 2\mu \varepsilon_{rr} & \tau_{\theta\theta} &= 2\mu \varepsilon_{\theta\theta} & \tau_{zz} &= 2\mu \varepsilon_{zz} \\ \tau_{r\theta} &= \mu \varepsilon_{r\theta} & \tau_{\theta z} &= \mu \varepsilon_{\theta z} & \tau_{rz} &= \mu \varepsilon_{rz} \end{aligned} \tag{D.10}$$

Componentes de la velocidad angular:

$$\begin{aligned} 2\omega_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ 2\omega_\theta &= \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 2\omega_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{D.11}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Solución de problemas seleccionados

Capítulo 1

P1.2 $6{,}1 \times 10^{18}$ kg; $1{,}3 \times 10^{44}$ moléculas
P1.4 $\mu V/Y$ = número capilar
P1.6 (*a*) $\{ML^{-2}T^{-2}\}$; (*b*) $\{MT^{-2}\}$
P1.8 $\sigma \Xi 1{,}00\ My/I$
P1.10 Sí, todos los términos tienen dimensiones (ML/T^2)
P1.12 $\{B\} = \{L^{-1}\}$
P1.14 Q = Cte $B\, g^{1/2} H^{3/2}$
P1.16 Todos los términos tienen dimensiones $\{ML^{-2}T^{-2}\}$
P1.18 $V = V_0 e^{-mt/K}$
P1.20 $z_{máx} = 64{,}2$ m en $t = 3{,}36$ s
P1.22 (*a*) $-0{,}372U_*^2/R$; (*b*) $x = -1{,}291R$
P1.24 (*a*) $\rho = 7{,}97$ kg/m^3; (*b*) $c_p = 819$ J/(kg · K); $p = 79$ kPa (gas ideal)
P1.26 $W_{aire} = 0{,}71$ lbf
P1.28 $\rho_{húmedo} = 1{,}10$ kg/m^3, $\rho_{seco} = 1{,}13$ kg/m^3
P1.30 $W_{1\text{-}2} = 21$ ft · lbf
P1.32 (*a*) 76 kN; (*b*) 501 kN
P1.34 (*a*) $\rho_1 = 5{,}05$ kg/m^3; (*b*) $\rho_2 = 2{,}12$ kg/m^3 (gas ideal)
P1.36 (*a*) $B_{N_2O} = 1{,}33 \times 10^5$ Pa; (*b*) $B_{agua} = 2{,}13 \times 10^9$ Pa
P1.38 $\tau = 1380$ Pa, $\mathrm{Re}_L = 28$
P1.40 $A = 0{,}0016$ kg/(m · s), $B = 1903$ K
P1.42 $\mu/\mu_{200K} \Xi (T\ \mathrm{K}/200\ \mathrm{K})^{0{,}68}$
P1.44 Los datos son un 50 por 100 más altos; el ajuste de Andrade varía un ±50 por 100
P1.46 $V \Xi 15$ m/s
P1.48 $F \Xi (\mu_1/h_1 + \mu_2/h_2)AV$
P1.50 (*a*) Sí; (*b*) $\mu \Xi 0{,}40$ kg/(m · s)
P1.52 $P \Xi 73$ W
P1.54 $M \Xi \pi\mu\Omega R^4/h$
P1.56 $\mu = 3M \operatorname{sen}\theta/(2\pi\Omega R^3)$
P1.58 $\mu = 0{,}040$ kg/(m · s), los 2 últimos puntos corresponden a flujo *turbulento*
P1.62 28.500 Pa
P1.64 $D = 0{,}73$ mm
P1.66 $F = 0{,}014$ N
P1.68 $h = (\Upsilon/\rho g)^{1/2} \operatorname{cotg}\theta$
P1.70 $h = 2\Upsilon \cos\theta/(\rho g W)$
P1.72 $x \Xi 4800$ m
P1.74 Se produce cavitación tanto en (*a*) como en (*b*)
P1.76 (*a*) 539 m/s; (*b*) 529 m/s
P1.78 (*a*) 25 °C; (*b*) 4 °C
P1.80 $x^2y - y^3/3 =$ constante
P1.82 $y = x \operatorname{tg}\theta +$ constante
P1.84 $x = x_0 \exp[\ln(y/y_0) + \ln^2(y/y_0)]$

Capítulo 2

P2.2. $\sigma_{xy} = -289$ lb/ft^2, $\tau_{AA} = -577$ lb/ft^2
P2.4 x = Cte $e^{-2Cz/B}$
P2.6 (*a*) 30,3 ft; (*b*) 30,0 in; (*c*) 10,35 m; (*d*) 13.100 mm
P2.8 (*a*) 140 kPa; (*b*) ± 10 m
P2.10 10.500 Pa
P2.12 8,0 cm
P2.14 74.450 Pa con aire; 75.420 Pa sin aire
P2.16 $h_{etanol} = 12{,}4$ m
P2.18 1,56
P2.20 14 lbf
P2.22 0,94 cm
P2.24 $p_{nivel\ del\ mar} \Xi 117$ kPa, $m_{exacta} = 5{,}3 \times 10^{18}$ kg
P2.28 $z \Xi 4840 \pm 450$ m
P2.30 $p_1 - p_2 = 43{,}1$ Kpa
P2.32 22,6 cm
P2.34 $\Delta p = [\rho_{agua}(1 + d^2/D^2) - \rho_{aceite}(1 - d^2/D^2)]g\Delta h$
P2.36 25°
P2.38 (*a*) $p_{1,\ manométrica} = (\rho_m - \rho_a)gh - (\rho_t - \rho_a)gH$
P2.40 En el tubo de la izquierda baja 19,3 cm y en el de la derecha sube 5 cm en vertical
P2.42 $p_A - p_B = (\rho_2 - \rho_1)gh$
P2.44 (*a*) 171 lb/ft^2; (*b*) 392 lb/ft^2; el manómetro lee pérdidas por fricción
P2.46 1,45
P2.48 $F = 39.700$ N
P2.50 (*a*) 524 kN; (*b*) 350 kN; (*c*) 100 kN
P2.52 $M_{fondo} = 124$ kN · m
P2.56 16,08 ft
P2.58 0,40 m
P2.60 (*a*) 1180 N; (*b*) 0 N; (*c*) 853 N
P2.62 10,6 ft
P2.64 1,35 m
P2.66 $F = 1{,}18 \times 10^9$ N, $M_C = 3{,}13 \times 10^9$ N · m en sentido contrario a las agujas del reloj, la presa no vuelca
P2.68 18.040 N
P2.70 (*a*) 150 kPa; (*b*) 1200 N
P2.72 $h \Xi 1{,}12$ m

www.elsolucionario.net

P2.74 $H = R[\pi/4 + \{(\pi/4)^2 + 2/3\}^{1/2}]$
P2.76 (*a*) 239 kN; (*c*) 388 kN · m
P2.78 $P = \pi\rho gR^3/4$
P2.80 (*a*) 58.800 Pa; (*b*) 0,44 m
P2.82 F_H = 97,9 MN, F_V = 153,8 MN
P2.84 F_H = 4895 N, F_V = 7343 N
P2.86 P = 59 kN
P2.88 F_H = 176 kN, F_V = 31,9 kN, sí
P2.90 467 lbf
P2.92 $F_{\text{un remache}}$ Ξ 11.300 N
P2.94 C_x = 2996 lb, C_z = 313 lbf
P2.96 F_H = 336 kN; F_V = 162 kN
P2.98 F_H = 7987 lbf; F_V = 2280 lbf
P2.100 F_H = 0, F_V = 297 kN
P2.102 (*a*) 238 kN; (*b*) 125 kN
P2.104 5,0 N
P2.106 z Ξ 4000 m
P2.108 12,6 N
P2.110 h Ξ (*a*) 7,05 mm; (*b*) 7,00 mm
P2.112 (*a*) 39 N; (*b*) 0,64
P2.114 0,636
P2.116 19.100 N/m^3
P2.118 (*a*) draft = 7,24 in; (*b*) 25 lbf
P2.120 34,3°
P2.122 a/b Ξ 0,834
P2.124 6850 m
P2.126 3130 Pa (vacío)
P2.128 Sí, estable si $S > 0{,}789$
P2.130 Ligeramente inestable, MG = –0,007 m
P2.132 Estable si $R/h > 3{,}31$
P2.134 (*a*) inestable; (*b*) estable
P2.136 $MG = L^2/(3\pi R) - 4R/(3\pi) > 0$ si $L > 2R$
P2.138 2,77 in de profundidad; volumen = 10,8 onzas fluidas
P2.140 a_x = (*a*) –19,96 m/s^2 (deceleración); (*b*) –5,69 m/s^2 (deceleración)
P2.142 (*a*) 16,3 cm; (*b*) 15,7 N
P2.144 (*a*) a_x Ξ 319 m/s^2; (*b*) sin efecto, $p_A = p_B$
P2.146 Se inclina hacia la derecha con $\theta = 27°$
P2.148 Se inclina hacia la izquierda con $\theta = 27°$
P2.150 5,5 cm; vale la escala lineal
P2.152 (*a*) 224 rpm; (*b*) 275 rpm
P2.154 (*a*) Los dos son paraboloides; (*b*) p_B = 2550 Pa (manométrica)
P2.156 420 rpm
P2.157 77 rpm, presión mínima en el punto medio entre *B* y *C*
P2.158 10,57 rpm

Capítulo 3

P3.2 **r** = vector de posición desde el punto *O*
P3.6 $Q = (2b/3)(2g)^{1/2}[(h + L)^{3/2} - (h - L)^{3/2}]$
P3.8 (*a*) 5,45 m/s; (*b*) 5,89 m/s; (*c*) 5,24 m/s
P3.10 (*a*) 3 m/s; (*b*) 6 m/s; (*c*) 5 cm/s hacia fuera
P3.12 Δt = 46 s
P3.14 $dh/dt = (Q_1 + Q_2 - Q_3)/(\pi d^2/4)$
P3.16 $Q_{\text{cara superior}} = 3U_0 b\delta/8$
P3.18 (*b*) $Q = 16bhu_{\text{máx}}/9$
P3.20 (*a*) 7,8 mL/s; (*b*) 1,24 cm/s
P3.22 (*a*) 0,06 kg/s; (*b*) 1060 m/s; (*c*) 3,4
P3.24 $h = [3Kt^2d^2/(8\ \text{tg}^2\ \theta)]^{1/3}$
P3.26 $Q = 2U_0 bh/3$
P3.28 $t_{\text{vaciado}} = (A_d/A_0)(h_0/2g)^{1/2}$
P3.30 $\theta = 48°$
P3.32 V_{agujero} = 6,1 m/s
P3.34 V_2 = 4660 ft/s
P3.36 U_3 = 6,33 m/s
P3.38 $V = V_0 r/(2h)$
P3.40 500 N hacia la izquierda
P3.42 $F = (p_1 - p_a)A_1 - \rho_1 A_1 V_1^2[(D_1/D_2)^2 - 1]$
P3.44 $F = \rho U^2 Lb/3$
P3.46 $\alpha = (1 + \cos\theta)/2$
P3.48 V_0 Ξ 2,27 m/s
P3.50 102 kN
P3.52 $F = \rho WhV_1^2[1/(1 - \text{sen}\ \theta) - 1]$ hacia la izquierda
P3.54 163 N
P3.56 (*a*) 18,5 N hacia la izquierda; (*b*) 7,1 N hacia arriba
P3.58 40 N
P3.60 2100 N
P3.62 3100 N
P3.64 980 N
P3.66 8800 N
P3.70 91 lbf
P3.72 Resistencia Ξ 4260 N
P3.74 $F_x = 0$, $F_y = -17$ N, $F_z = 126$ N
P3.76 (*a*) 1670 N/m; (*b*) 3,0 cm; (*c*) 9,4 cm
P3.80 $F = (\rho/2)gb(h_1^2 - h_2^2) - \rho h_1 bV_1^2(h_1/h_2 - 1)$
P3.82 25 m/s
P3.84 23 N
P3.86 274 kPa
P3.88 $V = \zeta + [\zeta^2 + 2\zeta V_j]^{1/2}$, $\zeta = \rho Q/2k$
P3.90 $dV/dt = g$
P3.92 $dV/dt = gh/(L + h)$
P3.94 $h = 0$ en t Ξ 70 s
P3.96 $d^2Z/dt^2 + 2gZ/L = 0$
P3.100 (*a*) 507 m/s y 1393 m; (*b*) 14,5 km
P3.102 $h_2/h_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}[1 + 8V_1^2/(gh_1)]^{1/2}$
P3.104 $\Omega = (-V_s/R)\ln(1 - \dot{m}t/M_0)$
P3.106 Ω_{final} = 75 rad/s
P3.108 (*a*) $V = V_0/(1 + CV_0 t/M)$, $C = \rho bh(1 - \cos\theta)$
P3.110 (*a*) 0,113 ft · lbf; (*b*) 250 rpm
P3.112 $T = \dot{m}R_0^2\Omega$
P3.114 (*a*) 414 rpm; (*b*) 317 rpm
P3.116 $P = \rho Q r_2\omega[r_2\omega - Q\ \text{cotg}\ \theta_2/(2\pi r_2 b_2)]$
P3.118 $P = \rho Q^2\omega\ \text{cotg}\ \theta_2/(2\pi r_2 b_2)$
P3.120 (*a*) 22 ft/s; (*b*) 110 ft/s; (*c*) 710 hp
P3.122 $L = -h_1\ (\text{cotg}\ \theta)/2$
P3.124 41 rpm
P3.126 –15,5 kW (trabajo realizado *sobre* el fluido)
P3.128 1,07 m^3/s
P3.130 34 kW
P3.134 5060 hp
P3.136 z_1 = 115 m
P3.138 $\mu = \pi\rho gd^4(H + L)/(128LQ) - \alpha_2\rho Q/(16\pi L)$
P3.140 1640 hp
P3.142 (*a*) 1150 gal/min; (*b*) 67 hp
P3.144 26 kW
P3.146 h = 3,6 ft
P3.148 h_f = 0,21 m
P3.150 Sustentación = 119 kN
P3.152 (*a*) 85,9°; (*b*) 55,4°
P3.154 h = 0,133 m
P3.156 (*a*) 102 kPa; (*b*) 88 mi/h

www.elsolucionario.net

P3.158 (*a*) 169,4 kPa; (*b*) 209 m^3/h
P3.160 (*a*) 31 m^3/s; (*b*) 54 kW
P3.162 $Q = 166$ ft^3/min, $\Delta p = 0{,}0204$ lbf/in^2
P3.164 (*a*) 5,25 kg/s; (*b*) 0,91 m
P3.166 (*a*) 60 mi/h; (*b*) 1 atm
P3.168 $h = 1{,}08$ ft
P3.170 $h = 1{,}76$ m
P3.172 $D = 0{,}132$ ft
P3.174 (*a*) 5,61 ft/s; (*b*) si se reduce más, V_2 *disminuye*
P3.176 (*a*) 9,3 m/s; (*b*) 68 kN/m
P3.178 $h_2 = 2{,}03$ ft (subcrítico) o 0,74 ft (supercrítico)
P3.180 $V = V_f \operatorname{tgh}(V_f t/2L)$, $V_f = (2gh)^{1/2}$
P3.182 $\gamma p/[(\gamma - 1)\rho] + V^2/2 + gz$ = constante
P3.184 0,37 hp

Capítulo 4

P4.2 (*a*) $du/dt = (2V_0^2/L)(1 + 2x/L)$
P4.4. En (2, 1), $dT/dt = 125$ unidades
P4.6 (*a*) $6V_0^2/L$; (*b*) $L \ln 3/(2V_0)$
P4.8 (*a*) $0{,}0196\ V^2/L$; (*b*) en $t = 1{,}05\ L/U$
P4.10 (*a*) $v = -xy^2$; (*b*) $u = -x^3/3$
P4.12 Si $v_\theta = v_\phi\ 0$, $v_r = r^{-2} f(\theta, \phi)$
P4.14 $v_\theta = f(r)$ sólo
P4.16 (*a*) $w = 2xyz - xyz^2$; (*b*) $v = -2xy$
P4.18 $\rho = \rho_0 L_0/(L_0 - Vt)$
P4.20 $\upsilon = \upsilon_0 =$ cte, $\{K\} = \{L/T\}$, $\{a\} = \{L^{-1}\}$
P4.22 $v_r = U_0 \cos\theta + V_0 \operatorname{sen}\theta$; $v_\theta = -U_0 \operatorname{sen}\theta + V_0 \cos\theta$
P4.28 Solución exacta para todo *a* o *b*
P4.30 $p =$ cte $- (\rho K^2/2)(x^2 + y^2)$
P4.32 $f_1 = C_1 r$; $f_2 = C_2/r$
P4.36 $C = \rho g \operatorname{sen}\theta/(2\mu)$
P4.38 $C_z = \tau_{yx} - \tau_{xy}$
P4.48 $\psi = U_0 r \operatorname{sen}\theta - V_0 r \cos\theta +$ constante
P4.50 Flujo no viscoso alrededor de una esquina de 180°
P4.52 $\psi = -4Q\theta/(\pi b)$
P4.54 $Q = ULb$
P4.60 Irrotacional, $z_0 = H - \omega^2 R^2/(2g)$
P4.62 $\psi = Vy^2/(2h) +$ cte
P4.66 $\psi = -K \operatorname{sen}\theta/r$
P4.68 $\psi = m \operatorname{tg}^{-1}[2xy/(x^2 - y^2 + a_2)]$
P4.70 $\phi = \lambda \cos\theta/r^2$, $\lambda = 2am$
P4.72 (*a*) 8,8 m; (*b*) 55 m
P4.74 *B* está 2,03 m a la derecha del punto *O*
P4.76 (*a*) 0,106 m de A; (*b*) 0,333 m por encima de la pared
P4.78 (*a*) $V_{\text{pared, máx}} = m/L$; (*b*) $p_{\text{mín}}$ en $x = L$
P4.80 (*a*) $w = (\rho g/2\mu)(2\delta x - x^2)$
P4.82 Resultado para obsesos: $v_\theta = \Omega R^2/r$
P4.84 $v_z = (\rho g b^2/2\mu) \ln(r/a) - (\rho g/4\mu)(r^2 - a^2)$
P4.86 $Q = 0{,}0031\ m^3/(s \cdot m)$
P4.88 $v_z = U \ln(r/b)/[\ln(a/b)]$
P4.90 (*a*) $D = 10$ cm; (*b*) $Q = 34\ m^3/h$
P4.92 $h = h_0 \exp[-\pi D^4 \rho g t/(128\mu L A_0)]$

Capítulo 5

P5.2 1,21 m
P5.4 $V = 1{,}55$ m/s, $F = 1{,}3$ N
P5.6 $F \Xi 450$ N
P5.8 $\text{Mo} = g\mu^4/(\rho Y^3)$
P5.10 (*a*) $\{ML^{-2}T^{-2}\}$; (*b*) $\{MLT^{-2}\}$
P5.12 $\text{St} = \mu U/(\rho g D^2)$
P5.14 $\delta/x = f(\rho U x/\mu)$
P5.16 Número de Stanton $= h/(\rho V c_p)$
P5.18 $Q\mu/[(\Delta p/L)b^4] =$ cte
P5.20 (*a*) $\{C\} = \{ML^{-1}T^{n-2}\}$
P5.22 $\Omega D/V = f(N, H/L)$
P5.24 $F/(\rho V^2 L^2) = f(\alpha, \rho VL/\mu, L/D, V/a)$
P5.26 (*a*) Indeterminado; (*b*) $T = 2{,}75$ s
P5.28 $\delta/L = f[L/D, \rho VD/\mu, E/(\rho V^2)]$
P5.30 $\tau_w/(\rho\Omega^2 R^2) = f(\rho\Omega R^2/\mu, \Delta r/R)$
P5.32 $Q/(bg^{1/2}H^{3/2}) =$ cte
P5.34 $k_{\text{hidrógeno}}\ \Xi\ 0{,}182\ W/(\text{m} \cdot \text{K})$
P5.36 (*a*) $Q_{\text{pérdidas}} R/(A\Delta T) =$ constante
P5.38 $d/D = f(\rho UD/\mu, \rho U^2 D/Y)$
P5.40 $h/L = f(\rho g L^2/Y, \alpha, \theta)$
P5.44 (*a*) $\{\sigma\} = \{L^2\}$
P5.48 $F\ \Xi\ 0{,}17$ N (duplicando *U* se cuadruplica *F*)
P5.50 (*a*) $F/(\mu UL) =$ constante
P5.52 $U\ \Xi\ 5$ ft/s, $F\ \Xi\ 0{,}003$ lbf/ft
P5.54 Potencia Ξ 7 hp
P5.56 $F_{\text{aire}}\ \Xi\ 25$ N/m
P5.58 $V\ \Xi\ 2{,}8$ m/s
P5.60 Potencia del prototipo Ξ 157 hp
P5.62 $\Omega_{\text{máx}}\ \Xi\ 26{,}5$ rev/s; $\Delta p\ \Xi\ 22.300$ Pa
P5.64 $\omega_{\text{aluminio}} = 0{,}77$ Hz
P5.66 (*a*) $V = 27$ m/s; (*b*) $z = 27$ m
P5.68 (*a*) $F/(\mu U) =$ constante; (*b*) no, no es verosímil
P5.70 $F = 87$ lbf
P5.72 $V = 25$ ft/s
P5.74 Momento del prototipo = 88 kN · m
P5.76 Resistencia = 107.000 lbf
P5.78 Número de Weber Ξ 100 si $L_m/L_p = 0{,}0090$
P5.80 (*a*) 1,86 m/s; (*b*) 42.900; (*c*) 254.000
P5.82 Velocidades: 19,6, 30,2 y 40,8 ft/s;
Resistencias: 14.600, 31.800 y 54.600 lbf
P5.84 $V_m = 39$ cm/s; $T_m = 3{,}1$ s; $H_m = 0{,}20$ m
P5.88 Para 340 W, $D = 0{,}109$ m
P5.90 $\Delta pD/(\rho V^2 L) = 0{,}155(\rho VD/\mu)^{-1/4}$

Capítulo 6

P6.4 (*a*) 106 m^3/h; (*b*) 3,6 m^3/h
P6.8 (*a*) –3600 Pa/m; (*b*) –13.400 Pa/m
P6.10 (*a*) Desde *A* hasta *B*; (*b*) $h_f = 7{,}8$ m
P6.12 $\mu = 0{,}29\ \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$
P6.14 $Q = 0{,}0067\ m^3/h$ si $H = 50$ cm
P6.16 $d_{\text{mín}} = 1{,}67$ m
P6.18 $\mu = 0{,}0026\ \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ (flujo laminar)
P6.20 $Q = 0{,}31\ m^3/h$
P6.22 $F = 4{,}32$ N
P6.24 (*a*) $0{,}019\ m^3/h$, laminar; (*b*) $d = 2{,}67$ mm
P6.26 $\mu = 0{,}000823\ \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$
P6.28 $\Delta p = 65$ Pa
P6.30 (*a*) $19{,}3\ m^3/h$; (*b*) el flujo es hacia *arriba*
P6.32 (*a*) el flujo es hacia *arriba*; (*b*) 1,86 m^3/h
P6.36 (*a*) $0{,}029\ lbf/ft^2$; (*b*) 70 ft/s
P6.38 5,72 m/s
P6.44 $h_f = 10{,}5$ m, $\Delta p = 1{,}4$ MPa
P6.46 Potencia de entrada Ξ 11,2 MW
P6.48 $r/R = 1 - e^{-3/2}$
P6.50 (*a*) –4000 Pa/m; (*b*) 50 Pa; (*c*) 46 por 100
P6.52 $p_1 = 2{,}38$ MPa

www.elsolucionario.net

P6.54 $t_{vaciado} = [4WY/(\pi D^2)][2h_0(1 + f_{med}L/D)/g]^{1/2}$
P6.56 (*a*) 188 km; (*b*) 27 MW
P6.58 Potencia Ξ 870 kW
P6.62 204 hp
P6.64 $Q = 19{,}6$ m³/h (laminar, Re = 1450)
P6.66 (*a*) 56 kPa; (*b*) 85 m³/h; (*c*) $u = 3{,}3$ m/s en $r = 1$ cm
P6.70 $Q = 2{,}21$ ft³/s
P6.72 $D \Xi 9{,}2$ cm
P6.74 $D = 0{,}52$ in
P6.76 $Q = 15$ m³/h
P6.78 $Q = 25$ m³/h (hacia la izquierda)
P6.80 $Q = 0{,}905$ m³/s
P6.82 0,384 m
P6.84 $D \Xi 0{,}104$ m
P6.86 (*a*) 3,0 m/s; (*b*) 0,325 m/m; (*c*) 2770 Pa/m
P6.88 Alrededor de 17 ranuras
P6.90 $Q = 19{,}6$ ft³/s
P6.92 (*a*) 1530 m³/h; (*b*) 6,5 Pa (vacío)
P6.94 260 Pa/m
P6.96 h A 4 mm
P6.98 Aproximadamente 128 secciones cuadradas
P6.102 (*a*) 5,55 hp; (*b*) 5,31 hp con una expansión cónica de 6°
P6.104 $\Delta p = 0{,}0305$ lbf/in²
P6.106 $Q = 0{,}0296$ ft³/s
P6.108 (*a*) $K \Xi 9{,}7$; (*b*) $Q \Xi 0{,}48$ ft³/s
P6.110 840 W
P6.112 $Q = 0{,}0151$ ft³/s
P6.114 (*a*) $Q_1 = 0{,}0167$ m³/s, $Q_2 = 0{,}0193$ m³/s, $\Delta p = 774$ kPa
P6.116 $Q = 0{,}027$ m³/s
P6.118 $\Delta p = 131$ lbf/in²
P6.120 $Q_1 = 0{,}0281$ m³/s, $Q_2 = 0{,}0111$ m³/s, $Q_3 = 0{,}0164$ m³/s
P6.122 Las causas son los mayores valores de ε/d y L/d
P6.124 $Q_1 = -2{,}09$ ft³/s, $Q_2 = 1{,}61$ ft³/s, $Q_3 = 0{,}49$ ft³/s
P6.126 $\theta_{apertura} = 35°$
P6.128 $Q_{AB} = 3{,}47$, $Q_{BC} = 2{,}90$, $Q_{BD} = 0{,}58$, $Q_{CD} = 5{,}28$, $Q_{AC} = 2{,}38$ ft³/s (todos)
P6.130 $Q_{AB} = 0{,}95$, $Q_{BC} = 0{,}24$, $Q_{BD} = 0{,}19$, $Q_{CD} = 0{,}31$, $Q_{AC} = 1{,}05$ ft³/s (todos)
P6.132 $2\theta = 6°$, $D_s = 2{,}0$ m, $p_s = 224$ kPa
P6.134 $2\theta = 10°$, $W_s = 8{,}4$ ft, $p_s = 2180$ lbf/ft²
P6.136 (*a*) 25,5 m/s, (*b*) 0,109 m³/s, (*c*) 1,23 Pa
P6.138 46,7 m/s
P6.140 $\Delta p = 273$ kPa
P6.142 $Q = 18{,}6$ gal/min, $d_{reductor} = 0{,}84$ cm
P6.144 $Q = 54$ m³/h
P6.146 (*a*) 0,00653 m³/s; (*b*) 100 kPa
P6.148 (*a*) 1,58 m; (*b*) 1,7 m
P6.150 $\Delta p = 27$ kPa
P6.152 $D = 4{,}12$ cm
P6.154 $h = 58$ cm
P6.156 $Q = 0{,}924$ ft³/s
P6.158 (*a*) 49 m³/h; (*b*) 6200 Pa

Capítulo 7

P7.2 $Re_c = 1{,}5 \times 10^7$
P7.4 (*a*) 4 μm; (*b*) 1 m
P7.6 $H = 2{,}5$ (frente al valor 2,59 de Blasius)
P7.8 Aproximadamente 0,08 N
P7.12 No satisface $\partial^2 u/\partial y^2 = 0$ en $y = 0$
P7.14 $C = \rho v_0/\mu$ = constante < 0 (succión en la pared)
P7.16 (*a*) $F = 181$ N; (*b*) 256 N
P7.18 (*a*) 1,54 ms/s; (*b*) 0,0040 Pa
P7.20 $x \Xi 0{,}91$ m
P7.22 $\psi = (vxU)^{1/2} f(\eta)$
P7.24 $h_1 = 9{,}2$ mm; $h_2 = 5{,}5$ mm
P7.26 $F_a = 2{,}83F_1$, $F_b = 2{,}0F_1$
P7.28 (*a*) $F_{resistencia} = 2{,}66N^2(\rho\mu L)^{1/2}U^{3/2}a$
P7.30 (*a*) $F = 72$ N; (*b*) 79 N
P7.32 $F = 0{,}0245\rho\nu^{1/2}L^{6/7}U_0^{13/7}\delta$
P7.34 $F = 725$ N
P7.36 7,2 m/s = 14 kn
P7.38 (*a*) 7,6 m/s; (*b*) 6,2 m/s
P7.40 $L = 3{,}51$ m, $b = 1{,}14$ m
P7.42 $P_{4\ palas} \Xi 0{,}032\mu^{1/7}(\rho C)^{6/7}\Omega^{20/7}R^{27/7}$
P7.44 Con una precisión del ±6 por 100
P7.46 $\varepsilon \Xi 9$ mm, $U = 11{,}1$ m/s = 22 kn
P7.48 Desprendimiento en $x/L = 0{,}158$ (error del 1 por 100)
P7.50 Desprendimiento en $x/R = 1{,}80$ rad = 103,1°
P7.52 (*a*) $Re_b = 0{,}84 < 1$; (*b*) $2a = 30$ mm
P7.54 Momento Ξ 200.000 N · m
P7.56 (*a*) 14 N; (*b*) el viento cruzado crea una fuerza lateral muy grande
P7.58 (*a*) 3200 N/m; (*b*) 2300 N/m
P7.60 Potencia necesaria para arrastrar la red = 140 hp
P7.62 Lado del cuadrado Ξ 0,83 m
P7.64 $\Delta t_{1000-2000\ m} = 202$ s
P7.68 (*a*) 34 m/s; (*b*) no, sólo alcanza el 67 por 100 de la velocidad límite en el instante del impacto
P7.70 (*a*) 642 ft; (*b*) 425 ft
P7.72 (*a*) $L = 6{,}3$ m; (*b*) 120 m
P7.74 Alrededor de 130 mi/h
P7.78 $\Delta p = 100$ Pa
P7.80 $\theta = 72°$
P7.82 $V_{mín} = 138$ ft/s; (*b*) $V_{máx} = 377$ ft/s
P7.84 $V = 9$ m/s
P7.86 Aproximadamente 2,9 m por 5,8 m
P7.88 (*a*) 62 hp; (*b*) 86 hp
P7.90 $V_{vuelco} \Xi 145$ ft/s = 99 mi/h
P7.94 Par $\Xi (C_D/4)\rho\Omega^2 DR^4$, $\Omega_{máx} = 85$ rpm
P7.96 $\Omega_{med} \Xi 0{,}21U/D$
P7.98 (*b*) $h \Xi 0{,}18$ m
P7.100 (*a*) 73 mi/h; (*b*) 79 mi/h
P7.106 (*a*) 300 m; (*b*) 380 m
P7.108 $\Delta x_{pelota} \Xi 13$ m
P7.110 $\Delta y \Xi 1{,}9$ ft
P7.114 $V_{final} \Xi 18{,}3$ m/s = 66 km/h
P7.116 (*a*) 87 mi/h; (*b*) 680 hp
P7.118 (*a*) 21 m/s; (*b*) 360 m
P7.120 $(L/D)_{máx} = 21$; $\alpha = 4{,}8°$
P7.122 (*a*) 6,7 m/s; (*b*) 13,5 m/s = 26 kn
P7.124 $\Omega_{teoría\ burda} \Xi 340$ rev/s

Capítulo 8

P8.2 $\Gamma = \pi\Omega(R_2^2 - R_1^2)$
P8.4 No, $1/r$ no es un potencial bidimensional
P8.6 $\psi = C\ tg^{-1}(y/x)$
P8.8 $\Gamma = 4B$
P8.12 $\Gamma = 4$
P8.14 Exterior irrotacional, interior rotacional; mínimo $p = p_* - \rho\omega^2R^2$ en $r = 0$

www.elsolucionario.net

P8.18 Desde lejos se ve como una fuente aislada de intensidad $4m$
P8.20 Torbellino cerca de una pared (véase Figura 8.17*b*)
P8.22 Igual que la Figura 8.6 pero cabeza abajo
P8.24 $C_p = -\{2(x/a)/[1 + (x/a)^2]\}^2$, $C_{p,\,\text{mín}} = -1{,}0$ en $x = a$
P8.26 $V_{\text{resultante}} = 9{,}4$ m/s en $\theta = -47°$
P8.28 El flujo simula una fuente en una esquina de 90°
P8.34 Dos puntos de remanso, en $x = \pm a/\sqrt{3}$
P8.36 $U_+ = 12{,}9$ m/s, $2L = 53$ cm, $V_{\text{máx}} = 22{,}5$ m/s
P8.42 $K/(U_+ a) = 0{,}396$, $h/a = 1{,}124$
P8.44 $K = 3{,}44$ m^2/s; (*a*) 218 kPa; (*b*) 205 kPa *punto superior*, 40 kPa *punto inferior*
P8.46 $F_{1\text{ remache}} = 5060$ N
P8.50 $h = 3a/2$, $U_{\text{máx}} = 5U/4$
P8.52 $V_{\text{barco}} = 10{,}2$ ft/s cuando el viento incide a 44°
P8.54 $F_{\text{paralela}} = 6700$ lbf, $F_{\text{normal}} = 2700$ lbf, potencia = 560 hp (muy aproximadamente)
P8.60 Corresponde a la Figura 8.15*a*, el flujo en una esquina de 60°
P8.62 Punto de remanso sobre una «protuberancia».
P8.64 (*a*) Sí; (*b*) $\psi = Br^{1,2}\,\text{sen}\,(1{,}2\theta)$
P8.66 $\lambda = 0{,}45m/(5m + 1)$ si $U = Cx^m$
P8.68 Flujo alrededor de un óvalo de Rankine
P8.70 Se puede aplicar al «bloque» del flujo por un obstáculo en un túnel de viento
P8.72 Gradiente adverso para $x > a$
P8.74 $V_{B,\,\text{total}} = (8K\mathbf{i} + 4K\mathbf{j})/(15a)$
P8.78 Se necesita una fila infinita de imágenes
P8.82 (*a*) 4,5 m/s; (*b*) 1,13; (*c*) 1,26 hp
P8.84 (*a*) 0,21; (*b*) 1,9°
P8.86 (*a*) 26 m; (*b*) 8,7; (*c*) 1600 N
P8.88 Empuje$_{1\text{ motor}} \Xi$ 2900 lbf
P8.92 (*a*) 0,77 m; (*b*) $V = 4{,}5$ m/s en $(r, \theta) = (1{,}81, 51°)$ y $(1{,}11, 88°)$
P8.94 Sí, son ortogonales
P8.98 Sí, aparece un cuerpo cerrado con forma de gota
P8.100 $V = 14{,}1$ m/s, $p_A = 115$ kPa
P8.102 (*a*) 1250 ft; (*b*) 1570 ft (*a grosso modo*)

Capítulo 9

P9.2 (*a*) $V_2 = 450$ m/s, $\Delta s = 515$ J/(kg · K); (*b*) $V_2 = 453$ m/s, $\Delta s = 512$ J/(kg · K)
P9.4 Alrededor de 50 m/s
P9.6 (*a*) 14 °C; (*b*) –2170 J/(kg · K)
P9.8 410 K
P9.10 Ma = 0,78
P9.12 (*a*) $2{,}13 \times 10^9$ Pa y 1460 m/s; (*b*) $2{,}91 \times 10^9$ Pa y 1670 m/s; (*c*) 2645 m/s
P9.18 Ma Ξ 0,24
P9.20 (*a*) Aire: 144 kPa y 995 m/s; (*b*) helio: 128 kPa y 2230 m/s
P9.22 (*a*) 267 m/s; (*b*) 286 m/s
P9.24 (*b*) En Ma Ξ 0,576
P9.28 (*a*) 0,17 kg/s; (*b*) 0,90
P9.30 (*a*) 239 m/s; (*b*) 0,54; (*c*) 0,98 kg/m^3
P9.32 (*a*) 141 kPa; (*b*) 101 kPa; (*c*) 0,706
P9.34 (*a*) 0,00424 slug/s; (*b*) 0,00427 slug/s
P9.40 (*a*) 2,50; (*b*) 7,6 cm^2; (*c*) 1,27 kg/s; (*d*) $\text{Ma}_2 = 1{,}50$
P9.42 (*a*) Ma = 0,90, $T = 260$ K, $V = 291$ m/s
P9.44 $V_s = 5680$ ft/s, $p_s = 15{,}7$ psi, $T_s = 1587$ °R, empuje = 4000 lbf
P9.46 $R_x = -8$ N (hacia la izquierda)
P9.48 (*a*) 313 m/s; (*b*) 0,124 m/s; (*c*) 0,00331 kg/s
P9.50 (*a*) $D_{\text{salida}} = 5{,}6$ cm; (*b*) se puede reducir hasta 75 kPa
P9.52 (*a*) 5,9 cm^2; (*b*) 773 kPa
P9.54 $\text{Ma}_2 = 0{,}648$, $V_2 = 279$ m/s, $T_2 = 461$ °K, $p_2 = 458$ kPa, $p_{02} = 607$ kPa
P9.56 Alrededor de $A_1 \Xi 24{,}7$ cm^2
P9.58 (*a*) 306 m/s; (*b*) 599 kPa; (*c*) 498 kPa
P9.60 Aguas arriba: Ma = 1,92, $V = 585$ m/s
P9.62 $C = 19.100$ ft/s, $V_{\text{detrás de la onda}} = 15.900$ ft/s
P9.64 (*a*) 0,150 kg/s; (*b*, *c*) 0,157 kg/s
P9.66 $h = 1{,}09$ m
P9.68 $p_{\text{atm}} = 92{,}6$ kPa; máximo gasto = 0,140 kg/s
P9.70 (*a*) 388 kPa; (*b*) 19 kPa
P9.72 $D \Xi 9{,}3$ mm
P9.74 (*a*) 1,08 MPa; (*b*) 2,24 kg/s
P9.76 $\Delta t_{\text{onda en tobera}} \Xi 23$ s; $\Delta t_{\text{fin de bloqueo}} \Xi 39$ s
P9.78 Caso *A*: 0,0071 kg/s; *B*: 0,0068 kg/s
P9.80 $A^* = 2{,}4 \times 10^{-6}$ ft^2 o $D_{\text{agujero}} = 0{,}021$ in
P9.82 $V_s = 110$ m/s, $\text{Ma}_s = 0{,}67$ (sí)
P9.84 (*a*) 0,96 kg/s; (*b*) 0,27; (*c*) 435 kPa
P9.86 $V_2 = 107$ m/s, $p_2 = 371$ kPa, $T_2 = 330$ K, $p_{02} = 394$ kPa
P9.88 $L = 2$ m, sí, hay onda para $\text{Ma}_2 = 2{,}14$
P9.90 (*a*) 0,764 kg/s; (*b*) 0,590 kg/s; (*c*) 0,314 kg/s
P9.92 (*a*) 0,45; (*b*) 2,04 kg/s
P9.96 (*a*) 128 m; (*b*) 80 m; (*c*) 105 m
P9.98 (*a*) 430; (*b*) 0,12; (*c*) 0,00243 kg/h
P9.100 $L_{\text{tubería}} = 69$ m
P9.102 El flujo está bloqueado con un gasto másico de 0,56 kg/s
P9.104 $p_{\text{tanque}} = 190$ kPa
P9.106 (*a*) 0,031 m; (*b*) 0,53 m; (*c*) 26 m
P9.108 El gasto másico disminuye alrededor del 32 por 100
P9.112 (*a*) 105 m/s; (*b*) 215 kPa
P9.116 $V_{\text{avión}} \Xi 2640$ ft/s
P9.118 $V = 204$ m/s, Ma = 0,6
P9.120 *P* está 3 m por delante del círculo pequeño, Ma = 2,0, $T_{\text{punto de remanso}} = 518$ K
P9.122 $\beta = 23{,}13°$, $\text{Ma}_2 = 2{,}75$, $p_2 = 145$ kPa
P9.124 (*a*) 1,87; (*b*) 293 kPa; (*c*) 404 K; (*d*) 415 m/s
P9.126 (*a*) 25,9°; (*b*) 26,1°
P9.128 $\delta_{\text{cuña}} \Xi 15{,}5°$
P9.130 (*a*) 43,78°; (*b*) 13,80°
P9.132 (*a*) $p_A = 18{,}0$ psi; (*b*) $p_B = 121$ psi
P9.134 $\text{Ma}_3 = 1{,}02$, $p_3 = 727$ kPa, $\phi = 42{,}8°$
P9.136 (*a*) $h = 0{,}40$ m; (*b*) $\text{Ma}_3 = 2{,}43$
P9.138 $p_a = 21{,}7$ kPa
P9.140 $\text{Ma}_2 = 2{,}75$, $p_2 = 145$ kPa
P9.142 (*a*) $\text{Ma}_2 = 2{,}641$, $p_2 = 60{,}3$ kPa; (*b*) $\text{Ma}_2 = 2{,}299$, $p_2 = 24{,}1$ kPa
P9.146 (*a*) 2,385; (*b*) 47 kPa
P9.148 (*a*) 4,44; (*b*) 9,6 kPa
P9.150 (*a*) $\alpha = 4{,}10°$; (*b*) resistencia = 2150 N/m
P9.152 El perfil parabólico tiene una resistencia un 33 por 100 más allá

Capítulo 10

P10.2 (*a*) 3,55 m/s; (*b*) 0,35 m/s
P10.4 Se trata de tubos piezométricos (sin flujo)

www.elsolucionario.net

P10.6 (*a*) Fr = 3,8; (*b*) $V_{corriente}$ = 7,7 m/s
P10.8 $\Delta t_{viaje\ de\ la\ onda}$ = 6,3 h
P10.10 $\lambda_{crít} = 2\pi(Y/\rho g)^{1/2}$
P10.14 El flujo debe ser completamente turbulento (alto Re) para que sea válida la fórmula de Chézy
P10.16 El caudal se reduce en un 20 por 100 independientemente de *n*
P10.18 y_n = 0,993 m
P10.20 Q = 74 ft^3/s
P10.22 S_0 = 0,00038 (o 0,38 m/km)
P10.24 y_n = 0,56 m
P10.30 $\Delta t \Xi$ 32 min
P10.32 74.000 gal/min
P10.34 Si b = 4 ft, y = 9,31 ft, P = 22,62 ft; si b = 8 ft, y = 4,07 ft, P = 16,14 ft
P10.36 y_2 = 3,6 m
P10.38 $D_{semicírculo}$ = 2,67 m (el diámetro es un 16 por 100 menor)
P10.42 P = 41,3 ft (un 71 por 100 mayor que en el Problema P10.39)
P10.44 Lado del hexágono b = 2,12 ft
P10.46 $h_0/b \Xi$ 0,49
P10.48 (*a*) 0,00634; (*b*) 0,00637
P10.50 (*a*) 2,37; (*b*) 0,62 m; (*c*) 0,0023
P10.52 W = 2,06 m
P10.54 (*a*) 1,98 m; (*b*) 3,11 m/s; (*c*) 0,00405
P10.56 (*a*) 1,02 m^3/s; (*b*) 0,0205
P10.58 (*a*) 1,0 m; (*b*) 1,0; (*c*) 0,77 m^3/s
P10.60 (*a*) 0,055 m^3/s/m; (*b*) 0,086 m
P10.64 $h_{máx} \Xi$ 0,35 m
P10.66 (*a*) 1,47; (*b*) y_2 = 1,19 m
P10.70 (*a*) 0,726 m^3/s/m; (*b*) 0,182 m; (*c*) 3,0
P10.72 (*a*) 0,046 m; (*b*) 4,33 m/s; (*c*) 6,43
P10.76 0,0253 m
P10.78 $\Delta t \Xi$ 8,6 s (análisis burdo)
P10.80 (*a*) 3,83 m; (*b*) 4,83 m^3/(s · m)
P10.82 (*a*) 1,46 ft; (*b*) 15,5 ft/s; (*c*) 2,26; (*d*) 13%; (*e*) 2,52 ft
P10.84 y_2 = 0,82 ft; y_3 = 5,11 ft; 47 por 100
P10.86 (*a*) 6,07 m/s; (*b*) ΔV = 2,03 m/s
P10.88 (*a*) 2,22 m^3/s/m; (*b*) 0,79 m; (*c*) 5,17 m; (*d*) 60%; (*e*) 0,37 m
P10.90 S_0 = 0,0431 (alrededor de 2,5°)
P10.92 (*a*) 3370 ft^3/s; (*b*) 7000 hp
P10.94 (*a*) 1,18 m; (*b*) 0,68 m; (*c*) 0,43 m; (*d*) 1,02 m
P10.98 (*a*) Pronunciada P-3; (*b*) P-2; (*c*) P-1
P10.106 Ninguna profundidad a la entrada produce condiciones críticas
P10.108 (*a, b*) Ambas curvas alcanzan $y \Xi y_n \Xi$ 0,5 m en x = 250 m
P10.110 (*a*) $y_{cresta} \Xi$ 0,782 m; (*b*) $y(L) \Xi$ 0,909 m
P10.112 Curva S-1, con y = 2 m en $L \Xi$ 214 m
P10.114 ¡Problemas! El flujo se bloquea para $Q \Xi$ 17 m^3/s
P10.116 $Q \Xi$ 9,51 m^3/s
P10.120 Y = 0,64 m, α = 34°
P10.122 5500 gal/min
P10.124 Curva S-1, y = 10 ft en x = –3040 ft
P10.126 En x = –100 m, y = 2,81 m
P10.128 A 300 m aguas arriba, y = 2,37 m

Capítulo 11

P11.6 Es una bomba de diafragma
P11.8 (*a*) H = 112 ft y Δp = 49 lb/in^2; (*b*) H = 112 ft (de gasolina); P = 15 hp
P11.10 (*a*) 12 gal/min; (*b*) 12 gal/min; (*c*) 87%
P11.12 (*a*) 11,3 m; (*b*) 1520 W
P11.14 1870 W
P11.16 (*a*) 1450 W; (*b*) 1030 rpm
P11.18 Máxima potencia para $V_{paleta} = (1/3)V_{chorro}$
P11.20 (*a*) 2 raíces: Q = 7,5 y 38,3 ft^3/s; (*b*) 2 raíces: H = 180 ft y 35 ft
P11.22 (*a*) PMR = 92 por 100 en Q = 0,20 m^3/s
P11.26 La correlación es «aceptable», pero no son geométricamente semejantes
P11.28 PMR alrededor de 6 ft^3/s; $N_s \Xi$ 1430, $Q_{máx} \Xi$ 12 ft^3/s
P11.30 (*a*) 1700 rpm; (*b*) 8,9 ft^3/s; (*c*) 330 ft
P11.32 (*a*) $D \Xi$ 15,5 in; (*c*) $n \Xi$ 2230 rpm
P11.34 (*a*) 11,5 in; (*b*) 28 hp; (*c*) 100 ft; (*d*) 78 por 100
P11.36 D = 9,8 in, n = 2100 rpm, P = 25 hp
P11.38 (*a*) 18,5 hp; (*b*) 7,64 in; (*c*) 415 gal/min; (*d*) 81 por 100
P11.40 (*a*) $D_s = D(gH^*)^{1/4}/Q^{*1/2}$
P11.42 $NPSH_{proto} \Xi$ 23 ft
P11.44 No hay cavitación, la profundidad necesaria es de sólo 5 ft
P11.46 $D_s \Xi C/N_s$, C = 7800 ± 7 por 100
P11.48 (*a*) $N_s \Xi$ 1000; (*b*) centrífuga; (*c*) $D \Xi$ 0,34 m
P11.52 (*a*) 6,56 m^3/s; (*b*) 12,0 kW; (*c*) 28,3°
P11.54 Bombas centrífugas, $D \Xi$ 7,2 ft
P11.56 (*a*) D = 5,67 ft, n = 255 rpm, P = 700 hp; (*b*) D = 1,76 ft, n = 1770 rpm, P = 740 hp
P11.58 Bomba centrífuga, η = 67 por 100, D = 0,32 ft
P11.60 (*a*) 623; (*b*) 762 gal/min; (*c*) 1,77 ft
P11.62 D = 18,7 ft, Δp = 1160 Pa
P11.64 (*a*) 15,4 in; (*b*) 900 rpm
P11.66 $Q \Xi$ 1240 ft^3/min
P11.68 (*a*) 4,8 in; (*b*) 6250 rpm
P11.70 (*a*) 212 ft; (*b*) 5,8 ft^3/s
P11.72 (*a*) 10 gal/min; (*b*) 1,3 in
P11.74 (*a*) 14,9; (*b*) 15,9; (*c*) 20,7 kgal/min
P11.76 $D_{tubo} \Xi$ 1,70 ft
P11.78 $D_{tubo} \Xi$ 1,67 ft, $P \Xi$ 2000 hp
P11.80 $Q_{32} \Xi$ 22.900 gal/min; $Q_{28} \Xi$ 8400 gal/min, $H \Xi$ 343 ft en ambos casos
P11.84 Dos turbinas: (*a*) $D \Xi$ 9,6 ft; (*b*) $D \Xi$ 3,3 ft
P11.86 $N_{sp} \Xi$ 70, luego son turbinas Francis
P11.88 (*a*) Francis; (*c*) 16 in; (*d*) 900 rpm; (*e*) 87 hp
P11.90 $P \Xi$ 800 kW
P11.94 (*a*) 71 por 100; (*b*) $N_{sp} \Xi$ 19
P11.96 (*a*) 1,68 ft; (*b*) 0,78 ft
P11.100 (*a*) 190 kW; (*b*) 24 rpm; (*c*) 9,3 ft/s
P11.102 $Q \Xi$ 29 gal/min

www.elsolucionario.net

RESUMEN DE ECUACIONES

Ley de los gases ideales: $p = \rho RT$, $R_{aire} = 287$ J/(kg · K)	Tensión superficial: $\Delta p = Y(R_1^{-1} + R_2^{-1})$
Hidrostática, densidad constante: $p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$	Fuerza hidrostática sobre un panel: $F = \rho g h_{CG} A$, $y_{CP} = -I_{xx}$ sen $\theta/(h_{CG}A)$, $x_{CP} = -I_{xy}$ sen $\theta/(h_{CG}A)$
Fuerza de flotabilidad: $F_F = \rho_{fluido} g$ (volumen desplazado)	VC masa: $d/dt(\int_{VC}\rho d\upsilon) + \sum(\rho AV)_{salida} - \sum(\rho AV)_{entrada} = 0$
VC cantidad de movimiento: $d/dt(\int_{VC}\rho \mathbf{V} d\upsilon) + \sum[(\rho AV)\mathbf{V}]_{salida} - \sum[(\rho AV)\mathbf{V}]_{entrada} = \sum \mathbf{F}$	VC momento cinético: $d/dt(\int_{VC}\rho(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{V})dv) + \sum \rho AV(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{V})_{salida} - \sum \rho AV(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{V})_{entrada} = \sum \mathbf{M}_0$
Energía, flujo estacionario: $[p/(\rho g) + \alpha V^2/2g + z]_{entrada} = [p/(\rho g) + \alpha V^2/2g + z]_{salida} + h_{fricción} - h_{bomba} + h_{turbina}$	Aceleración: $d\mathbf{V}/dt = \partial\mathbf{V}/\partial t + u(\partial\mathbf{V}/\partial y) + v(\partial\mathbf{V}/\partial y) + w(\partial\mathbf{V}/\partial z)$
Continuidad, flujo incompresible: $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$	Navier-Stokes: $\rho(d\mathbf{V}/dt) = \rho\mathbf{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{V}$
Función de corriente, flujo incompresible $\psi(x, y)$: $u = \partial\psi/\partial y$; $v = -\partial\psi/\partial x$	Potencial de velocidades: $\phi(x, y, z)$: $u = \partial\phi/\partial x$; $v = \partial\phi/\partial y$; $w = \partial\phi/\partial z$
Bernoulli, flujo irrotacional no estacionario: $\partial\phi/\partial t + \int dp/\rho + V^2/2 + gz = \text{Constante}$	Coeficiente de fricción turbulento: $1/\sqrt{f} = -2{,}0 \log_{10}[\varepsilon/(3{,}7d) + 2{,}51/(\mathrm{Re}_d\sqrt{f})]$
Pérdida de carga en conductos: $h_f = f(L/d)V^2/(2g)$ donde f = Coeficiente de fricción de Moody	Flujo en orificios, toberas, contracción de venturi: $Q = C_d A_{garganta}[2\Delta p/\{\rho(1 - \beta^4)\}]^{1/2}$, $\beta = d/D$
Capa límite laminar, placa plana: $\delta/x = 5{,}0/\mathrm{Re}_x^{1/2}$, $c_f = 0{,}664/\mathrm{Re}_x^{1/2}$, $C_D = 1{,}326/\mathrm{Re}_L^{1/2}$	Capa límite turbulenta, placa plana: $\delta/x = 0{,}16/\mathrm{Re}_x^{1/7}$, $c_f = 0{,}027/\mathrm{Re}_x^{1/7}$, $C_D = 0{,}031/\mathrm{Re}_L^{1/7}$
C_D = Resistencia/$(\frac{1}{2}\rho V^2 A)$; C_L = Sustentación/$(\frac{1}{2}\rho V^2 A)$	Flujo potencial 2-D: $\nabla^2\phi = \nabla^2\psi = 0$
Flujo isentrópico: $T_0/T = 1 + \{(\gamma - 1)/2\}\mathrm{Ma}^2$, $\rho_0/\rho = (T_0/T)^{1/(\gamma-1)}$, $p_0/p = (T_0/T)^{\gamma/(\gamma-1)}$	Variaciones de área en flujo isentrópico unidimensional: $A/A^* = (1/\mathrm{Ma})[1 + \{(\gamma - 1)/2\}\mathrm{Ma}^2]^{(1/2)(\gamma+1)/(\gamma-1)}$
Expansión de Prandtl-Meyer: $K = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$, $\omega = K^{1/2}\,\mathrm{tg}^{-1}[(\mathrm{Ma}^2 - 1)/K]^{1/2} - \mathrm{tg}^{-1}(\mathrm{Ma}^2 - 1)^{1/2}$	Corriente uniforme, parámetro n de Manning, unidades SI: $V_0(\mathrm{m/s}) = (1{,}0/n)[R_h(m)]^{2/3}S_0^{1/2}$
Corriente lentamente variable en un canal: $dy/dx = (S_0 - S)/(1 - \mathrm{Fr}^2)$, $\mathrm{Fr} = V/V_{crít}$	Fórmula de Euler para turbinas: Potencia $= \rho Q(u_2 V_{t2} - u_1 V_{t1})$, $u = r\omega$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Índice

A

Aceleración
  centrípeta, 90
  convectiva, 14, 220
  de Coriolis, 2, 158
  de un fluido, campo de, 219-221
  fuerza y, 130
  lineal uniforme, 90-92
  local, 220
Aceleraciones convectivas no lineales, 560
Actuaciones de una bomba en forma adimensional, 737-741
Actuadores neumáticos, 727
Actuadores, 727
Adimensionalización (*véase* Análisis dimensional)
Aerodinámica, 437, 471-474
Aerogenerador de Darrieus, 765, 766, 767
Aerogenerador de hélice de eje horizontal (HAWT), 766
Aerogenerador de Smith-Putnam, 765
Aerogeneradores, 764-769
  coeficiente de potencia, 767
  Darrieus, 765, 766, 767
  de eje horizontal (HAWT), 724, 766
  de eje vertical (VAWT), 765, 766, 767
  número de Betz, 767
  rendimiento de, 767
  rotor tipo Savonius, 767
  teoría idealizada, 766-769
  tipo Darrieus de álabes rectos, 765, 766
Aeronáutica, nuevas tendencias en, 648-649
Agua de mar, 21
Airbus A-380, 649
Airbus Industrie, 649
Aire
  ensayos/modelos en, 314-320
  fórmulas útiles para, 589-591
Aireados, vertederos, 702
Álabes abiertos, bombas centrífugas, 728
Álabes cerrados, bombas centrífugas, 728
Álabes curvados hacia atrás, 728
Álabes del estátor, 746
Álabes del rotor, 746
Alargamiento, 482-483, 539
Alas (*véase* Perfiles)
Alas de alargamiento finito, 539-542
Aliviaderos, de una presa, 316
Altura metacéntrica, 87
Altura neta de succión, 736
Análisis a gran escala (*véase* Análisis de volumen de control)
Análisis a pequeña escala (*véase* Análisis diferencial)
Análisis de Kármán, capa límite sobre una placa plana, 442
Análisis de volumen de control, 36-37, 129-216
  aproximaciones unidimensionales al término de flujo, 138-141
  conservación de la masa, 141-147
  definiciones introductorias, 129-132
  ecuación de la cantidad de movimiento (*véase* Ecuación de la cantidad de movimiento)
  ecuación de la energía (*véase* Ecuación de la energía)
  flujo volumétrico y másico, 132-133
  leyes básicas (*véase* Leyes básicas de la Mecánica de Fluidos)
  movimiento arbitrario/volumen de control deformable, 137-138
  teorema del momento cinético (*véase* Momento cinético)
  teorema del transporte de Reynolds, 133-141
  volumen de control de forma constante pero velocidad variable, 133-137
  volumen de control fijo arbitrario, 135-136
  volumen de control fijo unidimensional, 134-135
  volumen de control moviéndose a velocidad constante, 136-137
Análisis diferencial, 36, 129-130 (*véase* también Relaciones diferenciales)
Análisis dimensional, 6, 11, 16, 36, 129-130, 287-331
  adimensionalización y, 301-310
    coeficiente de fricción superficial, 306
    coeficiente de fricción, 306
    coeficiente de presión, 306
    coeficiente de resistencia, 306
    coeficiente de sustentación, 306
    condiciones de contorno, 301-303
    continuidad, 301-303
    entrada, 301-303
    flujos oscilatorios, 304
    Navier-Stokes, 301-303
    número de cavitación, 303-306
    número de Eckert, 306
    número de Euler, 303
    número de Froude, 303, 306, 307, 673
    número de Grashof, 306
    número de Mach, 304, 306, 307
    número de Prandtl, 306
    número de Rayleigh, 306
    número de Reynolds, 303, 305, 306
    número de Rossby, 306
    número de Strouhal, 306
    número de Weber, 303, 306
    otros parámetros adimensionales, 305-307
    parámetros adimensionales, 303
    parámetros de compresibilidad, 304-305
    relación de calores, 306
    relación de temperaturas, 306
    rugosidad relativa, 306
    salida, 301-303
    superficie fija, 301-303
    superficie libre, 301-303
  dimensiones de las propiedades de la Mecánica de Fluidos, 297

www.elsolucionario.net

Análisis dimensional (*Cont.*)
homogeneidad (*véase* Principio de homogeneidad dimensional (PHD))
modelización (*véase* Modelización)
semejanza, 288, 310 (*véase también* Modelización)
teorema Pi de Buckinham, 289, 295-301
variables adimensionales, 287
Análisis experimental (*véase* Análisis dimensional)
Análisis integral para un volumen de control (*véase* Análisis de volumen de control)
Análisis tensorial, 229
Anemometría láser-doppler (LDA), 395-396, 751
Anemómetro de hilo caliente, 397-398
Ángulo de ataque, 479
Angulo de contacto, 30
Ángulo de entrada en pérdida, 480, 481-482
Ángulo de los álabes, efecto en el incremento de carga de una bomba, 733-734
Aproximación unidimensional
ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, 157
flujo en canales abiertos, 670-672
Aproximaciones unidimensionales al término de flujo, 138-141
Área característica, flujos externos, 463
Área de la forma en planta, 463
Área frontal, 463
Área mojada, 463, 475
Aristas vivas, pérdidas localizadas en sistemas de tuberías, 380
Arquímedes, 84
Automóviles, fuerzas aerodinámicas sobre, 471-474
Avión
nuevos diseños, 484-486
perfiles (*véase* Perfiles)

B

Bandas anulares, 475
Barco con rotor de Flettner, 521-522
Barcos, resistencia de, 475-476
Barómetros de mercurio, 66-67
Barrera del sonido, 477, 629
Bernoulli, ecuación de, 9, 10, 129
ecuación de la energía para flujo estacionario, 179-180
en coordenadas rotatorias, 731
hipótesis y restricciones, 179
LAM y LNE, 180-185
para flujo adiabático e isentrópico, 589
para flujo sin fricción, 177-185
Bernoulli, teoría de la obstrucción de, 405-407
Blasius, ecuación de, 447
Bloqueo, 579
calentamiento simple y, 626-627
de compresores, 756
debido a la fricción, conductos compresibles y, 617-619
flujo isentrópico con cambios de sección, 595
Boeing Corp., 649
Bomba de engranajes, 726
Bomba externa de engranajes, 726
Bombas, 725-754
acoplamiento a una red, 751-756
conectadas en paralelo, 753
conectadas en serie, 754
de varios escalones, 754
compresores, 755-756
actuaciones (*véase* Curvas de actuaciones, bombas)
actuadores, 727
alternativas de pistón, 726
alternativas, 725, 726
axiales, 727, 743-751
actuaciones de, 748
teoría, 746-747
velocidad específica de succión, 744-745
velocidad específica, 744-745, 748
bomba de chorro (eyector), 727
cebado, 727
centrífugas (*véase* Bombas centrífugas)
circunferenciales, 726
clasificación de, 725-728
compresores, 755-756
conectadas en paralelo, 753
conectadas en serie, 754
de desplazamiento positivo, 725-728
de diafragma, 725
de doble pistón azimutal, 726
de chorro, 727
de émbolo, 725
de engranajes externos, 726
de engranajes, 726
de eyector, 727
de flujo de salida radial, 727 (*véase* también Bombas centrífugas)
de flujo mixto, 727
de lóbulos, 726
de paleta deslizante, 726, 743-746
de pistón azimutal, 726
de pistón o émbolo, 725
de rotor múltiple, 726
de rotor simple, 726
de tornillo doble, 726
de tornillo, 726
de tres lóbulos, 726
de tubo flexible, 726
de varios escalones, 754
dinámicas, 727-728
electromagnéticas, 727
martinetes hidráulicos, 727
martinetes neumáticos, 727
oscilaciones de bombeo, 734
peristálticas de tubo flexible, 726
rotativas, 727
rotodinámicas, 727
simulación numérica de, 751
Bombas centrífugas, 727, 728-734
álabes abiertos, 728
álabes cerrados, 728
álabes curvados hacia atrás, 728
ecuaciones de Euler de las turbomáquinas, 731
efectos del ángulo del álabe en el incremento de carga de una bomba, 733-734
ojo de la carcasa, 728
oscilaciones de bombeo, 728
parámetros de salida, 728-729
pérdidas por desprendimiento, 729
pérdidas por fricción, 729
pérdidas, 729
potencia al freno, 729
potencia proporcionada, 729
potencia útil, 729
rendimiento de, 729
rendimiento hidráulico, 729
rendimiento mecánico, 729
rendimiento volumétrico, 729
sin álabes, 728
teoría elemental de bombas, 730-733
voluta de la carcasa, 728
Burbuja de separación, 479

www.elsolucionario.net

C

Caída de presión, 410
Calado normal, 671, 678-679
Calle de torbellinos de Kármán, 304
Calor específico/relación de calores específicos, 15, 18-19
  flujo compresible, 306, 581
Campo de aceleraciones de un fluido, 219-221
Campo de velocidades
  definición, 14-15
  descripción euleriana, 13-14
  descripción lagrangiana, 13-14
  propiedades del, 13-15
Canales eficientes para movimiento uniforme, 680-682
Canales irregulares, movimiento gradualmente variado en, 698-699
Canales rectangulares, 683-684
Cantidad de movimiento, 37 (*véase también* Ecuación de la cantidad de movimiento)
  ecuación diferencial de, 227-234
  fluido newtoniano, 232-234
  flujo no viscoso: ecuación de Euler, 231
Capa límite
  análisis de Kármán, 441-442
  coeficiente de fricción superficial, 442
  derivación para un flujo bidimensional, 445-446
  desprendimiento en un cuerpo semiinfinito, 511
  ecuaciones de la, 444-446
  en una placa plana (*véase* Capa límite sobre una placa plana)
  espesor de desplazamiento, 442-444
  estimaciones integrales de cantidad de movimiento, 441-442
  flujo en la capa límite, 437
  fuerza de resistencia y, 440
  gradiente de presión (*véase* Capa límite con gradiente de presión)
  relaciones integrales de cantidad de movimiento, 442
  separación en un semicuerpo, de la, 511
  teoría integral de cantidad de movimiento, 442
Capa límite con gradiente de presión, 455-461
  ejemplo de tobera-difusor, 457
  gradiente adverso, 455
  gradiente favorable, 455
  teoría integral laminar, 458-460
Capa límite sobre una placa plana, 446-455
  análisis de Kármán, 441-442
  flujo laminar, 446-449
  flujo turbulento, 449-454
Capa límite, 23, 155, 437-461
Carga o altura de presión, 171
Carga o altura de velocidad, 171
Cavitación/Número de cavitación, 31-33, 34, 306
Cebado, 727
Centro de flotación, 84
Centro de presiones (CP), 75, 536
Chorro supersónico, 151
Cilindro circular, flujo con circulación, 518-519
Cilindros concéntricos infinitamente largos, flujo entre, 269-270
Cilindros giratorios, 731
  flujo con cilindro interior rotatorio, inestabilidad del, 271-272
  sustentación y resistencia de, 521-522
Circulación
  flujo potencial y, 509
  pérdidas, en bombas centrífugas, 729
  y flujo alrededor de un cilindro, 518-519
Círculo de Mohr, 4
Cobra P530, interceptador supersónico, 648
Códigos CFD comerciales, flujo viscoso, 560-563
Coeficiente de Chézy, 675
Coeficiente de descarga, 11, 406
Coeficiente de fricción de Darcy, 344, 353
Coeficiente de pérdida de carga, 342-343
Coeficiente de pérdida estática, 617
Coeficiente de pérdida, 378
Coeficiente de potencia, aerogeneradores, 729
Coeficiente de presión, 306
Coeficiente de recuperación de presión, 391-392
Coeficiente de sustentación en movimiento supersónico, 642
Coeficiente de tensión superficial, 28-29
Coeficiente de viscosidad, 15, 23
Coeficientes de transporte, 15
Compresibilidad, adimensional, 304
Compresibilidad, efectos de, 35
Compresores, 725, 755-756
Compuerta anegada, 689
Concepto de media temporal de Reynolds, 348-350
Condición de continuidad de temperatura, 33-35
Condición de contorno cinemática, 240
Condición de Kutta, 533, 535, 537
Condición de no deslizamiento, 23, 33-35
Condición de presión a la salida de un chorro, 151-156, 158
Condición hidrostática, 59
Condición inicial, 239
Condiciones de Cauchy-Riemann, 255
Condiciones de contorno, o condiciones en la frontera, 33-35, 37
  adimensionalización y, 301-303
  para las ecuaciones diferenciales de los fluidos, 238-243
Conductividad térmica, 15, 27
Conductos
  flujo compresible con fricción (*véase* Flujo compresible en conductos con fricción)
  flujo isentrópico con cambios de área, 591-594
  flujos viscosos en (*véase* Flujo viscoso en conductos)
  sin fricción, con adición de calor (*véase* Flujo en conductos sin fricción y con adición de calor)
Conductos comerciales, valores de la rugosidad para, 358
Conferencia General de Pesas y Medidas, 7
Cono de Mach, 629
Conservación de la energía, 37
Conservación de la masa, 37, 130-132, 141-147
  coordenadas cilíndricas, 223-224
  ecuación diferencial de, 221-227
  flujo compresible estacionario, 224
  flujo incompresible, 142-147, 224-227
  sistemas, 130
Consistencia dimensional, 9, 10
Constante de Kármán, 352
Constantes, 290-291
  dimensionales, 290
  puras, 291
Continuidad, 37
  adimensionalización y, 301-303
  ecuación de la, 222
Contornos, de sistemas, 130
Contracción brusca (CB) en tuberías, 380-383
Contracción gradual en conductos, 383
Contracciones laterales, vertedero rectangular sin, 705-706
Control activo de un flujo, 475
Convención Métrica, 7
Coordenadas cilíndricas, 223-224
Coordenadas esféricas, 224, 544
Coordenadas rotatorias, ecuación de Bernoulli en, 731
Correlación, velocidades turbulentas, 264-265, 271
Correlaciones, 295

www.elsolucionario.net

Corriente uniforme, 508
con ángulo de ataque, 526
en la dirección del eje x, 259, 544
más fuente en el origen, 261-262
más un doblete puntual, 547-548
más una fuente puntual, 545-546
Cortadura, 4-5, 22-23 (*véase* también Viscosidad)
Cuerda principal del cuerpo, 462
Cuerpo de ingenieros ejército de tierra de los EE.UU., 707
Cuerpo libre, concepto de, 133
Cuerpo semiinfinito de Rankine, 261-262
Cuerpos bidimensionales
coeficiente de resistencia, 466
experimentación en flujos externos, 466
Cuerpos cerrados, formas de, 516-525
analogías de flujos potenciales, 524-525
cilindro circular con circulación, 518-519
cilindros rotatorios, sustentación y resistencia, 521-522
Kutta-Jukowski, teorema de sustentación de, 519-520
óvalo de Kelvin, 523
óvalo de Rankine, 516-517
Cuerpos de flotabilidad neutra, 86
Cuerpos flotantes (*véase* Flotabilidad)
Cuerpos sustentadores (*véase también* Perfiles)
ángulo de ataque, 479
fuerzas sobre, 478-484
Cuerpos tridimensionales, resistencia, 469-471
Curva troposkiana, 766
Curvas características medidas, bombas, 735-736
Curvas de actuaciones, bombas, 727, 734-743
altura neta de succión, 736
bombas de flujo axial, 747-749
caudal de diseño, 734
curvas características adimensionales, 737-741
curvas características medidas, 735-736
desviaciones de la teoría de bombas ideales, 736-737
efecto de la viscosidad, 743
punto de máximo rendimiento, 734
reglas de semejanza, 741-742
teoría de bombas ideales, desviaciones, 736-737
Curvas de remanso, 707-708

D

d'Alambert, paradoja de, 520
Datos experimentales, incertidumbre de, 43-44
Deformación estática, 4-5
DeLaval-Stork V.O.F., 755
Densidad de un fluido, definición, 5
Densidad relativa, 17
Densidad, 5, 15, 16
Depresiones, en canales, 687
Derivada sustancial, o material, 220-221
Descripción euleriana, 13-14
Descripción lagrangiana del campo de velocidades, 13-14
Despegue y aterrizaje vertical, 649
Diafragma, 725
Diagrama de Moody, 357-360
Diagrama de pérdida de carga, 358
Diámetro hidráulico, flujo viscoso y, 367-368
Diferencial, presión, 62
Difusor sin álabes, bombas centrífugas, 728
Difusor subsónico, 609
Dimensiones primarias, 7-10
Dimensiones secudarias, factores de conversión para, 7
Dimensiones y unidades, 6-13
análisis dimensional, 6, 11
dimensión, definición de, 6
dimensiones primarias, 7-10
homogéneas vs. dimensionalmente inconsistentes, 9
unidad, definición de, 6
unidades consistentes, 9, 10
Dinámica, definición, 3
Disco imaginario del rotor, teoría ideal de aerogeneradores, 766
Diseño de bombas, caudal de, 734
Dispositivos para romper las estructuras turbulentas grandes (LEBU), 475
Distribución de presiones, 59-127
condición hidrostática, 59
equilibrio de una partícula fluida, 61-63
estabilidad y, 87-89
flotabilidad, 84-86
flujo en reposo o a velocidad constante, 62
fórmulas para el cálculo de la presión manométrica, 76-79
fuerzas de presión sobre una partícula fluida, 60
fuerzas hidrostáticas en fluidos estratificados, 82-84
fuerzas hidrostáticas sobre superficies curvas, 79-82
fuerzas hidrostáticas sobre superficies planas, 73-79
gradiente de presión y, 59-60
hidrostática (*véase* Distribución de presiones en hidrostática)
línea de flotación, estabilidad y, 87-89
medida de la (*véase* Medida de la presión)
movimiento como sólido rígido y, 59, 90-98
aceleración lineal uniforme, 90-92
rotación como sólido rígido, 92-98
traslación y rotación, 62
movimiento irrotacional, 62
movimiento viscoso arbitrario, 62
Presa Roosevelt, 58
presión absoluta, 62
presión diferencial, 62
presión manométrica y de vacío, 62, 76-79
presión relativa, 63
Distribución de presiones en hidrostática (*véase también* Fuerzas hidrostáticas)
barómetros de mercurio, 66-67
efecto de una gravedad variable, 64-65
en gases, 67-69
en líquidos, 65-66
manometría (*véase* Manómetros/Manometría)
peso específico, 65
validez de la fórmula lineal para gases, 68-69
Doblete (pareja fuente-sumidero), 515-516
Doblete puntual, flujo potencial axilsimétrico, 545

E

Ecuación de Euler, 231, 242, 731
Ecuación de Euler para turbinas, 746
Ecuación de la cantidad de movimiento, 130-132, 148-160
aproximación unidimensional, 157
como ecuación vectorial, 157
condición de presiones a la salida de un chorro, 148
convención de signos del flujo de cantidad de movimiento, 157
detalles de la, 157-158
factor de corrección del flujo de cantidad de movimiento, 156-157
flujo de cantidad de movimiento unidimensional, 157
fuerzas aplicadas, acción de, 160
presión sobre una superficie de control cerrada, 151-156
sistema de referencia no inercial, 158-160
Ecuación de la conducción del calor, 238

www.elsolucionario.net

Ecuación de la continuidad, 222
Ecuación de la energía, 130-133, 165-177, 235-238
  ecuación de la energía estacionaria, 171
  factor de corrección de la energía cinética, 174-175
  flujos de energía unidimensionales, 168-170
  fricción y trabajo motor, 171-173
  trabajo de los esfuerzos viscosos, 167
Ecuación de la hidrostática, 71
Ecuación para la presión, 560
Ecuaciones básicas, adimensionales, 301-310
Ecuaciones de Euler de las turbomáquinas, 731
Ecuaciones de estado, 37
  para gases, 17-21
  para líquidos, 21-22
Ecuaciones de Navier-Stokes
  adimensionalización y, 301-303
  de cantidad de movimiento, 232-234
  resolución con modelos de turbulencia, 560
Ecuaciones diferenciales, 219-284 (*véase también* Análisis diferencial)
  campo de aceleraciones de un fluido, 219-221
  cantidad de movimiento (*véase* Cantidad de movimiento, ecuación diferencial de)
  condiciones de contorno, o condiciones en la frontera, 238-243
    aproximación para flujo no viscoso, 242-243
    condición cinemática de contorno, 240
    condiciones simplificadas en la superficie libre, 241
    flujo incompresible con propiedades constantes, 241
  conservación de la masa (*véase* Conservación de la masa)
  energía, ecuación diferencial de la, 235-238
  flujo irrotacional no viscoso (*véase* Flujo irrotacional no viscoso)
  flujo viscoso incompresible, 263-272
    con cilindro interior rotatorio, 271-272
    de Couette entre una placa fija y otra móvil, 264-265
    entre cilindros concéntricos infinitamente largos, 269-270
    entre dos placas fijas debido a un gradiente de presión, 265-267
    laminar completamente desarrollado, 267-269
  flujos potenciales planos, 258-263
    corriente uniforme en la dirección x, 259
    corriente uniforme más un sumidero en el origen, 261-262
    cuerpo semiinfinito de Rankine, 261-262
    fuente más sumidero de igual intensidad, 260-261
    fuente o sumidero en el origen, 259
    sumidero más torbellino en el origen, 261
    superposición: fuente más sumidero de igual intensidad, 260-261
    torbellino irrotacional, 259-260
  función de corriente (Ψ) (*véase* Función de corriente (Ψ))
  lineales, 225
  momento cinético, 234-235
  vorticidad e irrotacionalidad, 251-253
Ecuaciones dimensionalmente inconsistentes, 11-12
Ecuaciones vectoriales, 157, 229, 231
Efecto Coanda, 475
Efecto Doppler, 398
Efecto Magnus, 519
Efectos no inerciales, 255
Eirtricity (compañía eléctrica de Irlanda), 769
El gas perfecto, 581-582
Elemento fluido, equilibrio de, 61-63
Energía cinética, 17
  de un fluido, 548-549
  factor de corrección, 174-175
Energía interna, 15
Energía potencial, 17
Ensanchamiento brusco, o expansión brusca (EB), en tuberías, 382-383
Entalpía de remanso, 171, 586
Entalpía, 15, 171
Entorno, de sistemas, 130
Entrada subsónica, bloqueo debido a la fricción, 617
Entrada supersónica, bloqueo debido a la fricción, 617-618
Entradas
  adimensionalización y, 301-303
  trabajo de los esfuerzos viscosos, 167
Entrefase, 28
Entropía, 15
Equilibrio de una partícula fluida, 61-62
  flujo en reposo o a velocidad constante, 62
  movimiento irrotacional, 62
  movimiento viscoso arbitrario, 62
  presión manométrica y de vacío, 62
  traslación y rotación como sólido rígido, 62
Esferas ligeras ascendiendo por flotabilidad, 471
Esfuerzos turbulentos, 349
Esfuerzos viscosos, 61
Espesor de cantidad de movimiento, resistencia y, 441-442
Espesor de desplazamiento, 443-444
Estabilidad, 86-89
Estado (condición termodinámica), 15
Estado crítico, 24
Estados conjugados, 682
Estampido o bang sónico, 629
Estratificación, 225, 255
Examen de Fundamentos de Ingeniería (FE), 44
Experimentación en flujos externos, 461-486
  área característica, 463
  cuerpos bidimensionales, 466
  cuerpos tridimensionales, 469-471
  esferas ligeras ascendiendo por flotabilidad, 471
  fuerzas aerodinámicas sobre vehículos terrestres, 471-474
  fuerzas sobre cuerpos sustentadores (*véase* Cuerpos sustentadores)
  mecanismos biológicos de reducción de la resistencia, 477-478
  movimientos a bajos números de Reynolds, o movimientos lentos, 466-469
  reducción de la resistencia, 474-475
  resistencia de cuerpos a altos números de Mach, 476-477
  resistencia de cuerpos bidimensionales, 468
  resistencia de cuerpos sumergidos, 461-463
  resistencia de fricción, 463-466
  resistencia de presión, 463-466
  resistencia del casco de un búque, 475-476

F

F-18 Hornet, cazabombardero, 578
Factor de corrección para flujo compresible de gases, 410
Factor de forma, 448
Factor de velocidad, 406
Factores de conversión, 7
Fila infinita de torbellinos, flujo potencial plano, 513-514
Flotabilidad, 84-86, 395, 471
Flotador Swallow, 86
Fluctuaciones, en un flujo turbulento, 348
Fluido (*véase* también Flujo; Líquidos)
  campo de velocidades (*véase* Campo de velocidades)
  cavitación, 31-33
  como medio continuo, 5-6
  concepto de, 4-5
  condición de continuidad de temperaturas, 33-35

www.elsolucionario.net

Fluido (*Cont.*)
condición de no deslizamiento, 33-35
condiciones de contorno, 33-35
conductividad térmica de un, 27
definición de, 4-5
densidad de un, 5-6
dilatante, 27
distribución de presiones (*véase* Distribución de presiones)
estratificado, fuerzas hidrostáticas en un, 82-84
newtoniano, 23
no newtoniano, 27
número de cavitación, 31-33
plástico de Bingham, idealización de, 27
plástico, 27
presión de vapor, 31-33
propiedades térmicas (*véase* Propiedades termodinámicas)
pseudoplástico, 27
reopético, 27
tixotrópico, 27
velocidad del sonido de un, 35-36
Flujo
a velocidad constante, 62
alrededor de cuerpos, 437-503
analisis de capa límite (*véase* Capa límite)
efectos del número de Reynolds, 437-440
efectos geométricos, 437-440
flujos externos (*véase* Experimentación en flujos externos)
métodos integrales, 440-444
alrededor de esquinas o rincones con ángulo arbitrario, 527-528
análisis diferencial (*véase* Ecuaciones diferenciales)
circulación y (*véase* Circulación)
clasificación según el número de Froude, 672-673
clasificación según la variación del calado, 672
coeficiente de, 406-407
corriente uniforme y torbellino, 512-513
descripción del, 37-40
en reposo o a velocidad constante, 62
entre cilindros concéntricos infinitamente largos, 269-270
entre placas paralelas, 25-26, 368
flujo laminar, 25
flujo turbulento, 25
hipótesis de análisis, 36-37
línea de corriente, 37-40
línea de traza, 37-40
línea fluida, 37-40
movimiento lento, 25
número de Reynolds, 24-25
perpendicular a una placa plana, 528-530
problemas de cálculo del caudal en conductos, 361-363
senda, 37-40
viscosidad (*véase* Viscosidad)
visualización, 40-42
Flujo adiabático
con fricción, 613-617
isentrópico, 586-591
con cambios de área, 591-599
de aire, 589-591
ecuación de Bernoulli, 589
entalpía de remanso, 586
relaciones de presión y densidad, 588
relaciones en función del número de Mach, 587-588
valores críticos en el punto sónico, 589
Flujo alrededor de cuñas, 648
Flujo alrededor de un cono, 648
Flujo alrededor de un cuerpo (*véase* Flujo)
Flujo alrededor de un hidroala, 560
Flujo alrededor de un óvalo de Kelvin, 523
Flujo axilsimétrico, función de corriente (Ψ), 249
Flujo completamente turbulento, 335
Flujo compresible, 579-647 (*véase también* Flujo compresible en conductos con fricción)
bloqueo y, 579
el gas perfecto, 581-582
expansión de Prandtl-Meyer (*véase* Expansión de Prandtl-Meyer)
factor de corrección para flujo de gases, 410
flujo de Fanno, 612
flujo hipersónico, 580, 581
flujo incompresible, 580
isentrópico (*véase* Flujo isentrópico)
número de Mach, 580-582
onda de choque normal (*véase* Onda de choque normal)
ondas de choque, 579
proceso isentrópico, 582-583
relación de calores específicos, 306, 581-582
subsónico, 580, 627-637
supersónico bidimensional, 627-637
supersónico, 580, 627-637
toberas convergentes, 606-608
toberas convergentes-divergentes, 608-611
transónico, 580
velocidad del sonido y, 579
Flujo compresible en conductos con fricción, 611-622
adiabático, 613-617
bloqueo y, 620
conductos largos, flujo isotérmico, 620
entrada subsónica, bloqueo debido a la fricción, 617
entrada supersónica, bloqueo debido a la fricción, 617-618
flujo isotérmico en conductos largos, 620
gasto másico para una caída de presión dada, 620-621
Flujo de cantidad de movimiento, 148-149
convenio de signos, 157
factor de corrección del, 156-157
unidimensional, 148-149
Flujo de Couette, 264-265, 271
Flujo de Fanno, 612
Flujo de Hagen-Poiseuille, 267-268
Flujo de Hele-Shaw, 524-526
Flujo de Poiseuille, 344
Flujo de Rayleigh, 623
Flujo de tipo chorro en difusores, 393
Flujo dominado por la rugosidad, 356
Flujo en canales abiertos, 669-722
aproximación unidimensional, 670-672
calado crítico (*véase* más abajo energía específica y calado crítico)
canales eficientes para movimiento uniforme, 680-682
ángulo óptimo del trapecio, 681
clasificación del flujo según el número de Froude, 672-673
clasificación del flujo según la variación del calado, 672
corrientes compuestas, 699-701
energía específica y calado crítico, 682, 689
canales no rectangulares, 684-685
canales rectangulares, 683-684
compuerta, desagüe bajo, 688-689
flujo sin fricción sobre una elevación en la solera, 686-688
movimiento uniforme crítico, 685-686
pendiente crítica, 685-686
fórmula de Chézy (*véase* Fórmula de Chézy)
movimiento uniforme, canales eficientes para, 680-682
movimiento uniforme: Chézy (*véase* Fórmula de Chézy)
movimientos gradualmente variados, 694-701
canales irregulares, 698-699
corrientes compuestas, 699-701
ecuación diferencial básica, 694-695

www.elsolucionario.net

Flujo en canales abiertos (*Cont.*)
solución numérica, 697-698
soluciones, clasificación de, 695-696
resalto hidráulico, 689-693
clasificación, 690
teoría para un resalto horizontal, 691-693
velocidad de onda superficial, 673-674
vertederos y curvas de remanso (*véase* Vertederos)
Flujo en conductos sin fricción y con adición de calor, 623-627
efecto de la adición de calor en el número de Mach, 625
efectos de bloqueo debidos al calentamiento simple, 626-627
Flujo de Rayleigh, 623
onda de choque normal y, 627
Flujo en difusores, 382
actuaciones, experimentación, 390-395
coeficiente de recuperación de presión, 391
gradiente de presión en la capa límite, 457
separación, 457
subsónico y supersónico, 609, 610
Flujo en sistemas conectados en paralelo, 387-388, 753
Flujo en sistemas conectados en serie, 385-387, 754
Flujo estacionario
adiabático e isentrópico, 589
compresible, conservación de la masa y, 224
ecuación de la energía, 170-171
laminar bidimensional, 560
plano compresible, función de corriente (Ψ), 248
sin fricción, o no viscoso, 179-180
Flujo hipersónico, 580, 581
Flujo incompresible, 580
condiciones de contorno con propiedades constantes, 241
conservación de la masa, 142-147
ecuación de conservación de la masa, 224-227
función de corriente (Ψ), 249, 250
plano, función de corriente (Ψ), 249, 250
Flujo isentrópico, 580
adiabático (*véase* Flujo adiabático)
bloqueo, 595
con cambios de área, 591-599
de un gas perfecto con cambios de área, relaciones para el, 593-594
función de gasto másico local, 595-596
geometría del conducto y, 591-594
Flujo isotermo con fricción en conductos, 620
Flujo laminar, 25, 335
capa límite sobre una placa plana, 446-449
completamente desarrollado en un conducto, 267-269, 344-347
flujo viscoso en conductos no circulares, 368
medidor de, 404
modelización del flujo viscoso bidimensional estacionario, 560
Flujo lento, 25
Flujo no viscoso
aproximaciones, 242, 505-506
ecuación de Euler para el, 231
Flujo potencial, 505
análisis numérico, 549-563
flujos viscosos (*véase* Modelos numéricos para flujos viscosos), 549-563
método de diferencias finitas, 549-555
método de elementos finitos, 549-550
método de los elementos de contorno, 555-557
analogías, formas de cuerpos cerrados, 524-525
axilsimétrico (*véase* Flujo potencial axilsimétrico)
circulación, 509
concepto de función de corriente (Ψ), 507, 555
concepto de potencial de, 505-507
coordenadas polares, 249, 250
soluciones elementales en flujos planos (*véase* Flujo potencial plano)
Flujo potencial axilsimétrico, 543-549
coordenadas esféricas, 544
corriente uniforme en la dirección x, 544
corriente uniforme más un doblete puntual, 547-548
corriente uniforme más una fuente puntual, 545-547
doblete puntual, 545
fuente o sumidero puntual, 545
masa añadida, 548-549
Flujo potencial plano, 508-532
corriente uniforme con ángulo de ataque, 526
esquina o rincón de ángulo arbitrario, 527-528
formas de cuerpos cerrados (*véase* Formas de cuerpos cerrados)
fuente puntual situada en el punto z0, 527
método de las imágenes, 530-532
normal a una placa plana, 528-530
superposición de soluciones, 510-516
capa de torbellinos, 514-515
desprendimiento de la capa límite en un cuerpo semiinfinito, 511-512
doblete (par fuente-sumidero), 515-516
ejemplos, 510-511
fila infinita de torbellinos, 513-514
flujo alrededor de un torbellino, 512-513
método gráfico, 510
teoría de perfiles (*véase* Teoría de perfiles)
torbellino puntual situado en el punto z0, 527
transformación conforme, 525-526
Flujo rotacional, 257
Flujo secundario, turbulento, 374
Flujo sin fricción sobre una elevación en la solera, 686-688
Flujo subsónico, 580
Flujo supersónico, 580, 647-648
Flujo supersónico tridimensional, 647-648
Flujo transónico, 580
Flujo turbulento en conductos, 353-360
dominado por la rugosidad, 356
efecto de la rugosidad de la pared, 355-357
paredes hidrodinámicamente lisas, 356
paredes rugosas y, 355-357
problemas de flujo en conductos (*véase* Resolución de problemas de flujo en conductos), 357-360
rugosidad de transición, 356
Flujo unidimensional de cantidad de movimiento, 148-149
Flujo unidimensional no estacionario, 557-558
Flujo uniforme crítico, en canales abiertos, 685
Flujo viscoso en conductos, 335-435
coeficiente de recuperación de presión, 390
conductos no circulares (*véase* Flujo viscoso en conductos no circulares)
experimentación: actuaciones de un difusor, 390-395
flujo laminar completamente desarrollado en conductos, 344-347
flujo turbulento en conductos (*véase* Flujo turbulento en conductos)
flujos viscosos internos y externos, 340-342
medidores en fluidos (*véase* Medidores en fluidos)
modelos de turbulencia (*véase* Modelos de turbulencia)
pérdida de carga (el coeficiente de fricción), 342-344
pérdidas localizadas (*véase* Pérdidas localizadas)
problemas de flujo en conductos (*véase* Resolución de problemas de flujo en conductos)
regímenes en función del número de Reynolds, 335-340
sistemas de tuberías (*véase* Sistemas de tuberías)
Flujo viscoso en conductos no circulares, 366-376
a través de una sección anular, 371-374

www.elsolucionario.net

Flujo viscoso en conductos no circulares (*Cont.*)
diámetro hidráulico, 367-368
flujo entre placas paralelas, 368
solución para flujo laminar, 368-369
solución para flujo turbulento, 369-371
Flujo, o gasto, másico, 148
a través de una superficie, 132-133
función, local, 595-596
medidores de caudal, 404
para una caída de presión dada, 620-621
Flujos bidimensionales
análisis de capa límite, 444-446
estacionarios, laminares, viscosos, 560
onda de choque oblicua, 630-637, 641
ondas de Mach y, 628-630
supersónicos, 627-637
Flujos bifásicos, 4
Flujos de energía unidimensionales, 168-170
Flujos irrotacionales no viscosos, 253-258
generación de vorticidad, 255-258
ortogonalidad de las líneas de corriente y equipotenciales, 254-255
potencial de velocidades, 254, 505-507
Flujos irrotacionales, 234, 244, 251-253
Flujos oscilatorios, adimensionalización y, 305
Flujos turbulentos (*véase* también Flujo turbulento en conductos)
capa límite sobre una placa plana, 446-455
completamente desarrollado, 335
en conductos no circulares, 369-371
fluctuaciones en, 348
flujo viscoso en conductos no circulares, 369-371
longitud de mezcla turbulenta, 352
paredes rugosas y, 355-357
región exterior, 350
región interior o de la pared, 349-350
región intermedia o de solape, 350
rugosidad de transición, 356
secundario, 374
Fórmula de Hazen-Williams, 295
Fórmula de Manning para canales abiertos, 295
Fórmula de Pitot, 397
Fórmula hidrostática lineal para gases, validez de la, 68-69
Fórmulas de Chézy, 674-680
coeficiente de Chézy, 675
correlación de rugosidad de Manning, 676-678
estimación de profundidad, 678-679
flujo en un conducto circular parcialmente lleno, 679-680
Fricción
coeficiente de fricción, 306, 614
flujo compresible en conductos (*véase* Flujo compresible en conductos con fricción)
pérdidas por fricción, bombas centrífugas, 729
resistencia de fricción, 463-466
trabajo de partes móviles, o trabajo motor, y, 171-173
velocidad de fricción, 350
Fricción superficial
coeficiente de, 306, 442
ley de, 451
Fuente bidimensional, 259-261
más sumidero de igual intensidad, 260-261
situada en el punto z0, 527
Fuente o sumidero, 545
Fuerza
coeficiente de, 288
de sustentación oscilatoria, 462
ejercida sobre una masa, aceleración y, 130
lateral, 462
sobre cuerpos sustentadores (*véase* Cuerpos sustentadores)
Fuerzas aerodinámicas sobre vehículos terrestres, 471-474
Fuerzas aplicadas, cantidad de movimiento, 157
Fuerzas con variaciones espaciales, 60
Fuerzas de presión, resultante sobre una superficie cerrada, 149-151
Fuerzas de superficie, 228
Fuerzas hidrostáticas (*véase también* Distribución de presiones en hidrostática)
en fluidos estratificados, 82-84
fórmulas de presión manométrica, 76-79
sobre superficies curvas, 79-82
sobre superficies planas, 73-79
Fuerzas volumétricas, 228
Función de corriente (Ψ), 226, 243-251
flujo axilsimétrico incompresible, 249
flujo plano incompresible en coordenadas polares, 249, 250
flujo plano, compresible y estacionario, 248
flujo potencial y, 507, 555
interpretación geométrica, 245-248
Función de disipación viscosa, 237
Función de gasto másico local, 595-596
Función de Prandtl-Meyer para la expansión supersónica, 640
Función de Prandtl-Meyer para un gas perfecto, 638-640

G

Gases, 4-5
distribución de presión hidrostática en, 67-69
factor de corrección para el flujo compresible de gases, 410
función de Prandtl-Meyer para un gas perfecto, 638-640
medida de la presión, 98
métodos de medida de presión basados en las propiedades de los gases, 98
perfectos, 18, 20-21, 581-582, 593-594
relaciones de estado para, 17-21
función de Prandt-Meyer para un gas perfecto, 638-640
ley de los gases perfectos, 18, 20-21
relaciones de cambio de área para, 593-594
Generación de mallas, 560, 561
Geometría
como obstáculo para el análisis de los flujos, 3
efectos de, flujo alrededor de cuerpos, 437-440
Gradiente de presión, 16, 59-60
adverso, 439, 465, 511
favorable, 439, 465, 511
flujo entre dos placas fijas debido a un, 265-267
vector, 231
Gradientes
de esfuerzos, 229
de presión, 16, 231
Gravedad variable, presión hidrostática y, 64-65
Grumman Corp., 286
Guiñada, 462

H

Hidrodinámica, 548
Hodógrafa, 632

I

Icebergs, 89
Incertidumbre, de los datos, 43-44

www.elsolucionario.net

Inestabilidad del flujo con cilindro interior rotatorio, 271-272
Ingeniería del viento, 437
Ingeniería oceánica, 437
Integral de cantidad de movimiento para la capa límite sobre una placa plana, 442
Integrales de cantidad de movimiento, 442
Intensidad de la turbulencia, 348
Intensidad, de un doblete, 515
Interpretación geométrica de la función de corriente (Ψ), 246-248

L

Lámina en régimen rápido, 702
Ley de Fourier de la conducción de calor, 27
Ley de la capa logarítmica, 350-351
Ley de la pared, 350
Ley de líquidos perfectos, 21
Ley de Pascal, relación hidrostática y, 71
Ley del defecto de velocidad, 350
Leyes básicas de la Mecánica de Fluidos, 129-133
  análisis diferencial (*véase* Análisis diferencial)
  análisis dimensional (*véase* Análisis dimensional)
  cantidad de movimiento (*véase* Ecuación de la cantidad de movimiento)
  conservación de la masa (*véase* Conservación de la masa)
  ecuación de la energía (*véase* Ecuación de la energía)
  flujo sin fricción (*véase* Ecuación de Bernoulli)
  sistemas frente a volúmenes de control, 130-132
  teorema del momento cinético, 130-132, 161-166
  volúmenes de control (*véase* Análisis de volumen de control)
Leyes de escala, 288
Leyes de la mecánica, 37
Línea de altura motriz (LAM), 180-185, 669
Línea de Fanno, 612
Línea de flotación, área delimitada por la, 87-89
Línea de flotación, huella de la, 88
Línea de nivel de energía (LNE), 180-185, 682
Línea de Rayleigh, 623
Línea de traza, 37-40
Línea fluida, 37-40
Linealizador, 397
Líneas de corriente, 37-40, 168, 254-255
Líneas equipotenciales, ortogonalidad de las, 254-255
Líquido que moja, 30
Líquido que no moja, 30
Líquidos, 4-5 (*véase también* Fluido)
  distribución de presión hidrostática en, 65-66
  ecuaciones de estado para, 21-22
  que mojan, 30
  que no mojan, 30
  tensión superficial, 28-31
Lockheed-Martin Co., 649
Longitud de mezcla, viscosidad turbulenta, 352

M

Manómetros/Manometría, 69-73, 98
  ecuación de la hidrostática y, 70-71
  fórmula del manómetro, 71-72
Masa (*véase* también Conservación de la masa)
  como dimensión primaria, 7-10
  hidrodinámica, 548
Masa añadida, 548
Masa hidrodinámica, 548
Masa virtual, 548
Matrices tridiagonales, algoritmo para la resolución de (TDMA), 558-559
Matriz de coeficientes, 559
Mecánica de fluidos
  dimensiones 297 (*véase también* Análisis dimensional)
  historia y perspectiva de la, 45-46
  leyes básicas (*véase* Leyes básicas de la Mecánica de Fluidos)
Mecánica de Fluidos Computacional (CFD), 3, 129, 232, 444
  flujo viscoso (*véase* Modelos numéricos para flujos viscosos)
  simulación de bombas, 749
Mecanismos biológicos de reducción de la resistencia, 477-478
Medida de la presión, 98-102
  manómetros (*véase* Manómetros/Manometría)
  métodos basados en la deformación elástica, 98, 99-100
  métodos basados en la gravedad, 98
  métodos basados en las propiedades de los gases, 98
  métodos con salida eléctrica, 98, 100-102
  pinturas luminiscentes para distribución de presiones sobre superficies, 98
Medida de presión basada en la gravedad, 98
Medidor de caudal de Coriolis, 404
Medidor de disco giratorio, 400
Medidor de gasto másico, 404
Medidor de hélice, 400
Medidor de turbina, 400
Medidor ultrasónico, 402
Medidor venturi, 409-410
Medidores de caudal, 143, 399-413
  electromagnéticos, 397
  factor de corrección del flujo compresible de un gas, 410
  medidor de disco giratorio, 400
  medidor de flujo laminar, 404
  medidor de gasto másico de Coriolis, 404
  medidor de turbina, 400
  medidor por desprendimiento de torbellinos, 400, 402
  medidor ultrasónico, 402
  medidor venturi, 409-410
  orificio en placa delgada, 407-409
  rotámetro, 403-404
  teoría de la obstrucción de Bernoulli, 405-407
  tobera para medida de caudal, 409
Medidores de presión basados en deformaciones elásticas, 98, 99
Medidores de presión con salida eléctrica, 98, 100-102
Medidores de velocidad local, 395-399
  anemómetro de hilo caliente, 397-398
  anemómetro láser-doppler, 398-399
  dispositivos mecánicos giratorios, 395
  medidor electromagnético, 397
  partículas flotantes o de flotabilidad neutra, 395
  tubo Pitot, 396-397
Medidores de volumen, 399-400
Medidores en fluidos, 395-413
Medio continuo, el fluido como un, 5-6
Menisco, 73
Metacentro, 87
Método de diferencias finitas, 550-555
Método de elementos finitos, 550
Método de las imágenes, flujo potencial plano, 530-532
Método de los elementos de contorno (BEM), 555-556
Método descriptivo euleriano, 219
Método gráfico, de superposición, 510
Métodos implícitos, modelos numéricos para flujos viscosos, 558-559
Microburbujas, 475

www.elsolucionario.net

Microrranuras en foma de «v», 475
MLB, Co., 484
Modelización, 310-320
  ensayos en aire y agua, 314-320
  semejanza cinemática, 312-313
  semejanza dinámica, 313-314
  semejanza geométrica, 311-312
  semejanza, 288, 310, 312-314
Modelos a escala, 288
Modelos de dinámica molecular, 581
Modelos de turbulencia, 347-353
  avanzados, 351-353
  capa logarítmica de solape, 350-351
  media temporal de Reynolds, 348-350
  resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes con, 560
Modelos explícitos, 558
Modelos numéricos de tipo aguas arriba, 560
Modelos numéricos inestables, 558
Modelos numéricos para flujos viscosos, 557-563
  algoritmo para matrices tridiagonales (TDMA), 559
  códigos CFD comerciales, 560-563
  flujo laminar bidimensional estacionario, 560
  flujo unidimensional no estacionario, 557-558
  generación de mallas, 560, 561
  modelos implícitos, 558-559
  para el flujo alrededor de un hidroala, 560
Módulo de compresibilidad, 585
Molino de viento multipala americano, 765
  ecuación diferencial del, 234-235
  teorema del, 130-132, 161-166
Momento de balance, 461
Momento de cabeceo, 462
Movimiento gradualmente variado, 672 (*véase también* Flujo en canales abiertos)
Movimiento irrotacional, 62
Movimiento lento, 25
Movimiento rápidamente variado, 672
Movimiento viscoso arbitrario, 62

N

NASA, 436, 481
National Research Council, Canadá, 765
No aireado, vertedero, 702
No estacionario, flujo unidimensional, 557-558
Nodos, 550
Northrop Grumman, 648, 765
Número de Betz, 767
Número de Eckert, 306
Número de Euler, 303, 306
Número de Froude, 303, 306, 307, 672
Número de Grashof, 306
Número de Mach, 36, 306, 580-581
  adimensionalización y, 303, 305
  efecto de la adición de calor en el, 624
  flujo estacionario adiabático e isentrópico, 588
  onda de choque normal, 600-603
  resistencia de cuerpos a altos números de Mach, 476-477
Número de Prandtl, 306
Número de Rayleigh, 306
Número de Reynolds, 24-25, 306
  adimensionalización y, 303, 305
  flujo alrededor de cuerpos, 437-440
  flujo viscoso en conductos, 335-340
Número de Rossby, 306
Número de Strouhal, 306
Número de Taylor, 271-272
Número de Weber, 303, 306
Nutación, 400

O

Ojo, carcasa de una bomba, 728
Ondas de choque, 579
  débil, 632-635
  curvada delante de un cuerpo romo, 477
  fuertes o intensas, 632-635
  muy débil, 635-636
  normal (*véase* Onda de choque normal)
  oblicua, 630-635
Onda de choque normal, 758, 763
  flujo en conductos sin fricción y con adición de calor, 627
  móvil, 603-606
  relaciones de Rankine-Hugoniot, 599-600
  relaciones en función del número de Mach, 600-602
Ondas de expansión de Prandtl-Meyer, 637-649
  flujo supersónico tridimensional, 647-648
  función de Prandtl-Meyer para un gas perfecto, 638-641
  perfiles supersónicos (*véase* Perfiles supersónicos)
  teoría de perfiles delgados, 644-645
  aeronáutica, nuevas tendencias en, 648-649
Ondas de Mach, 628-630
Orificio en placa delgada, 407-409
Oscilaciones de bombeo, 734
Oscilaciones de la pared, 475
Óvalo de Rankine, 516-518

P

Paracaídas, para frenado de automóviles, 473-474
Parámetros
  adimensionales, 303
  básicos de salida de bombas centrífugas, 728-729
  de compresibilidad, 304
  de escala, 291-393
  principio de homogeneidad dimensional, definición, 291
Paredes hidrodinámicamente lisas, flujo en conductos con, 356
Partículas flotantes o de flotabilidad neutra, velocidad local y, 395
Partículas flotantes, para medir la velocidad local, 395
Pendiente crítica, flujo en canales abiertos, 685-686
Pérdida del compresor, 756
Pérdidas localizadas, 376-384, 619
  aristas vivas y, 380
  coeficiente de pérdida, 376
  contracción brusca, 380-383
  contracción gradual, 383
  difusor, 382
  diseño de válvulas, 377-380
  expansión brusca, 380-383
  salidas sumergidas y, 380
  válvula de ángulo, 377, 378
  válvula de compuerta, 377, 378
  válvula de disco, 377
  válvula de globo, 377, 378
  válvula de mariposa, 379
  válvula de no retorno, 377, 378
  vena contracta, 382
Pérdidas por desprendimiento, bombas centrífugas, 729
Perfiles, 478-484 (*véase también* Teoría de perfiles)
  alargamiento, 482-483
  burbuja de separación, 479
  coeficiente de resistencia, 479, 481-488

www.elsolucionario.net

Perfiles (*Cont.*)
coeficiente de sustentación 479
curvatura, 478
de doble cuña, 643
de Kline-Fogleman, 483-484
gruesos con curvatura, 537-539
NACA, 481-482, 538-539
pérdidas y, 480, 483
primeros, 481
torbellino de arranque, 479
torbellino de parada, 479
velocidad de entrada en pérdida, 483
Perfiles supersónicos
coeficiente de sustentación, 642
ondas de expansión de Prandtl-Meyer, 641-644
perfil en diamante o doble cuña, 643
teoría de ondas de choque y expansiones, 642
Peso específico, 16-17, 65
Pinturas luminiscentes para distribución de presiones sobre superficies, 98
Poise, 9
Polar de la onda, 632-633
Polímeros de alto peso molecular, 475
Potencia al freno, 729
Potencia nominal, turbinas, 763
Potencia suministrada al fluido, bombas centrífugas, 729
Potencia útil, bombas centrífugas, 729
Potencial de velocidades, 254
Potencial de velocidades, flujos no viscosos, 254, 505-507
Presa Grand Coulee, 759, 761
Presas (*véase* Vertederos)
Presión (*véase también* Distribución de presiones)
absoluta, 62
como propiedad termodinámica, 15
de remanso, 396, 625
de un fluido, 5
de vacío, fluido en equilibrio y, 62-63
de vapor, 31-33
Presión manométrica
equilibrio de una partícula fluida, 62-63
fórmulas, 76-79
y presión de vacío, 62-63
Presión relativa, 62-63
Presión, 6, 15 (*véase también* Distribución de presiones)
Primer principio de la termodinámica, 37
Principio de homogeneidad dimensional (PHD), 290-295
algunas ecuaciones peculiares en ingeniería, 294-295
ambigüedad y, 291-293
constantes dimensionales, 290
constantes puras, 291
fórmula de Hazen-Williams, 295
fórmula de Mannings para canales abiertos, 295
parámetros de escala, 291-293
parámetros, definición de, 291
variables dimensionales, 290
variables dimensionalmente independientes, 291-294
variables y constantes, 290-291
variables, definición de, 291
Principio de los estados correspondientes, 24
Proceso adiabático, 585
Proceso isentrópico, 582
ondas de choque débiles, 636
Propiedades termodinámicas, 15-22
densidad relativa, 17
densidad, 16
energía cinética, 17
energía potencial, 17
peso específico, 16-17
presión, 16
relaciones de estado para gases, 17-21
relaciones de estado para líquidos, 21-22
temperatura, 16
viscosidad (*véase* Viscosidad)
Prototipos, 288
Protuberancia, 476
Punto crítico, 4
Punto de control del canal, 707
Punto de máximo rendimiento (PMR), bombas, 734-736
Punto de remanso, 40
Punto de separación, o desprendimiento, 455
Punto sónico, valores críticos en el, 589
Puntos homólogos, 311

R

Red ortogonal de flujo, 254-255, 507
Régimen lento, velocidad de, 683
Régimen rápido, lámina en, 702
Régimen rápido, velocidad de, 683
Región de entrada, 340
Región de relaminarización, 336
Región exterior, flujo turbulento, 350
Región interior o de la pared, flujo turbulento, 350
Región intermedia, flujo turbulento, 350
Regla mnemotécnica, manometría, 70-73
Relación de presiones de diseño, en toberas, 608-609
Relación de temperaturas, 306
Relaciones adiabáticas, 622
Relaciones de Rankine-Hugoniot, 599-600
Rendimiento, o eficiencia
de aerogeneradores, 767
de bombas centrífugas, 729
de un canal abierto, 680-682
hidráulico, 729
mecánico, 729
punto de máximo rendimiento (PMR), 734-736
volumétrico, 729
Reología, 4
Resalto hidráulico, 674 (*véase también* Flujo en canales abiertos)
Resalto hidráulico horizontal, teoría para un, 691-693
Resistencia
a altos números de Mach, 476-477
coeficiente, 306, 448, 466
cuerpos tridimensionales, 469-471
perfiles, 479-484
cuerpos sumergidos y, 461-463
de barcos, 475-476
de cilindros rotatorios, 521-522
de cuerpos bidimensionales, 468
de fricción, 463-466
de perfiles, 481-484
de presión, 463-466
definición de, 461
fuerza lateral, 462
guiñada, 462
momento de alabeo, 461
momento de cabeceo, 462
por formación de olas, 475
reducción, 471-474, 476-477
sustentación, 462
Resolución de problemas de flujo en conductos, 360-366 (*véase también* Flujo viscoso en conductos)
cálculo del caudal, 361-363
cálculo del diámetro del conducto, 364-366

www.elsolucionario.net

Resolución de problemas de flujo en conductos (*Cont.*)
diagrama de pérdida de carga, 361
flujo isotermo con fricción, 620
flujo laminar completamente desarrollado, 344-347
redes de turberías, 389-390
tuberías en paralelo, 387-388
tuberías en serie, 385-387
Rotación como sólido rígido, 92-98
Rotámetro, 403-404
Rotor de Savonius, VAWT, 767
Rugosidad de transición, flujo turbulento en conductos, 356
Rugosidad relativa, 305, 306
Rugosidad, valores de la, para conductos comerciales, 358

S

Salidas
adimensionalización y, 301-302
superficies de entrada/salida perpendiculares al flujo, 157
trabajo de los esfuerzos viscosos, 167
Salidas sumergidas, 380
Salinidad, 21
Sección variable, flujo isentrópico con (*véase* Flujo isentrópico)
Segunda ley de Newton, 37 (*véase también* Ecuación de la cantidad de movimiento)
Semejanza (*véase también* Modelización)
reglas de, actuaciones de bombas, 741-742
cinemática, 312-313
dinámica, 313-314
geométrica, 311-312
Semejanza, 288, 310 (*véase también* Modelización)
Senda, 37-42
Sensores giratorios, para medir la velocidad, 395
Sensores, presión, 98-102
Sistema de coordenadas inercial, 148
Sistema de referencia no inercial, 158-160
Sistema Internacional de Unidades (SI), 7
Sistemas de tuberías, 384-390
redes de tuberías, 389-390
tres depósitos interconectados, 388-389
tuberías en paralelo, 387-388
tuberías en serie, 385-387
Sistemas infinitesimales (*véase* Análisis diferencial)
Sólidos, 4-5, 167
Soluciones elementales en flujos planos, 508-509
Sonic Cruiser, 670
Stokes, 9
Sumidero, 259
flujo potencial axilsimétrico, 543
fuente más sumidero de igual intensidad, 260-261
más torbellino en el origen, 261
Superficie de una máquina, esfuerzos viscosos sobre, 167
Superficie fija, adimensional, 301-313
Superficie libre, 301-313, 506
Superficies de entrada/salida perpendiculares al flujo, 157
Superficies planas, fuerza hidrostática sobre, 73-79
Superposición: fuente más sumidero de igual intensidad, 260-261
Sustentación, 462
de cilindros rotatorios, 521-522
fuerzas oscilatorias, 462

T

Tacoma Narrows, puente de, 304
Técnicas de resolución de problemas, 45
flujo en conductos (*véase* Resolución de problemas de flujo en conductos)
Temperatura, 16
como dimensón primaria, 7-10
como propiedad termodinámica, 15
crítica, 4
de remanso, 602
escala abosluta de, 16
escala de Celsius de, 16
escala de Farenheit de, 16
viscosidad y, 26-27
Tensión superficial, 28-31
Teorema de Kutta-Joukowsky para la sustentación, 519-521, 532
Teorema del transporte de Reynolds, 129 (*véase también* Análisis de volumen de control)
Teorema Pi de Buckinham, 289, 295-301
Teoría de bombas ideales, desviaciones de la, 736-737
Teoría de la capa de torbellinos para una placa plana, 533-537
Teoría de la línea sustentadora (Prandtl), 541
Teoría de las ondas supersónicas de Prandtl-Meyer, 638 (*véase también* Ondas de expansión de Prandtl-Meyer)
Teoría de ondas de choque y expansiones, 641
Teoría de perfiles, 532-543
alas de alargamiento finito, 539-543
condición de Kutta, 532-533
perfiles delgados, 644-645
perfiles gruesos con curvatura, 537-539
placa plana, teoría de la capa de torbellinos, 533-537
teorema de Kutta-Joukowski, 532
Teoría de perfiles, de Ackeret, 644-645
Teoría de Prandtl de la línea sustentadora, 541
Teoría elemental de bombas, 730-733
Teoría integral para la capa límite laminar, 458-460
Teoría potencial, 507
Teoría potencial con discontinuidades, 530
Términos de flujo unidimensionales, 138-141, 148, 168-170
Tiempo, como dimensión primaria, 7-10
Toberas
capa límite con gradiente de presión en un sistema difusor-tobera, 456-457
convergentes, 606-608
convergentes-divergentes, 608-611
flujo en, 409
medida de caudal, 409
relación de presiones de diseño, tobera adaptada, 608
para medida de caudal, 409
Toma estática, 98-99
Torbellino bidimensional irrotacional, 259-260
Torbellino bidimensional situado en el punto z0, 527
Torbellino de arranque, 479
Torbellino de parada, 479
Torbellino/torbellinos
alas de alargamiento finito y, 539-540
capa de torbellinos, 514-515
corriente uniforme y, 512-513
en el origen, más sumidero, 261
fila infinita de, flujo alrededor de una, 513-514
medidores de caudal, 400, 402
vorticidad, 251-253
Trabajo motor, o de partes móviles, 167, 171-173
Transductor piezoeléctrico, 100
Transferencia de calor, 16 (*véase también* Flujo en conductos sin fricción y con adición de calor)
Transformaciones, variable compleja, 528
Transición, 335
Transporte, 437
Trapecio, ángulo óptimo para canales eficientes, 681
Trasformación conforme, 525-526
Tres depósitos interconectados, 388-389

www.elsolucionario.net

Troposfera, 68
Tubo Bourdon de cuarzo y fuerza equilibrada, 100
Tubo Bourdon, 99-100
Tubo de corriente, 38
Tubo Pitot, 396-397
Tubo venturi, 183
Tubos de choque, 606
Túnel de viento, 133
Turbina de Francis helicocentrífuga, 757
Turbina de Francis radial, 757, 760
Turbina Kaplan, 757, 760
Turbina Pelton, 759-764
Turbinas, 756-769 (*véase también* Turbomaquinaria)
  de hélice, 757, 759, 760
  de impulso, 757, 760
  de reacción, 756-757
  de viento (*véase* Aerogeneradores)
  Francis helicocentrífuga, o de flujo mixto, 757
  Francis radial, 757, 760
  potencia nominal, 763
  potencia normal, 758, 763
  radiales, 757-758
  teoría ideal de turbinas radiales, 757-758
  tipo Francis, 757, 759, 760
  tipo Kaplan, 757, 760
  velocidad específica, 758-759
Turbomáquinas, 162
  bombas (*véase* Bombas)
  compresores, 725
  simulación numérica de, 751
  soplantes, 725
  ventiladores, 725
Turbulencia, 3

U

Unidades (*véase* Dimensiones y unidades)
Unidades consistentes, 9, 10-11
Uniforme, movimiento, 672
  canales abiertos (*véase* Fórmula de Chézy)
  canales eficientes, 680-682
  en un tubo circular parcialmente lleno, 679-680

V

Valores críticos, en el punto sónico, 589
Válvula de ángulo, 377, 378
Válvula de compuerta, 377, 378
Válvula de globo, 377, 378
Válvula de mariposa, 379-380
Válvula de retención o antiretorno, 377, 378
Válvulas, coeficiente de flujo, 11
Válvulas, diseños de, 377-380
Vapor, 19
Variables
  adimensionales, 287
  definición, 291
  dimensionalmente independientes, 291-294
  dimensionales, 290
  homogeneidad dimensional y, 290
  termodinámicas primarias, 22
  y constantes, principio de homogeneidad dimensional, 290-291
Variado, movimiento, 672
Vehículos terrestres, fuerzas aerodinámicas sobre, 471-474
Velocidad axial en flujo completamente desarrollado, 340
Velocidad constante, flujo a, 62
Velocidad de deformación, 252
Velocidad de entrada en pérdida, 483
Velocidad de onda superficial, flujo en canales abiertos, 673-674
Velocidad del sonido, 35-36, 583-586
Velocidad específica de succión, 746
Velocidad específica de turbinas, 12
Velocidad específica, 744, 748-749
Velocidad media volumétrica, 143
Velocidad media, 143
Velocimetría mediante seguimiento láser de partículas (LPTV), 751
Vena contracta, 382
Ventiladores, 725
VentureStar, vehículo de lanzamiento hipersónico, 648
Venturi clásico, 409
Venturi Herschel, 409
Vertedero Crump, 702
Vertederos, 701-708
  aireados, 702
  coeficientes de descarga, 703-704
  Crump, 702
  curvas de remanso aguas arriba, 707-708
  de pared delgada fuertemente aireados, 703
  de pared delgada, 702
  de pared gruesa con borde redondeado, 703
  de pared gruesa, 702-703
  diseños de pared delgada, 705-706
  en V, 705-706
  no aireados, 702
  poligonales, 702
  rectangulares sin contracciones laterales, 705-706
  rectangulares, 704, 705-706
  triangular, 705-706
Viscosidad, 22-27
  absoluta, 9
  cinemática, 9, 23, 25
  coeficiente de, 15, 23
  como obstáculo para el análisis de los flujos, 3
  efecto en las actuaciones de una bomba, 743
  flujo entre placas paralelas, 25-26
  número de Reynolds, 24-25
  turbulenta, 352
  variación con la temperatura, 26-27
Visualización del flujo, 40-42
Voith Siemens, 760, 761
Volumen (*véase también* Análisis de volumen de control)
Volumen de control fijo arbitrario, 135-136
Volumen de control fijo unidimensional, 134-135
Volumen de control móvil/deformable arbitrario, 137-138
Voluta, carcasa de bombas, 728
Vorticidad, ecuaciones diferenciales de los fluidos, 251-253
Vorticidad, flujo irrotacional no viscoso, 255-258

X

X-33, vehículo de lanzamiento hipersónico, 648
X-35, avión de combate supersónico, 649

Z

Zona de acción, 629
Zona de silencio, 629
  flujo volumétrico y flujo másico, 132-133
  no viscosos (*véase* Flujos irrotacionales no viscosos)
  sin fricción, o no viscoso
    incompresible, 179

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

mecánica de fluidos

quinta edición

FRANK M. WHITE

En esta quinta edición de Mecánica de Fluidos se ha añadido y suprimido material con respecto a ediciones anteriores, aunque la filosofía del libro se mantiene intacta así como su estilo informal orientado a los estudiantes. Se siguen discutiendo los tres métodos: integral, diferencial y experimental. Se han añadido nuevos problemas y se han modificado muchos otros, hasta llegar a los 1650 problemas de esta edición.

Novedades de la quinta edición:

- Se introduce y utiliza un método sistemático para resolver problemas a través de los ejemplos de los capítulos.
- El capítulo 1 se ha revisado para orientar a los estudiantes en los conceptos básicos y la metodología.
- Las explicaciones, ejemplos y problemas enfatizan los aspectos de la mecánica de fluidos en la ingeniería.
- 200 nuevos problemas han sido añadidos.

fp_k=NMW=UQJQUNJQMTSJN
fp_k=NPW=VTUJUQJQUNJQMTSJO

The McGraw-Hill Companies

http://www.mcgraw-hill.es